§ 4. APPLICATION DES DÉRIVÉES

1. Calculs de limites par la règle de l'Hospital

La règle ci-dessous est fort utile dans le cas de formes indéterminées du type $\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ ou $\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$.

> Soit a et L deux réels, f et g deux fonctions dérivables dans un intervalle ouvert contenant a telles que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.
>
> Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$
>
> Si $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Remarque

La règle de l'Hospital s'applique également aux calculs de limites du type $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}}$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}}$, $\lim\limits_{x \to +\infty}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}$.

Exemples

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^7 - 1} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^4}{7x^6} = \dfrac{5}{7}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2(x) - 1}{x^2 + \sin^2(x)} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2\cos(x)\sin(x)}{2x + 2\sin(x)\cos(x)} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2(x) - 2\cos^2(x)}{2 + 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)} = -\dfrac{1}{2}$

2. Croissance et concavité

Le signe de la dérivée d'une fonction renseigne sur sa croissance et sa décroissance.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors

a) f croissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

b) f décroissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Maximum et minimum: test de la dérivée première

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant un nombre a tel que $f'(a) = 0$.

1) Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle $]g\,;a[$ et si $f'(x) < 0$ sur un intervalle $]a\,;d[$, alors f admet un maximum en a .

2) Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle $]g\,;a[$ et si $f'(x) > 0$ sur un intervalle $]a\,;d[$, alors f admet un minimum en a .

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

La fonction f est **convexe** (resp. **concave**) sur I si, pour tout $a \in I$, le graphe de f est au-dessus (resp. au-dessous) de la tangente en $M(a\,;f(a))$.

Formellement

La fonction f est **convexe** sur I si,

pour tout $x \in I$ et $a \in I$, on a $f(x) \geq f(a) + (x-a) \cdot f'(a)$

La fonction f est **concave** sur I si,

pour tout $x \in I$ et $a \in I$, on a $f(x) \leq f(a) + (x-a) \cdot f'(a)$

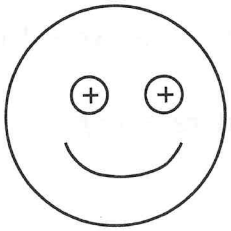
Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I. Alors

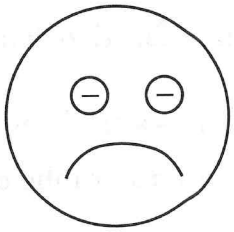
a) f convexe sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$.

b) f concave sur $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$, pour tout $x \in I$.

Le visage de la dérivée seconde renseigne sur la courbure



convexe



concave

Maximum et minimum: test de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois continûment dérivable (f'' continue) sur un intervalle ouvert I contenant un nombre a tel que $f'(a) = 0$.

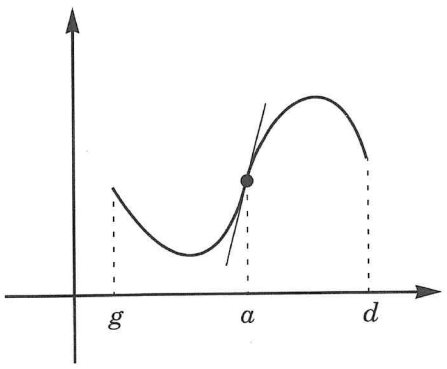
1) Si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum en a .

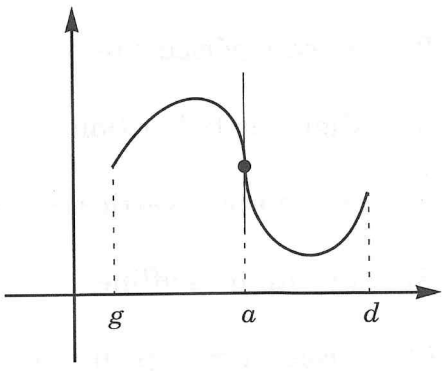
2) Si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum en a .

Définition

Soit f une fonction dont le graphe admet une tangente en a .

> Le graphe de f admet un **point d'inflexion** en a s'il existe g et d tels que
> f est convexe sur $]g\,;a[$ et concave sur $]a\,;d[$ ou
> f est concave sur $]g\,;a[$ et convexe sur $]a\,;d[$.





Remarque

Le graphe de f admet un point d'inflexion en a si la tangente au graphe de f en a «traverse» le graphe en a .

Point d'inflexion: test de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a.

Si $f''(x)$ s'annule et change de signe en a, alors $(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion du graphe de f.

3. Etude d'une fonction

Définition

> Un point c de l'ensemble de définition d'une fonction f est un **point critique** si $f'(c) = 0$ ou si $f'(c)$ n'existe pas.

Cette notion est très utile pour déterminer les extremums d'une fonction car si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$, les abscisses des extremums de f sont à chercher parmi les points critiques et les extrémités de l'intervalle.

3.1 Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, on traite habituellement les points suivants

1) Ensemble de définition de la fonction
2) Parité, périodicité
3) Signe de la fonction
4) Asymptotes verticales, «trous»
5) Asymptotes affines
6) Croissance et points critiques
7) Concavité
8) Représentation graphique

On s'assurera de la cohérence des résultats obtenus

3.2 Exemples

a) Etudier la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

1) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3) Le signe de f est donné par le tableau suivant

x		0		1	
x^3	−	0	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+
$f(x)$	−	0	+		+

4) Comme $\lim\limits_{x \to 1} |f(x)| = +\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale de f. Le signe de f permet de préciser $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$.

5) Comme $f(x) = x + 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique de f vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

La position relative du graphe et de l'asymptote oblique est donnée par le signe de $\delta(x) = \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$

x		$\frac{2}{3}$		1	
$\delta(x)$	−	0	+		+
Position du graphe relativement à l'asymptote	dessous	coupe	dessus		dessus

6) $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ s'annule en 0 et 3.

Les points du graphe dont les abscisses sont des points critiques de f sont donc $(0\,;0)$ et $\left(3\,;\dfrac{27}{4}\right)$.

La croissance de f est donnée par le tableau suivant

x		0		1		3	
$f'(x)$	+	0	+		−	0	+
$f(x)$	↗	0	↗		↘	$\frac{27}{4}$	↗

«palier» minimum

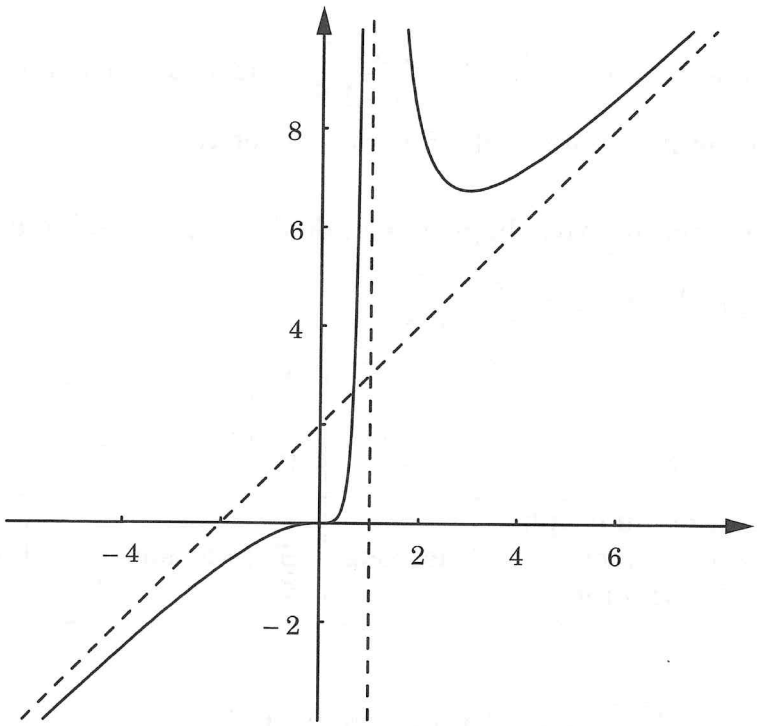
7) $f''(x) = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$ s'annule en 0 .

La concavité est donnée par le tableau suivant

x		0		1	
$f''(x)$	−	0	+		+
$f(x)$	∩	0	∪		∪

inflexion

8)



b) Etudier la fonction $f\colon x \mapsto x+1+\sqrt{x^2+4x}$

1) L'ensemble de définition de f est $]-\infty\,;-4\,]\cup[\,0\,;+\infty\,[$.

3) Le signe de f est donné par le tableau suivant

x		-4		0	
$f(x)$	$-$	-3		1	$+$

5) Comme $\sqrt{x^2+4x}$ a pour asymptotes $y = |x+2|$ (page 45), la droite d'équation $y = x+1+(x+2)$, c'est-à-dire $y = 2x+3$ est asymptote oblique de f vers $+\infty$ et la droite d'équation $y = x+1-(x+2)$, c'est-à-dire $y = -1$ est asymptote horizontale de f vers $-\infty$.

6) $f'(x) = 1+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$ ne s'annule pas sur $]-\infty\,;-4\,[\cup]\,0\,;+\infty\,[$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x) = +\infty$ (tangente verticale)

$\lim\limits_{\substack{x\to -4\\ <}} f'(x) = -\infty$ (tangente verticale)

La croissance de f est donnée par le tableau suivant

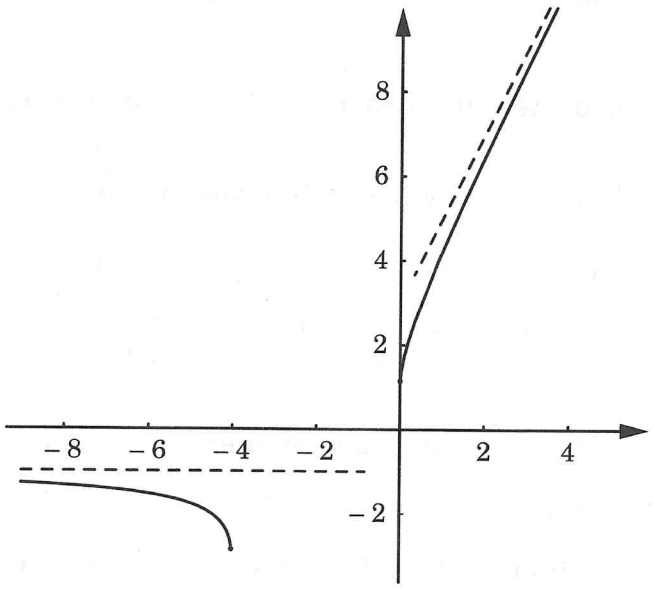
x		-4		0	
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$	↘	-3		1	↗

7) $f''(x) = \dfrac{-4}{(\sqrt{x^2+4x})^3}$.

La concavité est donnée par le tableau suivant

x		-4		0	
$f''(x)$	$-$				$-$
$f(x)$	∩	-3		1	∩

8)



c) Etudier la fonction $f\colon x \mapsto 2\sin(x) + \dfrac{1}{2\sin(x)}$

1) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

2) f est impaire et périodique de période 2π.
Il suffit donc de l'étudier sur $]\,0\,;\pi\,[$.

3) Comme $f(x) = \dfrac{4\sin^2(x)+1}{2\sin(x)}$, le signe de f est donné par le tableau suivant

x	0		π
$f(x)$		+	

4) Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = \pi$ est une asymptote verticale.

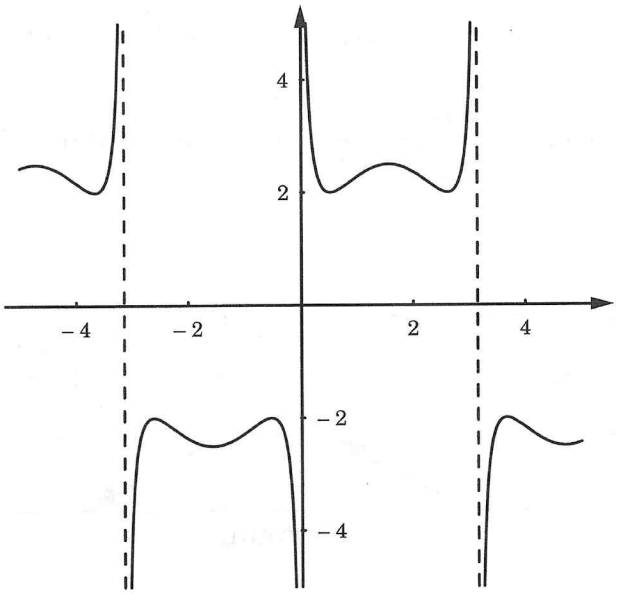
6) $f'(x) = 2\cos(x) - \dfrac{\cos(x)}{2\sin^2(x)} = \dfrac{\cos(x)\cdot(4\sin^2(x)-1)}{2\sin^2(x)}$ s'annule

en $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. La croissance de f est donnée par le tableau suivant

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	2	↗	$\frac{5}{2}$	↘	2	↗	
			minimum		maximum		minimum		

7) On renonce ici à l'étude de la concavité.

8)



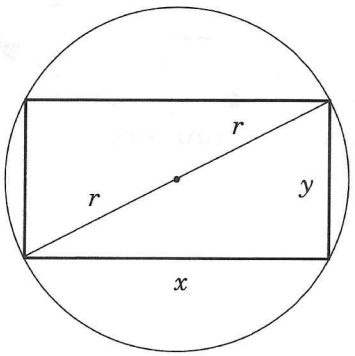
4. Optimisation

Beaucoup de problèmes pratiques conduisent à la détermination des valeurs maximales ou minimales prises par une quantité variable. Ces valeurs, qui sont les plus favorables dans un contexte donné, sont parfois appelées valeurs optimales. Déterminer ces valeurs constitue un **problème d'optimisation**.

La résolution d'un problème d'optimisation passe par une lecture attentive de la donnée souvent accompagnée d'un dessin, une définition de toutes les variables nécessaires et la recherche des extremums d'une fonction.

4.1 Exemples

a) Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale qui puisse être inscrit dans un cercle de rayon r ?



Désignons par x et y les côtés du rectangle et par A son aire. Il faut rendre $A = x \cdot y$ maximum.

Les variables x et y étant liées par la relation de Pythagore $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$, on doit rendre maximum

$$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} \quad \text{pour } x \in [\,0\,;\,2r\,]$$

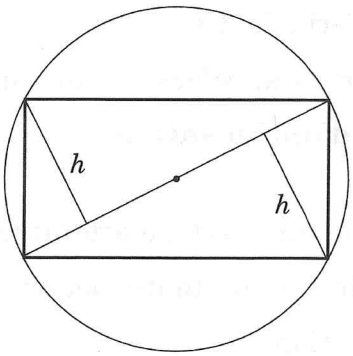
La dérivée $A'(x) = \dfrac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$ ne s'annule dans $[\,0\,;\,2r\,]$ que pour $x = r\sqrt{2}$.

x		0		$r\sqrt{2}$		$2r$	
$A'(x)$			+	0	−		
$A(x)$			↗		↘		

maximum

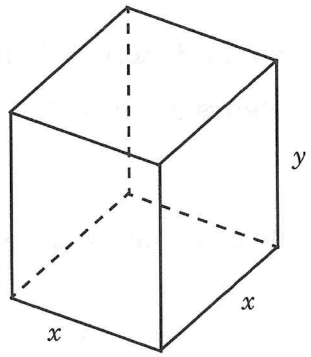
Les dimensions du rectangle d'aire maximum sont donc $x = r\sqrt{2}$ et $y = r\sqrt{2}$. Le rectangle cherché est un carré de côté $r\sqrt{2}$.

Remarque



Un autre choix de variable permet de résoudre plus simplement ce problème avec un argument géométrique.
On divise le rectangle en deux triangles dont l'aire est maximum lorsque leur hauteur h est maximum, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré

b) Quelles doivent être les dimensions d'une boîte de base carrée sans couvercle de contenance un litre pour que sa construction demande un minimum de matériau ?



Désignons par x le côté du carré de base et par y la hauteur de la boîte mesurés en dm. L'aire latérale, proportionnelle à la quantité de matériau nécessaire à la construction de la boîte est $S = x^2 + 4xy$.

Les variables x et y sont liées par le fait que le volume de la boîte vaut $1\ \text{dm}^3$: $x^2 y = 1$.

On doit donc chercher le minimum de $S(x) = x^2 + \frac{4}{x}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

La dérivée $S'(x) = 2x - \frac{4}{x^2}$ s'annule pour $x = \sqrt[3]{2}$.

x		0		$\sqrt[3]{2}$	
$S'(x)$			$-$	0	$+$
$S(x)$			↘		↗

minimum

Les dimensions de la boîte de surface minimale sont donc

$x = \sqrt[3]{2}$ dm et $y = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ dm.

Remarque

La boîte optimale a donc une hauteur égale au rayon du cercle inscrit dans la base. Ce résultat est vrai même si la base n'est pas carrée.

4.2 Plan de résolution

Nous donnons ci-dessous une stratégie d'approche de ces problèmes sous forme de marche à suivre.

1) Exprimer la quantité variable Q à rendre maximale ou minimale comme fonction d'une ou de plusieurs variables.

2) Si Q dépend de plus d'une variable, disons de n variables, trouver au moins $(n-1)$ équations liant ces variables.

3) Utiliser ces équations pour exprimer Q comme fonction d'une seule variable et déterminer l'ensemble D des valeurs admissibles de cette variable.

4) Calculer les extremums de Q sans oublier de contrôler ce qui se passe aux «bords» de D.

EXERCICES

Calculs de limites par la règle de l'Hospital

4.1 Calculer, si elles existent, les limites ci-dessous

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(3x) - 1}{x^2}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin(x)}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x) - x}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} \right)$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 1 + \cos(2x)}{x^4}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{\tan^2(2x)}$

8) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x - 1}$

4.2 La règle de l'Hospital ne s'applique pas au calcul des limites suivantes, bien que celles-ci existent. Expliquer pourquoi et calculer ces limites par une autre méthode.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sin(x)}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ où $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$

4.3 La condition $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ contient des hypothèses implicites: par exemple, g' doit être non nulle dans un intervalle ouvert contenant a. Cette hypothèse est indispensable: le théorème peut s'avérer faux si elle n'est pas satisfaite.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos(x)) \cdot \sin\left(\dfrac{2}{x}\right)}{x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

4.4 Selon le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a\,;x[$ tel que $f(x) = f(a) + f'(c_x) \cdot (x - a)$. Montrer que si de plus $f''(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{c_x - a}{x - a} = \dfrac{1}{2}$.

Indication: Calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)}{(x - a)^2}$ de deux manières différentes (en particulier par la règle de l'Hospital).

4.5 Théorème de Cauchy ou théorème de la moyenne généralisé.
Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ et dérivables sur $]a\,;b[$, montrer qu'il existe un point $c \in]a\,;b[$ tel que

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(c) = (g(b)-g(a))\cdot f'(c)$$

Croissance et concavité

4.6 Etudier la croissance des fonctions données par

1) $f(x) = x^2+6x+2$
2) $f(x) = x^3+3x$
3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x + 1$
4) $f(x) = 2x^4-9x^2$
5) $f(x) = \frac{2x+5}{2x-3}$
6) $f(x) = (x-1)^5\cdot(2x+1)^4$
7) $f(x) = x^5-5x^4+5x^3+1$
8) $f(x) = x^3+\frac{3}{x}$
9) $f(x) = x^2\cdot\sqrt{24-x^2}$
10) $f(x) = \sin^3(x)$
11) $f(x) = \sin(x)\cdot(1+\cos(x))$
12) $f(x) = 3+|x-3|$

4.7 Trouver une fonction qui s'annule en $x = 0$, qui est décroissante pour $x < 2$ et croissante sinon.

4.8 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

1) Définir f en $x = 1$ pour qu'elle devienne continue en ce point. Peut-on faire de même en $x = -1$?

2) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

3) Montrer que pour $a < -1$, on a $\frac{a^3-1}{a^2-1} \leq -3$ et que pour $a > -1$, on a $\frac{a^3-1}{a^2-1} \geq 1$.

4.9 Montrer que si f et g sont deux fonctions croissantes sur un intervalle I, il en est de même pour la fonction $f+g$.

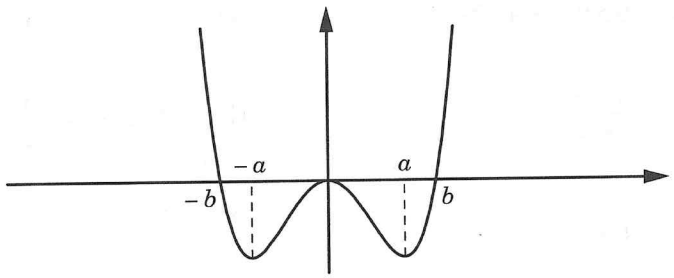
4.10 Montrer que si f et g sont deux fonctions croissantes et positives sur un intervalle I, il en est de même pour la fonction $f \cdot g$.

4.11 Soit g et h deux fonctions positives. Quelles sont les inégalités que doivent vérifier $\frac{g'}{g}$ et $\frac{h'}{h}$ pour que

1) $g \cdot h$ soit croissante ?

2) $\frac{g}{h}$ soit décroissante ?

4.12 Quelle est la relation que doivent vérifier a et b pour qu'il existe une fonction polynomiale de degré 4 ayant pour graphe la figure ci-dessous



4.13 En quels points les fonctions suivantes admettent-elles des extremums ?

1) $f(x) = x^2 \cdot (a-x)^2$, $a \neq 0$

2) $f(x) = \sin(x) \cdot \sin(a-x)$, $a \neq 0$

3) $f(x) = \dfrac{x}{a\,x^2 - b\,x + c}$ $\quad a > 0$, $c > 0$

4) $f(x) = \sqrt{2a\,x^2 \cdot (2a - x)}$ $\quad a > 0$

5) $f(x) = \sqrt{1 + \left(\dfrac{a\,x}{1 + b x^2}\right)^2}$ $\quad b > 0$

6) $f(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{a^2} + \dfrac{\sin^2(x)}{b^2}$ $\quad a^2 > b^2$

4.14 Déterminer la valeur du nombre a pour que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+a}$ admette un minimum égal à 8.

4.15 La fonction f, deux fois dérivable, vérifie $f(1) = 1$. Quelles autres hypothèses peut-on faire sur f pour que g, définie par $g(x) = x \cdot f(x)$, admette un maximum en 1 ?

4.16 Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des minimums de la famille de fonctions $f_m(x) = x^3 - 12m^2x + 12m$, $m > 0$.

4.17 Utiliser le test de la dérivée seconde pour analyser les extremums des fonctions suivantes

1) $f(x) = 3x^2 + 2$

2) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3$

3) $f(x) = 6x^5 - x + 20$

4) $f(x) = x^4 - x^2$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

6) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

7) $g(t) = \dfrac{t}{1 + t^2}$

8) $h(s) = s + \dfrac{1}{s}$

4.18 Déterminer les intervalles de convexité et de concavité des fonctions suivantes

1) $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$

2) $f(x) = x^3 + 3x + 8$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

6) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 8x + 1$

4.19 Déterminer, si elles existent, les abscisses des points d'inflexion des fonctions suivantes

1) $f(x) = x^3$

2) $f(x) = x^3 - x$

3) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

4) $f(x) = (x - 1)^4$

5) $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

6) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

7) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ 8) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x}$

9) $f(x) = \cos^2(x)$ 10) $f(x) = \dfrac{6x}{1+x^2}$

4.20 Trouver une fonction qui admet des points d'inflexion en 1 et en 2.

4.21 Trouver une fonction qui admet un maximum en 1, un minimum en 3 et un point d'inflexion en 2.

4.22 Trouver une fonction définie sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ qui n'a pas de valeur maximale sur cet intervalle.

4.23 Soit une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0. Déterminer, à l'aide de f'', le signe de l'erreur due à l'approximation de $f(x_0+h)$ par $f(x_0+h) \cong f(x_0)+h\cdot f'(x_0)$.

4.24 Montrer que si $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$, alors $f(x_0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum de la fonction f.

4.25 Une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ peut-elle avoir

1) trois maximums ou minimums et deux points d'inflexion ?

2) deux maximums ou minimums et trois points d'inflexion ?

3) quatre maximums ou minimums et aucun point d'inflexion ?

4) deux maximums et aucun minimum ?

Si oui, esquisser le graphe, sinon expliquer pourquoi.

4.26 Démontrer qu'en un point d'inflexion la tangente au graphe d'une fonction «traverse» la courbe.

Indication: montrer que si x_0 est l'abscisse d'un point d'inflexion, l'expression $h(x) = f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)]$ change de signe en x_0.

4.27 Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de la forme $[\,a\,;+\infty\,[$ ou $]-\infty\,;a\,]$ et admettant une asymptote affine.

Montrer que si $f'' \geq 0$ sur I, alors le graphe de f est situé au-dessus de l'asymptote affine.

4.28 La population P de souris dans un bois varie en fonction du nombre x de hiboux qui s'y trouvent. Pour x compris entre 0 et 12, on admet que $P(x) = 30 + 12x^2 - x^3$.

1) Esquisser le graphe de la population P.

2) Pour quel nombre de hiboux la population des souris croît-elle le plus vite ?

4.29 La population P des cerfs en Valais fut la même en trois moments différents t_1, t_2 et t_3. Supposons que sur les intervalles $[\, t_1 \,;\, t_2 \,]$ et $[\, t_2 \,;\, t_3 \,]$ la population P soit une fonction dérivable par rapport au temps et non constante. Etablir l'existence d'au moins deux intervalles de temps, l'un contenu dans $[\, t_1 \,;\, t_2 \,]$ et l'autre dans $[\, t_2 \,;\, t_3 \,]$, pour lesquels la population des cerfs fut décroissante.

4.30 Si $f(t)$ représente le coût de la vie au temps t, alors $f'(t) > 0$ signifie qu'il y a inflation.

1) Que signifie $f''(t) > 0$?

2) Un membre du gouvernement dit: "L'inflation augmente, mais de moins en moins vite". Interpréter ce jugement en termes de $f'(t)$, $f''(t)$ et $f'''(t)$.

4.31 Supposons que le taux d'inflation en Suisse (en pour-cent par année) de 1990 à 2000 est donné par $I(t) = 10\left(\frac{t^3}{100} - \frac{t^2}{20} - \frac{t}{4} + 1\right)$ où t est le nombre d'années écoulées à partir du 1er janvier 1993.

Quelles sont les périodes qui correspondent à une augmentation du taux d'inflation ?

4.32 Calculer le plus grand écart vertical entre les graphes des fonctions f et g.

1) $f(x) = \frac{x^3}{8}$; $g(x) = \sqrt{x}$; $0 \le x \le 4$

2) $f(x) = \sin(x)$; $g(x) = \cos(x)$; $0 \le x \le 2\pi$

4.33 Trouver sur le graphe de la fonction f les points les plus proches de l'origine.

1) $f(x) = \frac{4}{x}$ 2) $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$

4.34 On injecte dans une veine d'un patient une substance qui produit une heure plus tard une élévation de température H. Si x milligrammes sont injectés, alors la hausse de température H est donnée par $H(x) = \frac{x^2}{8} \cdot \left(1 - \frac{x}{16}\right)$.

1) Esquisser le graphe de la fonction H.

2) Le taux de variation de H, selon le dosage x, est appelé la sensibilité du corps au dosage. Trouver le dosage pour lequel la sensibilité est maximale.

Etude d'une fonction

4.35 Prouver que le seul point critique de la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt[3]{x}$ est $x = 0$ et que f n'a pas d'extremum en 0.

4.36 Prouver que le seul point critique de la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ est $x = 0$, que f a un minimum en 0, et que f n'admet pas de tangente à l'origine.

4.37 Prouver qu'une fonction polynomiale f de degré 3 admet au plus 2 points critiques et esquisser le graphe de f selon le nombre de ses points critiques.

4.38 Etudier et représenter graphiquement les fonctions f définies ci-dessous

1) $f(x) = -x^2 + x + 2$ 2) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

3) $f(x) = x^2 - 2|x|$ 4) $f(x) = |4 - x^2|$

5) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 3$

6) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - \frac{11}{3}$

7) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot |x-2|$

8) $f(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 2$

9) $f(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{3x^3}{4} - \frac{3x^2}{2}$

10) $f(x) = \frac{2x^2}{9-x^2}$

11) $f(x) = \frac{-3x+4}{2x+3}$

12) $f(x) = \frac{x^3+2}{2x}$

13) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

14) $f(x) = \frac{x \cdot (x-3)^2}{(x-2)^2}$

15) $f(x) = \frac{x^2+7}{x+1}$

16) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-2}$

17) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

18) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}$

19) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

20) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

21) $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x}$

22) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x}$

23) $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$

24) $f(x) = \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)}$

25) $f(x) = 4\cos^2(x) - 8\cos(x) + 3$

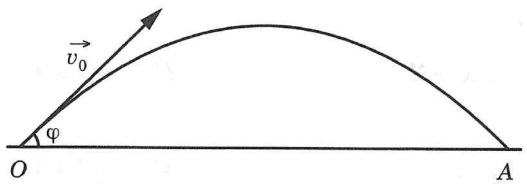
26) $f(x) = x - \sin(x)$

27) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

28) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

Optimisation

4.39 La portée $P = OA$ d'un projectile lancé (dans le vide) avec une vitesse initiale v_0 et un angle d'élévation φ est donnée par $P = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\varphi)}{g}$, g étant l'accélération de la pesanteur. Pour une vitesse initiale donnée, déterminer la valeur de l'angle φ pour laquelle la portée est maximale.



4.40 Parmi tous les triangles rectangles d'hypoténuse donnée h, quel est celui dont le périmètre est le plus grand ? Quel est ce périmètre maximal ?

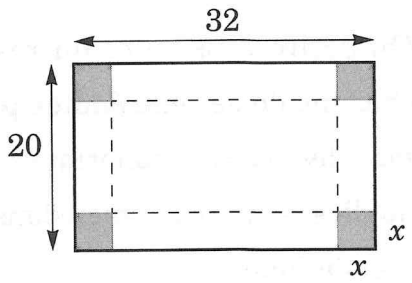
4.41 Parmi tous les rectangles de périmètre donné $2p$, quel est celui dont l'aire est maximale ? Quelle est la valeur de cette aire ?

4.42 Parmi toutes les boîtes cylindriques d'aire totale donnée, caractériser celle dont le volume est maximal.

4.43 Un fil de longueur L doit être coupé en deux parties. Avec l'une on forme un triangle équilatéral et avec l'autre un carré. Où faut-il couper ce fil pour que l'aire totale des deux figures construites soit maximale ? minimale ?

4.44 Déterminer les dimensions d'une boîte cylindrique sans couvercle, de volume donné, pour que sa construction demande le moins de matériau possible (on négligera l'épaisseur des parois et les déchets de construction). Même question pour une boîte avec couvercle.

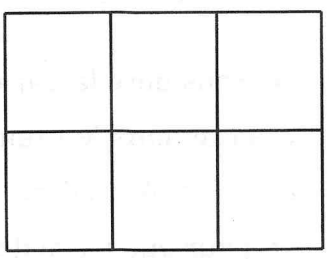
4.45 On construit une boîte rectangulaire en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm. Déterminer la hauteur x de la boîte de volume maximal.



4.46 On construit un conteneur de forme cylindrique sans couvercle de volume $648\,\pi$ cm^3. Le matériau utilisé pour le fond coûte 15 centimes par cm^2 et celui utilisé pour la paroi latérale 5 centimes par cm^2.

Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles sont les dimensions du conteneur le plus économique ?

4.47 On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos identiques pour un zoo selon le plan ci-contre.



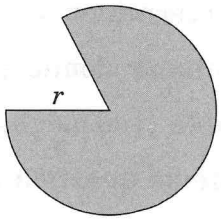
Quelles dimensions donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?

4.48 Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Si le périmètre de la fenêtre est de 6 m , quelles seront les dimensions de la fenêtre laissant passer un maximum de lumière ?

4.49 Un mur de 2 m de haut, situé à 1 m d'une façade, interdit l'accès à celle-ci. Calculer la longueur de l'échelle la plus courte qui s'appuie contre la façade et dont le pied est sur le sol, devant le mur.

4.50 Une feuille rectangulaire doit contenir 392 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent être de 2 cm chacune; les marges latérales de 1 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille nécessitant le moins de papier.

4.51 On fabrique un cornet de forme conique en rejoignant les bords rectilignes d'un secteur circulaire de rayon r . Quel est le volume du plus grand cornet possible ?



4.52 On désire construire un réservoir dont la forme est un cylindre fermé en chacune de ses extrémités par une demi-sphère. Si le coût par unité de surface des parties sphériques est le double de celui de la partie cylindrique, quelles sont les dimensions du réservoir de volume $4\,\pi$ m^3 le plus économique ?

4.53 On fait tourner un rectangle de périmètre $2p$ autour de l'un de ses axes de symétrie. Déterminer les dimensions du rectangle pour que le corps ainsi obtenu ait

1) le plus grand volume;
2) la plus grande aire latérale;
3) la plus grande aire totale.

4.54 On considère la parabole γ d'équation $y = 1 - x^2$ ainsi qu'un point M de γ situé dans le premier quadrant. La tangente à γ en M coupe l'axe Ox au point A et l'axe Oy au point B . Déterminer les coordonnées du point M pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.

4.55 La résistance d'une poutre de section rectangulaire est proportionnelle au produit de la largeur par le carré de la hauteur de sa section transversale. Quelle est la forme de la poutre la plus résistante que l'on peut tailler dans un tronc d'arbre de section circulaire ?

4.56 Deux usines situées à 10 km l'une de l'autre émettent des fumées polluantes. On suppose que la pollution provoquée par chaque usine en un endroit est proportionnelle à la quantité de fumée, et inversement proportionnelle au cube de la distance à l'usine. Si la première usine rejette trois fois plus de fumée que la seconde, quel est l'endroit le moins pollué situé entre les deux usines ?

4.57 Sur l'axe Ox on fixe une première source de lumière en $x = 0$ et une deuxième en $x = 10$. On note I_1 et I_2 les intensités lumineuses des deux sources, L_1 et L_2 les intensités des flux lumineux en un point provenant respectivement de la première source et de la deuxième source.

Sachant que $I_2 = 4I_1$ et que l'intensité du flux lumineux en un point est proportionnelle à l'intensité lumineuse de la source considérée et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant ce point de la source, déterminer le point de l'intervalle $[\,0\,;\,10\,]$ qui reçoit un flux total minimal des deux sources. Calculer le rapport des distances séparant ce point aux deux sources.

4.58 On désire fabriquer une tente en forme de pyramide régulière de base carrée. On dispose de S m^2 de toile pour fabriquer les quatre faces. On désigne par V le volume de la tente, par x le côté du carré de la base et par h la hauteur de la tente. Montrer que V est maximum lorsque $\frac{x}{h} = \sqrt{2}$.

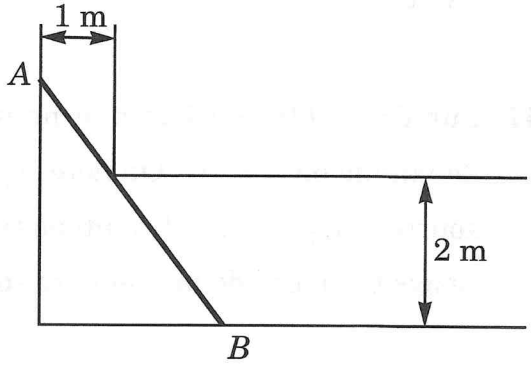
4.59 Un navire doit parcourir 40 km contre un courant de 10 km/h. Il consomme par heure une quantité de carburant proportionnelle au carré de sa vitesse. En supposant qu'il navigue à vitesse constante, quelle doit être sa vitesse pour minimiser la quantité de carburant consommée ?

4.60 A 10 kilomètres de votre maison, vous vous rappelez avoir oublié de fermer un robinet, ce qui vous coûte 40 centimes par heure. En roulant à une vitesse constante de s kilomètres par heure, le coût du carburant est de $8 + \frac{s}{20}$ centimes par kilomètre. A quelle vitesse devez-vous faire l'aller et retour pour minimiser les frais totaux ?

4.61 On colle les côtés $[AB]$ et $[DC]$ d'un rectangle $ABCD$ de périmètre donné pour former un cylindre ouvert. Quelle doit être la mesure de l'angle entre le côté $[AB]$ et la diagonale $[AC]$ pour que le volume du cylindre soit maximal ?

4.62 Deux couloirs de largeurs 1 m et 2 m se rencontrent à angle droit. On transporte une barre rigide AB parallèlement au sol.

Quelle est la longueur maximale que peut avoir cette barre si l'on veut pouvoir la transporter d'un couloir dans l'autre ?



4.63 Des mesures répétées d'une grandeur inconnue x ont donné les résultats suivants: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Montrer que la somme des carrés des écarts $(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2+\ldots+(x-x_n)^2$ sera minimale si l'on estime x

par la moyenne des mesures $\dfrac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$.

Exercices récapitulatifs

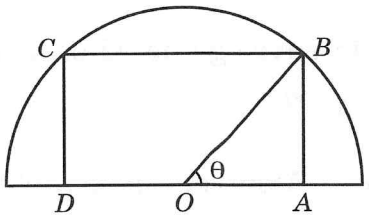
4.64 Etudier sur $[\,0\,;\pi\,]$ et sans dérivée seconde la fonction de vibration donnée par $v(t) = \sin(t) + \dfrac{\sin(2t)}{2} + \dfrac{\sin(3t)}{3}$.

Indication: pour le signe de la dérivée, utiliser la formule $\cos(p)+\cos(q) = 2\cdot\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

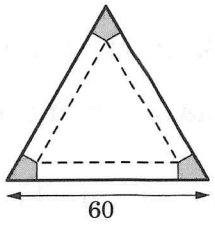
4.65 Deux objets s'attirent mutuellement avec une force qui est proportionnelle au produit de leurs masses. Sachant que la somme de leurs masses est égale

à M, calculer la masse de chaque objet pour que la force d'attraction soit maximale.

4.66 Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle de diamètre égal à 2. Déterminer le rectangle d'aire maximale en prenant l'angle θ comme variable.



4.67 Déterminer le volume maximal de la boîte triangulaire obtenue à partir d'un triangle équilatéral de 60 cm de côté selon le schéma ci-contre.



4.68 Un camion doit faire un trajet de 150 km. En roulant à une vitesse constante v, sa consommation est de $6 + \frac{v^2}{300}$ litres par heure. Le prix du carburant est de $1,20$ francs par litre et on paie le chauffeur 25 francs par heure. Quelle doit être la vitesse du camion pour que le prix de revient de la course soit minimal ? Quel est alors ce prix de revient ?

4.69 A midi, le bateau B est situé à 45 milles au nord du bateau C. Le bateau B se dirige vers le sud à la vitesse de 9 nœuds et le bateau C se dirige vers l'ouest à la vitesse de 12 nœuds. A quelle heure les bateaux seront-ils à une distance minimale l'un de l'autre ? (Rappel: un nœud = un mille par heure)

4.70 Une maison a une base carrée et son volume habitable est un parallélépipède de 768 m^3. La perte de chaleur par unité de surface est trois fois plus élevée pour le plafond que pour les murs. On suppose qu'il n'y a pas de perte de chaleur par le plancher. Quelles doivent être les dimensions de la maison pour que la perte de chaleur soit minimale ? Est-ce raisonnable ?

4.71 On peut lire dans l'ouvrage de M. Lucien Chambadal "Calcul pratique", au paragraphe consacré au cylindre de révolution, l'information suivante :

«Les rouleaux cylindriques acceptés par les PTT sont tels que $17 \leq 2x + y \leq 104$, où x désigne le diamètre et y la longueur (unité: le cm)»

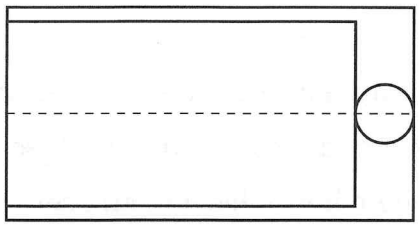
On envisage de déterminer le volume maximal des cylindres acceptés par les PTT.

1) Montrer que le problème revient à déterminer le maximum de $\frac{\pi}{4} x^2 y$ sur le domaine D défini par: $\begin{cases} 17 \leq 2x + y \leq 104 \\ x > 0 \ , \quad y > 0 \end{cases}$.

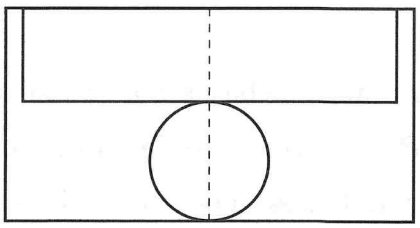
2) Si x et y vérifient l'équation $y = mx$, $(m > 0)$, montrer que le maximum du volume est égal à $\frac{\pi}{4} m \left(\frac{104}{m+2}\right)^3$.

Etudier ensuite la croissance de la fonction $m \mapsto \frac{\pi}{4} m \left(\frac{104}{m+2}\right)^3$ sur $]0 ; +\infty[$. En déduire que le cylindre de volume maximal est celui dont la longueur est égale au diamètre.

4.72 Dans un rectangle de dimensions a et $3a$, on découpe le patron d'un cylindre (paroi latérale et base circulaire) comme l'indique la figure ci-dessous



Possibilité 1



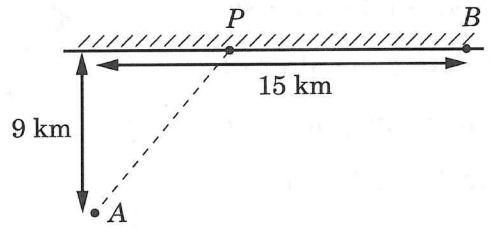
Possibilité 2

Comment procéder pour obtenir le cylindre de volume maximal ?

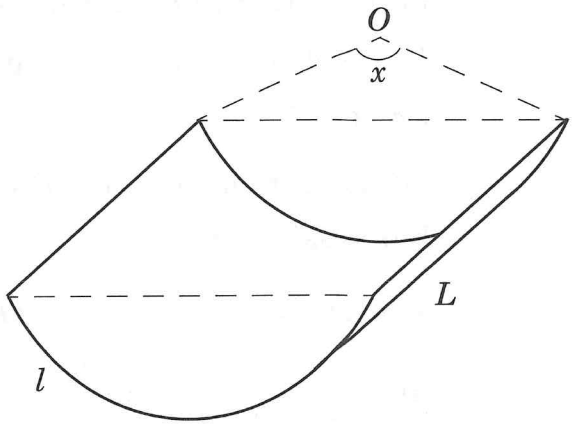
4.73 Des voitures traversent un tunnel de 3'500 m de long à une vitesse v km/h. On suppose que chaque voiture mesure 4 m de long et respecte avec le véhicule précédent une distance minimale en mètres $d = 0,004\, v^2$. Quelle est la vitesse v permettant le débit maximum ?

4.74 Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h.

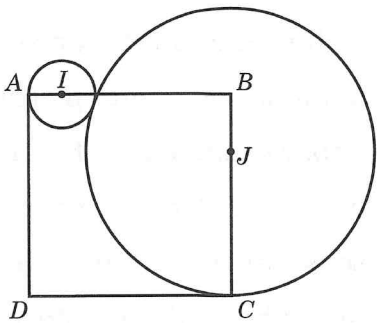
Où doit-il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



4.75 Une bande de métal rectangulaire a pour largeur l et pour longueur L. On la courbe en arc de cercle centré en O de façon à obtenir un élément de gouttière. Pour quelle mesure x de l'angle en O l'élément de gouttière a-t-il une capacité maximale ?



4.76 On donne un carré $ABCD$ de côté égal à 1. On construit deux cercles tangents, l'un centré sur un côté, l'autre sur le côté adjacent, comme le montre la figure. Déterminer la distance $x = \delta(A\,;I)$ pour que l'aire totale des deux disques soit minimale.

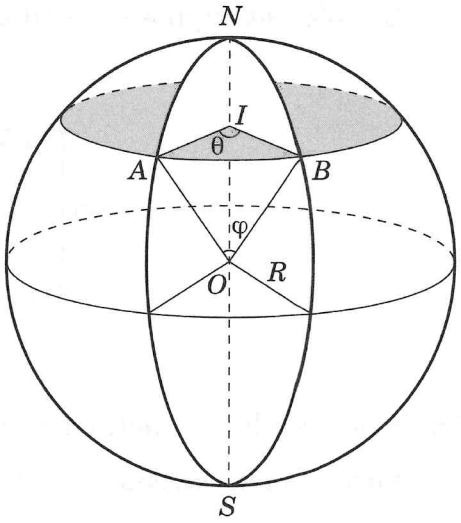


Indication: la dérivée de l'aire totale est divisible par $x^2 + 2x - 1$.

4.77 1) On considère les fonctions $f\colon x \mapsto \sin(ax)$ et $g\colon x \mapsto a \cdot \sin(x)$ sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ avec la condition $0 < a < 1$.

Montrer que $f(x) > g(x)$ pour tout x tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

2) On considère deux points A et B de la surface terrestre situés sur un même parallèle. Envisageons deux trajets pour aller de A à B : l'un de longueur L suivant le parallèle, l'autre de longueur l suivant le "grand cercle" passant par A et B, c'est-à-dire le cercle découpé sur la sphère par le plan $(A\,;O\,;B)$.



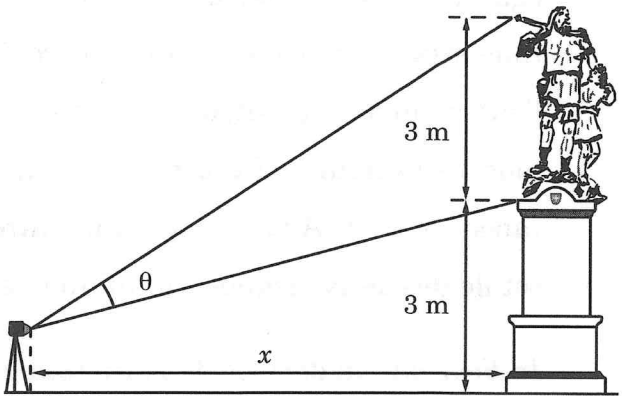
Démontrer que $L > l$ à l'aide de 1) et des relations suivantes à établir préalablement

a) $AB = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

b) $\frac{r}{R} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

c) $L > l \Leftrightarrow \frac{r\theta}{2R} > \frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{r\theta}{2R}\right) > \frac{r}{R} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

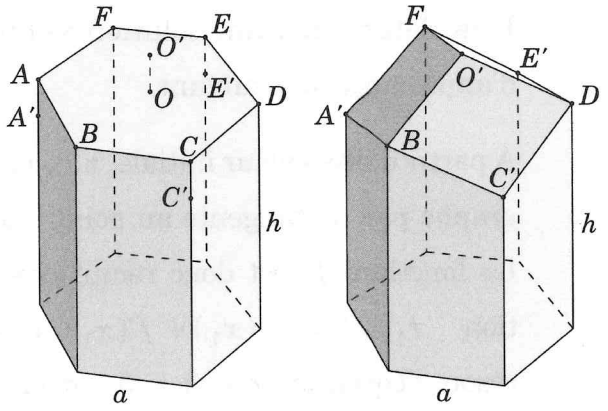
4.78 Déterminer la distance x à laquelle on doit placer un appareil photographique, fixé à 1,5 m du sol, pour avoir sous un angle θ maximal une photo de la statue de Guillaume Tell, haute de 3 m et placée sur un piédestal haut de 3 m.



Indication: observer que θ est maximal lorsque $\tan(\theta)$ est maximal, puis exprimer $\tan(\theta)$ en fonction de x.

4.79 On considère un prisme droit de hauteur h, à base hexagonale régulière de côté $a < h$.

On remplace ce prisme par un objet de même volume en créant les faces $A'BO'F$, $C'DO'B$ et $E'FO'D$ en forme de losange, où les points A', C' et E' sont à une distance $x < h$ au-dessous de A, C et E respectivement, et le point O' est à une distance $x < h$ au-dessus de O.

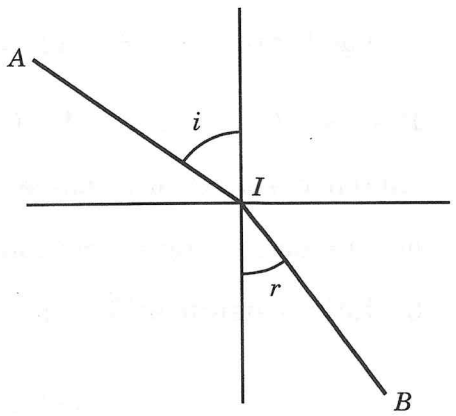


1) Montrer que l'aire S de cet objet (ouvert en bas) est donnée par

$$S(x) = \frac{3a}{2}\left(4h - 2x + \sqrt{3}\sqrt{4x^2 + a^2}\right)$$

2) Déterminer la valeur de x pour que l'aire de cet objet soit minimale. (Les abeilles obturent de cette manière les alvéoles en minimisant la quantité de cire nécessaire !)

4.80 Si un rayon lumineux se déplace à la vitesse v_1 dans un milieu et à la vitesse v_2 dans un autre milieu séparé du premier par une surface plane, on sait que le chemin qu'il suit est tel que le temps mis pour passer d'un point A du premier milieu à un point B du second est minimum.



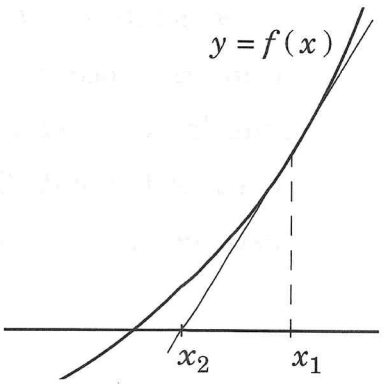
Prouver que le rayon lumineux frappera la surface de séparation en un point I tel que $\dfrac{\sin(i)}{\sin(r)} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

Méthode de Newton

Pour déterminer une solution de l'équation $f(x) = 0$, on utilise le procédé d'approximation suivant.

A partir d'une valeur initiale x_1 , on remplace le graphe par sa tangente au point $(x_1 ; f(x_1))$. La fonction f est donc remplacée par la fonction $t_1(x) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)$ et on résout l'équation $t_1(x) = 0$, d'où une nouvelle approximation

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} .$$



On répète ensuite le procédé pour obtenir une suite d'approximations x_1 , x_2 , x_3 , ... avec $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. La méthode ne garantit pas que x_n se rapproche d'une solution, mais lorsque $x_{n+1} \cong x_n$, on obtient souvent une bonne approximation de la solution.

Exemple

On veut calculer $\sqrt{11}$ à 10^{-5} près, c'est-à-dire estimer la solution positive de l'équation $x^2 - 11 = 0$.

Posons $f(x) = x^2 - 11$. Comme $f(3) = -2$ et $f(4) = 5$, la solution cherchée est comprise entre 3 et 4 . On amorce le procédé avec $x_1 = 3$ et on calcule les approximations $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 11}{2\,x_n}$ en travaillant avec 6 chiffres significatifs. On obtient

$$x_2 = 3 - \frac{(3)^2 - 11}{2(3)} \cong 3,33333$$

$$x_3 = 3,33333 - \frac{(3,33333)^2 - 11}{2(3,33333)} \cong 3,31667$$

$$x_4 = 3,31667 - \frac{(3,31667)^2 - 11}{2(3,31667)} \cong 3,31662$$

$$x_5 = 3,31662 - \frac{(3,31662)^2 - 11}{2(3,31662)} \cong 3,31662$$

Comme $(3,31662)^2 - 11 < 0$ et $(3,316625)^2 - 11 > 0$, on en déduit que

$$3,31662 < \sqrt{11} < 3,316625$$

4.81 En utilisant la méthode de Newton, calculer à 10^{-4} près dans l'intervalle prescrit la solution de chacune des équations suivantes

1) $\cos(x) - x = 0$ $\quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2) $\sqrt{x} = \cos(x)$ $\quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

3) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\quad -2 \leq x \leq 0$

4) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\quad 0 \leq x \leq 1$

5) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\quad 1 \leq x \leq 5$

6) $\tan(x) + x = 0$ $\quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$

4.82 Appliquer la méthode de Newton à l'équation $5\sqrt[3]{x} + x - 1 = 0$ avec la valeur initiale

1) $x_1 = 1$ $\qquad$ 2) $x_1 = 0,5$

Essayer avec d'autres valeurs initiales et déterminer 2 chiffres significatifs de la solution.

4.83 Appliquer la méthode de Newton à l'équation $\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2+1} = 0$ avec la valeur initiale

1) $x_1 = 0$ $\qquad$ 2) $x_1 = 2$

Essayer avec d'autres valeurs initiales et déterminer 4 chiffres significatifs de la solution.

4.84 Montrer que si $x_1 \neq 0$, la méthode de Newton ne fournit pas de solution des équations $\sqrt[3]{x} = 0$ et $\sqrt{|x|} = 0$.

Problèmes économiques

4.85 Dans une certaine entreprise, le coût total CT de la production est donné par la relation $CT(q) = \frac{q^2}{8} + 2$, où q est la quantité produite. On sait encore que sur le marché le prix de vente unitaire est égal à 2 francs.

1) Tracer un graphe qui donne le bénéfice de l'entreprise en fonction de sa production.

2) Quel est le volume de production qui assure un profit maximal ?

3) Calculer le profit maximal du producteur en fonction d'un prix unitaire de vente p.

4.86 Pour un certain bien X, la quantité q que les consommateurs sont prêts à acheter dépend du prix unitaire de vente p de ce bien. On admet ici que la demande des consommateurs est donnée par la relation $q + 2p = 90$.
Le bien X est produit par une firme en situation de monopole. Les frais totaux de production de q unités du bien sont donnés par le montant $CT(q) = q^3 - 8q^2 + 57q + 2$.
Pour éviter surplus et pénurie, le fabricant doit respecter la demande des consommateurs et fixer le prix de vente en fonction de la quantité qu'il veut écouler.

1) Pour une quantité q, calculer le prix unitaire p de vente, la recette $R = p \cdot q$ et le bénéfice B de l'entreprise.

2) Combien le fabricant doit-il produire pour maximiser son profit ?

3) Etudier le bénéfice comme fonction du volume de production. A l'aide du graphe donner l'intervalle de production qui assure une certaine rentabilité de l'entreprise.

4.87 Pour produire q unités d'un certain bien, une entreprise supporte des coûts variables $CV(q)$ et des coûts fixes CF, avec

$$CV(q) = 0,5q^3 - q^2 + 4q \quad \text{et} \quad CF = 4$$

On désigne par $CT(q)$ le coût total : $CT(q) = CV(q) + CF$

1) Donner l'expression de chacune des fonctions suivantes

$CT_u(q)$ le coût total unitaire
$C_m(q) = CT'(q)$ le coût marginal
$CV_u(q)$ le coût variable unitaire
$CF_u(q)$ le coût fixe unitaire

2) Représenter les fonctions CT_u , C_m et CV_u sur un même graphique, en déterminant explicitement les niveaux de production où elles atteignent un minimum.

Pour que le fait de produire soit préférable à la fermeture, il faut que le déficit de l'entreprise active reste inférieur à ses coûts fixes. Le prix de vente minimal pour lequel l'entreprise a avantage à rester active est appelé **seuil de fermeture**. Si elle veut progresser, l'entreprise doit pouvoir vendre son produit plus cher que le prix de revient CT_u . Le prix de vente minimal pour lequel l'entreprise peut faire des bénéfices est appelé **seuil de rentabilité**.

3) Déterminer le seuil de fermeture et le seuil de rentabilité.

4) L'entreprise vend sa production à un prix unitaire égal à p . Déterminer la production maximisant le profit de l'entreprise lorsque $p = 3$, $p = 4$, $p = 6$ et $p = 8$. Calculer dans chaque cas le profit réalisé et commenter.

4.88 Une entreprise produit et distribue un bien X pour lequel la demande q est donnée par l'égalité $p = 45 - 15q + 2q^2$ liant le prix p (en francs par kilo) et la quantité q (en millions de kilos).
On sait que la demande ne dépasse pas 3 millions de kilos. Les coûts de production et de distribution du bien en question sont donnés (en millions de francs) par l'expression $C(q) = 1 + 6q - 3q^2 + q^3$.

1) Quelle quantité q l'entreprise doit-elle mettre sur le marché pour rendre maximum son profit ?

L'État décide de prélever une taxe sur la vente du bien X . Si la taxe est perçue à raison de t francs par kilo, le produit $t \cdot q$ représente pour

l'entreprise une augmentation des coûts de production et de distribution.

2) Exprimer, en fonction de la taxe unitaire t, la quantité $q(t)$ que l'entreprise, soumise à la taxe, doit mettre sur le marché pour rendre maximum son profit.

Le produit $t \cdot q$ représente pour l'État la recette totale provenant de la taxe sur le bien X. Sachant que l'entreprise fixera toujours sa production à $q(t)$ comme le veut son objectif de rentabilité maximale, répondre aux trois questions suivantes

3) A quelle valeur l'État doit-il fixer t pour que sa propre recette soit maximale ?

4) Quel est le prix de vente et quelle est la quantité vendue ?

5) Quels sont alors le profit de l'entreprise et la recette de l'État ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

4.1 1) $-\frac{9}{2}$ 2) 6 3) $\frac{1}{3}$ 4) 0

5) 0 6) $\frac{2}{3}$ 7) $\frac{1}{8}$ 8) $-\pi$

4.2 1) 1 2) 0

4.3 0

4.6 1)

x		-3	
$f(x)$	↘		↗

2) f est croissante sur $\mathbb{R}$

3)

x		-3		-2	
$f(x)$	↗		↘		↗

4)

x		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

5)

x		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	↘		↘

6)

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		1	
$f(x)$	↗		↘		↗		↗

7)

x		0		1		3	
$f(x)$	↗		↗		↘		↗

8)

x		-1		0		1	
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

9)

x	$-\sqrt{24}$		-4		0		4		$\sqrt{24}$
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

10)

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$		↘		↗		↗		↘	

11)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

12)

x	3	
$f(x)$	↘	↗

4.7 Par exemple, $f(x) = x^2 - 4x$

4.8 1) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ est continue en 1 et est égale à f si $x \neq 1$. Non.

2)

x	-2		-1		0		1	
$f(x)$	↗		↘		↘		↗	

4.11 1) $\dfrac{g'}{g} + \dfrac{h'}{h} \geq 0$ 2) $\dfrac{g'}{g} \leq \dfrac{h'}{h}$

4.12 $b^2 = 2a^2$

4.13 1) minimums: $(0\,;0)$ et $(a\,;0)$; maximum $\left(\dfrac{a}{2}\,;\dfrac{a^4}{16}\right)$

2) maximums: $\left(\dfrac{a}{2} + k\pi\,;\sin^2\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$;

minimums: $\left(\dfrac{a+\pi}{2} + k\pi\,;-\cos^2\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

3) minimum $\left(-\sqrt{\dfrac{c}{a}}\,;f\left(-\sqrt{\dfrac{c}{a}}\right)\right)$; maximum $\left(\sqrt{\dfrac{c}{a}}\,;f\left(\sqrt{\dfrac{c}{a}}\right)\right)$

4) minimum $(0\,;0)$; maximum $\left(\dfrac{4a}{3}\,;\dfrac{8a^2}{3\sqrt{3}}\right)$

5) minimum $(0\,;1)$; maximums : $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{b}}\,;\sqrt{1+\frac{a^2}{2b}}\right)$

6) minimums: $\left(k\pi\,;\frac{1}{a^2}\right)$; maximums: $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{1}{b^2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

4.14 $a = -2$

4.15 $f'(1) = -1$ et $f''(1) < 2$

4.16 Les minimums sont sur la courbe d'équation $y = 6x - 2x^3$

4.17 1) minimum en 0

2) maximum en 0 ; minimum en 4

3) maximum en $\frac{-1}{\sqrt[4]{30}}$; minimum en $\frac{1}{\sqrt[4]{30}}$

4) maximum en 0 ; minimums en $\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$

5) minimum en 0

6) maximum en $\cong -0,596$; minimum en 0

7) maximum en 1 ; minimum en -1

8) maximum en -1 ; minimum en 1

4.18 1) f est convexe sur $\mathbb{R}$

2)

x		0	
$f(x)$	⌒		⌣

3)

x		0	
$f(x)$	⌒		⌣

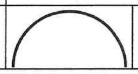
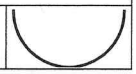
4)

x		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f(x)$	⌣		⌒		⌣

5)

x		1	
$f(x)$	⌒		⌣

6)

x		$-\frac{4}{3}$	
$f(x)$			

4.19 1) 0 2) 0 3) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ 4) —

5) — 6) 1 7) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 8) 2

9) $\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ 10) 0 ; $\pm\sqrt{3}$

4.20 Par exemple: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$

4.21 Par exemple: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

4.22 Par exemple $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x=0 \text{ ou si } x=1 \\ x & \text{si } 0<x<1 \end{cases}$

4.23 La différence entre la valeur approchée et la valeur exacte est de signe contraire à celui de $f''(x)$ pour $x \in [\, x_0 \,;\, x_0+h \,]$

4.25 3) et 4) de telles fonctions n'existent pas

4.28 2) pour 4 hiboux

4.30 1) l'inflation augmente 2) $f'(t)>0$, $f''(t)>0$ et $f'''(t)<0$

4.31 Le taux d'inflation a augmenté du 1.1.90 au 1.5.91 et du 1.1.98 au 31.12.2000.

4.32 1) le plus grand segment est à l'abscisse 4. Il mesure 6

2) le plus grand segment est aux abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$. Il mesure $\sqrt{2}$

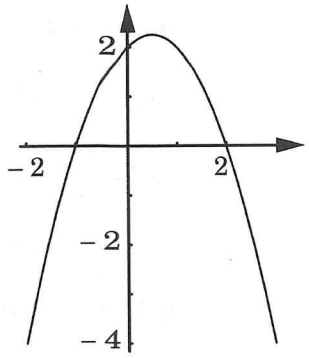
4.33 1) $(2\,;2)$ et $(-2\,;-2)$ 2) $(1\,;1)$ et $(-1\,;1)$

4.34 2) $x = \frac{16}{3}$

4.38 1) $f'(x) = -2x + 1$

max. $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$

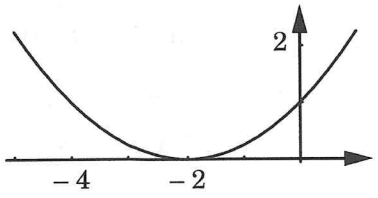
$f''(x) = -2$



2) $f'(x) = \frac{1}{2}x + 1$

min. $(-2\,;0)$

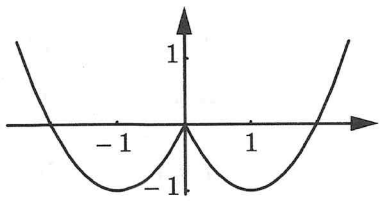
$f''(x) = \frac{1}{2}$



3) $f'(x) = 2x - 2\,\mathrm{sgn}(x)$

min. $(-1\,;-1)$ et $(1\,;-1)$

$f''(x) = 2$

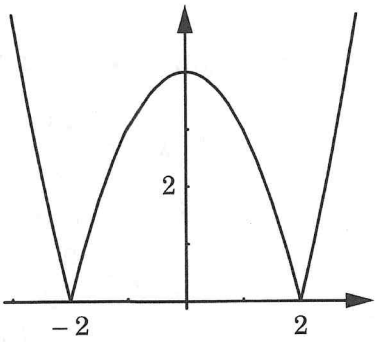


4) $f'(x) = -2x \cdot \mathrm{sgn}(4-x^2)$

min. $(-2\,;0)$ et $(2\,;0)$

max. $(0\,;4)$

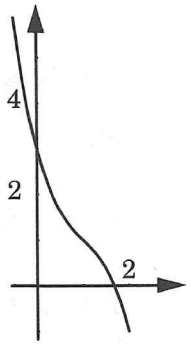
$f''(x) = -2\,\mathrm{sgn}(4-x^2)$



5) $f'(x) = -3x^2 + 6x - 4$

$f''(x) = -6x + 6$

infl. $(1\,;1)$



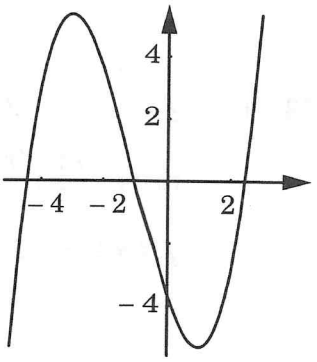
6) zéros -1, $\frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$

max. $\left(-3 ; \frac{16}{3}\right)$, min. $\left(1 ; -\frac{16}{3}\right)$

$f''(x) = 2x + 2$

infl. $(-1 ; 0)$



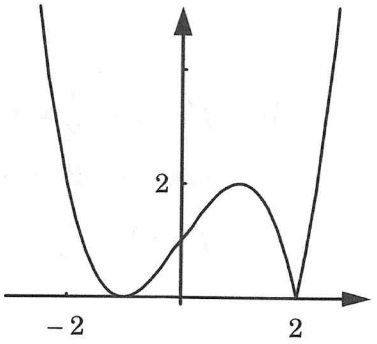
7) $f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}\right) \cdot \operatorname{sgn}(x-2)$

min. $(-1 ; 0)$ et $(2 ; 0)$

max. $(1 ; 2)$

$f''(x) = 3x \cdot \operatorname{sgn}(x-2)$

infl. $(0 ; 1)$ et $(2 ; 0)$



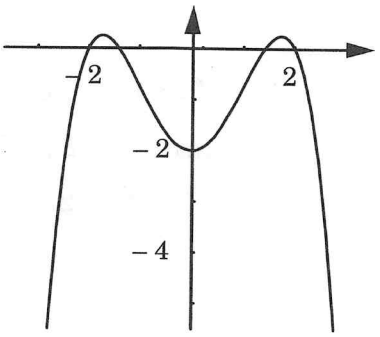
8) zéros ± 2, $\pm\sqrt{2}$

$f'(x) = -x^3 + 3x$

max. $\left(\pm\sqrt{3} ; \frac{1}{4}\right)$, min. $(0 ; -2)$

$f''(x) = -3x^2 + 3$

infl. $\left(-1 ; -\frac{3}{4}\right)$, $\left(1 ; -\frac{3}{4}\right)$



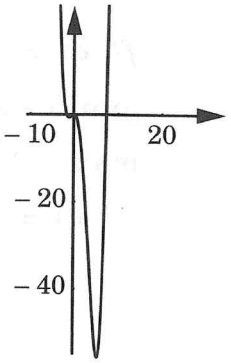
9) zéros 0, $\frac{6 \pm 2\sqrt{21}}{2}$

$f'(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{9x^2}{4} - 3x$, max. $(0 ; 0)$

min. $(-1,08 ; -0,63)$, $(5,58 ; -55,83)$

$f''(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{9x}{2} - 3$

infl. $\left(\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} ; \frac{-265 \mp 63\sqrt{17}}{16}\right)$

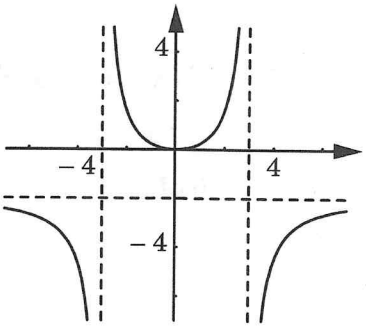


10) zéro 0, asymptotes $x = -3$, $x = 3$, $y = -2$

$f'(x) = \frac{36x}{(9-x^2)^2}$

min. $(0 ; 0)$

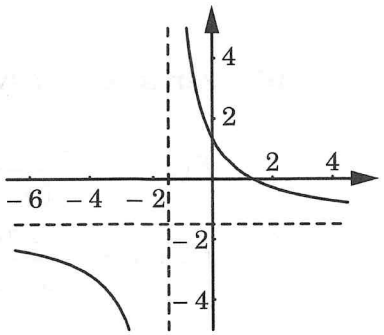
$f''(x) = \frac{108(x^2+3)}{(9-x^2)^3}$



11) zéro $\frac{4}{3}$, asymptotes $x = -\frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$

$$f'(x) = \frac{-17}{(3+2x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{68}{(3+2x)^3}$$



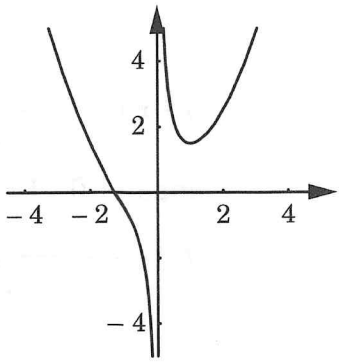
12) zéro $-\sqrt[3]{2}$, asymptote $x = 0$

$$f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$$

min. $\left(1\,;\frac{3}{2}\right)$

$$f''(x) = \frac{x^3+2}{x^3}$$

infl. $(-\sqrt[3]{2}\,;0)$



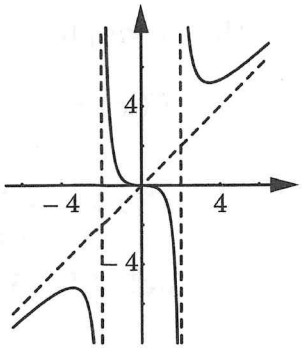
13) asymptotes $x = -2$, $x = 2$ et $y = x$

$$f'(x) = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$$

max. $(-2\sqrt{3}\,;-3\sqrt{3})$, min. $(2\sqrt{3}\,;3\sqrt{3})$

$$f''(x) = \frac{8(x^3+12x)}{(x^2-4)^3}$$

infl. $(0\,;0)$



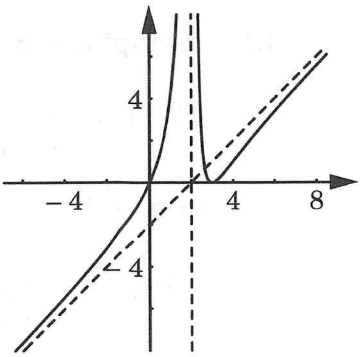
14) asymptotes $x = 2$ et $y = x-2$

$$f'(x) = \frac{x^3-6x^2+15x-18}{(x-2)^3}$$

min. $(3\,;0)$

$$f''(x) = \frac{-6(x-4)}{(x-2)^4}$$

infl. $(4\,;1)$



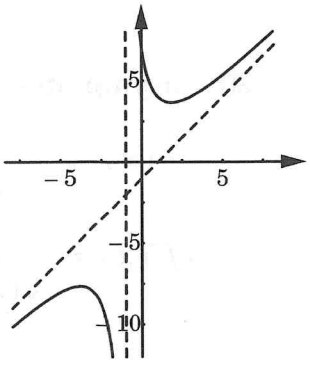
15) asymptotes $x = -1$ et $y = x-1$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-7}{(x+1)^2}$$

max. $(-1-\sqrt{8}\,;-2-2\sqrt{8})$

min. $(-1+\sqrt{8}\,;-2+2\sqrt{8})$

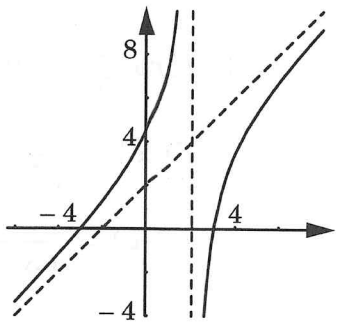
$$f''(x) = \frac{16}{(x+1)^3}$$



16) zéros ± 3 , asymptotes $x = 2$ et $y = x + 2$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 9}{(x-2)^2}$$

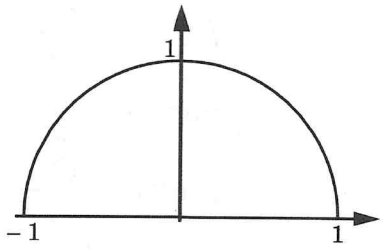
$$f''(x) = \frac{-10}{(x-2)^3}$$



17) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

max. (0 ; 1)

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

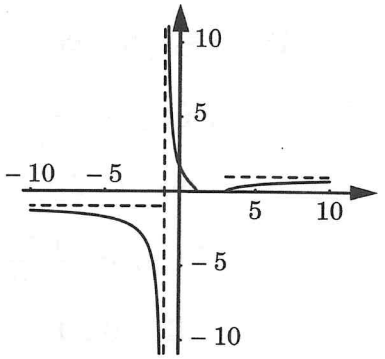


18) asymptotes $x = -1$, $y = 1$ et $y = -1$

$$f'(x) = \frac{3x - 5}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

$$f''(x) = \frac{-6x^3 + 33x^2 - 60x + 29}{(x+1)^3 \sqrt{(x^2 - 4x + 3)^3}}$$

infl. (0, 75 ; 0, 43)

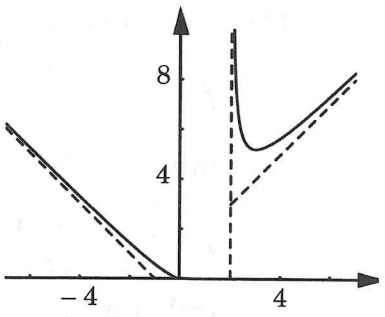


19) asymptotes $x = 2$, $y = -x - 1$, $y = x + 1$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{\sqrt{x^3(x-2)^3}}$$

min. (3 ; $\sqrt{27}$)

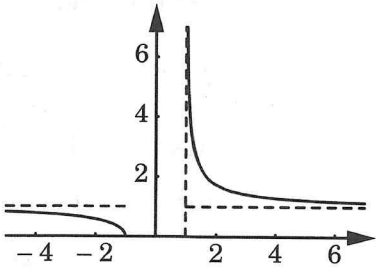
$$f''(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^3(x-2)^3\,(x-2)}}$$



20) asymptotes $x = 1$ et $y = 1$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}$$

$$f''(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{(x+1)^3(x-1)^5}}$$

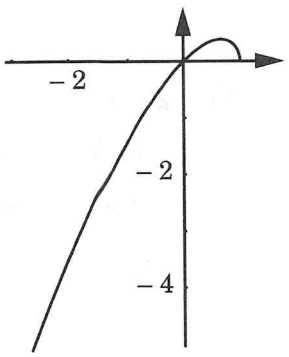


21) zéros 0 et 1

$$f'(x) = \frac{-3x+2}{2\sqrt{1-x}}$$

max. $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{\sqrt{27}}\right)$

$$f''(x) = \frac{-3x+4}{4(x-1)\sqrt{1-x}}$$



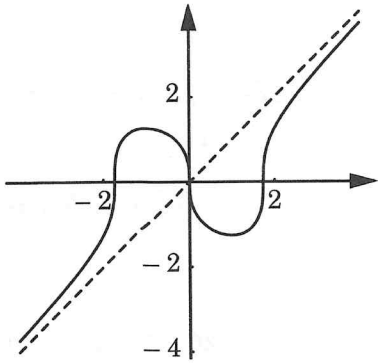
22) zéros $\pm\sqrt{3}$, 0 ; asymptote $y = x$

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}}$$

max. $(-1\,;\,\sqrt[3]{2})$; min. $(1\,;\,-\sqrt[3]{2})$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^5}}$$

infl. $(\pm\sqrt{3}\,;0)$, $(0\,;0)$



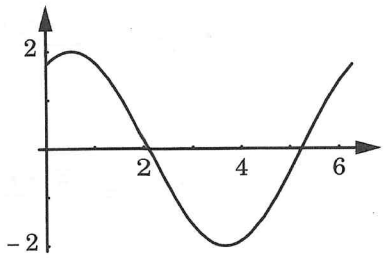
23) étude sur $[\,0\,;2\pi\,[$; zéros $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$

$$f'(x) = \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$$

max. $\left(\frac{\pi}{6}\,;2\right)$; min. $\left(\frac{7\pi}{6}\,;-2\right)$

$$f''(x) = -\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$$

infl. $\left(\frac{2\pi}{3}\,;0\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{3}\,;0\right)$

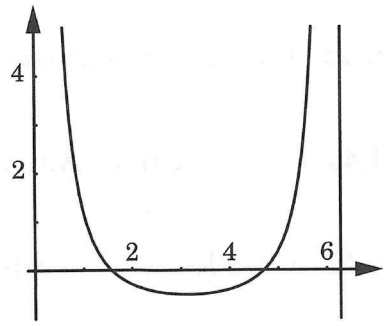


24) étude sur $[\,0\,;2\pi\,[$; zéros $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$

$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{(\cos(x)-1)^2}$$

min $(\pi\,;-0,5)$; asymptote $x = 0$

$$f''(x) = \frac{-\cos^2(x) - 2\sin^2(x) + \cos(x)}{(\cos(x)-1)^3}$$



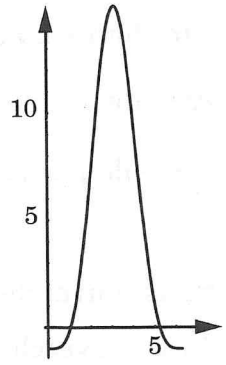
25) étude sur $[\,0\,;2\pi\,[$; zéros $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$

$$f'(x) = 8\sin(x)(1-\cos(x))$$

min. $(0\,;-1)$; max. $(\pi\,;15)$

$$f''(x) = 8(\sin^2(x) - \cos^2(x) + \cos(x))$$

infl. $(\frac{2\pi}{3}\,;8)$ et $(\frac{4\pi}{3}\,;8)$

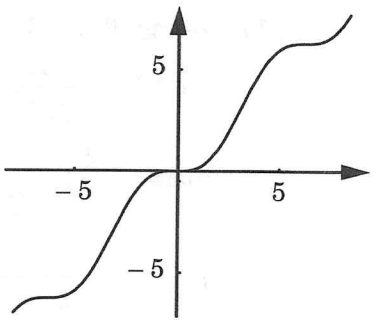


26) zéro 0

$f'(x) = 1 - \cos(x)$

$f''(x) = \sin(x)$

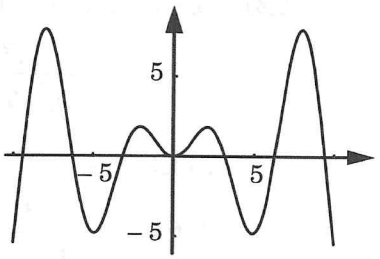
infl. $(k\pi\,;k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$



27) zéros $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$f'(x) = x\cos(x) + \sin(x)$

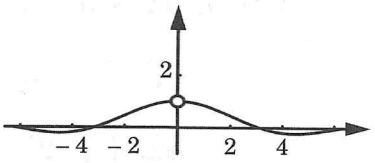
$f''(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$



28) zéros $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$

asymptote $y = 0$, «trou» en $(0\,;1)$

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$



$$f''(x) = \frac{2\sin(x) - 2x\cos(x) - x^2\sin(x)}{x^3}$$

4.39 45 °

4.40 C'est le triangle isocèle. Périmètre maximal: $h(1+\sqrt{2})$

4.41 C'est le carré. Aire maximale: $\frac{p^2}{4}$

4.42 C'est le cylindre dont le diamètre de la base est égal à la hauteur

4.43 Aire totale maximale si l'on forme un carré de périmètre L sans couper le fil

Aire totale minimale si l'on forme un triangle de périmètre $\frac{9L}{4\sqrt{3}+9}$ et un carré de périmètre $\frac{4\sqrt{3}\,L}{4\sqrt{3}+9}$

4.44 Sans couvercle: rayon = hauteur

Avec couvercle: diamètre = hauteur

4.45 $x = 4$ cm

4.46 Rayon de base: 6 cm , hauteur: 18 cm

4.47 Dimension de l'enclos : 16 m sur 18 m

4.48 Diamètre du demi-cercle: $\frac{12}{\pi + 4}$ m ; hauteur du rectangle $\frac{6}{\pi + 4}$ m

4.49 Longueur de l'échelle la plus courte: $(1 + \sqrt[3]{4})^{3/2} \cong 4,16$ m

4.50 Dimensions: 16 cm × 32 cm

4.51 Volume maximum: $\frac{2\pi r^3}{9\sqrt{3}}$ cm^3

4.52 Rayon du cylindre: $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$; longueur du cylindre: $4r$

4.53 1) côtés du rectangle: $\frac{p}{3}$ (parallèle à l'axe) et $\frac{2p}{3}$

2) carré de côté $\frac{p}{2}$

3) le rectangle se réduit à un segment de longueur p et perpendiculaire à l'axe de rotation

4.54 $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{2}{3}\right)$

4.55 Hauteur = largeur × $\sqrt{2}$

4.56 A la distance $\frac{10\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3} + 1} \cong 5,68$ km de l'usine la plus polluante

4.57 Abscisse du point cherché: $\frac{10}{1 + \sqrt[3]{4}} \cong 3,86$. Le rapport des distances de L_2 à L_1 est $\sqrt[3]{4}$

4.59 20 km/h

4.60 20 km/h

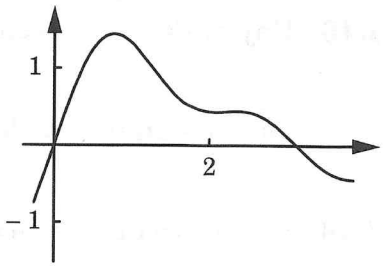
4.61 63,43 °

4.62 $(1+\sqrt[3]{4})^{3/2} \cong 4,16$ m

4.64 $f'(x) = \cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)$

max. $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{4\sqrt{2}+3}{6}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{4\sqrt{2}-3}{6}\right)$

min. $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$



4.65 La masse de chaque objet est égale à $\frac{M}{2}$

4.66 $\theta = 45°$

4.67 Volume maximal: 4 dm^3

4.68 Vitesse = $\sqrt{8'050} \cong 89,72$ km/h ; prix de revient 107,65 Fr

4.69 1 h 48' (36 milles)

4.70 Base: 8 m ; hauteur: 12 m

4.71 Volume maximal: $\frac{281'216\pi}{27} \cong 32'721$ cm^3

4.72 Possibilité 1 : rayon de la base $\frac{a}{2\pi}$; volume maximal $a^3\left(\frac{3}{2\pi}-\frac{1}{4\pi^2}\right)$

Possibilité 2 : rayon de la base $\frac{a}{3}$; volume maximal $\frac{\pi a^3}{27}$

4.73 Vitesse optimale $v = \sqrt{1'000} \cong 31,62$ km/h

4.74 Il doit accoster à 12 km du point de la côte le plus proche du phare

4.75 $x = 180°$

4.76 $x = \sqrt{2}-1$

4.78 $x \cong 2,60$ m

4.79 $x = \dfrac{a}{\sqrt{8}}$

4.81 1) 0, 7391 2) 0, 6417

3) − 1, 6400 4) 0, 1353

5) 4, 5046 6) 2, 0287

4.82 0, 0078

4.83 0, 5053

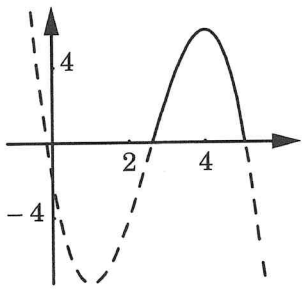
4.85 1) $B = pq - CT(q) = -\frac{1}{8}q^2 + 2q - 2$

2) $q = 8$ 3) $B = -2p^2 + 8p - 2$

4.86 1) $p(q) = \dfrac{90 - q}{2}$; $R(q) = \dfrac{90q - q^2}{2}$; $B(q) = -q^3 + \frac{15}{2}q^2 - 12q - 2$

2) $q = 4$

3)



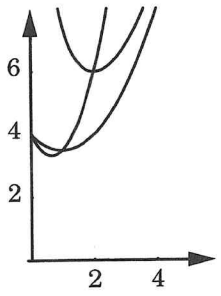
La production est rentable si $B(q) > 0$:

$2, 62 \leq q \leq 5, 04$

4.87 1) $CT_u(q) = \frac{1}{2}q^2 - q + 4 + \frac{4}{q}$ $C_m(q) = \frac{3}{2}q^2 - 2q + 4$

$CV_u(q) = \frac{1}{2}q^2 - q + 4$ $CF_u(q) = \frac{4}{q}$

2)



minimum de $CT_u(q)$ en $q = 2$

minimum de $C_m(q)$ en $q = \frac{2}{3}$

minimum de $CV_u(q)$ en $q = 1$

3) seuil de fermeture $p = 3,5$

seuil de rentabilité $p = 6$

4) $p = 3 : q = 0$ et $B = -4$

fermeture de l'entreprise

$p = 4 : q = 1,33$ et $B = -3,41$

travail non rentable, mais préférable à la fermeture de l'entreprise

$p = 6 : q = 2$ et $B = 0$

travail couvrant juste les frais

$p = 8 : q = 2,43$ et $B = 4,45$

4.88 1) $q = 2,27$ millions de kilos ($p = 21,27$; bénéfice $= 37,39$)

2) $q(t) = 4 - \frac{1}{3}\sqrt{27 + 3t}$

3) $t = 18$ Fr/kg

4) $p = 32$, $q = 1$

5) $B = 9$ et $R = 18$