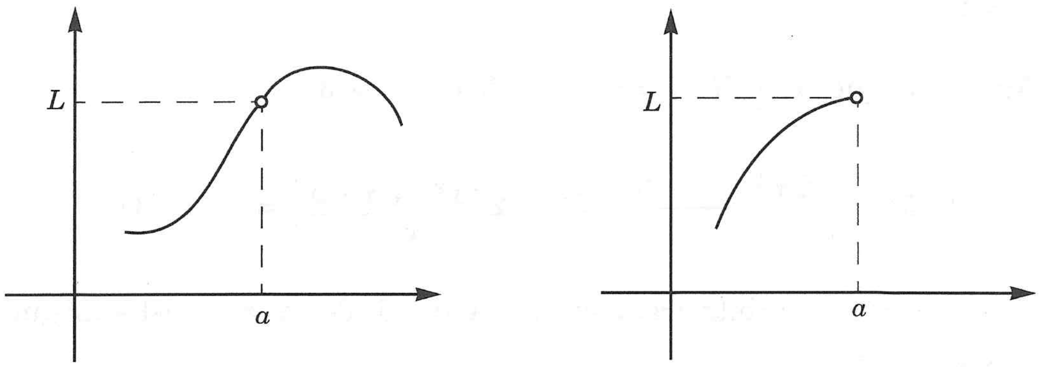
§ 2. Limites, continuité et asymptotes

1. Limites

La notion de limite est particulièrement utile pour déterminer le comportement du graphe d'une fonction au voisinage d'un «trou» ou d'un «bord» de son ensemble de définition.



«trou» «bord»

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf éventuellement en a.

> Le nombre L est **limite de f en a** si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a, avec $x \neq a$.
>
> On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
>
> On dit encore que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a.
>
> Formellement
>
> Le nombre L est **limite de f en a** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
> $0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$

ou de manière équivalente si

$x \in]a - \delta ; a + \delta[\setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in]L - \varepsilon ; L + \varepsilon[$.

Remarque

Si elle existe, la limite de la fonction f en a est unique.

1.2 Exemples

a) On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}$ qui n'est pas définie en $x = 3$.

Montrons que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$. En effet, si $x \neq 3$

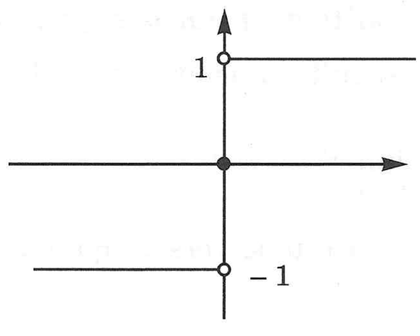
$$|f(x) - 5| = \left| \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3} - 5 \right| = 2 \left| \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} \right| = 2\,|x - 3|$$

Ainsi $f(x)$ est arbitrairement proche de 5 dès que x est suffisamment proche de 3.

Formellement, ε étant un nombre strictement positif donné, en choisissant $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, on a

$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$.

b) La fonction sgn n'a pas de limite en 0. Considérons en effet le graphe de cette fonction



Si x est proche de 0 en étant strictement positif, $f(x)$ est égal à 1, alors que si x est proche de 0 en étant strictement négatif, $f(x)$ est égal à -1. On ne peut donc pas rendre $f(x)$ arbitrairement proche d'un nombre L en prenant x suffisamment proche de 0 avec $x \neq 0$.

1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;d\,[$. Le nombre L est **limite à droite de f en a** si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a avec $x > a$.

On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = L$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]g\,;a\,[$. Le nombre L est **limite à gauche de f en a** si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a avec $x < a$.

On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = L$.

Exemple

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \operatorname{sgn}(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \operatorname{sgn}(x) = -1$.

Propriété

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = L}$$

1.4 Limites de fonctions élémentaires

$\lim\limits_{x \to a} c = c$	$\lim\limits_{x \to a} x = a$
$\lim\limits_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$	$\lim\limits_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$
$\lim\limits_{x \to a} \lvert x \rvert = \lvert a \rvert$	$\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$

1.5 Propriétés des limites

Soit f et g des fonctions admettant une limite en a et soit λ un nombre réel.

$$\lim_{x \to a} [\,f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} [\,f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} [\,\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} [\,f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Remarques

a) Pour toute fonction rationnelle f, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ si a appartient à l'ensemble de définition de f.

b) Dans certains cas, une transformation de l'expression $f(x)$ permet de calculer la limite d'une fonction en un «trou» de son ensemble de définition.

Par exemple $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+1) = 3$.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a, sauf éventuellement en a.
Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existent, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Théorème «des deux gendarmes»

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a, sauf éventuellement en a. Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.

Exemple

On a $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. En effet, comme $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$, on a $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, donc $-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$. Puisque $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, le théorème «des deux gendarmes» montre que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Limites particulières

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

2. Continuité

2.1 Définitions

Une fonction f est **continue en a** si elle est définie sur un intervalle ouvert contenant a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Une fonction f est **continue sur un intervalle ouvert** I si elle est continue en tout point de l'intervalle I.

Une fonction f est **continue sur un intervalle fermé** $[\,a\,;b\,]$ si elle est continue en tout point de l'intervalle $]\,a\,;b\,[$ et si $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} b} f(x) = f(b)$.

Une fonction est continue sur une réunion d'intervalles si elle est continue sur chaque intervalle.

Le graphe d'une fonction continue sur un intervalle peut être tracé «sans lever le crayon».

2.2 Continuité de fonctions élémentaires

Les fonctions f données ci-dessous sont continues sur leur ensemble de définition

$f(x) = c$	$f(x) = x$
$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$f(x) = \sqrt{x}$

2.3 Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g des fonctions continues en a et soit λ un nombre réel

$f + g$ est continue en a

$f - g$ est continue en a

$\lambda \cdot f$ est continue en a

$f \cdot g$ est continue en a

$\dfrac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$

Si f est une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

Remarque

Les fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques, racine n-ième sont continues sur leur ensemble de définition.

2.4 Limites de fonctions composées

L'existence de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et de $\lim\limits_{t \to L} g(t)$ ne suffit pas en général à déterminer $\lim\limits_{x \to a} g(f(x))$. Toutefois, on a les résultats

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et si de plus g est continue en L , alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x \to a} f(x)) = g(L)$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et si de plus $f(x) \neq L$ sur un intervalle ouvert contenant a , sauf éventuellement en a , alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{t \to L} g(t)$

Exemples

a) Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{3\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) - 1} = \sqrt{3 \cdot 1 - 1}$ $= \sqrt{2}$ en remarquant que la fonction $\sqrt{x}$ est continue.

b) Comme $\lim\limits_{x \to 0} 3x = 0$ et $3x \neq 0$ si $x \neq 0$, on peut écrire

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 .$$

2.5 Propriétés des fonctions continues

Continuité de la réciproque

Soit I un intervalle et $f : I \to J$ une fonction bijective et continue. Alors, la réciproque ${}^r\!f$ est continue sur l'intervalle J .

Théorème de Bolzano

Si f est continue sur l'intervalle $[a ; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, alors la fonction f a au moins un zéro dans $[a ; b]$.

Théorème de la valeur intermédiaire

> Si f est continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$, alors pour tout nombre γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Application

Déterminer à 0,01 près un zéro de la fonction $f(x) = x^3 + x - 1$.

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, et que $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes différents, il existe un zéro de f compris entre 0 et 1. Calculons successivement :

$f(0{,}5) = -\,0{,}375 < 0$ et $f(1) > 0$; donc f s'annule dans $]\,0{,}5\,;1\,[$.

$f(0{,}7) = 0{,}043 > 0$ et $f(0{,}5) < 0$; donc f s'annule dans $]\,0{,}5\,;0{,}7\,[$.

$f(0{,}6) = -\,0{,}184 < 0$ et $f(0{,}7) > 0$; donc f s'annule dans $]\,0{,}6\,;0{,}7\,[$.

$f(0{,}68) = -\,0{,}005568 < 0$ et $f(0{,}7) > 0$; donc f s'annule dans $]\,0{,}68\,;0{,}7\,[$.

Il y a donc un zéro x_0 compris entre 0,68 et 0,70 , ce qui se note parfois $x_0 = 0{,}69 \pm 0{,}01$.

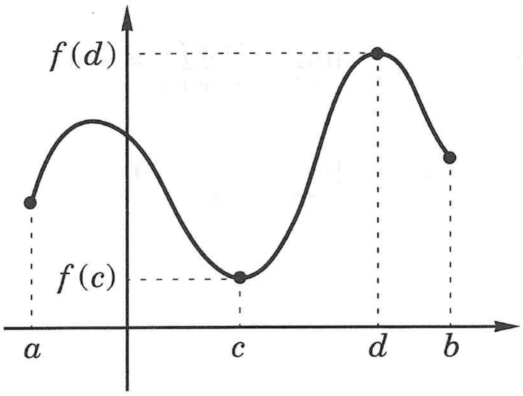
Théorème de Bolzano-Weierstrass

> L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.

Corollaire

> Une fonction continue sur un intervalle fermé $[\,a\,;b\,]$ admet un maximum absolu et un minimum absolu sur cet intervalle.

Illustration



$f([a\,;b]) = [f(c)\,;f(d)]$.
De plus, $f(c)$ est le minimum absolu et $f(d)$ le maximum absolu de la fonction sur $[a\,;b]$.

3. Extensions de la notion de limite

3.1 Limites infinies

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf éventuellement en a.

> On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand dès que x est suffisamment proche de a, avec $x \neq a$,
>
> On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ si $\lim\limits_{x \to a} (-f(x)) = +\infty$.

On définit de manière semblable

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = -\infty$.

3.2 Propriétés des limites infinies

Les propriétés des limites (page 32) ne se généralisent pas sans autre aux limites infinies. Cependant, un certain nombre d'entre elles restent valables. Par exemple

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L < 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemples

a) $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{5}{x-1} \right) = \text{"} \frac{5}{0_+} \text{"} = +\infty$$

b) $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{5}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} \right) = \text{"} \frac{5}{0_+} + \frac{3}{0_+} \text{"} = \text{"}(+\infty) + (+\infty)\text{"} = +\infty$$

c) $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{3}{2 - \dfrac{5}{x-1}} = \text{"} \frac{3}{2 - \dfrac{5}{0_-}} \text{"} = \text{"} \frac{3}{2 + (+\infty)} \text{"} = \text{"} \frac{3}{+\infty} \text{"} = 0$$

Remarque

Lorsqu'un calcul de limite conduit à des «expressions» du type ci-dessous

$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$

appelées **formes indéterminées**, on ne peut pas conclure de manière immédiate ; il est en général nécessaire de transformer l'expression $f(x)$.

Exemples

a) Forme indéterminée "$0 \cdot \infty$"

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 - 5x + 3) \cdot \frac{1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x-3)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \to 1} (2x - 3) = -1$$

b) Forme indéterminée "$\infty - \infty$"

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{2}{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{x(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

3.3 Limites à l'infini

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\, a\, ;\, +\infty\, [$. On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment grand ou de manière équivalente, si $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\, ;\, a\,]$. On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = L$.

Les propriétés des limites (page 32) peuvent être étendues sans autre aux limites à l'infini.

Cas particuliers

Le comportement à l'infini des fonctions polynômes ne dépend que de leur monôme de plus haut degré.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \pm\infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

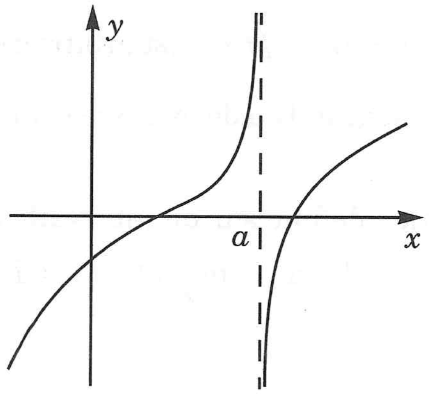
4. Asymptotes

4.1 Asymptotes verticales

Définition

La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de la fonction f si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} |f(x)| = +\infty$ ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} |f(x)| = +\infty$.

Illustration



Remarque

Soit f une fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$. Les asymptotes verticales de f sont à chercher parmi les droites d'équation $x = a$ où a est un zéro du polynôme $d(x)$.

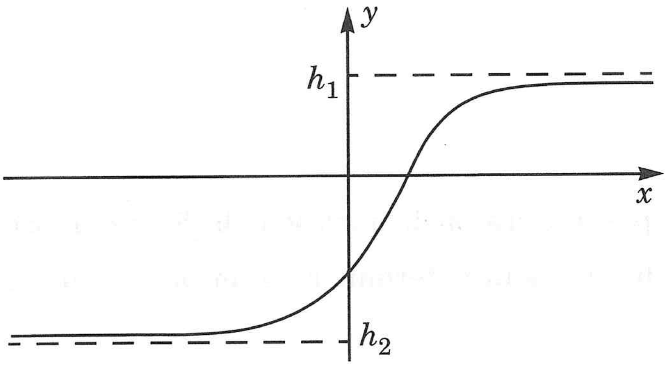
4.2 Asymptotes affines

Définitions

La droite d'équation $y = h_1$ est une **asymptote horizontale** de la fonction f vers $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = h_1$.

La droite d'équation $y = h_2$ est une **asymptote horizontale** de la fonction f vers $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = h_2$.

Illustration



Remarque

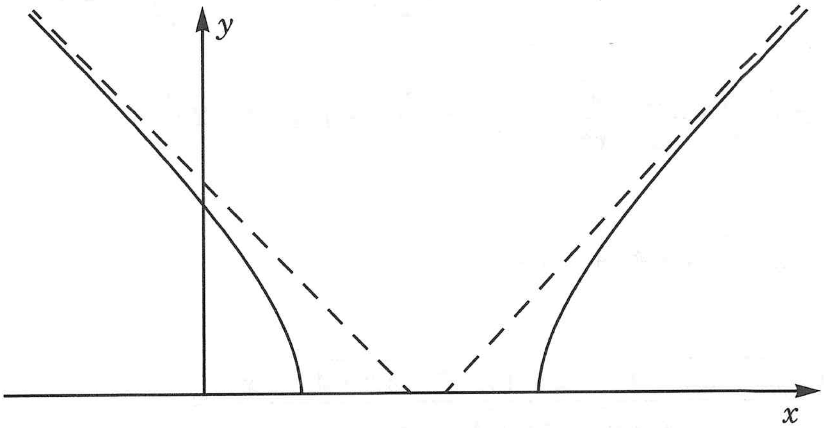
Une fonction rationnelle f définie par $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ admet une asymptote horizontale si et seulement si $\deg(n(x)) \leq \deg(d(x))$. Si f admet une asymptote horizontale, celle-ci est la même à gauche et à droite:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Définitions

> La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** de la fonction f vers $+\infty$ si $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = 0$.
>
> La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** de la fonction f vers $-\infty$ si $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} \delta(x) = 0$.

Illustration



Le signe de $\delta(x)$ permet de déterminer la position relative du graphe et de l'asymptote.

Remarque

Si $f(x)$ ne peut pas s'écrire facilement sous la forme $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = 0$, on peut déterminer m et h en calculant les limites suivantes

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)}$$

La situation est analogue pour $x \to -\infty$.

5. Exercices résolus

5.1 Calculer les limites

a) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 7}{2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{2}x = -\infty .$$

b) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4} .$$

c) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{3 + 7x^3 - 5x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{7x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{7x} = 0 .$$

d) $$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 2x) = \lim_{x \to -\infty} \left(|x|\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 2x\right) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x\left(-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 2\right)\right) = \text{"}(-\infty)\cdot(-1+2)\text{"} = -\infty .$$

e) $$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x)\cdot(\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x)}{(\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x)} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x+4}{|x|\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 + \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1} = \frac{-2}{-2} = 1 .$$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x) = {}"(+\infty) + (+\infty)" = +\infty .$

5.2 Déterminer les asymptotes verticales de $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$.

Les zéros du dénominateur étant 1 et -2 , les asymptotes verticales possibles de f sont les droites d'équations $x = 1$ et $x = -2$.

On a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x+2} = -\dfrac{1}{3}$,

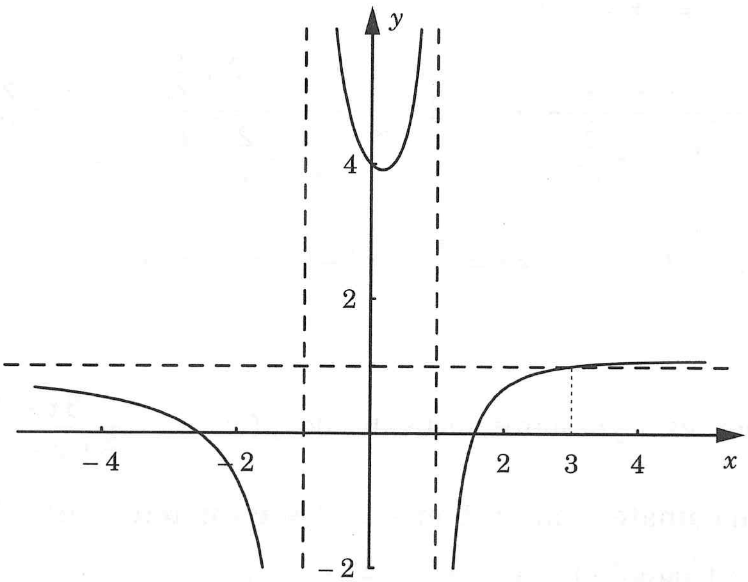
donc la droite d'équation $x = 1$ n'est pas une asymptote verticale de f; le graphe de f possède un «trou» de coordonnées $\left(1 ; -\dfrac{1}{3}\right)$.

En revanche, comme $\lim\limits_{x \to -2} |f(x)| = {}"\dfrac{12}{0_+}" = +\infty$, la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale de f.

5.3 Déterminer les asymptotes affines de $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 4}{x^2 - 1}$.

Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, la fonction f admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale vers $-\infty$ et vers $+\infty$. La position du graphe relativement à l'asymptote horizontale est donnée par le signe de $\delta(x) = f(x) - 1 = \dfrac{x-3}{x^2-1}$.

x		-1		1		3	
$\delta(x)$	$-$		$+$		$-$	0	$+$
Position du graphe de f relativement à l'asymptote	dessous		dessus		dessous	coupe	dessus

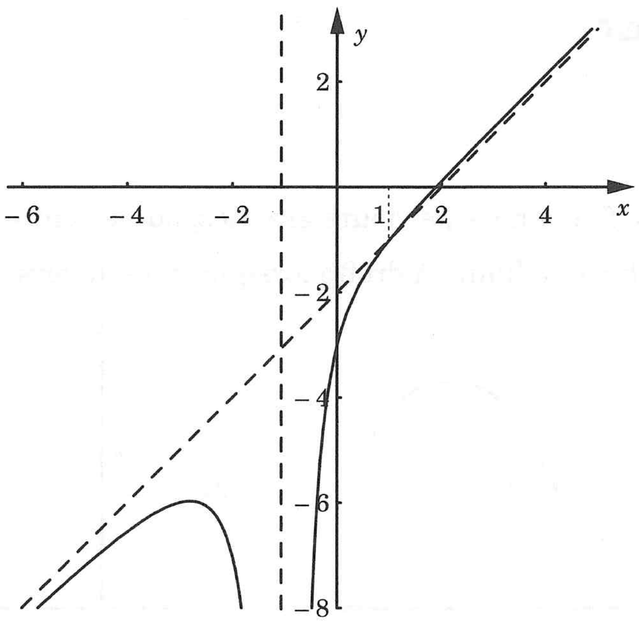


5.4 Déterminer les asymptotes affines de $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x - 3}{(x+1)^2}$.

La division euclidienne du numérateur de $f(x)$ par son dénominateur permet d'écrire $x^3 - 2x - 3 = (x-2)(x+1)^2 + (x-1)$, donc $f(x) = x - 2 + \delta(x)$ où $\delta(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$.

Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \delta(x) = 0$, la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ vers $-\infty$ et vers $+\infty$. La position du graphe relativement à l'asymptote oblique est donnée par le signe de $\delta(x)$

x		-1		1	
$\delta(x)$	$-$		$-$	0	$+$
Position du graphe de f relativement à l'asymptote	dessous		dessous	coupe	dessus



5.5 Calculer les équations des asymptotes de $f(x) = \sqrt{x^2+2px+q}$.

On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2+2px+q}}{x} = \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}}{x}$,

donc $m_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}\right) = -1$

et $m_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}\right) = 1$.

On en déduit $h_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - m_1 x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2px+q} + x) =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2+2px+q}+x)(\sqrt{x^2+2px+q}-x)}{\sqrt{x^2+2px+q}-x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2px+q}{\sqrt{x^2+2px+q}-x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2p+\frac{q}{x}}{\frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2p+\frac{q}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}-1}\right) = -p \ .$$

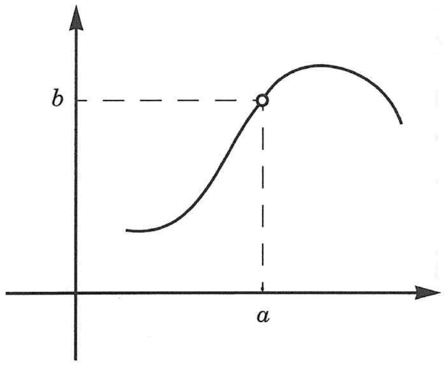
Des calculs semblables montrent que $h_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - m_2 x) = p$.

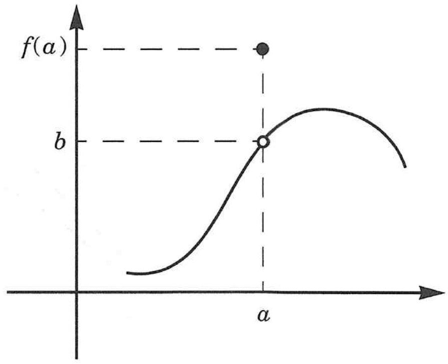
La fonction admet donc une asymptote oblique vers $-\infty$, d'équation $y = -x-p$, et une asymptote oblique vers $+\infty$, d'équation $y = x+p$.

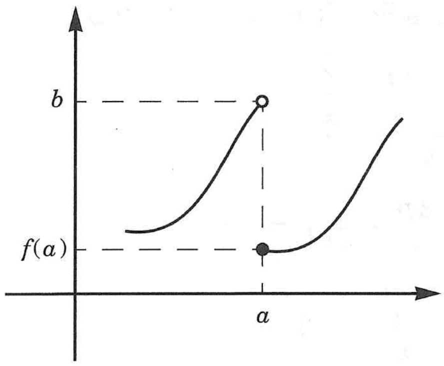
EXERCICES

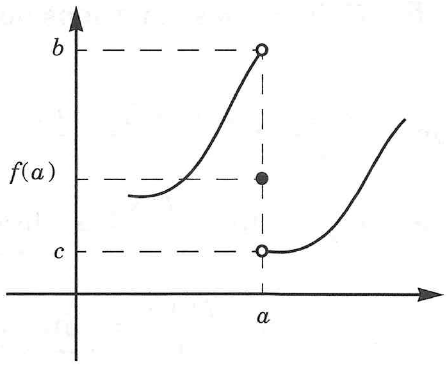
Limites

2.1 Les fonctions f, données par leurs graphes, admettent-elles une limite, une limite à gauche, une limite à droite lorsque x tend vers a ?

1) 

2) 

3) 

4) 

2.2 Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x}$ 2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{2x^2 + x - 3}$ 4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 2x + 2}{x + 1}$ 6) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$

7) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$ 8) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

9) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - x}{x + 2}$ 10) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$

11) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 6}{(x + 2)^2}$ 12) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + x^3 - 2}{x^3 + x^2 - 2}$

13) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$ 14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ $n \in \mathbb{N}^*$

2.3 Trouver une fonction f non définie en a telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

1) $a = 2$, $b = 3$ 2) $a = -1$, $b = 7$

3) $a = 0$, $b = -5$ 4) $a = 4$, $b = -1$

2.4 Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ 2) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$ 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|2x-3| - |2x+3|}{x}$

2.5 Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$ si $a > 0$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x - 1}$ 6) $\lim\limits_{t \to \sqrt{5}} \dfrac{t - \sqrt{5}}{t^2 - 5}$

7) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{\sqrt{2x-1} - 3}$ 8) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1} - 2}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1} - 1}$ 10) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{2-x}}$

11) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{16+h} - 4}{h}$ 12) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}$

2.6 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions données ci-dessous, puis déterminer la limite de ces fonctions pour x tendant vers x_0

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$ $x_0 = 2$

2) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x+7}}{x - 2}$ $x_0 = 2$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+24} - \sqrt{10x+15}}{x-1}$ $\qquad x_0 = 1$

4) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1} - 1}$ $\qquad x_0 = 0$

2.7 Calculer, si elles existent, la limite, la limite à droite et la limite à gauche des fonctions suivantes pour x tendant vers x_0

1) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\qquad x_0 = 0$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{|x|}$ $\qquad x_0 = 0$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{|x|}$ $\qquad x_0 = 0$

4) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad x_0 = 2$

2.8 On considère le cercle de centre O et de rayon 1.

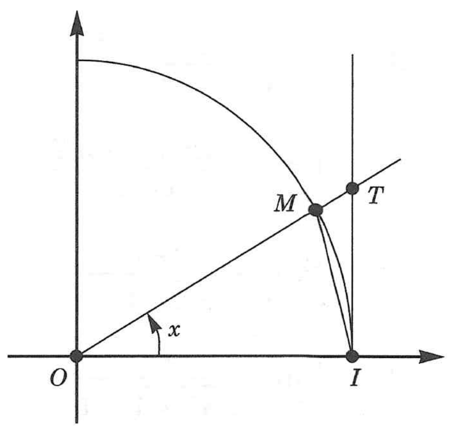
En comparant les aires des triangles OIM et OIT avec celle du secteur circulaire OIM, montrer que

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x) \text{ si } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

En déduire que

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

puis montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$



2.9 En amplifiant les fractions par $1 + \cos(x)$, montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

2.10 Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{\sin^2(x)}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(7x)}{\sin(3x)}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x}$ $\quad a \neq 0$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

9) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{2x^2 + x}$

2.11 En utilisant des formules de trigonométrie, calculer les limites

1) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$

2) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h}$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x) - \sin(a)}{\cos(x) - \cos(a)}$

2.12 Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2(x)}{x \cdot \tan(x)}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

4) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \left((1 + \sin(x)) \cdot \tan^2(x)\right)$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{x}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2(2x)}{1 - \cos(3x)}$

7) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \sin(x)}$

8) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(x)}{x}$

2.13 Utiliser le théorème «des deux gendarmes» pour déterminer

1) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \sqrt{x} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2.14 Montrer que si $0 \leq f(x) \leq 3$ pour tout x, alors $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot f(x)) = 0$.

2.15 Soit f une fonction telle que $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ si $|x| \leq 1$ et telle que $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ si $|x| > 1$. Calculer $\lim_{x \to -1} f(x)$, $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to 1} f(x)$.

2.16 Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$ si $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$.

2.17 Sur la parabole d'équation $y = x^2$, on choisit un point M distinct de l'origine O. La médiatrice du segment $[OM]$ coupe l'axe Oy en N. Vers quelle valeur tend l'ordonnée de N lorsque M s'approche de l'origine ?

2.18 Calculer la valeur limite de la solution la plus proche de zéro de l'équation $a x^2 + 3x + 1 = 0$ lorsque le coefficient a tend vers 0.

2.19 Calculer $\lim_{\substack{x \to n \\ >}} (x \cdot \mathrm{E}(x))$ et $\lim_{\substack{x \to n \\ <}} (x \cdot \mathrm{E}(x))$ avec $n \in \mathbb{Z}$, E étant la fonction partie entière.

2.20 Est-ce que $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ et $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x))$ peuvent exister alors que les deux limites $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ n'existent pas ?

2.21 L'existence de $\lim_{x \to a} f(x)$ et de $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ entraîne-t-elle l'existence de $\lim_{x \to a} g(x)$?

2.22 La limite $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ peut-elle exister si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe alors que $\lim_{x \to a} g(x)$ n'existe pas ?

2.23 En supposant que $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x))$ existent, peut-on déduire que $\lim_{x \to a} g(x)$ existe ?

Continuité

2.24 Déterminer une solution approchée à $0{,}01$ près des équations suivantes dans l'intervalle prescrit

1) $\cos(x) - x = 0$ $\qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
2) $\sqrt{x} = \cos(x)$ $\qquad 0 \le x \le \pi$
3) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\qquad -2 \le x \le 0$
4) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\qquad 0 \le x \le 1$
5) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\qquad 1 \le x \le 5$
6) $\tan(x) + x = 0$ $\qquad \frac{\pi}{2} < x < \pi$

2.25 Démontrer le théorème de la valeur intermédiaire (page 36).

2.26 On considère deux nombres a et b tels que $a < b$, ainsi que la fonction f donnée par $f(x) = x + (x-a)(x-b)$. Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour démontrer qu'il existe une valeur x_0 telle que $f(x_0) = \frac{a+b}{2}$.

2.27 Soit f une fonction continue de $[a\,;b]$ vers $[a\,;b]$. Prouver qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = c$.

2.28 On dit qu'on peut prolonger une fonction f par continuité en a s'il existe une fonction g continue en a telle que $f(x) = g(x)$ si $x \ne a$.
Peut-on prolonger les fonctions f suivantes par continuité en a ?

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ $\qquad a = -1$
2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}$ $\qquad a = -1$
3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{3-x}$ $\qquad a = 3$
4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$ $\qquad a = 1$

5) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\qquad a = 0$

6) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{|x|}$ $\qquad a = 0$

2.29 Dans un récipient sphérique de 10 cm de rayon, on verse 2 litres et demi d'eau. Quel est le niveau de l'eau dans la sphère ?

On admettra que le volume V d'une calotte sphérique de rayon r et de hauteur h est donné par la formule $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$.

2.30 Un cylindre couché de 150 cm de diamètre intérieur a une contenance de 6'000 litres. Sur une règle verticale, on doit marquer des graduations qui indiquent les niveaux correspondants à 1'000 litres, 2'000 litres, 3'000 litres, 4'000 litres et 5'000 litres. A quelle hauteur faut-il placer les traits de graduation ?

Indication: calculer d'abord l'angle sous lequel est vu le niveau du liquide depuis l'axe du cylindre.

2.31 Durant 5 ans, chaque premier janvier, on verse 1'000 francs sur un compte bancaire.

1) Sachant que le taux d'intérêt annuel est de 4 % , calculer le montant total à disposition sur ce compte le 31 décembre de la dernière année.

2) Quel devrait être le taux d'intérêt annuel pour obtenir 5'800 francs avec les mêmes versements ?

Extensions de la notion de limite

2.32 Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^2+3x+6}{(x+2)^2}$ $\qquad$ 2) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

3) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x+1}{x^2-4}$ $\qquad$ 4) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x+1}{x^2-4}$

5) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$ $\qquad$ 6) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$

7) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{|x^2-4|}$ 8) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x^2-1|}{x^2-2x+1}$

2.33 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions données ci-dessous. Calculer les limites de ces fonctions (éventuellement à droite ou à gauche) aux points où elles ne sont pas définies ainsi qu'en $+\infty$ et $-\infty$.

1) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^6-1}{x^4-1}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8}$ 4) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-5x}{x^4-5x^3}$

2.34 La vitesse de la lumière (environ 3×10^8 m/s) est désignée par c. En théorie de la relativité, on emploie la formule de contraction des longueurs de Lorentz

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

où $L(v)$ est la longueur d'un objet en mouvement à une vitesse v et L_0 sa longueur au repos.

Einstein a montré aussi que la masse $m(v)$ d'un objet est liée à sa vitesse v par

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Calculer $\lim\limits_{v \underset{<}{\to} c} L(v)$ et $\lim\limits_{v \underset{<}{\to} c} m(v)$.

2.35 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes

1) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x}$ 2) $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$

3) $f(x) = \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1}$ 4) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15}$

5) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-15}{(x+3)^2}$ 6) $f(x) = \dfrac{-3x+2}{4x+4}$

7) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^3}$ 8) $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

2.36 Calculer, si elles existent, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$
2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$
3) $f(x) = 2x - \cos(x)$
4) $f(x) = \dfrac{2x - \cos(x)}{x - 1}$
5) $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
6) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
7) $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{2x}{x^2 + 1}\right)$
8) $f(x) = 5x + \sqrt{3x^2 + 1}$
9) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$
10) $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$
11) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4}$
12) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$
13) $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{4x^2 + 2x - 5}}{x + 3}$
14) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

2.37 Utiliser le théorème «des deux gendarmes» pour calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ et $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ (où E désigne la fonction partie entière).

Asymptotes

2.38 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes (en précisant la position du graphe par rapport aux asymptotes), puis esquisser le graphe de chacune des fonctions f données ci-dessous

1) $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$
2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$
3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 8}$
5) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$
6) $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{(x + 1)^2}$
7) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{3}{x}$
8) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$
9) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$
10) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$

11) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$

12) $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4}$

13) $f(x) = 5x-3+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

2.39 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes des fonctions f données par

1) $f(x) = x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

2) $f(x) = x+\sqrt{x^2-1}$

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{(x-3)^2}}$

2.40 Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les asymptotes de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x^n+3}{x^2-9}$.

2.41 Déterminer, suivant les valeurs du réel m, les asymptotes des fonctions f données par

1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2mx-m+2}$

2) $f(x) = \dfrac{mx^3}{x^2+2mx-m+2}$

2.42 Trouver, dans chacun des cas suivants, une fonction rationnelle avec

1) une asymptote oblique d'équation $y = 3x-5$;

2) une asymptote horizontale d'équation $y = -2$;

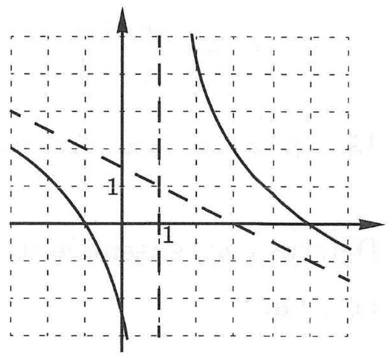
3) une asymptote verticale d'équation $x = 7$;

4) une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et des asymptotes verticales d'équations $x = 3$ et $x = -10$;

5) une asymptote verticale d'équation $x = 5$ et une asymptote oblique d'équation $y = -2x+5$.

2.43 Déterminer les coefficients réels a, b, c et d de la fonction rationnelle f donnée par $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ dont le graphe passe par le point $A(2\,;-2)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -3$ et $y = -2x+1$.

2.44 Trouver l'expression d'une fonction rationnelle f dont le graphe a la même allure que celui représenté sur le dessin ci-contre.



2.45 Trouver une fonction rationnelle f dont le graphe passe par le point $A(-5\,;20)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -2$, $x = 1$ et $y = 3x - 7$.

2.46 Trouver une fonction rationnelle dont le graphe passe par le point $A(3\,;-2)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $15x - 5y - 12 = 0$ et $x = 4$.
Choisir la solution la plus simple pour cette fonction, c'est-à-dire celle pour laquelle les degrés du numérateur et du dénominateur sont les plus petits possibles. Exprimer le résultat sous la forme d'une seule fraction.

2.47 De l'eau salée contenant 5 grammes de sel par litre s'écoule à raison de 10 litres par heure dans une grande cuve contenant initialement 10 litres d'eau pure.

1) Calculer le volume total d'eau et la quantité de sel de la cuve au bout de t heures.

2) Quelle est la concentration en sel après une longue période de temps ?

2.48 Sur l'hyperbole d'équation $xy = 1$, on considère un point quelconque M d'abscisse x strictement positive et on note P sa projection orthogonale sur l'axe Ox. Soit encore le point $A(2\,;2)$.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$ où $S(x)$ est l'aire du triangle AMP exprimée en fonction de la variable x.

Exercices récapitulatifs

2.49 Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x}$

2) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{2x^4 - \frac{3}{x}}{x^5 - x + \frac{1}{x}}$

3) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)}$

4) $\displaystyle \lim_{x \to \pi} \frac{1 + \cos(x)}{\sin^2(x)}$

5) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x}}$

6) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad n \in \mathbb{N}^*$

7) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$

8) $\displaystyle \lim_{x \to 1} (x^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$

9) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sin(\pi x)}$

10) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

11) $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}}$

12) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$

2.50 Déterminer les asymptotes verticales, horizontales et obliques des fonctions suivantes

1) $\displaystyle f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$

2) $\displaystyle f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-1}$

3) $f(x) = x + \sqrt{x}$

4) $\displaystyle f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

5) $f(x) = 3x + \sqrt{x^2+1}$

6) $\displaystyle f(x) = \frac{x(x + |x|) + 1}{x - 3}$

7) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{x^3+2}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2.51 On considère les fonctions réelles f, g et h données par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$, $g(x) = 3x - 1$ et $h(x) = x^2$.

Donner les asymptotes verticales et affines des fonctions suivantes

1) f 2) ${}^{r}f$ 3) $f \circ h$

4) $h \circ f$ 5) $f \circ g$ 6) $g \circ f$

7) $f \circ f$ 8) $g \cdot f$

2.52 Calculer, si elles existent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{3x^2 + 8x + 15}$ 2) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x$ 4) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$

2.53 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes (en précisant la position relative du graphe par rapport aux asymptotes), puis esquisser le graphe de chacune des fonctions f données ci-dessous

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x}{x^2 - 5x + 6}$ 2) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 6}$

Exercices d'application

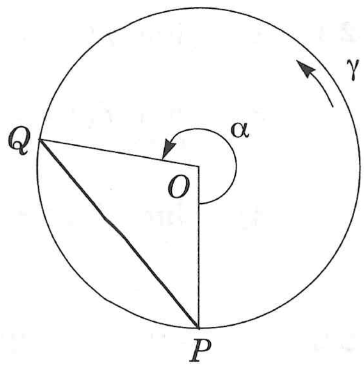
Pour chacun des exercices suivants, on demande de trouver une équation qui permette de résoudre le problème posé. On situera ensuite, par exemple à l'aide d'une représentation graphique, la solution cherchée dans un intervalle. Finalement on calculera une estimation de cette solution à 0,005 près.

2.54 L'aire d'un triangle rectangle vaut 12 cm^2. La hauteur issue de l'angle droit partage l'hypoténuse en deux parties de longueurs respectives 2 cm et x cm. Calculer x.

2.55 Un stère de bois (cube de 1 m de côté) est adossé à une grande maison. A quelle distance x de la maison faut-il poser le pied d'une échelle de 10 m pour qu'elle s'appuie tant contre la façade que contre l'angle du stère ?

2.56 Je place la somme A à intérêts composés dans le but d'obtenir la somme B. Si le taux d'intérêt est de t % par an, j'obtiens B en 11 ans. Si le taux est de $1\,\%$ plus élevé, j'obtiens B en 9 ans. Calculer t.

2.57 Une planète se déplace à vitesse constante v_1 sur une orbite circulaire γ de centre O. Au point P, on imagine qu'un vaisseau spatial quitte la planète et voyage à vitesse constante v_2 en ligne droite dans le plan de l'orbite de la planète. Si $v_1 = 4v_2$, calculer l'angle α pour que la planète puisse récupérer le vaisseau en un point Q de son orbite.



2.58 Un triangle ABC isocèle de sommet A a pour périmètre 16 cm. Le rayon de son cercle inscrit est de 1 cm. Calculer la longueur de la base $[BC]$.

Solutions des exercices

2.1 1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ 2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = c$

2.2 1) -2 2) -1 3) $\frac{1}{5}$ 4) 4 5) 2

6) 4 7) 0 8) 0 9) $\frac{3}{2}$ 10) 3

11) — 12) $\frac{7}{5}$ 13) 2 14) n

2.3 Par exemple

1) $f(x) = \dfrac{3x-6}{x-2}$ 2) $f(x) = \dfrac{7x+7}{x+1}$

3) $f(x) = \dfrac{-5x}{x}$ 4) $f(x) = \dfrac{4-x}{x-4}$

2.4 1) 2 2) $\frac{1}{4}$ 3) -1 4) -4

2.5 1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

5) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ 6) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ 7) 3 8) $\dfrac{-2}{3}$

9) 2 10) $\frac{5}{3}$ 11) $\frac{1}{8}$ 12) $-2\sqrt{3}$

2.6 1) $D_f = [-2\,;+\infty[\ \setminus \{2\}$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{4}$

2) $D_f = [-7\,;+\infty[\ \setminus \{2\}$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\frac{1}{6}$

3) $D_f = [-\frac{3}{2}\,;+\infty[\ \setminus \{1\}$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\frac{9}{10}$

4) $D_f = \mathbb{R}^*$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

2.7 1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 2$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -2$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 1$

2.10 1) 2 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{1}{20}$ 4) $\frac{1}{2}$ 5) $\frac{7}{3}$

6) a 7) 1 8) 1 9) -1 10) 1

2.11 1) $\cos(a)$ 2) $-\sin(a)$ 3) $-\cot(a)$

2.12 1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) 2 4) $\frac{1}{2}$

5) — 6) $\frac{8}{9}$ 7) — 8) 0

2.13 1) 0 2) 0

2.15 $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2.16 0

2.17 $\frac{1}{2}$

2.18 $-\frac{1}{3}$

2.19 n^2 et $n(n-1)$

2.20 oui

2.21 oui

2.22 non

2.23 oui si $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$; non sinon

2.24 1) 0,74 2) 0,64 3) $-1{,}64$

4) 0,14 5) 4,50 6) 2,03

2.28 1) $g(x) = x - 1$ 2) non

3) $g(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+1} + 2}$ 4) $g(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{2}}$

5) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 6) non

2.29 11,30 cm

2.30 Les traits de graduation doivent être placés à

33,50 cm ; 55,13 cm ; 75 cm ; 94,87 cm et 116,50 cm

2.31 1) 5'633 francs 2) 5 %

2.32 1) $+\infty$ 2) — 3) $+\infty$ 4) $-\infty$

5) $+\infty$ 6) $-\infty$ 7) $+\infty$ 8) $+\infty$

2.33 1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

2) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{3}{2}$;

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\,;4\}$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\,;5\}$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

2.34 $\lim\limits_{\substack{v \to c \\ <}} L(v) = 0$; $\lim\limits_{\substack{v \to c \\ <}} m(v) = +\infty$

2.35 1) $+\infty$ et $-\infty$ 2) 0 et 0 3) $+\infty$ et $-\infty$

4) $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$ 5) 2 et 2 6) $-\frac{3}{4}$ et $-\frac{3}{4}$

7) 0 et 0 8) 2 et 2

2.36 1) $\frac{1}{2}$ et $+\infty$ 2) 2 et -2 3) $+\infty$ et $-\infty$

4) 2 et 2 5) 1 et 1 6) 0 et 0

7) 2 et 2 8) $+\infty$ et $-\infty$ 9) $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$

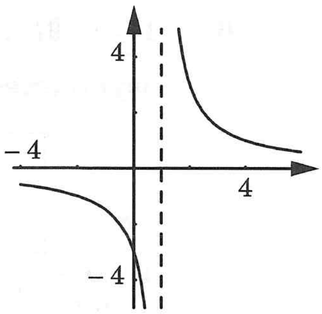
10) 0 et $-\infty$ 11) 1 et -1 12) 0 et -2

13) 0 et 4 14) $\frac{1}{2}$ et —

2.37 1 et 1

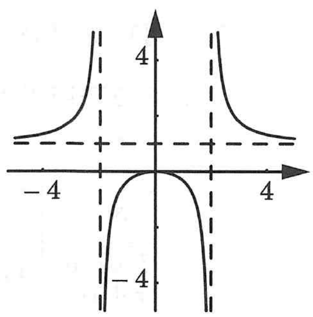
2.38 1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
asymptotes $x = 1$ et $y = 0$

x		1	
$\delta(x)$	$-$		+
Position relative	dessous		dessus



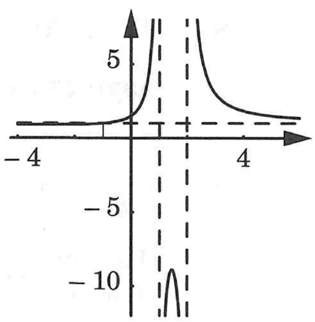
2) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$;
asymptotes $x = -2$, $x = 2$ et $y = 1$

x		-2		2	
$\delta(x)$	+		$-$		+
Position relative	dessus		dessous		dessus



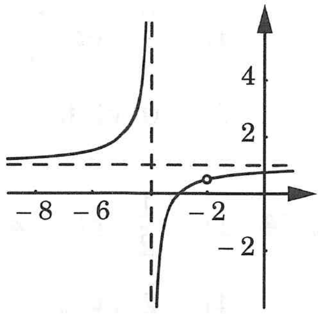
3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\}$;
asymptotes $x = 1$, $x = 2$ et $y = 1$

x		-1		1		2	
$\delta(x)$	$-$	0	+		$-$		+
Position relative	dessous	coupe	dessus		dessous		dessus



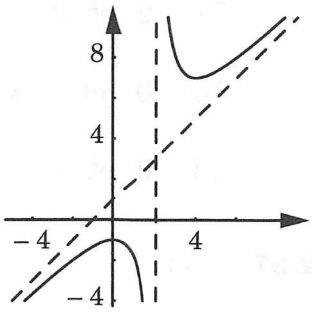
4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;-4\}$;
asymptotes $x = -4$ et $y = 1$

x		-4		-2	
$\delta(x)$	$+$		$-$		$-$
Position relative	dessus		dessous		dessous



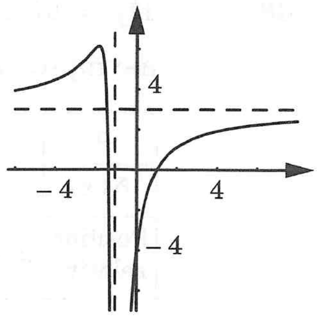
5) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
asymptotes $x = 2$ et $y = x + 1$

x		2	
$\delta(x)$	$-$		$+$
Position relative	dessous		dessus



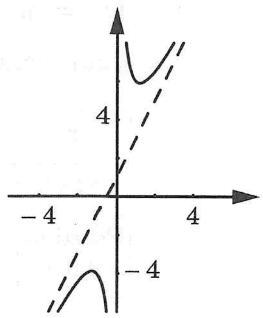
6) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
asymptotes $x = -1$ et $y = 3$

x		$-\frac{7}{5}$		-1	
$\delta(x)$	$+$	0	$-$		$-$
Position relative	dessus	coupe	dessous		dessous



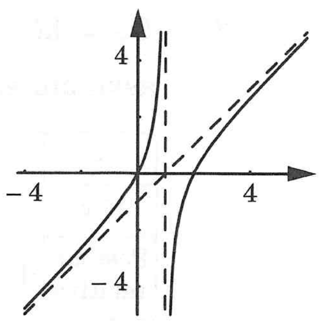
7) $D_f = \mathbb{R}^*$;
asymptotes $x = 0$ et $y = 2x + 1$

x		0	
$\delta(x)$	$-$		$+$
Position relative	dessous		dessus



8) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
asymptotes $x = 1$ et $y = x - 1$

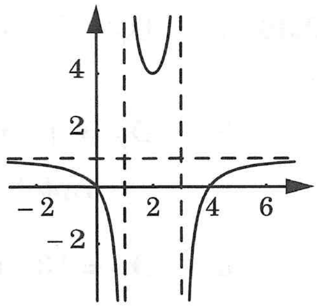
x		1	
$\delta(x)$	$+$		$-$
Position relative	dessus		dessous



9) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$;

asymptotes $x = 1$, $x = 3$ et $y = 1$

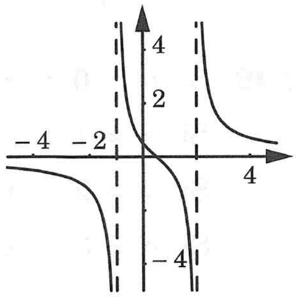
x		1		3	
$\delta(x)$	$-$		$+$		$-$
Position relative	dessous		dessus		dessous



10) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 2\}$;

asymptotes $x = -1$, $x = 2$ et $y = 0$

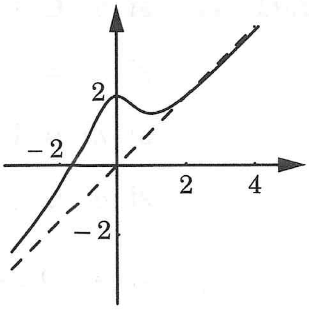
x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
$\delta(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
Position relative	dessous		dessus	coupe	dessous		dessus



11) $D_f = \mathbb{R}$;

asymptote $y = x$

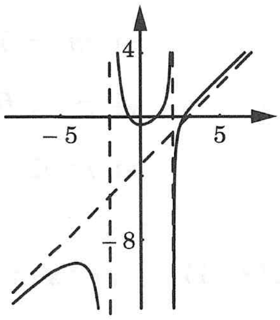
x		2	
$\delta(x)$	$+$	0	$-$
Position relative	dessus	coupe	dessous



12) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$;

asymptotes $x = -2$, $x = 2$ et $y = x - 3$

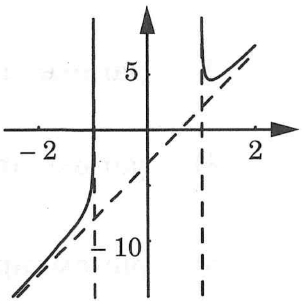
x		-2		2		$\frac{5}{2}$	
$\delta(x)$	$-$		$+$		$-$	0	$+$
Position relative	dessous		dessus		dessous	coupe	dessus



13) $D_f =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$;

asymptotes $x = -1$, $x = 1$ et $y = 5x - 3$

x		-1		1	
$\delta(x)$	$+$				$+$
Position relative	dessus				dessus



2.39 1) $D_f =]-\infty\,;-1[\ \cup\ [0\,;+\infty[$. Asymptotes $x = -1$ et $y = x - \frac{1}{2}$

2) $D_f =]-\infty\,;-1]\ \cup\ [1\,;+\infty[$. Asymptote vers $-\infty$: $y = 0$, Asymptote vers $+\infty$: $y = 2x$.

3) $D_f =]3\,;+\infty[$. Asymptotes $x = 3$ et $y = 0$ vers $+\infty$.

4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Asymptotes $x = 3$ et $y = 0$.

2.40 Si $n = 0$: $x = -3$, $x = 3$ et $y = 0$;
Si $n = 1$: $x = 3$ et $y = 0$;
Si $n = 2$: $x = -3$, $x = 3$ et $y = 1$;
Si $n = 3$: $x = -3$, $x = 3$ et $y = x$;
Si $n > 3$: $x = -3$, $x = 3$.

2.41 1) si $m \in]-\infty\,;-2[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$: $x = -m \pm \sqrt{m^2+m-2}$ et $y = 1$;
si $m = -2$: $x = 2$ et $y = 1$;
si $m = 1$: $x = -1$ et $y = 1$;
si $m \in]-2\,;1[$: $y = 1$.

2) si $m \in]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$: $x = -m \pm \sqrt{m^2+m-2}$ et $y = mx-2m^2$;
si $m = -2$: $x = 2$ et $y = -2x-8$;
si $m = 1$: $x = -1$ et $y = x-2$;
si $m = 0$: $y = 0$;
si $m \in]-2\,;1[$: $y = mx-2m^2$.

2.42 1) par exemple $f(x) = 3x-5+\dfrac{1}{x}$;

2) par exemple $f(x) = \dfrac{-2x}{x+1}$;

3) par exemple $f(x) = \dfrac{1}{x-7}$;

4) par exemple $f(x) = \dfrac{1}{x^2+7x-30}$;

5) par exemple $f(x) = -2x+5+\dfrac{1}{x-5}$;

2.43 $a = -2$, $b = -5$, $c = 8$ et $d = 3$

2.44 Par exemple $f(x) = \dfrac{-x^2+4x+5}{2x-2}$

2.45 Par exemple $f(x) = 3x - 7 + \dfrac{756}{x^2+x-2}$

2.46 Par exemple $f(x) = \dfrac{15x^2-72x+91}{5x-20}$

2.47 1) volume total : $10+10t$ litres ; quantité de sel : $50t$ grammes

2) 5 g/litre

2.48 $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \dfrac{1}{2}$

2.49

1) 0	2) 1	3) 1	4) $\dfrac{1}{2}$
5) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$	*6)* n	7) 2	8) 0
9) $\dfrac{-2}{\pi}$	10) —	11) $+\infty$	12) —

2.50 1) $x = -1$ et $y = 0$;

2) $x = 1$, $y = \sqrt{2}$ vers $+\infty$ et $y = -\sqrt{2}$ vers $-\infty$;

3) —

4) $x = 0$, $y = x$ vers $+\infty$;

5) $y = 4x$ vers $+\infty$, $y = 2x$ vers $-\infty$;

6) $x = 3$, $y = 2x+6$ vers $+\infty$ et $y = 0$ vers $-\infty$

7) $y = -1$ vers $+\infty$ et $y = x$ vers $-\infty$;

2.51

1) $x = 4$ et $y = 2$	2) $x = 2$ et $y = 4$
3) $x = \pm 2$ et $y = 2$	4) $x = 4$ et $y = 4$
5) $x = \dfrac{5}{3}$ et $y = 2$	6) $x = 4$ et $y = 5$
7) $x = \dfrac{15}{2}$ et $y = -\dfrac{3}{2}$	8) $x = 4$ et $y = 6x+19$

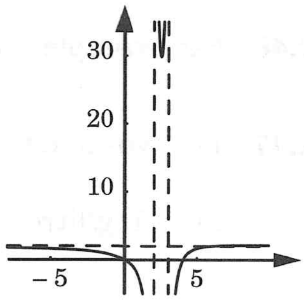
2.52 1) $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ 2) 0 et 0

3) 1 et 1 4) 1 et -1

2.53 1) $D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{2\,;3\}$;

asymptotes $x = 2$, $x = 3$ et $y = 2$

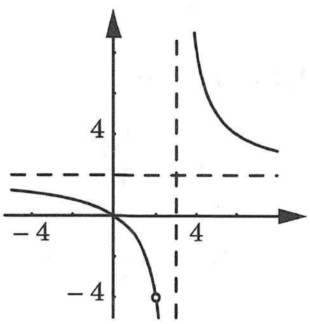
x		2		3		6	
$\delta(x)$	$-$		$+$		$-$	0	$+$
Position relative	dessous		dessus		dessous	coupe	dessus



2) $D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{2\,;3\}$;

asymptotes $x = 3$ et $y = 2$

x		2		3	
$\delta(x)$	$-$		$-$		$+$
Position relative	dessous		dessous		dessus



2.54 5,342 cm

2.55 9,940 m ou 1,110 m .

2.56 $t = 4{,}385\ \%$

2.57 283,6°

2.58 2,39 cm ou 7,42 cm