Analyse - §3(1) et §4(1) : dérivée et applications

Série A — Série B

Exercice 1. (1+1+2+2=6 pts)

Série A

a) $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} = -\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

b) $\dfrac{1}{2}\,(5-2x)^{-1/2}\cdot(-2) = -\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$

c) $\dfrac{-\sin(x)-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{[1+\sin(x)]^2} = -\dfrac{1}{1+\sin(x)}$

d) $\dfrac{3(x+2)^2(1-x)^2-(x+2)^3\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} =$

$= \dfrac{(x+2)^2(1-x)[3(1-x)+2(x+2)]}{(1-x)^4} =$

$= \dfrac{(x+2)^2(7-x)}{(1-x)^3}$

Série B

a) $-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^7}} = -\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$

b) $\dfrac{1}{2}\,(7-3x)^{-1/2}\cdot(-3) = -\dfrac{3}{2\sqrt{7-3x}}$

c) $\dfrac{\cos(x)+\cos^2(x)+\sin^2(x)}{[1+\cos(x)]^2} = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$

d) $\dfrac{3(x+1)^2(2-x)^2-(x+1)^3\cdot 2(2-x)\cdot(-1)}{(2-x)^4} =$

$= \dfrac{(x+1)^2(2-x)[3(2-x)+2(x+1)]}{(2-x)^4} =$

$= \dfrac{(x+1)^2(8-x)}{(2-x)^3}$

Exercice 2. (3 pts)

$$[\cos(x)]' = \lim_{h\to 0}\ \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\ \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\ \frac{\cos(x)[\cos(h)-1]}{h} - \lim_{h\to 0}\ \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} =$$

$$= \cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot 1 =$$

$$= -\sin(x)$$

Exercice 3. (3 pts)

- point de tangence : $T(-2\,;-11)$

- dérivée : $f'(x) = \dfrac{14}{(x+3)^2}$

- pente : $m_{-2} = f'(-2) = 14$

- une équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ en T est :

$(t) : y = 14 \cdot x + h$ passe par $T(-2\,;-11)$

$\Rightarrow -11 = 14 \cdot (-2) + h \Rightarrow h = 17$

$\Rightarrow (t) : y = 14x + 17$

- point de tangence : $T(-4\,;-15)$

- dérivée : $f'(x) = \dfrac{17}{(x+5)^2}$

- pente : $m_{-4} = f'(-4) = 17$

- une équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ en T est :

$(t) : y = 17 \cdot x + h$ passe par $T(-4\,;-15)$

$\Rightarrow -15 = 17 \cdot (-4) + h \Rightarrow h = 53$

$\Rightarrow (t) : y = 17x + 53$

Exercice 4. (3 pts)

$g'(x) = -4x^3 + 9x^2 - 6x + 4$

$g''(x) = -12x^2 + 18x - 6 = -6(2x-1)(x-1)$

- $Z_{g''} = \{1/2\,;1\}$

Tableau de courbure :

x		$1/2$		1	
$\text{sgn}\,(g'')$	$-$	0	$+$	0	$-$
courbure de g	$\cap$	p.i.	$\cup$	p.i.	$\cap$

Points d'inflexion : $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{57}{16}\right)$; $(1\,;5)$

$g'(x) = -4x^3 + 9x^2 - 6x + 3$

$g''(x) = -12x^2 + 18x - 6 = -6(2x-1)(x-1)$

- $Z_{g''} = \{1/2\,;1\}$

Tableau de courbure :

x		$1/2$		1	
$\text{sgn}\,(g'')$	$-$	0	$+$	0	$-$
courbure de g	$\cap$	p.i.	$\cup$	p.i.	$\cap$

Points d'inflexion : $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{97}{16}\right)$; $(1\,;7)$

Exercice 5. (2.5+2.5=5 pts)

a) • x = longueur côté base carrée caisse
y = hauteur caisse

• maximiser un volume : $V(x;y) = x^2y$

• Coût : $20 \cdot x^2 + 10 \cdot 4xy + 10 \cdot x^2 = 490.- \Rightarrow$

$\Rightarrow y(40x) = 490 - 30x^2$

$$\Rightarrow y = \frac{49-3x^2}{4x} = \frac{49}{4x} - \frac{3}{4}x$$

$$\bullet\ V(x) = x^2\left(\frac{49}{4x} - \frac{3}{4}x\right) = \frac{49}{4}x - \frac{3}{4}x^3 =$$

$$= \frac{x}{4}(49 - 3x^2) \text{ avec } x \in \left]\,0; \tfrac{7}{\sqrt{3}}\right[$$

b) $\bullet\ V'(x) = \frac{49}{4} - \frac{9}{4}x^2 = \frac{1}{4}(7+3x)(7-3x)$

$\bullet\ Z_{V'} = \left\{-\frac{7}{3}\,;\frac{7}{3}\right\}$

Tableau de variation :

x		$-7/3$		$7/3$	
sgn (V')	$-$	0	$+$	0	$-$
variation de V	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

• Le volume de la caisse est maximal avec les dimensions : $\frac{7}{3} \times \frac{7}{3} \times \frac{7}{2}$ m.

• x = longueur côté base carrée caisse
y = hauteur caisse

• maximiser un volume : $V(x;y) = x^2y$

• Coût : $20 \cdot x^2 + 10 \cdot 4xy + 10 \cdot x^2 = 250.- \Rightarrow$

$\Rightarrow y(40x) = 250 - 30x^2$

$$\Rightarrow y = \frac{25-3x^2}{4x} = \frac{25}{4x} - \frac{3}{4}x$$

$$\bullet\ V(x) = x^2\left(\frac{25}{4x} - \frac{3}{4}x\right) = \frac{25}{4}x - \frac{3}{4}x^3 =$$

$$= \frac{x}{4}(25 - 3x^2) \text{ avec } x \in \left]\,0; \tfrac{5}{\sqrt{3}}\right[$$

$\bullet\ V'(x) = \frac{25}{4} - \frac{9}{4}x^2 = \frac{1}{4}(5+3x)(5-3x)$

$\bullet\ Z_{V'} = \left\{-\frac{5}{3}\,;\frac{5}{3}\right\}$

Tableau de variation :

x		$-5/3$		$5/3$	
sgn (V')	$-$	0	$+$	0	$-$
variation de V	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

• Le volume de la caisse est maximal avec les dimensions : $\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{2}$ m.