## Exercice 4.

a)

$$\begin{aligned} & x^3+2x^2-x-2=0 && \mid \text{ groupements} \\ \Longleftrightarrow\ & x^2(x+2)-(x+2)=0 && \mid \\ \Longleftrightarrow\ & (x+2)(x^2-1)=0 && \mid\ a^2-b^2=... \\ \Longleftrightarrow\ & (x+2)(x+1)(x-1)=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\{-2\,;-1\,;1\}}$$

b)

$$\begin{aligned} & x^3-3x^2-4x+12=0 && \mid \text{ groupements} \\ \Longleftrightarrow\ & x^2(x-3)-4(x-3)=0 && \mid \\ \Longleftrightarrow\ & (x-3)(x^2-4)=0 && \mid\ a^2-b^2=... \\ \Longleftrightarrow\ & (x-3)(x+2)(x-2)=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\{-2\,;2\,;3\}}$$

c)

$$\begin{aligned} & 4x^5-12x^4+9x^3=0 && \mid \text{ mise en évidence} \\ \Longleftrightarrow\ & x^3(4x^2-12x+9)=0 && \mid\ a^2-2ab+b^2=... \\ \Longleftrightarrow\ & x^3(2x-3)^2=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\{0\,;3/2\}}$$

d)

$$\begin{aligned} & 16x^3-16x^2-4x+4=0 && \mid \text{ mise en évidence} \\ & 4(4x^3-4x^2-x+1)=0 && \mid \text{ groupements} \\ \Longleftrightarrow\ & 4[4x^2(x-1)-(x-1)]=0 && \mid \\ \Longleftrightarrow\ & 4(x-1)(4x^2-1)=0 && \mid\ a^2-b^2=... \\ \Longleftrightarrow\ & 4(x-1)(2x+1)(2x-1)=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\{-1/2\,;1/2\,;1\}}$$

## Exercice 5.

a) $p(x) = x^3 - 7x + 6$

- candidats (diviseurs de 6) : $\pm 1\,;\pm 2\,;\pm 3\,;\pm 6$

- $p(1) = 1 - 7 + 6 = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 1$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + x - 6 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} & x^3 - 7x + 6 = 0 && \mid \text{ Horner} \\ \iff & (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 && \mid \text{ méthode somme-produit} \\ \iff & (x-1)(x+3)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{-3\,;1\,;2\}}$$

b) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

- candidats (diviseurs de 2) : $\pm 1\,;\pm 2$

- $p(1) = 1 + 3 + 3 + 2 = 9 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) = -1 + 3 - 3 + 2 = 1 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  $p(2) = 8 + 12 + 6 + 2 = 28 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 2$
  $p(-2) = -8 + 12 - 6 + 2 = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x + 2$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & & -2 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0 && \mid \text{ Horner} \\ \iff & (x+2)(x^2 + x + 1) = 0 && \mid \ \Delta = -3 < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{-2\}}$$

c) $p(x) = 8x^3 - 4x + 1$

- candidats (diviseurs de 1) : $\pm 1$

- $p(1) = 8 - 4 + 1 = 5 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) = -8 + 4 + 1 = -3 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  Théorème 3b) p.75 : $p(1/2) = 1 - 2 + 1 = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - \dfrac{1}{2}$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 8 & 0 & -4 & 1 \\ \frac{1}{2} & & 4 & 2 & -1 \\ \hline & 8 & 4 & -2 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = 8x^2 + 4x - 2 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} & 8x^3 - 4x + 1 = 0 && \mid \text{ Horner} \\ \iff & (x - 1/2)(8x^2 + 4x - 2) = 0 && \mid \text{ mise en évidence} \\ \iff & 2(x - 1/2)(4x^2 + 2x - 1) = 0 && \mid \ \Delta = 20 > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \ ; \ x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{5})}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left\{ \frac{1}{2} \ ; \ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \right\}}$$

d) $p(x) = 2x^3 - 9x^2 - 2x + 24$

- candidats (diviseurs de 24) : $\pm 1\,; \pm 2\,; \pm 3\,; \pm 4\,; \pm 6\,; \pm 8\,; \pm 12\,; \pm 24$

- $p(1) = 2 - 9 - 2 + 24 = 15 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) = -2 - 9 + 2 + 24 = 15 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  $p(2) = 16 - 36 - 4 + 24 = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 2$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -9 & -2 & 24 \\ 2 & & 4 & -10 & -24 \\ \hline & 2 & -5 & -12 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = 2x^2 - 5x - 12 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} & 2x^3 - 9x^2 - 2x + 24 = 0 && \mid \text{ Horner} \\ \iff & (x - 2)(2x^2 - 5x - 12) = 0 && \mid \text{ méthode tâtonnement} \\ \iff & (x - 2)(2x + 3)(x - 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{-3/2\,; 2\,; 4\}}$$

## Exercice 6.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

- Factorisation de $f(x)$ :

$$\begin{array}{rll} & x^3 + 2x^2 - x - 2 & \mid \text{ groupements} \\ \iff & x^2(x+2) - 1(x+2) & \mid \\ \iff & (x+2)(x^2-1) & \mid \ A^2 - B^2 = ... \\ \iff & (x+2)(x+1)(x-1) & \end{array}$$

- $Z_f = \{-2\,;-1\,;1\}$

- Tableau de signes de $f$ :

| $x$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\text{sgn}(f)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

b) $f(x) = (x^3 - x^2 + x) \cdot (2 - x)$

- Fin de la factorisation de $f(x)$ :

$$\begin{array}{rll} & (x^3 - x^2 + x)(2-x) & \mid \text{ mise en évidence} \\ \iff & x(x^2 - x + 1)(2-x) & \mid \ \Delta = -3 < 0 \end{array}$$

- $Z_f = \{0\,;2\}$

- Tableau de signes de $f$ :

| $x$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x^2-x+1$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $2-x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\text{sgn}(f)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

c) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

- candidats (diviseurs de 4) : $\pm1\,;\pm2\,;\pm4$
  $f(1) \neq 0 \iff f(x)$ n'est pas divisible par $x-1$
  $f(-1) = 0 \iff f(x)$ est divisible par $x+1$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + 4x + 4 \quad ; \quad r = 0$$

- Factorisation de $f(x)$ :

$$\begin{array}{ll} x^3 + 5x^2 + 8x + 4 & \mid \text{ Horner} \\ \iff (x+1)(x^2+4x+4) & \mid \ A^2 + 2AB + B^2 = ... \\ \iff (x+1)(x+2)^2 & \end{array}$$

- $Z_f = \{-2\,;-1\}$

- Tableau de signes de $f$ :

| $x$ | | $-2$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $(x+2)^2$ | $+$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| sgn($f$) | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

- candidats (diviseurs de 1) : $\pm1$
  $f(1) \neq 0 \iff f(x)$ n'est pas divisible par $x-1$
  $f(-1) = 0 \iff f(x)$ est divisible par $x+1$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + 2x + 1 \quad ; \quad r = 0$$

- Factorisation de $f(x)$ :

$$\begin{array}{ll} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 & \mid \text{ Horner} \\ \iff (x+1)(x^2+2x+1) & \mid \ A^2 + 2AB + B^2 = ... \\ \iff (x+1)(x+1)^2 = (x+1)^3 & \end{array}$$

- $Z_f = \{\,-1\,\}$

- Tableau de signes de $f$ :

| $x$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| sgn($f$) | $-$ | 0 | $+$ |

e) $f(x) = x(x+2)^2 \cdot (2-x^2) \cdot (x^2-1) \cdot (3-2x)$

- Fin de la factorisation de $f(x)$ :

$$\begin{aligned} & x(x+2)^2 \cdot (2-x^2) \cdot (x^2-1) \cdot (3-2x) && \mid \quad A^2 - B^2 = ... \\ \Longleftrightarrow\ & x(x+2)^2 \cdot (\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x) \cdot (x+1)(x-1) \cdot (3-2x) \end{aligned}$$

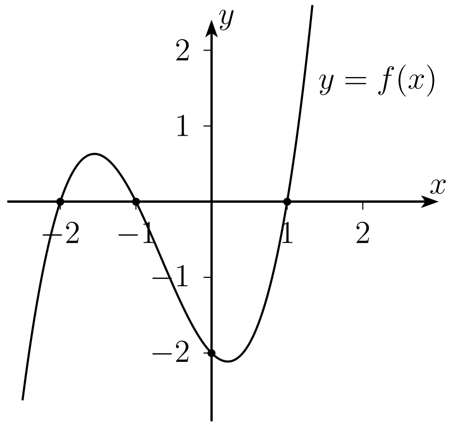
- $Z_f = \{-2\,; -\sqrt{2}\,; -1\,; 0\,; 1\,; \sqrt{2}\,; 3/2\}$

- Tableau de signes de $f$ :

| $x$ | | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{2}$ | | $3/2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(x+2)^2$ | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $\sqrt{2}+x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $\sqrt{2}-x$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $3-2x$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\text{sgn}(f)$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

## Exercice 7.

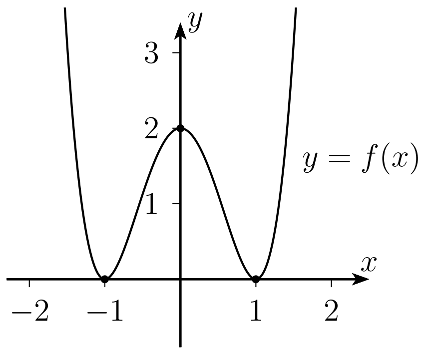
a)




- Le graphe de $f$ a deux "bosses", donc la fonction $f$ est de degré 3.
- $Z_f = \{-2\ ; -1\ ; 1\} \Rightarrow f(x) = k(x+2)(x+1)(x-1)$
- $f(0) = -2 \Rightarrow f(0) = k \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2 \iff -2k = -2 \iff k = 1$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)}$

b)




- Le graphe de $f$ a trois "bosses", donc la fonction $f$ est de degré 4.
- $Z_f = \{-1\ ; 1\} \Rightarrow f(x) = k(x+1)^2(x-1)^2$
- $f(0) = 2 \Rightarrow f(0) = k \cdot 1 \cdot 1 = 2 \iff k = 2$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = 2(x+1)^2(x-1)^2}$

## Exercice 11.

a) • $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad ; \quad d(x) = x - 1$

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$q(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \quad ; \quad r(x) = 5$$

• division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & +1 & x-1 \\ \cline{6-6} -x^4 & +x^3 & & & & x^3+2x^2+3x+4 \\ \cline{1-2} & 2x^3 & +x^2 & & & \\ & -2x^3 & +2x^2 & & & \\ \cline{2-3} & & 3x^2 & +x & & \\ & & -3x^2 & +3x & & \\ \cline{3-4} & & & 4x & +1 & \\ & & & -4x & +4 & \\ \cline{4-5} & & & & 5 & \end{array}$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{p(x) = (x-1)(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) + 5}$

b) • $p(x) = x^5 + 1 \quad ; \quad d(x) = x + 1$

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \quad ; \quad r(x) = 0$$

• division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrr|l} x^5 & & & & & +1 & x+1 \\ \cline{7-7} -x^5 & -x^4 & & & & & x^4-x^3+x^2-x+1 \\ \cline{1-2} & -x^4 & & & & & \\ & x^4 & +x^3 & & & & \\ \cline{2-3} & & x^3 & & & & \\ & & -x^3 & -x^2 & & & \\ \cline{3-4} & & & -x^2 & & & \\ & & & x^2 & +x & & \\ \cline{4-5} & & & & x & +1 & \\ & & & & -x & -1 & \\ \cline{5-6} & & & & & 0 & \end{array}$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{p(x) = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}$

c) • $p(x) = 3x^5 - 8x^4 + 7x^3 + x^2 - 5x + 6 \quad ; \quad d(x) = x + 2$
• schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & 3 & -8 & 7 & 1 & -5 & 6 \\
-2 & & -6 & 28 & -70 & 138 & -266 \\
\hline
 & 3 & -14 & 35 & -69 & 133 & -260
\end{array}$$

$$q(x) = 3x^4 - 14x^3 + 35x^2 - 69x + 133 \quad ; \quad r(x) = -260$$

• division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -8x^4 & +7x^3 & +x^2 & -5x & +6 & x+2 \\
\cline{7-7}
-3x^5 & -6x^4 & & & & & 3x^4 - 14x^3 + 35x^2 - 69x + 133 \\
\cline{1-2}
 & -14x^4 & +7x^3 & & & & \\
 & 14x^4 & +28x^3 & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 35x^3 & +x^2 & & & \\
 & & -35x^3 & -70x^2 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & -69x^2 & -5x & & \\
 & & & 69x^2 & +138x & & \\
\cline{4-5}
 & & & & 133x & +6 & \\
 & & & & -133x & -266 & \\
\cline{5-6}
 & & & & & -260 &
\end{array}$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{p(x) = (x+2)(3x^4 - 14x^3 + 35x^2 - 69x + 133) - 260}$

---

## Exercice 12.

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrrr|r}
 & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \\
1 & & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\
\hline
 & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 & 0
\end{array}$$

$$q(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 \quad ; \quad r(x) = 0$$

• E.F. : $\boxed{x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 = (x-1)(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)}$

• Le reste vaut 0 $\Rightarrow x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$ est divisible par $x - 1$.

## Exercice 13.

a) • $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 \quad ; \quad d(x) = x - 2$

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^3 - x^2 - 1 \quad ; \quad r(x) = 0$$

• E.F. : $f(x) = (x - 2)(x^3 - x^2 - 1)$

• $\boxed{f(2) = (2 - 2) \cdot q(2) = 0}$

b) • $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^2 + 2 \quad ; \quad d(x) = x + 2$

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrrr|r} & 1 & -3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & & -2 & 10 & -24 & 48 & -94 & 188 \\ \hline & 1 & -5 & 12 & -24 & 47 & -94 & 190 \end{array}$$

$$q(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 47x - 94 \quad ; \quad r(x) = 190$$

• E.F. : $f(x) = (x + 2)(x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 47x - 94) + 190$

• $\boxed{f(-2) = (-2 + 2) \cdot q(-2) + 190 = 190}$

c) • $f(x) = 6x^7 - 3x^6 - 24x^5 + 4x^4 + x^3 - 7x^2 + 3x \quad ; \quad d(x) = x - 3$

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrrrr|r} & 6 & -3 & -24 & 4 & 1 & -7 & 3 & 0 \\ 3 & & 18 & 45 & 63 & 201 & 606 & 1797 & 5400 \\ \hline & 6 & 15 & 21 & 67 & 202 & 599 & 1800 & 5400 \end{array}$$

$$q(x) = 6x^6 + 15x^5 + 21x^4 + 67x^3 + 202x^2 + 599x + 1'800 \quad ; \quad r(x) = 5'400$$

• E.F. : $f(x) = (x - 3) \cdot q(x) + 5'400$

• $\boxed{f(3) = (3 - 3) \cdot q(3) + 5'400 = 5'400}$

d) • $f(x) = 3x^3 - x^2 + x + 9 \quad ; \quad d(x) = x + 2$

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -1 & 1 & 9 \\ -2 & & -6 & 14 & -30 \\ \hline & 3 & -7 & 15 & -21 \end{array}$$

$$q(x) = 3x^2 - 7x + 15 \quad ; \quad r(x) = -21$$

• E.F. : $f(x) = (x + 2)(3x^2 - 7x + 15) - 21$

• $\boxed{f(-2) = (-2 + 2) \cdot q(-2) - 21 = -21}$

## Exercice 29.

- $p(x) = 5x^{100} + 7x^5 - x + 47 \quad ; \quad d(x) = x - 1$
- $Z_d = \{1\}$
- $r = p(1) = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 1 + 47 = 58 \Rightarrow \boxed{\text{reste} = 58}$

---

## Exercice 30.

- $p(x) = 3x^{100} + 5x^{85} - 4x^{38} + 2x^{17} - 6 \quad ; \quad d(x) = x + 1$
- $Z_d = \{-1\}$
- $r = p(-1) = 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 6 = -14 \Rightarrow \boxed{\text{reste} = -14}$

---

## Exercice 14.

- $p(x) = x^4 - ax^3 + 3x^2 - 2ax - a^2$ est divisible par $d(x) = x - 2 \iff r = 0$
- $Z_d = \{2\}$
- $r = p(2) = 16 - a \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 2a \cdot 2 - a^2 = 0 \iff$

$\iff a^2 + 12a - 28 = 0 \iff (a + 14)(a - 2) = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = -14 \text{ ou } a_2 = 2}$

- schéma de Horner pour $a_1 = -14$ :

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 14 & 3 & 28 & -196 \\ 2 & & 2 & 32 & 70 & 196 \\ \hline & 1 & 16 & 35 & 98 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{q_1(x) = x^3 + 16x^2 + 35x + 98} \quad ; \quad r = 0$$

- schéma de Horner pour $a_2 = 2$ :

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 6 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{q_2(x) = x^3 + 3x + 2} \quad ; \quad r = 0$$

## Exercice 15.

• $p(x) = ax^3 + x^2 + a^2x + 3a^2 + 11$ est divisible par $d(x) = x + 2 \iff r = 0$

• $Z_d = \{-2\}$

• $r = p(-2) = a \cdot (-8) + 4 + a^2 \cdot (-2) + 3a^2 + 11 = 0 \iff$

$\iff a^2 - 8a + 15 = 0 \iff (a-3)(a-5) = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 3 \text{ ou } a_2 = 5}$

• schéma de Horner pour $a_1 = 3$ :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & 1 & 9 & 38 \\ -2 & & -6 & 10 & -38 \\ \hline & 3 & -5 & 19 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{q_1(x) = 3x^2 - 5x + 19} \quad ; \quad r = 0$$

• schéma de Horner pour $a_2 = 5$ :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 5 & 1 & 25 & 86 \\ -2 & & -10 & 18 & -86 \\ \hline & 5 & -9 & 43 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{q_2(x) = 5x^2 - 9x + 43} \quad ; \quad r = 0$$

---

## Exercice 16.

• $p(x) = a^2x^3 - 4ax + 3$ est divisible par $d(x) = x - 1 \iff r = 0$

• $Z_d = \{1\}$

• $r = p(1) = a^2 \cdot 1 - 4a \cdot 1 + 3 = 0 \iff$

$\iff a^2 - 4a + 3 = 0 \iff (a-1)(a-3) = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1 \text{ ou } a_2 = 3}$

• schéma de Horner pour $a_1 = 1$ :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & & 1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{q_1(x) = x^2 + x - 3} \quad ; \quad r = 0$$

• schéma de Horner pour $a_2 = 3$ :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 9 & 0 & -12 & 3 \\ 1 & & 9 & 9 & -3 \\ \hline & 9 & 9 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{q_2(x) = 9x^2 + 9x - 3} \quad ; \quad r = 0$$

## Exercice 21.

a) • $f(x) = 3x^3 - x^2 + x + 1 \quad ; \quad g(x) = 2x^2 - 1$

• division euclidienne :
début :

$$\begin{array}{rcrcrcrl|l} & 3x^3 & - & x^2 & + & x & + & 1 & 2x^2 + 0x - 1 \\ \cline{9-9} -( & 3x^3 & + & 0x^2 & - & \frac{3}{2}\,x) & & & \frac{3}{2}\,x - ... \end{array}$$

etc...

en entier :

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & - x^2 & + x & + 1 & 2x^2 - 1 \\ \cline{5-5} - 3x^3 & & + \frac{3}{2}x & & \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ \hline & - x^2 & + \frac{5}{2}x & + 1 & \\ & x^2 & & - \frac{1}{2} & \\ \cline{2-4} & & \frac{5}{2}x & + \frac{1}{2} & \end{array}$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{f(x) = (2x^2 - 1)\left(\frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}\,x + \frac{1}{2}}$

b) • $f(x) = 2x^3 - 1 \quad ; \quad g(x) = 3x^3 - x^2 + x + 1$

• division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & & & - 1 & 3x^3 - x^2 + x + 1 \\ \cline{5-5} - 2x^3 & + \frac{2}{3}x^2 & - \frac{2}{3}x & - \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{2}{3}x^2 & - \frac{2}{3}x & - \frac{5}{3} & \end{array}$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{f(x) = \frac{2}{3}(3x^3 - x^2 + x + 1) + \frac{2}{3}\,x^2 - \frac{2}{3}\,x - \frac{5}{3}}$

c) • $f(x) = 7x^5 - x^4 + 6x^3 - 7x \quad ; \quad g(x) = 7x^3 - x$

• division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
7x^5 - x^4 + 6x^3 & & & -7x & 7x^3 - x \\ \cline{5-5}
-7x^5 \quad\quad + x^3 & & & & x^2 - \frac{1}{7}x + 1 \\ \cline{1-1}
-x^4 + 7x^3 & & & & \\
x^4 \quad & -\frac{1}{7}x^2 & & & \\ \cline{1-2}
7x^3 & -\frac{1}{7}x^2 & -7x & & \\
-7x^3 & & +x & & \\ \cline{1-3}
 & -\frac{1}{7}x^2 & -6x & &
\end{array}
$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{f(x) = (7x^3 - x)\left(x^2 - \frac{1}{7}x + 1\right) - \frac{1}{7}x^2 - 6x}$

d) • $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - 7x^2 \quad ; \quad g(x) = 2x^2 - 3$

• division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +4x^3 & -7x^2 & & & 2x^2 - 3 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & & +9x^2 & & & 3x^2 + 2x + 1 \\ \cline{1-3}
 & 4x^3 & +2x^2 & & & \\
 & -4x^3 & & +6x & & \\ \cline{2-4}
 & & 2x^2 & +6x & & \\
 & & -2x^2 & & +3 & \\ \cline{3-5}
 & & & 6x & +3 &
\end{array}
$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{f(x) = (2x^2 - 3)(3x^2 + 2x + 1) + 6x + 3}$

e) • $f(x) = 14x^4 - 27x^3 + 21x^2 - 3x - 2 \quad ; \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 2$

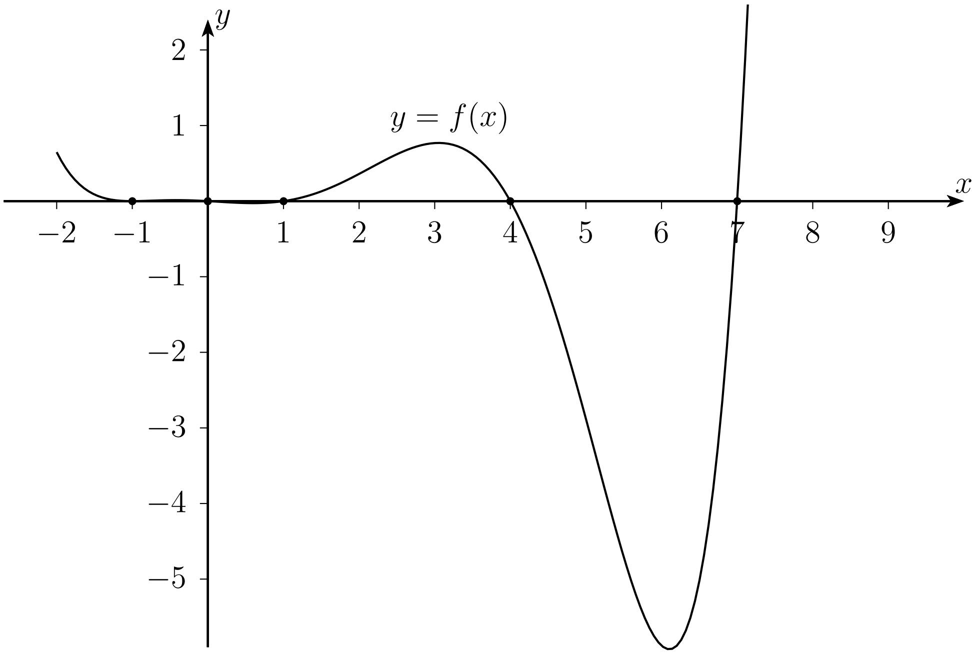
• division euclidienne :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
14x^4 & -27x^3 & +21x^2 & -3x & -2 & 2x^2 - 3x + 2 \\ \cline{6-6}
-14x^4 & +21x^3 & -14x^2 & & & 7x^2 - 3x - 1 \\ \cline{1-3}
 & -6x^3 & +7x^2 & -3x & & \\
 & 6x^3 & -9x^2 & +6x & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^2 & +3x & -2 & \\
 & & 2x^2 & -3x & +2 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{f(x) = (2x^2 - 3x + 2)(7x^2 - 3x - 1)}$

## Exercice 22.

Par exemple :




- Le graphe de $f$ a quatre "bosses", donc la fonction $f$ est de degré 5.

- $Z_f = \{-1\,;0\,;1\,;4\,;7\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = k \cdot x(x+1)(x-1)(x-4)(x-7) \quad ; \quad k \in \mathbb{R}^*}$

## Exercice 20.

- $p(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b \quad ; \quad d(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

- $Z_d = \{2\,;3\}$

- $p(2) = 32 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + a \cdot 2 + b = 0 \iff 2a + b = -104$

- $p(3) = 243 + 2 \cdot 81 + 3 \cdot 27 + 4 \cdot 9 + a \cdot 3 + b = 0 \iff 3a + b = -522$

- On va résoudre le système suivant par substitution :

$$\begin{cases} 2a + b = -104 \\ 3a + b = -522 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + (-3a - 522) = -104 \\ b = -3a - 522 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a - 3a - 522 = -104 \iff -a = 418 \iff a = -418$$

et $b = (-3) \cdot (-418) - 522 = 732$

$$\Rightarrow \boxed{a = -418 \text{ et } b = 732}$$

---

## Exercice 23.

- $p(x)$ est un polynôme de degré 4.

- $-2 \in Z_p \iff p(-2) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x + 2$

- $p(x)$ est divisible par $x + 1$

- $p(x)$ est divisible par $x$

- $p(2) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 2$

$\Rightarrow p(x) = k \cdot x(x+2)(x+1)(x-2)$

- $p(3) = 180 \iff k \cdot 3(3+2)(3+1)(3-2) = 180 \iff 60k = 180 \iff k = 3$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = 3x(x+2)(x+1)(x-2)}$$

## Exercice 24.

• $p(x)$ est un polynôme de degré 5.

• $p(0) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x$

• $2 \in Z_p \iff p(2) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 2$

• $p(x)$ est divisible par $x + 2$

• $p(1) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 1$

• $p(x)$ est divisible par $x - 3$

$\Rightarrow p(x) = k \cdot x(x-2)(x+2)(x-1)(x-3)$

• $p(-3) = 720 \iff k \cdot (-3)(-3-2)(-3+2)(-3-1)(-3-3) = 720 \iff$

$\iff -360k = 720 \iff k = -2$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = -2x(x-2)(x+2)(x-1)(x-3)}$$

---

## Exercice 25.

• $p(x)$ est un polynôme de degré 5.

• $p(0) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x$

• $p(1) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 1$

• $p(x)$ est divisible par $x + 1$

• $p(x)$ est divisible par $x + 2$

• $p(x)$ est divisible par $x - 2$

$\Rightarrow p(x) = k \cdot x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$

• $p(3) = 360 \iff k \cdot 3(3-1)(3+1)(3+2)(3-2) = 360 \iff 120k = 360 \iff k = 3$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = 3x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)}$$

c) INEQ : $N(t) > 180 \iff -t^4 + 21t^2 - 80 > 0$

RES : $\overset{\cdot(-1)}{\iff} t^4 - 21t^2 + 80 < 0 \iff (t^2-5)(t^2-16) < 0 \iff$

$$\iff (t+\sqrt{5})(t-\sqrt{5})(t+4)(t-4) < 0$$

- $p(t) = (t+\sqrt{5})(t-\sqrt{5})(t+4)(t-4)$

- tableau de signes de $p$ :

| $t$ | | $-4$ | | $-\sqrt{5}$ | | $0$ | | $\sqrt{5}$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t+\sqrt{5}$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $t-\sqrt{5}$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $t+4$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $t-4$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\text{sgn}(p)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$\Rightarrow S = ]-4\,;-\sqrt{5}\,[\,\cup\,]\,\sqrt{5}\,;4\,[$

SOL : La population sera supérieure à 180 têtes pour $t \in ]\,\sqrt{5}\,;4\,[$

## Exercice 26.

• $p(x)$ est un polynôme de degré 4.

• $p(0) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x$

• $p(x)$ est divisible par $x - 3$

• $2 \in Z_p \iff p(2) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 2$

$\Rightarrow p_1(x) = k \cdot x^2(x-3)(x-2)$ ou $p_2(x) = k \cdot x(x-3)^2(x-2)$ ou $p_3(x) = k \cdot x(x-3)(x-2)^2$

• $p_1(-3) = -630 \iff k_1 \cdot (-3)^2(-3-3)(-3-2) = -630 \iff 270k_1 = -630$

$\iff k_1 = -\dfrac{630}{270} = -\dfrac{7}{3} \Rightarrow \boxed{p_1(x) = -\dfrac{7}{3}x^2(x-3)(x-2)}$

• $p_2(-3) = -630 \iff k_2 \cdot (-3)(-3-3)^2(-3-2) = -630 \iff 540k_2 = -630$

$\iff k_2 = -\dfrac{630}{540} = -\dfrac{7}{6} \Rightarrow \boxed{p_2(x) = -\dfrac{7}{6}x(x-3)^2(x-2)}$

• $p_3(-3) = -630 \iff k_3 \cdot (-3)(-3-3)(-3-2)^2 = -630 \iff 450k_3 = -630$

$\iff k_3 = -\dfrac{630}{450} = -\dfrac{7}{5} \Rightarrow \boxed{p_3(x) = -\dfrac{7}{5}x(x-3)(x-2)^2}$

---

## Exercice 27.

• $p(x)$ est un polynôme de degré 3.

• $p(x)$ est divisible par $x - 1$

• $-2 \in Z_p \iff p(-2) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x + 2$

$\Rightarrow p(x) = (ax + b)(x - 1)(x + 2)$

• $p(0) = 14 \iff b \cdot (0 - 1)(0 + 2) = 14 \iff -2b = 14 \iff b = -7$

• $p(2) = -12 \iff (2a - 7) \cdot (2 - 1)(2 + 2) = -12 \iff$

$\iff 8a - 28 = -12 \iff 8a = 16 \iff a = 2$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = (2x - 7)(x - 1)(x + 2)}$$

## Exercice 28.

• $p(x)$ est un polynôme de degré 4.

• $p(0) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x$

• $p(x)$ est divisible par $x - 2$

• $3 \in Z_p \iff p(3) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 3$

$\Rightarrow p(x) = x(ax + b)(x - 2)(x - 3)$

• $p(-1) = -24 \iff (-1)(-a + b)(-1 - 2)(-1 - 3) = -24 \iff$

$\iff 12a - 12b = -24 \iff a - b = -2$

• $p(1) = 16 \iff 1(a + b)(1 - 2)(1 - 3) = 16 \iff 2a + 2b = 16 \iff a + b = 8$

• On va résoudre le système suivant par substitution :

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ a + b = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a - (8 - a) = -2 \\ b = 8 - a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a - 8 = -2 \iff 2a = 6 \iff a = 3$$

et $b = 8 - 3 = 5$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = x(3x + 5)(x - 2)(x - 3)}$$

## Exercice 33.

a) $p(x) = 6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(6x^3 + 19x^2 + x - 6)$

- candidats (diviseurs de 6) : $\pm 1\,; \pm 2\,; \pm 3\,; \pm 6$

- $p(1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  $p(2) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 2$
  $p(-2) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 2$
  $p(3) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 3$
  $p(-3) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x + 3$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 6 & 19 & 1 & -6 \\ -3 & & -18 & -3 & 6 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = 6x^2 + x - 2 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} & 6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = 0 && \mid \text{ mise en évidence} \\ \iff & x^2(6x^3 + 19x^2 + x - 6) = 0 && \mid \text{ Horner} \\ \iff & x^2(x+3)(6x^2 + x - 2) = 0 && \mid \text{ méthode tâtonnement} \\ \iff & x^2(x+3)(3x+2)(2x-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left\{-3\,; -\frac{2}{3}\,; 0\,; \frac{1}{2}\right\}}$$

b) $p(x) = 6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1$

- candidats (diviseurs de 1) : $\pm 1$
- $p(1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  Théorème 3b) p.75 : $p(1/3) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - \dfrac{1}{3}$
- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 6 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & & 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 6 & 3 & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = 6x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} & 6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1 = 0 && | \text{ Horner} \\ \iff & (x - 1/3)(6x^3 + 3x^2 + 6x + 3) = 0 && | \text{ mise en évidence} \\ \iff & 3(x - 1/3)(2x^3 + x^2 + 2x + 1) = 0 && | \text{ groupements} \\ \iff & 3[x - 1/3][x^2(2x + 1) + (2x + 1)] = 0 \\ \iff & 3(x - 1/3)(2x + 1)(x^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left\{ -\frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{3} \right\}}$$

c) $p(x) = 3x^4 + 11x^3 + 9x^2 + 2x = x(3x^3 + 11x^2 + 9x + 2)$

- candidats (diviseurs de 2) : $\pm 1 \, ; \pm 2$
- $p(1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  $p(2) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 2$
  $p(-2) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 2$
  Théorème 3b) p.75 : $p(-2/3) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x + \dfrac{2}{3}$
- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & 11 & 9 & 2 \\ -\frac{2}{3} & & -2 & -6 & -2 \\ \hline & 3 & 9 & 3 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = 3x^2 + 9x + 3 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{array}{lll} & 3x^4 + 11x^3 + 9x^2 + 2x = 0 & | \text{ mise en évidence} \\ \iff & x(3x^3 + 11x^2 + 9x + 2) = 0 & | \text{ Horner} \\ \iff & x(x + 2/3)(3x^2 + 9x + 3) = 0 & | \text{ mise en évidence} \\ \iff & 3x(x + 2/3)(x^2 + 3x + 1) = 0 & | \ \Delta = 5 > 0 \\ \Rightarrow & x_1 = 0 \, ; x_2 = -\dfrac{2}{3} \, ; \; x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left\{ -\frac{2}{3} \, ; 0 \, ; \; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}}$$

## Exercice 34.

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

- candidats (diviseurs de 18) : $\pm 1\,;\pm 2\,;\pm 3\,;\pm 6\,;\pm 9\,;\pm 18$
  $f(1) \neq 0 \iff f(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $f(-1) = 0 \iff f(x)$ est divisible par $x + 1$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -1 & -11 & 9 & 18 \\ -1 & & -1 & 2 & 9 & -18 \\ \hline & 1 & -2 & -9 & 18 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18 \quad ; \quad r = 0$$

- Fin de la factorisation de $f(x)$ :

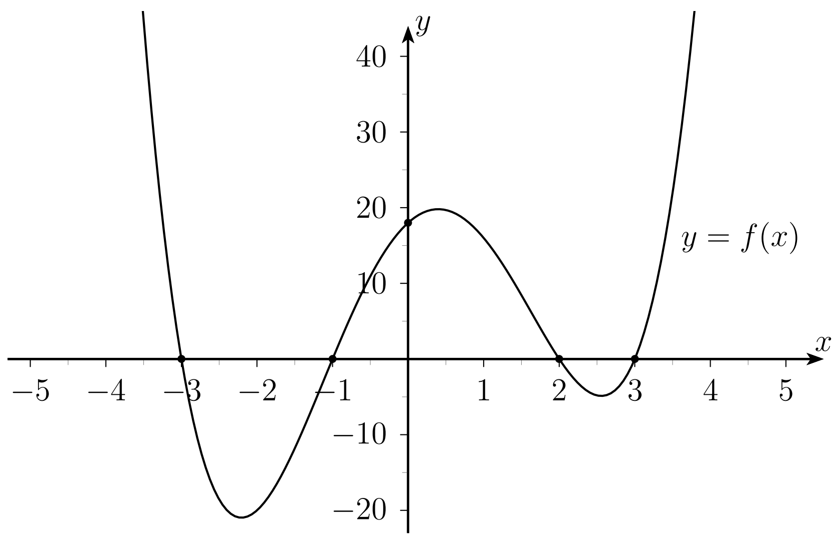
$$\begin{array}{ll} x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 & \mid \text{ Horner} \\ \iff (x+1)(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) & \mid \text{ groupements} \\ \iff (x+1)[x^2(x-2) - 9(x-2)] & \mid \\ \iff (x+1)((x-2)(x^2-9) & \mid\ A^2 - B^2 = ... \\ \iff (x+1)(x-2)(x+3)(x-3) & \end{array}$$

- $Z_f = \{-3\,;-1\,;2\,;3\}$

- Tableau de signes de $f$ :

| $x$ | | $-3$ | | $-1$ | | $2$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| sgn$(f)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

- Graphe de $f$ :



b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

- candidats (diviseurs de 1) : $\pm 1$
  $f(1) = 0 \iff f(x)$ est divisible par $x + 1$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\
1 & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
\hline
 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0
\end{array}$$

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \quad ; \quad r = 0$$

- $q(1) = 0 \iff q(x)$ est divisible par $x - 1$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
1 & & 1 & -3 & 3 & -1 \\
\hline
 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0
\end{array}$$

$$t(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

- Factorisation de $f(x)$ :

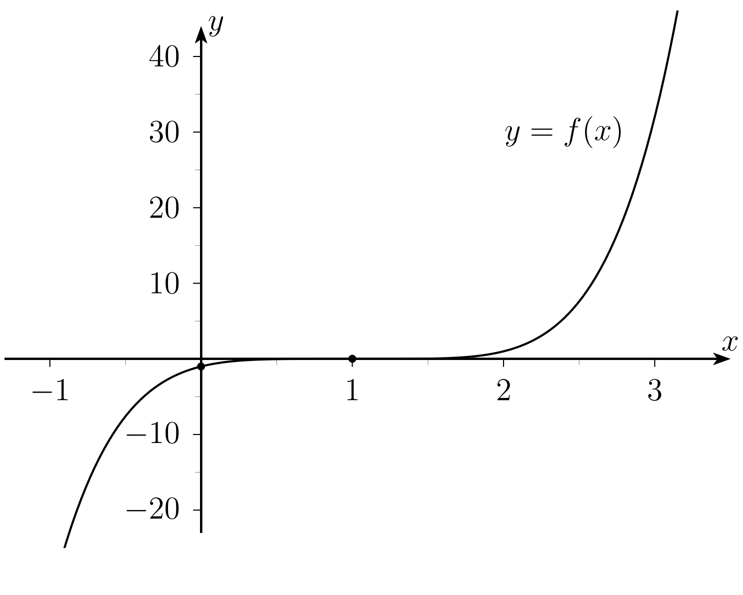
$$\begin{aligned}
& x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 && \mid \text{ Horner} \\
\iff & (x-1)(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) && \mid \text{ Horner} \\
\iff & (x-1)(x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = (x-1)^2(x-1)^3 = (x-1)^5 &&
\end{aligned}$$

- $Z_f = \{\, 1 \,\}$

- Tableau de signes de $f$ :

| $x$ | | 1 | |
|---|---|---|---|
| sgn($f$) | $-$ | 0 | $+$ |

- Graphe de $f$ :



## Exercice 42.

a) • On demande une équation de degré 2.

• $S = \{\,\frac{1}{3}\,;3\} \iff \boxed{a(3x-1)(x-3)=0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*}$

b) • On demande une équation de degré 3.

• $S = \{\,\frac{1}{3}\,;3\} \iff \boxed{a(3x-1)(x-3)^2=0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*}$

ou $\boxed{a(3x-1)^2(x-3)=0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*}$

c) • On demande une équation de degré 4.

• $S = \{\,\frac{1}{3}\,;3\} \iff \boxed{a(3x-1)^2(x-3)^2=0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*}$

ou $\boxed{a(3x-1)^3(x-3)=0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*}$

ou $\boxed{a(3x-1)(x-3)^3=0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*}$

ou $\boxed{a(3x-1)(x-3)(x^2+c)=0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}_+^*}$

d) • On demande une équation de degré 2.

• $S = \{\,3-\sqrt{2}\,;3+\sqrt{2}\,\} \iff a\left[x-(3-\sqrt{2})\right]\left[x-(3+\sqrt{2})\right]=0 \iff$

$\iff \boxed{a(x^2-6x+7)=0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*}$

e) • On demande une équation de degré 3.

• $S = \{\,0\,;2-\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}\,\} \iff a \cdot x\left[x-(2-\sqrt{3})\right]\left[x-(2+\sqrt{3})\right]=0 \iff$

$\iff \boxed{ax(x^2-4x+1)=0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*}$

f) • On demande une équation de degré 4.

• $S = \{\,-1\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;1\} \iff \boxed{a(x+1)(3x+2)(3x-2)(x-1)=0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*}$

g) • On demande une équation de degré 4.

• $S = \emptyset \iff \boxed{a(x^4 + c) = 0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}_+^*}$

ou $\boxed{a(x^2 + c)(x^2 + d) = 0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*, c, d \in \mathbb{R}_+^*}$

h) • On demande une équation de degré 6.

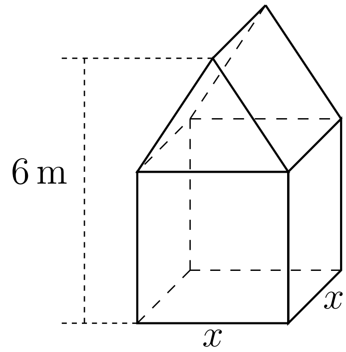
• $S = \{ -\sqrt{3} \, ; -\sqrt{2} \, ; \sqrt{2} \, ; \sqrt{3} \} \iff$

$\iff a(x + \sqrt{3})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x^2 + c) = 0 \iff$

$\iff \boxed{a(x^2 - 3)(x^2 - 2)(x^2 + c) = 0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}_+^*}$

## Exercice 45

a) $x$ = longueur de l'arête du cube ; hauteur de la construction = $6\,\text{m}$




Volume (hangar) = volume (cube) + volume (prisme)
Volume (cube) = $x^3$
Volume (prisme à base triangulaire) = $\dfrac{x^2}{2} \cdot (6 - x)$

$$\Rightarrow V(x) = x^3 + \frac{1}{2}\,x^2(6 - x)$$

b) EQ : $V(x) = 80\,\text{m}^3 \iff x^3 + \dfrac{1}{2}\,x^2(6 - x) = 80$

RES : $\overset{\cdot 2}{\iff} 2x^3 + 6x^2 - x^3 = 160 \iff x^3 + 6x^2 - 160 = 0$

- $p(x) = x^3 + 6x^2 - 160$

- candidats (diviseurs de 160) : $\pm 1\,;\pm 2\,;\pm 4\,;\ldots$
  $p(1) \neq 0$ ; $p(-1) \neq 0$ ; $p(2) \neq 0$ ; $p(-2) \neq 0$
  $p(4) = 64 + 96 - 160 = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 4$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 6 & 0 & -160 \\ 4 & & 4 & 40 & 160 \\ \hline & 1 & 10 & 40 & 0 \end{array} \qquad q(x) = x^2 + 10x + 40 \quad ; \quad r = 0$$

- $x^3 + 6x^2 - 160 = 0 \quad |$ Horner
  $\iff (x - 4)(x^2 + 10x + 40) = 0 \quad | \quad \Delta = -60 < 0$
  $\Rightarrow S = \{\ 4\ \}$

SOL : Le volume sera de $80\,\text{m}^3$ pour une arête de longueur $4\,\text{m}$.

## Exercice 46

a) INEQ : $T(t) > 0 \iff \dfrac{1}{20}\, t(t-12)(t-24) > 0 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 24$

RES : $\overset{\cdot 20}{\iff} \; t(t-12)(t-24) > 0$

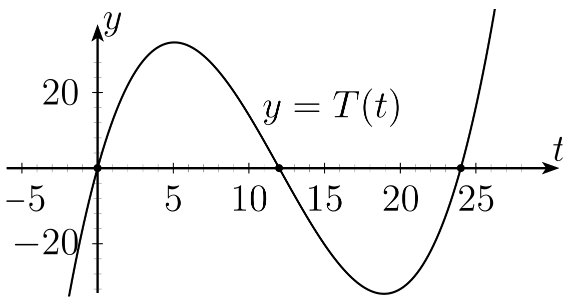
- tableau de signes de $T$ :

| $t$ | | $0$ | | $12$ | | $24$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $t-12$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $t-24$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\text{sgn}(T)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$\Rightarrow S = \left]\, 0\,;12\,\right[ \cup \left]\, 24\,;+\infty\,\right[$

SOL : La température était supérieure à $0^\circ F$ pour $t \in \left]\, 0\,;12\,\right[$.

b) Graphe de $T$ :



c) EQ : $T(t) = 32 \iff \dfrac{1}{20}\, t(t-12)(t-24) = 32$

RES : $\overset{\cdot 20}{\iff} t(t-12)(t-24) = 640 \iff t^3 - 36t^2 + 288t - 640 = 0$

- $p(t) = t^3 - 36t^2 + 288t - 640$

- candidats (diviseurs de 640) : $\pm 1\,;\pm 2\,;\pm 4\,;...$
  $p(1) \neq 0$ ; $p(-1) \neq 0$ ; $p(2) \neq 0$ ; $p(-2) \neq 0$
  $p(4) = 64 - 576 + 1'152 - 640 = 0 \iff p(t)$ est div. par $t-4$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|rrr|r} & 1 & -36 & 288 & -640 \\ 4 & & 4 & -128 & 640 \\ \hline & 1 & -32 & 160 & 0 \end{array}$$

$q(t) = t^2 - 32t + 160 \quad ; \quad r = 0$

- $t^3 - 36t^2 + 288t - 640 = 0 \qquad |$ Horner
  $\iff (t-4)(t^2 - 32t - 160) = 0 \qquad | \quad \Delta = 384 > 0$
  $\iff t_1 = 4\ ;\ t_{2,3} = \dfrac{-(-32) \pm \sqrt{384}}{2} = \dfrac{32 \pm 8\sqrt{6}}{2} = 16 \pm 4\sqrt{6}$

SOL : La température sera de $32^\circ F$ après 4 h (10h00) ou $\cong$ 6.2 h ($\cong$12h12).

## Exercice 47

a) INEQ : $N(t) > 0 \iff -t^4 + 21t^2 + 100 > 0 \quad ; \quad t \geq 0$

RES : $\overset{\cdot(-1)}{\iff} t^4 - 21t^2 - 100 < 0 \iff (t^2 - 25)(t^2 + 4) < 0 \iff$

$\iff (t+5)(t-5)(t^2+4) < 0$

• tableau de signes de $N$ :

| $t$ | | $-5$ | | $0$ | | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t+5$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $t-5$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $t^2+4$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $\operatorname{sgn}(N)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |

$\Rightarrow S = ]-5\,;5\,[$

SOL : La population sera supérieure à 0 pour $t \in [\,0\,;5\,[$

b) EQ : $N(t) = 0 \iff -t^4 + 21t^2 + 100 = 0$

RES : $\overset{\cdot(-1)}{\iff} t^4 - 21t^2 - 100 = 0 \iff (t^2 - 25)(t^2 + 4) = 0 \iff$

$\iff (t+5)(t-5)(t^2+4) = 0$

$\Rightarrow S = \{-5\,;5\}$

SOL : La population va s'éteindre après 5 ans.