Gymnases de Burier

2C Exercices de mathématiques

Programmation linéaire

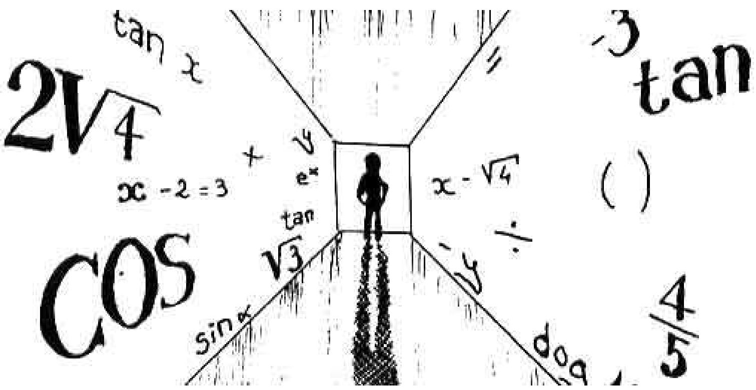
Fonctions quadratiques, graphes et optimisation

Polynômes et fonctions polynomiales

Trigonométrie

Combinatoire

Statistiques



Juin 2022

Table des matières

Chapitre 1

Programmation linéaire

Introduction à la programmation linéaire

1.1 Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations suivantes.

a) $2x + 3y - 12 < 0$

b) $\frac{1}{2}x - 3y \geqslant 0$

1.2 Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'inéquations suivants.

a) $\begin{cases} 3x + y > 3 \\ 2x - y < 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + y < -2 \\ -x + y \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y \geqslant 0 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y \leqslant 8 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y \leqslant 6 \\ -2x + y > 1 \\ x \geqslant -2 \\ y < 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y \leqslant 12 \\ 2x + y \geqslant 2 \\ 3x - y \leqslant 8 \\ x \leqslant 3 \\ y \leqslant 4 \end{cases}$

1.3 Déterminer les sommets des polygones de solutions des systèmes d'inéquations de l'exercice précédent.

1.4 On considère la fonction $f(x;y) = 3x + 4y$.

a) Calculer la valeur que prend cette fonction pour chacun des points ci-dessous.

$A(0;0)$ $B(0;3)$ $C(4;3)$ $D(4;6)$

$E_1(0;12)$ $E_2(4;9)$ $E_3(8;6)$ $E_4(12;3)$ $E_5(16;0)$

Constatations ?

b) On considère le carré délimité par les inéquations $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \leqslant 16$ et $y \leqslant 16$.

Déterminer le point situé dans ce carré qui maximise la fonction f.

c) Déterminer 4 points situés dans le carré défini à la partie b) tels que la fonction f prenne une valeur de 40.

Y a-t-il d'autres points qui satisfont cette condition ? Si oui, lesquels ?

d) On considère le domaine délimité par les inéquations

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + 2y - 24 \leqslant 0$ et $3x + 2y - 48 \leqslant 0$

Déterminer le point situé dans ce domaine qui maximise la fonction f.

e) On considère le domaine délimité par les inéquations

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \leqslant 16$, $y \leqslant 16$ et $3x + 4y - 76 \leqslant 0$

Déterminer les points, à coordonnées entières, situés dans ce domaine qui maximisent la fonction f.

Déterminer tous les points situés dans ce domaine qui maximisent la fonction f.

1.5 Maximiser $f(x;y) = 6x + 5y$ sous les contraintes suivantes.

$$2x + y \leqslant 9, \quad 3x + y \geqslant 6, \quad 2x + 2y \leqslant 14, \quad x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y \geqslant 0$$

1.6 Déterminer la valeur maximum et minimum de la fonction $f(x;y) = 4x - 2y$ sujette aux contraintes suivantes.

$$\begin{cases} x - 2y \geqslant -8 \\ 7x - 2y \leqslant 28 \\ x + y \geqslant 4 \end{cases}$$

1.7 Une entreprise fabrique deux types de boîtes en métal. La fabrication d'une boîte de type A demande 1 heure de travail et 3 kg de métal, alors que le type B, demande 2 heures de travail et 2 kg de métal. L'entreprise dispose de 80 heures de temps de travail et de 120 kg de métal. Pour une boîte, le profit est de CHF 50.- pour le type A et de CHF 20.- pour le type B.

a) En posant x pour le nombre de boîtes de type A et y pour le nombre de boîtes de type B, déterminer la fonction objectif, puis exprimer les contraintes.

b) Représenter graphiquement le polygone des solutions, puis déterminer ses sommets.

c) Comment organiser la production, afin de maximiser le profit ?

Problèmes

1.8 Une entreprise fabrique des automobiles et des camions dans une usine divisée en deux ateliers : l'atelier A où s'effectue le travail d'assemblage et de montage et l'atelier B où s'accomplissent toutes les opérations de finissage. L'atelier A emploie 5 journées de travail par camion et 2 par automobile. L'atelier B emploie 3 journées de travail indifféremment pour l'un ou pour l'autre. En raison de limitations de personnel et de machines, l'atelier A peut disposer au maximum de 180 journées de travail par semaine et l'atelier B de 135.

a) Si le fabricant fait un profit de CHF 3'000.- par camion et de CHF 2'000.- par automobile, combien doit-il produire de véhicules de chaque type pour maximiser son profit ?

b) Et si les profits respectifs étaient de CHF 4'000 et CHF 1'000 ?

c) Et si les profits respectifs étaient de CHF 2'000 et CHF 2'000 ?

1.9 René est Charcutier. Il dispose aujourd'hui de 105 kg de lard haché. Avec cette viande, il doit fabriquer des tourtières et des bols de cretons. Pour chaque tourtière qu'il fabrique, il utilise 1 kg de lard haché alors que pour un bol de cretons, il n'a besoin que de 500 g de lard haché. De plus, chaque tourtière lui coûte CHF 0,25 en main-d'oeuvre, alors qu'un bol de cretons lui coûte CHF 0,50 en main d'oeuvre. Il ne peut pas payer plus de CHF 60.– par jour en main-d'oeuvre.

a) Pour chacune des tourtières qu'il vend, il réalise un profit de CHF 0,50 et pour chaque bol de cretons qu'il vend, il réalise un profit de CHF 0,75. Combien de tourtières et combien de bols de cretons doit-il fabriquer, s'il veut maximiser son profit ?

b) Même exercice mais le profit est de CHF 0,50 sur une tourtière et CHF 1,25 sur un bol de cretons.

c) Même exercice mais le profit est de CHF 1.– sur une tourtière et CHF 0,25 sur un bol de cretons.

1.10 Jean est un champion cycliste qui prépare son entraînement en vue d'une importante compétition. Son entraînement doit se composer chaque semaine d'un certain nombre d'heures de travail en salle et d'un certain nombre d'heures de travail sur route. Au total, il doit s'entraîner au moins 20 heures chaque semaine et son nombre d'heures de travail sur route doit être au moins égal au tiers du nombre d'heures de travail en salle. Pour s'entraîner en salle, il retient les services d'un entraîneur spécialisé qui lui coûte CHF 10.– l'heure ; cependant, cet entraîneur ne sera disponible que s'il est engagé pour au moins 10 heures par semaine. Pour s'entraîner sur route, il retient les services d'un spécialiste qui lui coûte CHF 12.– l'heure ; ce spécialiste ne peut être disponible pour plus de 15 heures par semaine.

a) Comment Jean doit-il planifier sa semaine d'entraînement pour que cela lui coûte le moins cher possible ?

b) Et si l'entraîneur en salle coûte CHF 15.– l'heure et celui sur route CHF 12.– l'heure, de quelle façon Jean doit-il planifier sa semaine d'entraînement pour que cela lui coûte le moins cher possible ?

1.11 On désire préparer des rations alimentaires contenant au moins 90 g de protéines, 120 g d'hydrate de carbone et $2'400$ calories à partir de deux produits A et B. Une dose du produit A coûte CHF 1.- et contient 15 g de protéines, 20 g d'hydrate de carbone et 300 calories. Une dose du produit B coûte CHF 1.- et contient 10 g de protéines, 30 g d'hydrate de carbone et 400 calories.

Quelle est la composition de la ration alimentaire la plus économique ?

1.12 Une société importatrice de café achète des lots de grains de café en vrac, puis les sépare en grains de premier choix, ordinaires et inutilisables. La société a besoin d'au moins 280 t de grains de premier choix et 200 t de grains ordinaire. Elle peut acheter des grains non triés à volonté chez deux fournisseurs. Des échantillons provenant des deux fournisseurs contiennent les pourcentages suivants de grains de premier choix, ordinaires et inutilisables :

Fournisseur	Premier choix	Ordinaire	Inutilisable
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si le fournisseur A facture CHF 125.- la tonne et le fournisseur B CHF 200.- la tonne, quelle quantité la société devrait-elle acheter chez chacun des fournisseurs pour satisfaire à ses besoins à un coût minimum ?

1.13 Un sculpteur décide de créer deux nouveaux styles de statues ; le modèle A et le modèle B. Le modèle A nécessite 1 heure de sculpture, 2 heures de ponçage et 1 heure de finition. Le modèle B nécessite 2 heures de sculpture, 1 heure de ponçage et 1 heure de finition. Il dispose quotidiennement de 20 heures à l'atelier de sculpture, de 22 heures à l'atelier de ponçage et de 12 heures à l'atelier de finition. Les profits qu'il peut réaliser pour chacun des modèles sont de CHF 200.- pour le modèle A et de CHF 300.- pour le modèle B.

Quel nombre de statues de chaque modèle doit-il fabriquer par jour, afin d'obtenir un profit maximal ?

1.14 Un ébéniste fabrique des tables et des armoires avec trois sortes de bois : chêne, pin et noyer. Dans le tableau ci-dessous, on donne le nombre de mètres carrés de bois nécessaire à la fabrication de chaque type de meubles et le nombre de mètres carrés de bois disponible.

	Armoire	Table	Disponible
Chêne	4	5	210 m^2
Pin	5	2,5	180 m^2
Noyer	6	5	240 m^2

Combien d'armoires et de tables cet artisan doit-il fabriquer pour rendre son gain maximum si :

a) il gagne CHF 1'000.- par armoire et CHF 900.- par table ?

b) il gagne CHF 1'200.- par armoire et CHF 1'000.- par table ?

1.15 Un artisan fabrique deux modèles de lampes, un modèle de style canadien et un modèle de style futuriste. Pour chacune des lampes qu'il fabrique il doit utiliser deux machines M_1 et M_2 . Dans le cas d'une lampe de style canadien, il doit mettre 2 heures de travail sur la machine M_1 et 4 heures sur la machine M_2. Pour une lampe de style futuriste, il doit mettre 3 heures de travail sur la machine M_1 et 2 heures sur la machine M_2. Même avec l'aide d'apprentis, les machines ne peuvent fonctionner plus de 16 heures par jour. L'artisan connaît bien le marché et il sait qu'il vendra toutes les lampes qu'il peut fabriquer, en réalisant un profit de CHF 5.– sur chaque lampe de style canadien et un profit de CHF 4.– sur chaque lampe de style futuriste.

Déterminer le nombre de lampes de style canadien et le nombre de lampes de style futuriste que cet artisan devrait fabriquer à chaque jour, s'il veut maximiser son profit.

1.16 Une chaîne de montage automobile permet de monter deux types de voiture, la "standard" et la "luxe" d'après les conditions suivantes :

	standard	luxe
capacité maximum par jour de la chaîne de montage	500 voitures	300 voitures
nombre d'heures de travail par voiture	24 h	48 h
prix de revient par voiture sans main-d'oeuvre	CHF 5'000.–	CHF 6'500.–
bénéfice réalisé par voiture	CHF 10'000.–	CHF 30'000.–

Calculer le nombre de voitures de chaque type qu'il faut monter par jour afin de réaliser un bénéfice maximum, sachant que 19'200 heures de travail sont disponibles chaque jour et que l'investissement ne doit pas dépasser CHF 3'250'000.– .

1.17 Une petite usine fabrique des savonnettes de deux modèles : pour le ménage M, de luxe L. La cuve de fabrication du mélange, pour des raisons mécaniques et de rendement, peut, en une cuvée, préparer une quantité de produit correspondant à au moins 100, mais au plus 1'500 savonnettes M, ou à au moins 80, mais au plus 1'200 savonnettes L. La demande de savonnettes est au plus de 1'400 pour le modèle M, au plus de 320 pour le modèle L. La machine, unique, à former, puis à emballer les savonnettes peut en débiter au maximum 1'520 par jour. On gagne CHF 0.40 par savonnette M et CHF 1.- par savonnette L.

Quel bénéfice journalier maximum cette usine peut-elle faire et comment ?

1.18 Un fabricant de raquettes de tennis fait un bénéfice de 8 € sur chaque raquette ordinaire et de 15 € sur chaque grande raquette. Pour satisfaire à la demande des vendeurs, la production journalière de raquettes ordinaires devrait se situer entre 30 et 80, et la production journalière de grandes raquettes entre 10 et 30. Pour maintenir une bonne qualité, le nombre de raquettes produites ne devrait pas dépasser 80 par jour.

Combien de raquettes de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum ?

1.19 Une entreprise fabrique deux produits qu'elle désire vendre aux USA. Le produit A rapporte 4 € par kilogramme et le produit B rapporte 6 € par kilogramme. Ayant des moyens financiers limités, la société ne peut affréter qu'un seul avion. Celui-ci ne peut transporter que 50 tonnes et a un volume de 2100 m^3. Le produit A a un volume de 30 m^3 par tonne, le produit B a un volume de 70 m^3 par tonne.

Combien de kilogrammes de chaque produit l'entreprise doit-elle mettre dans l'avion afin de maximiser ses gains ?

1.20 Pour fleurir un parc, il faut au minimum 1200 jacinthes, 3200 tulipes et 3000 narcisses.
Un premier pépiniériste propose le lot A pour 15 € comportant 30 jacinthes, 40 tulipes et 30 narcisses. Un deuxième pépiniériste propose le lot B pour 12 € comportant 10 jacinthes, 40 tulipes et 50 narcisses.

Combien faut-il acheter de lots A et de lots B pour minimiser la dépense de l'achat des fleurs ?

1.21 Un artisan de la région lausannoise produit deux types de glaces, velvet et classic, vendues en barquettes. La production quotidienne de glace est limitée à 700 barquettes. Pour confectionner une barquette velvet, il a besoin de 90 grammes de crème et 40 grammes de sucre. Pour confectionner une barquette classic, il a besoin de 45 grammes de crème et 120 grammes de sucre.
L'artisan dispose de 54 kilogrammes de crème et 60 kilogrammes de sucre par jour.

Déterminer le nombre de barquettes de chaque type que l'artisan doit produire chaque jour en vue de maximiser son bénéfice, sachant qu'il reçoit 60 centimes par barquette velvet et 40 centimes par barquette classic.

1.22 L'entreprise Jardinbiquet, productrice de nains de jardin, voyant le marché saturé, décide de remplacer une partie de cette production par celles de statues de Blanche-Neige et de dinosaures. Pour cela, elle disposera chaque jour de 5 heures d'atelier de moulage, 16 heures d'atelier de peinture et 3 heures d'atelier d'emballage. Chaque exemplaire de Blanche-Neige nécessite 3 minutes de moulage, 24 minutes de peinture et 4 minutes d'emballage. Chaque exemplaire de dinosaure nécessite 10 minutes de moulage, 15 minutes de peinture et 5 minutes d'emballage. Le profit est de CHF 40.– par statue de Blanche-Neige et de CHF 35.– par dinosaure.

Déterminer le nombre de statues de Blanche-Neige et le nombre de dinosaures à produire pour maximiser le profit.

1.23 Une grande entreprise de distribution doit acheter des pommes chez deux producteurs de fruits. Elle a besoin d'au moins 60 tonnes de pommes de première qualité, 45 tonnes de pommes de deuxième qualité et 24 tonnes de pommes de qualité inférieure pour la production du cidre. Un échantillon de fruits provenant du producteur Apifruits indique que 30% de ses pommes sont de première qualité, 50% de deuxième qualité et 20% de qualité inférieure. Un second échantillon de fruits provenant du producteur Jonagold indique que 60% de ses pommes sont de première qualité, 25% de deuxième qualité et 15% de qualité inférieure.

Si Apifruits facture CHF 1200.– pour une tonne de pommes et Jonagold CHF 1400.– la tonne, combien de tonnes l'entreprise doit-elle commander à chaque producteur pour couvrir ses besoins au moindre coût ?

1.24 Sophie projette un voyage d'une longueur de $8'000$ km aux USA, qu'elle parcourra en train, en car et en bateau. Les prix et les vitesses de déplacement sont donnés ci-dessous :

	Bateau	Car	Train
Prix au km en CHF	0,15	0,20	0,25
Vitesse en km/h	30	40	80

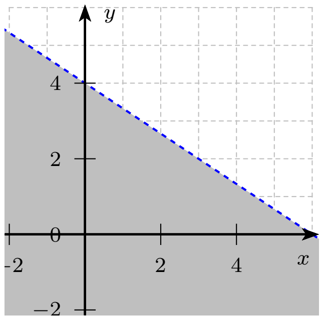
Elle souhaite parcourir au moins $3'000$ km en bateau, et ne désire pas effectuer plus de kilomètres en train qu'en car.

Quelles distances doit-elle parcourir avec chaque moyen de transport si elle veut que le prix total de son voyage ne dépasse pas CHF 1'500.- et que sa durée soit minimum ?

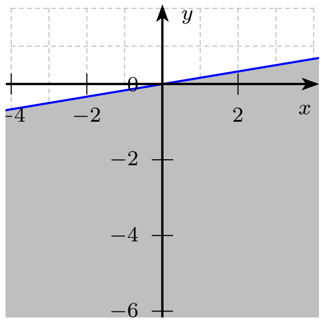
Solutions des exercices

Programmation linéaire

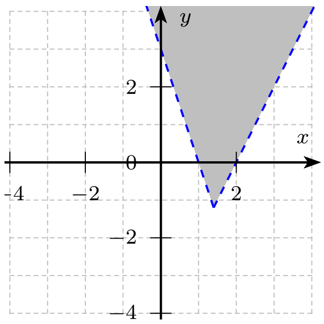
1.1 a)



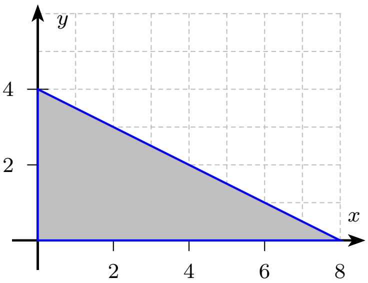
b)



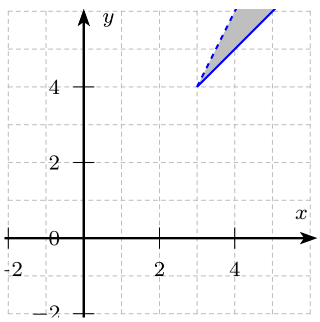
1.2 a)



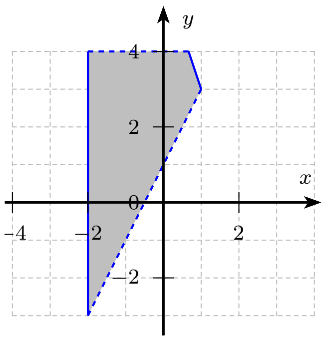
d)



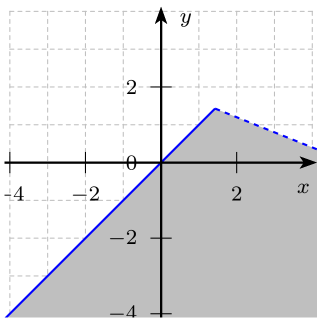
b)



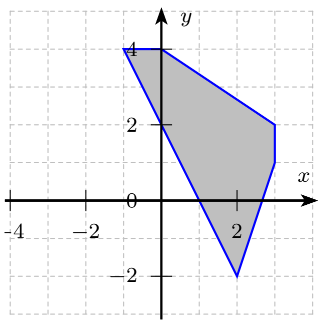
e)



c)



f)



1.3 a) $\left(\frac{7}{5}; -\frac{6}{5}\right)$; b) $(3;4)$; c) $\left(\frac{10}{7}; \frac{10}{7}\right)$; d) $(0;0)$, $(0;4)$, $(8;0)$; e) $(1;3)$, $\left(\frac{2}{3};4\right)$, $(-2;4)$, $(-2;-3)$; f) $(3;2)$, $(0;4)$, $(-1;4)$, $(2;-2)$, $(3;1)$.

1.4 a) 0 / 12 / 24 / 36 / 48 / 48 / 48 / 48 / 48 ; b) $(16;16)$; c) $(0;10)$, $(4;7)$, $(8;4)$, $(12;1)$, oui tous les points du segment d'extrémités $(0;10)$ et $(\frac{40}{3};0)$; d) $(12;6)$; e) $(4;16)$, $(8;13)$, $(12;10)$, $(16;7)$, tous les points du segment d'extrémités $(4;16)$ et $(16;7)$.

1.5 $x = 2$ et $y = 5$, max : 37.

1.6 max : 16, min : -8.

1.7 a) $f(x;y) = 50x + 20y$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + 2y \leqslant 80$, $3x + 2y \leqslant 120$; b)– ;c) 40 boîtes de type A, 0 boîte de type B.

1.8 a) 30 camions et 15 voitures (max : CHF 120'000.–) ; b) 36 camions et aucune voiture (max : de CHF 144'000.–) ; c) x camions ($0 \leqslant x \leqslant 30$) et $45 - x$ voitures (max : de CHF 90'000.–).

1.9 a) 60 tourtières et 90 bols de cretons (max : CHF 97,50) ; b) 120 bols de cretons et aucune tourtière (max : CHF 150.–) ; c) 105 tourtières et aucun bol de cretons (max : de CHF 105.–).

1.10 a) 15 heures d'entraînement en salle et 5 heures d'entraînement sur route (min : CHF 210.–) ; b) 10 heures d'entraînement en salle et 10 heures d'entraînement sur route (min : CHF 270.–).

1.11 4 doses de produit A et 3 doses de produit B.

1.12 150 t du fournisseur A et 625 t du fournisseur B.

1.13 4 modèles A et 8 modèles B.

1.14 a) 15 armoires et 30 tables ; b) il y a quatre choix possibles : 15 armoires et 30 tables, 20 armoires et 24 tables, 25 armoires et 18 tables, 30 armoires et 12 tables.

1.15 2 lampes de style canadien et 4 lampes de style futuriste (max : CHF 26.–).

1.16 200 voitures "Standard" et 300 voitures "Luxe" (max : CHF 11'000'000.–).

1.17 Bénéfice maximum quotidien de CHF 800.–, 1200 savonnettes de ménage et 320 savonnettes de luxe.

1.18 50 raquettes ordinaires et 30 grandes raquettes (max : 850 €).

1.19 35'000 kg du produit A et 15'000 kg du produit B (max : 230'000 €).

1.20 20 lots A et 60 lots B (min : 1020 €).

1.21 500 barquettes velvet et 200 barquettes classic (max : CHF 380.–).

1.22 35 statues Blanche-Neige et 8 statues dinosaure (max : CHF 1'680.–).

1.23 72 tonnes chez Apifruits et 64 tonnes chez Jonagold (min : CHF 176'000.–).

1.24 4'000 km en bateau, 2'000 km en car et 2'000 km en train.

Chapitre 2

Fonctions quadratiques

Généralités et esquisse du graphe

2.1 Soit les deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 - 4x - 16 \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -0{,}5x^2 - x + 1{,}5 \end{array}$$

A l'aide d'un tableau de valeurs, de -5 à 5, tracer le graphique de chacune de ces deux fonctions.

2.2 Déterminer, si elles existent, les intersections entre le graphe de chacune des fonctions et les axes de coordonnées.

a) $a(x) = x^2 + 12x + 35$

b) $b(x) = 12x^2 - 60x + 75$

c) $c(x) = -x^2 - 3 + 2x$

d) $d(x) = 10x^2 + 31x - 14$

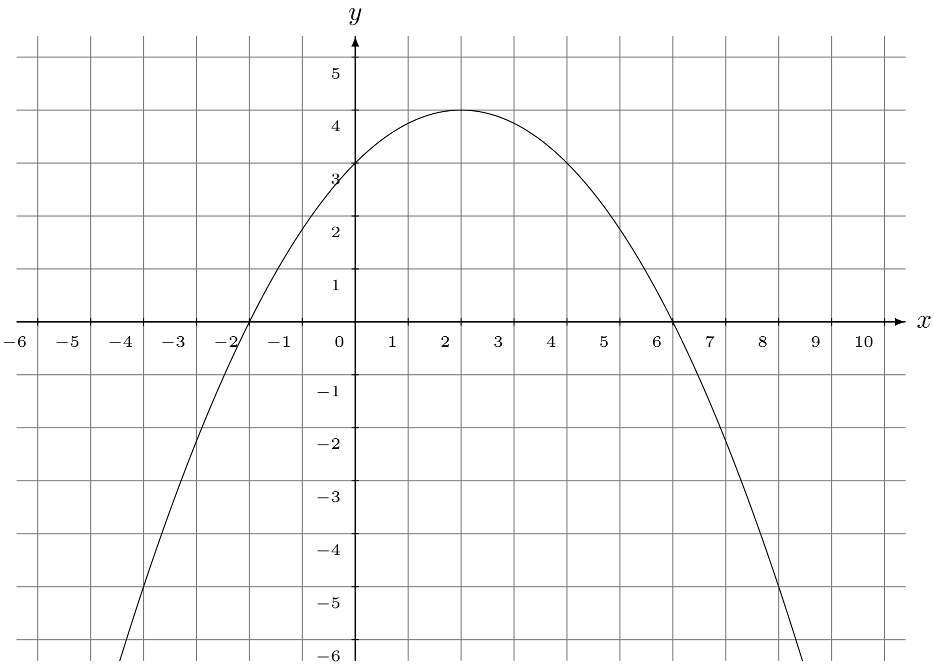
e) $e(x) = x^2 + 6x + 9$

f) $f(x) = 25x - 25 - 6x^2$

g) $g(x) = 7x^2 - 252$

h) $h(x) = 7x^2 + 252$

2.3 Soit f la fonction dont le graphe est donné ci-dessous.



a) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

i) $(4{,}3)$ iii) $(-4{,}5)$ v) $(-2{,}0)$
ii) $(3{,}4)$ iv) $(-4,-5)$ vi) $(0,-2)$

b) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

i) (4,.....) iii) (0,.....) v) (.....,4)
ii) (−4,.....) iv) (.....,0) vi) (.....,5)

c) Donner les images.

i) $f(4)$ ii) $f(-4)$ iii) $f(0)$ iv) $f(-2)$ v) $f(8)$

d) Résoudre les équations.

i) $f(x) = -5$ iii) $f(x) = 0$ v) $f(x) = 4$
ii) $f(x) = 5$ iv) $f(x) = 3$ vi) $f(x) = 7$

2.4 Soit f la fonction donnée par $f(x) = x^2 + 2x - 15$.

a) Calculer.

i) $f(1)$
ii) $f(2)$
iii) $f(-3)$
iv) $f(0)$
v) $f\left(\frac{1}{2}\right)$
vi) $f\left(-\frac{7}{3}\right)$

b) Résoudre les équations.

i) $f(x) = 20$
ii) $f(x) = -7$
iii) $f(x) = -16$
iv) $f(x) = 0$
v) $f(x) = 5$
vi) $f(x) = -20$

c) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

i) $(-12{,}1)$
ii) $(1, -12)$
iii) $(12, -1)$
iv) $(-4, -39)$
v) $(-4, -7)$
vi) $(0, -5)$
vii) $(-5{,}0)$
viii) $(0{,}0)$
ix) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{55}{4}\right)$

d) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

i) $(1,.....)$
ii) $(2,.....)$
iii) $\left(\frac{1}{2},.....\right)$
iv) $(5,.....)$
v) $(-11,.....)$
vi) $(0,.....)$
vii) $(.....,0)$
viii) $(.....,20)$
ix) $(....., -7)$
x) $(.....,9)$
xi) $(....., -16)$

2.5 Déterminer les coordonnées du sommet, des intersections avec les axes de référence et discuter de la convexité du graphique des fonctions suivantes :

a) $a(x) = x^2 + 12x + 11$

b) $b(x) = x^2 + 4x$

c) $c(x) = x^2 + x + 1$

d) $d(x) = x^2 - 0{,}2x - 0{,}24$

e) $e(x) = \dfrac{4x}{3} - x^2 - \dfrac{4}{9}$

f) $f(x) = 0{,}5 - 0{,}2x - 0{,}3x^2$

g) $g(x) = \dfrac{x^2}{3} - 2x + 3$

h) $h(x) = 0{,}25x^2 - x - 1{,}25$

i) $i(x) = \dfrac{4}{3}x - 1 - \dfrac{1}{2}x^2$

j) $j(x) = x^2 - 5$

k) $k(x) = 7x^2 + 8x + 1$

l) $l(x) = 15x^2 + x - 2$

m) $m(x) = 20 + 8x - x^2$

2.6 Tracer le graphe de chacune des fonctions en vous aidant des étapes suivantes :

— Convexe/concave

— Intersection(s) avec Ox

— Sommet

— Intersection avec Oy

— Un point supplémentaire bien choisi (et son symétrique)

a) $f(x) = x^2 - 4\,x$

b) $g(x) = -x^2 + 4$

c) $h(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 2$

d) $i(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 - x + 4$

2.7 On donne ci-dessous une liste d'expressions définissant des fonctions quadratiques. Pour chacune d'entre elles :

– déterminer le sommet et toutes les intersections avec les axes ;

– esquisser le graphe correspondant.

a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = x^2 - 9$

c) $f_3(x) = x^2 + 5\,x + 6$

d) $f_4(x) = x^2 - x - 6$

e) $f_5(x) = 4 - x^2$

f) $f_6(x) = x^2 + x - 1$

g) $f_7(x) = x^2 - x + 1$

h) $f_8(x) = -x^2 - 4\,x + 5$

i) $f_9(x) = -2\,x^2 + 13\,x - 15$

j) $f_{10}(x) = (x - 4)\,(x + 3)$

k) $f_{11}(x) = (x - 1)^2 + 5$

l) $f_{12}(x) = 3 - (x - 1)\,(x + 1)$

m) $f_{13}(x) = (x + 2)^2 + (x - 1)^2$

n) $f_{14}(x) = -2\,(x + 2)^2 - 2$

o) $f_{15}(x) = -3\,x^2 + 4\,x + 5$

p) $f_{16}(x) = (3\,x - 2)^2 - (x + 1)$

q) $f_{17}(x) = 1 - x - x^2$

r) $f_{18}(x) = 3\,x - x^2$

s) $f_{19}(x) = -(1/2)\,x^2$

t) $f_{20}(x) = \dfrac{1}{3}\,x^2 + \dfrac{1}{2}\,x$

2.8 a) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $g(x) = -4x + 10$.

b) Vérifier que la parabole d'équation $y = (x-3)^2$ est tangente à la droite $y = 2x - 7$ et déterminer les coordonnées du point de contact.

c) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 12x + 18$.

d) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = -x^2 + 13x - 48$ et $g(x) = x^2 - 11x + 24$.

e) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 2x^2 - 6$.

2.9 On considère la parabole donnée par

$$y = -2\,x^2 + 4\,x + 3$$

et la droite d'équation

$$y = x - 2$$

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des graphiques de la parabole et de la droite.

b) Déterminer la distance verticale maximale entre la parabole et la droite entre les deux points d'intersection.

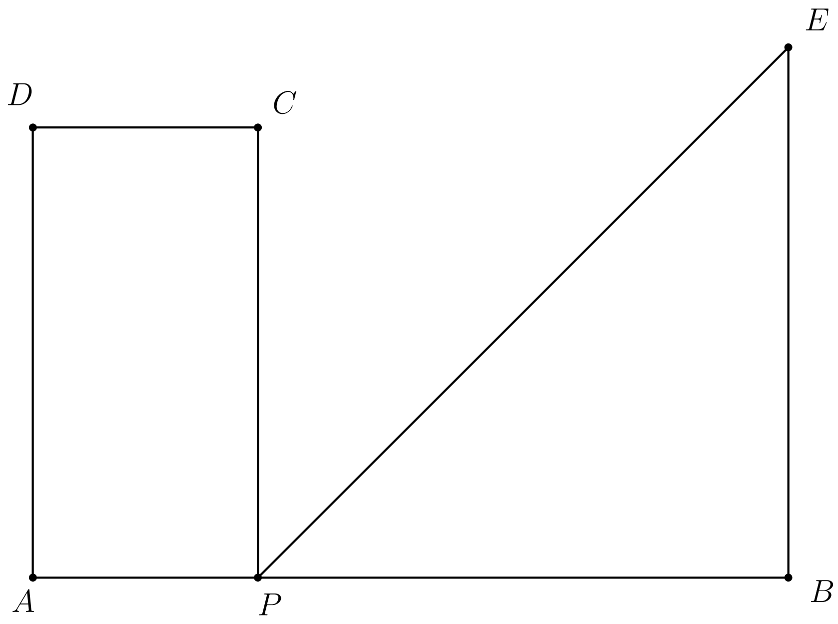
Problèmes d'optimisation

2.10 Laura désire construire un enclos rectangulaire aussi spacieux que possible pour son lapin. Un des côtés de l'enclos sera collé contre une façade de sa maison. Sachant qu'elle dispose d'une clôture de 6 m de longueur, quelles dimensions de l'enclos garantissent une aire maximale ?

2.11 Une fabrique vend à un revendeur des chaussures de marche à 80 francs la paire si la commande est de moins de 100 paires.
Si le revendeur commande plus de 100 paires, et cela jusqu'à concurrence de 600 paires, le prix de la paire se verra baissé de 10 centimes multipliés par le nombre obtenu en enlevant 100 du nombre total des paires commandées : par exemple, si le revendeur commande 200 paires, chaque paire sera vendue $80 - 0.10 \cdot (200 - 100) = 70$ fr.
Quelle est la commande qui rapportera le plus à la fabrique ?

2.12 Soit un segment AB dont la longueur vaut 10 cm. Soit un point P sur AB. On construit un carré de côté AP et un carré de côté PB. Quelle est la position du point P qui rend la somme des aires des deux carrés minimale ?

2.13 Soit un segment AB dont la longueur vaut 10 cm. Soit un point P sur AB. On construit le rectangle $APCD$ avec $CP = 2\,AP$. On construit également le triangle PBE isocèle et rectangle en B. Posons $x = AP$.



a) Si $x = 3$, calculer l'aire du rectangle $APCD$ et l'aire du triangle PBE.

b) Déterminer la somme des aires du rectangle $APCD$ et du triangle PBE en fonction de x.

c) Déterminer x pour que la somme des aires soit égale à 50 cm^2.

d) Pour quelles éventuelles valeurs de x cette somme est-elle minimale ?

2.14 Le nombre de kilomètres d que peut parcourir une voiture avec 4 litres d'essence à la vitesse de v km/h est donné par l'expression

$$d(v) = -\frac{1}{48}\,v^2 + \frac{5}{2}\,v$$

pour $0 < v < 120$.

a) Déterminer la vitesse la plus économique pour un trajet durant lequel on aura consommé 4 litres d'essence.

b) Déterminer la valeur maximale de la distance que l'on peut parcourir durant un tel trajet.

2.15 Un objet est lancé verticalement vers le haut depuis le toit d'un bâtiment avec une vitesse initiale de 20 m/s. sa distance d en mètres au-dessus du sol après t secondes est donnée par l'expression suivante :

$$d(t) = -5\,t^2 + 20\,t + 105$$

a) Déterminer la distance maximale au-dessus du sol.

b) Déterminer la hauteur du bâtiment.

c) Après combien de temps l'objet retombe-t-il au sol ?

2.16 Trouver deux nombres réels positifs dont la somme est 40 et dont le produit est maximal.

2.17 Trouver deux nombres réels positifs dont la différence est 40 et dont le produit est minimal.

2.18 Un maraîcher doit décider du nombre x de pommiers à planter sur une parcelle donnée. Des études ont montré que si l'on plante x pommiers sur la parcelle, *chaque pommier* produit

$$N(x) = 888 - 12\,x$$

pommes (pour $x \geq 20$).

a) Si $x = 30$, déterminer le nombre total T de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle.

b) Soit T le nombre total de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle. Exprimer T en fonction de x.

c) Le maraîcher souhaite que le nombre total de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle soit maximal. Combien de pommiers doit-il planter et quel est le maximum de pommes produites par tous les pommiers de cette parcelle ?

2.19 Un quincaillier a 300 tondeuses à gazon à vendre durant la saison. Il sait qu'au prix de 400 fr, il les vendra toutes. Il suppose que pour chaque augmentation de 10 fr. du prix, il perdra 4 ventes.

a) Déterminer le nombre N de tondeuses à gazon vendues en fonction du prix p de vente.

b) Quel prix devrait-il vendre ses tondeuses à gazon s'il souhaite obtenir un revenu maximal ? Quels sont alors le revenu maximal et le nombre de tondeuses non vendues ?

2.20 Au bowling FUNBOWLING, il se joue quotidiennement 2 400 parties pour un prix de 9 fr. par partie. Le propriétaire suppose qu'à chaque diminution de 50 ct. du prix de la partie, il y aura 200 parties jouées en plus par jour.

a) Trouver le prix auquel devrait être fixée une partie pour obtenir un revenu maximal. Quel est alors le nombre de parties jouées et le revenu maximal ?

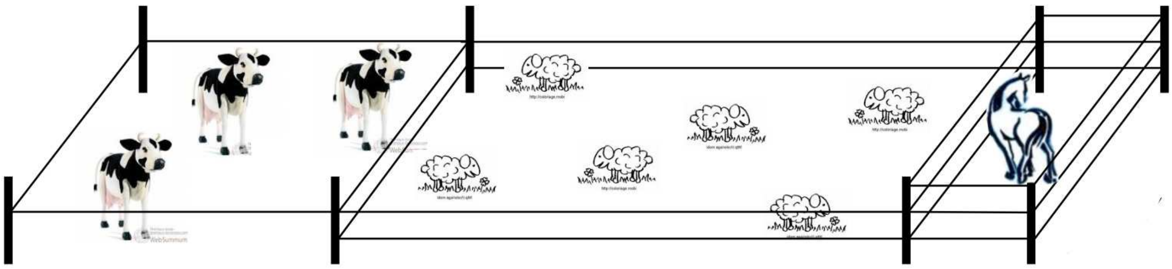
Supposons que le salon doit supporter en plus les frais suivants : 4 000 fr. de frais pour les 2 400 premières parties et une augmentation de 1 fr. par partie supplémentaire.

b) Déterminer les frais F en fonction du nombre de parties jouées.

c) trouver le prix auquel devrait être fixée une partie pour obtenir un bénéfice maximal. Quels sont alors le nombre de parties jouées et le bénéfice maximal ?

2.21 Examen juin 2009

Un fermier possède des chevaux, des vaches et des moutons. Les vaches ont besoin d'un terrain 3 fois plus grand que les chevaux et les moutons utilisent 2 fois plus de terrain que les vaches.
A l'aide de fil électrique, le paysan veut construire, côte à côte, 3 enclos rectangulaires pour ses bêtes. Pour la clôture de l'enclos des chevaux, il utilise trois fils électriques, pour celui des moutons, deux, et pour celui des vaches, un seul (voir croquis).



Les 3 enclos ont la même longueur y (en m).

a) Si x est la largeur (en m) de l'enclos des chevaux, exprimer en fonction de x la largeur de l'enclos des vaches et la largeur de l'enclos des moutons.

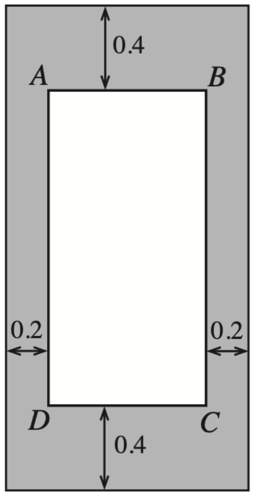
b) Exprimer, en fonction de x et de y, la longueur totale (en m) de fil électrique utilisé.

c) Sachant qu'il utilise 1800 m de fil électrique, montrer que l'aire totale A des 3 enclos (en m^2) est donnée par la fonction $A(x) = -40x^2 + 2000x$.

d) Déterminer les dimensions de l'enclos des chevaux, afin que l'aire totale des 3 enclos soit maximale. Que vaut l'aire totale maximale des 3 enclos ?

2.22 Examen août 2014

Pour encadrer une peinture rectangulaire de grande dimension, on construit un cadre en bois qui entoure la surface rectangulaire ABCD où sera placée l'oeuvre à présenter.



Les parties latérales du cadre doivent avoir une largeur de 0.2 mètre chacune, alors que les parties supérieures et inférieures doivent avoir une hauteur de 0.4 mètre chacune (voir ci-contre).

On sait que la surface de la partie en bois du cadre (partie grisée ci-contre) mesure 2 mètres carrés.

a) Prouver que si $x = AB$ est sa largeur en mètres, l'aire S en mètres carrés de la surface du rectangle $ABCD$ où sera présentée la peinture est donnée en fonction de x par $S(x) = 4{,}2x - 2x^2$.

b) Déterminer les dimensions de la surface rectangulaire $ABCD$ d'aire maximale que l'on peut encadrer de telle manière.

c) Calculer l'aire maximale du rectangle $ABCD$.

2.23 Examen juin 2015

Le gérant d'une salle de spectacle constate que le nombre de spectateurs par séance varie selon le prix du billet. Il a pu rassembler les informations suivantes :

- la salle peut accueillir 240 spectateurs ;
- si x représente le prix du billet en francs, le nombre de spectateurs est donné par la formule $s(x) = 270 - 6x$;
- les charges sont constituées d'une part fixe de 150 francs par séance pour la location de la salle, et d'une part variable de 3 francs par spectateur pour le nettoyage de la salle.

a) Si le prix du billet est fixé à 10 francs, déterminer le nombre de spectateurs, le revenu, les charges et le bénéfice d'une séance.

b) Déterminer l'intervalle dans lequel x doit se situer pour que $s(x)$ ait un sens dans ce contexte.

c) Si le prix du billet est fixé à x francs, déterminer le revenu $r(x)$ et les charges $c(x)$, puis montrer que le bénéfice d'une séance est donné par la formule

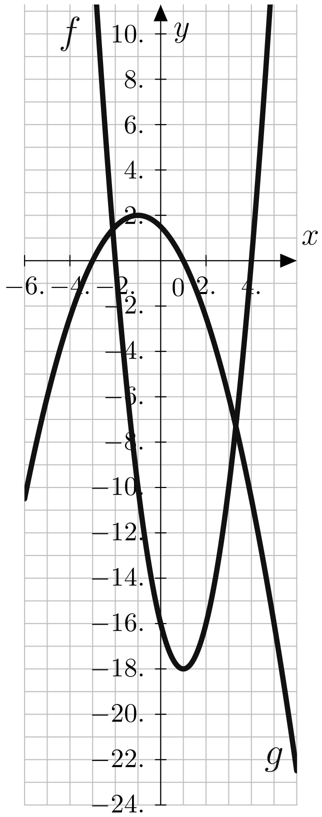
$$b(x) = -6x^2 + 22x - 960$$

d) Déterminer par calculs le prix du billet permettant de maximiser le bénéfice par séance. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

Solutions des exercices

Esquisse du graphe de fonctions quadratiques

2.1



x	$f(x)$
-5	54
-4	32
-3	14
-2	0
-1	-10
0	-16
1	-18
2	-16
3	-10
4	0
5	14

x	$g(x)$
-5	-6
-4	-2,5
-3	0
-2	1,5
-1	2
0	1,5
1	0
2	-2,5
3	-6
4	-10,5
5	-16

2.2

a) $H(0;35)$, $Z_1(-7;0)$, $Z_2(-5;0)$

b) $H(0;75)$, $Z(2{,}5;0)$

c) $H(0;-3)$, Pas de zéro : $\Delta = -8$

d) $H(0;-14)$, $Z_1(-3{,}5;0)$, $Z_2(0{,}4;0)$

e) $H(0;9)$, $Z(-3;0)$

f) $H(0;-25)$, $Z_1\left(\dfrac{5}{3};0\right)$, $Z_2(2{,}5;0)$

g) $H(0;-252)$, $Z_1(-6;0)$, $Z_2(6;0)$

h) $H(0;252)$, Pas de zéro : $\Delta = -7056$

2.3

a)
- i) Oui.
- ii) Non.
- iii) Non.
- iv) Oui.
- v) Oui.
- vi) Non.

b)
- i) (4,3)
- ii) $(-4,-5)$
- iii) (0,3)
- iv) $(-2{,}0)$ ou $(6{,}0)$
- v) (2,4)
- vi) Impossible.

c) i) $f(4) = 3$ ii) $f(-4) = -5$iii) $f(0) = 3$ iv) $f(-2) = 0$ v) $f(8) = -5$

d) i) $S = \{-4{,}8\}$ iii) $S = \{-2{,}6\}$ v) $S = \{2\}$

ii) $S = \emptyset$ iv) $S = \{0{,}4\}$ vi) $S = \emptyset$

2.4 a) i) $f(1) = -12$iii) $f(-3) = -12$ v) $f(\frac{1}{2}) = -\frac{55}{4}$

ii) $f(2) = -7$ iv) $f(0) = -15$ vi) $f(-\frac{7}{3}) = -\frac{128}{9}$

b) i) $S = \{-7{,}5\}$ iii) $S = \{-1\}$ v) $S = \{-1 - \sqrt{21}, -1 + \sqrt{21}\}$

ii) $S = \{-4{,}2\}$ iv) $S = \{-5{,}3\}$ vi) $S = \emptyset$

c) i) Non. iv) Non. vii) Oui.

ii) Oui. v) Oui. viii) Non.

iii) Non. vi) Non. ix) Oui.

d) i) $(1, -12)$ iv) $(5{,}20)$ vii) $(-5{,}0)$ ou $(3{,}0)$ 7)

ii) $(2, -7)$ v) $(-11{,}84)$ viii) $(-7{,}20)$ ou $(5{,}20$x) $(-6{,}9)$ ou $(4{,}9)$

iii) $(\frac{1}{2}, -\frac{55}{4})$ vi) $(0, -15)$ ix) $(-4, -7)$ ou $(2,$ xi) $(-1, -16)$

2.5

a) Convexe, $S(-6;-25)$, $H(0;11)$, $Z_1(-1;0)$, $Z_2(-11;0)$

b) Convexe, $S(-2;-4)$, $H(0;0)$, $Z_1(-4;0)$, $Z_2(0;0)$

c) Convexe, $S\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$, $H(0;1)$, Pas d'intersection avec Ox

d) Convexe, $S(0{,}1;-0{,}25)$, $H(0;-0{,}24)$, $Z_1(-0{,}4;0)$, $Z_2(0{,}6;0)$

e) Concave, $S\left(\dfrac{2}{3};0\right)$, $H\left(0;-\dfrac{4}{9}\right)$, $Z_1 = Z_2 = S$

f) Concave, $S\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{15}\right)$, $H\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, $Z_1\left(-\dfrac{5}{3};0\right)$, $Z_2(1;0)$

g) Convexe, $S(3;0)$, $H(0;3)$, $Z_1 = Z_2 = S$

h) Convexe, $S\left(2;-\dfrac{9}{4}\right)$, $H\left(0;-\dfrac{5}{4}\right)$, $Z_1(-1;0)$, $Z_2(5;0)$

i) Concave, $S\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{9}\right)$, $H(0;-1)$, Pas d'intersection avec Ox

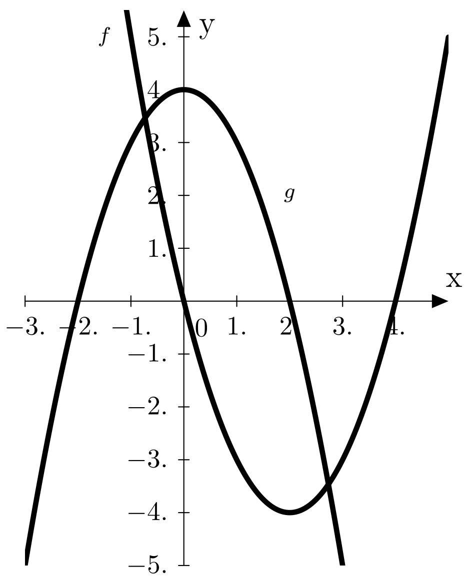
j) Convexe, $S(0;-5)$, $H=S$, $Z_1(-\sqrt{5};0)$, $Z_2(\sqrt{5};0)$

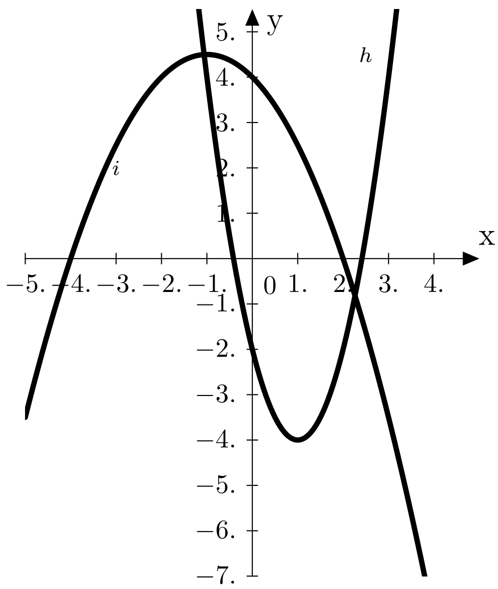
k) Convexe, $S\left(-\dfrac{4}{7};-\dfrac{9}{7}\right)$, $H(0;1)$, $Z_1(-1;0)$, $Z_2\left(-\dfrac{1}{7};0\right)$

l) Convexe, $S\left(-\dfrac{1}{30};-\dfrac{121}{60}\right)$, $H(0;-2)$, $Z_1\left(-\dfrac{2}{5};0\right)$, $Z_2\left(\dfrac{1}{3};0\right)$

m) Concave, $S(4;36)$, $H(0;20)$, $Z_1(10;0)$, $Z_2(-2;0)$

2.6





2.7

a) –

2.8

a) $I_1(-2;18)$ et $I_2(3;-2)$

b) $I_1(4;1)$

c) $I_1(3;9)$ et $I_2(5;33)$

d) $I_1(6;-6)$

e) $I_1(-2;2)$ et $I_2(3;12)$

2.9

a) Les deux points d'intersection sont $A(-1;-3)$ et $B(5/2;1/2)$.

b) La distance verticale maximale est de 49/8.

Optimisation

2.10 Les dimensions sont 1.5 m et 3 m.

2.11 Une commande de 450 paires.

2.12 Il faut placer le point P au milieu du segment AB.

2.13

a) 18 cm^2 et 24.5 cm^2, respectivement

b) $5/2\,x^2 - 10\,x + 50$ avec $x \in [0;10]$

c) $x = 0$ ou $x = 4$

d) $x = 2$

2.14

a) 60 km/h

b) 75 km

2.15

a) 125 m

b) 105

c) 7 s

2.16 Les nombres sont 20 et 20.

2.17 Les nombres sont 0 et 40.

2.18

a) La parcelle produira 15 840 pommes.

b) $T(x) = -12\,x^2 + 888\,x$

c) Il faudra planter 37 pommiers pour obtenir un nombre maximal de 16 428 pommes.

2.19

a) $N(p) = -0.4\,p + 460$

b) Il les vendra 575 fr. pièce et obtiendra 132 250 fr. Il lui restera 70 tondeuses invendues.

2.20

a) Le prix doit être fixé à 7 fr. 50 ct, pour un revenu maximal de 22 500 fr. et 3 000 parties jouées.

b) $F(p) = 1600 + p = 4000 + 1 \cdot (p - 2400)$

c) Le prix doit être fixé à 8 fr, pour un bénéfice maximal de 18 000 fr. et 2 800 parties jouées.

2.21

a) $3x$ et $6x$

b) $36x + 9y$

c) -

d) Les dimensions sont : 25 m sur 100 m. L'aire maximale est 25'000 m^2.

2.22

a) -

b) Les dimensions sont : 1,05 m sur 2,10 m

c) L'aire maximale est 2,205 m^2

2.23

a) 210 spectateurs, revenu de 2100 francs, charges de 780 francs et bénéfice de 1320 francs

b) Entre 5 et 45

c) -

d) Le billet doit être à 24 francs. Le bénéfice maximal vaut alors 2496 francs.

Chapitre 3

Polynômes et fonctions polynomiales

Factorisation

3.1 Factoriser :

a) $xy + y$

b) $ma + ap$

c) $a^3x^2 - a^2x^3$

d) $4uv - 2uw$

e) $6a^2 + 4ab$

f) $24y^3z^5 - 36yz^2$

g) $2yz^5 + 8y^2z^4 + 6y^3z^3 - 2y^4z^2$

h) $15m^7n^2 - 10m^5n^3$

i) $3a^2bc^2 - abc^3$

j) $(2a + 3b)(2x + y) + (3a + 5b)(2x + y)$

k) $3ab^4c^3 - ab^3c^2$

l) $2u^3v^2 + 8u^3v^3 - 6u^4v$

m) $(x - 3)(x + 1) + 2(x - 3)^2 - (x - 3)$

n) $(u + v)^3 - (u + v)^2$

o) $2a(a - b) - (a - b)^2$

3.2 Factoriser :

a) $a^2b^2 - m^2$

b) $x^4 - y^2$

c) $a^2 - \dfrac{1}{16}$

d) $a^2 + 2a + 1$

e) $1 + 2x^2 + x^4$

f) $a^4 + 9b^2 - 6a^2b$

g) $(a + b)^2 - x^2$

h) $(ax + 2y)^2 - (2x - 3y)^2$

i) $(a - b)^2 - 1$

j) $3a^2 - 3$

k) $4x^5y^2 - 9x^3$

l) $a^4 - b^4$

m) $a^5 - a$

n) $\dfrac{u^4}{625} - \dfrac{v^4}{81}$

o) $x^5y^4 - x$

p) $9x^4 + 16y^2 + 24x^2y$

q) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$

r) $\dfrac{xy}{3} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4}$

s) $(a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2$

t) $5x^2 - 10x + 5$

u) $x^2(a+b) + 2(a+b)x + a + b$

3.3 Factoriser :

a) $x^{12} - 125$

b) $a^4 - \dfrac{8ab^3}{27}$

c) $27c^3 + \dfrac{1}{64}$

d) $z^3 + 8a^3b^6$

e) $z^6 + 27$

f) $z^3 - 6z^2 + 12z - 8$

g) $1 + 9a + 27a^2 + 27a^3$

h) $x^3 + x^2y + \dfrac{xy^2}{3} + \dfrac{y^3}{27}$

i) $12a^3 + \dfrac{9ab^2}{4} + \dfrac{3b^3}{16} + 9a^2b$

3.4 Factoriser :

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 + 5x + 4$

c) $u^2 - 6u + 8$

d) $x^2 - 2x - 35$

e) $9x^2 + 6x + 1$

f) $4z^2 + 5z + 1$

g) $x^2 - 2x - 80$

h) $3y^2 + 7y + 3$

i) $6x^2 + 5x + 1$

j) $x^2 - 22x + 85$

k) $x^2 + x + 1$

l) $16u^2 - 72u + 81$

m) $40x^2 + 3x - 28$

n) $a^2 + 9a - 10$

o) $2x^2 - 5x - 2$

p) $4m^2 + 25m - 21$

3.5 Factoriser si possible les polynômes suivants.

a) $x^2 + 19\,x + 18$

b) $x^2 - 4\,x + 4$

c) $2\,x^2 + 5\,x - 3$

d) $x^2 - 2\,x - 35$

e) $9\,x^2 + 6\,x + 1$

f) $x^2 - 9$

g) $x^2 - \frac{4}{9}$

h) $9\,x^2 - 5\,x$

i) $8\,x^2 + 6\,x + 1$

j) $\frac{1}{3}\,x^2 - x + 4$

3.6 Factoriser :

a) $ax + bx + ay + by$

b) $a + b + ax + bx + ay + by$

c) $ax - bx - ay + by$

d) $ax - 4x + 4y - ay$

e) $ax + x - a - 1$

f) $x^3 + x - x^2 - 1$

g) $10xz - 10z - x^2 + x$

h) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$

i) $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$

j) $2a^4 - 3 - 2a^3 + 3a$

3.7 Factoriser :

a) $x^4 - 13x^2 + 36$
b) $a^6 + 19a^3 - 216$
c) $x^8 - 257x^4 + 256$
d) $7x^4 - 61x^2 - 18$
e) $64x^6 - 91x^3 + 27$
f) $6x^4 + 7x^2 - 3$
g) $16x^8 - 641x^4 + 625$
h) $81z^4 + 80z^2 - 1$

3.8 Factoriser :

a) $x^3 + 2x^2 + x$
b) $2a^6 - 6a^4 + 6a^2 - 2$
c) $9a^3 - ab^2$
d) $1 - (x - y)^2$
e) $(x^2 - 1)^2 + 4x^2$
f) $xy - 9x^3y$
g) $x^4 + 3x^3 - 8x - 24$
h) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$
i) $b^3 - a^3$
j) $3x^4 - 18x^3 + 36x^2 - 24x$
k) $8a^4x^3 - 72b^2x^3 - a^4 + 9b^2$
l) $x^3 + 9x - 27 - 3x^2$
m) $x^4y^3 + 3x^3y^2 + 3x^2y + x$
n) $z^2x^6 - 5z^2x^4 + 4z^2x^2$
o) $x^3y + 7x^2y + 6xy$
p) $16a^4 + 2ab^3$
q) $8c^3 + 6c + 12c^2 + 1$

Division euclidienne

3.9 Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans chacun des cas suivants et poser l'égalité fondamentale correspondante :

a) $A(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ $\quad B(x) = x - 5$

b) $A(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ $\quad B(x) = x^2 + 2x - 1$

c) $A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 5$ $\quad B(x) = x^2 - 3$

d) $A(x) = 35x^3 + 47x^2 + 13x + 1$ $\quad B(x) = 5x + 1$

e) $A(x) = x^8 + x^4 + 1$ $\quad B(x) = x^2 - x + 1$

f) $A(x) = x^7 - 4x^6 + 2x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6$ $\quad B(x) = x^5 - 3$

g) $A(x) = x^8 - x^4 + 1$ $\quad B(x) = 2x^5 + 1$

h) $A(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5x$ $\quad B(x) = x + 2$

i) $A(x) = \frac{2}{5}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ $\quad B(x) = -\frac{3}{5}x$

j) $A(x) = 3x + 2x^2 - 5 + x^3$ $\quad B(x) = -1 + x^2 - 2x$

3.10 Effectuer la division euclidienne du polynôme $A(x)$ par le polynôme $B(x)$.

a) $A(x) = 3\,x^4 - 7\,x^3 - 18\,x^2 + 28\,x + 24$ et $B(x) = 3\,x^2 + 8\,x + 4$

b) $A(x) = 12\,x^4 + 47\,x^3 + 10\,x^2 + 12$ et $B(x) = -3\,x^2 - 8\,x + 6$

c) $A(x) = x^5 - 3\,x^2 + x + 5$ et $B(x) = -\,x^2 + x - 1$

3.11 Par quel polynôme faut-il multiplier $x - 5$ pour obtenir $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x - 30$?

3.12 Déterminer le polynôme tel que le quotient de sa division euclidienne par $2\,x^2 + 1$ soit $5\,x^2 - 3\,x + 1$ et le reste $1 - x$.

3.13 Calculer la valeur numérique $P(a)$ du polynôme $P(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 7$ pour chacune des valeurs a suivantes : 1, 3, 0, -2, -3, $1/3$ et $-1/2$.

3.14 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $A(x) = 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5$ et $B(x) = x - 1$

b) $A(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ et $B(x) = x + 2$

c) $A(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 7$ et $B(x) = x$

3.15 Déterminer, sans effectuer la division, le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

a) $A(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1 \quad B(x) = x - 3$

b) $A(x) = x^4 - x + 1 \quad B(x) = x + 2$

c) $A(x) = x^3 - 27 \quad B(x) = x - 3$

3.16 Monter que $P(x) = x^6 - 6\,x^5 + 15\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2 - 6\,x + 1$ est divisible par $x - 1$.

3.17 Considérons le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$. Déterminer s'il est divisible par :

$$\text{a) } x - 1 \quad \text{b) } x + 4 \quad \text{c) } x + \frac{1}{2} \quad \text{d) } x + 1 \quad \text{e) } x + 5 \quad \text{f) } x - 3$$

En déduire une factorisation de $P(x)$.

3.18 Déterminer le quotient et le reste de la division en utilisant le schéma de Horner.

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x - 1$

b) $x^5 + 1$ par $x + 1$

c) $3\,x^5 - 8\,x^4 + 7\,x^3 + x^2 - 5\,x + 6$ par $x + 2$

3.19 Factoriser les polynômes :

a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 35x^2 - 9x + 45$ sachant que $P(5) = 0$ et $P(-3) = 0$,

b) $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 6x$ sachant que 2 est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

3.20 Factoriser les polynômes :

a) $x^3 + 9\,x^2 + 11\,x - 21$

b) $x^4 + 2\,x^3 - 16\,x^2 - 2\,x + 15$

c) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$

d) $x^5 + 3\,x^4 - 16\,x - 48$

e) $x^5 - 3\,x^4 - 21\,x^3 + 43\,x^2 + 96\,x - 180$

f) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

3.21 Le polynôme $p(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 11\,x - 6$ possède un zéro compris entre 0 et -5. Décomposer le polynôme $p(x)$ en un produit de facteurs.

3.22 Résoudre les équations suivantes par factorisation.

a) $x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12 = 0$

c) $4\,x^5 - 12\,x^4 + 9\,x^3 = 0$

d) $16\,x^3 - 16\,x^2 - 4\,x + 4 = 0$

3.23 Résoudre les équations.

a) $x^4 + 2\,x^3 - 4\,x^2 - 5\,x - 6 = 0$

b) $x^4 - 7\,x^3 + 18\,x^2 - 20\,x + 8 = 0$

c) $35\,x^3 + 47\,x^2 + 13\,x + 1 = 0$

d) $x^3 + 5\,x^2 - 8\,x - 48 = 0$

3.24 Je suis un polynôme de degré 5 et possède les propriétés suivantes :

- je m'annule en 0 et en 2,
- je suis divisible par $x + 2$,
- $x - 3$ apparaît dans ma factorisation,
- le reste de ma division par $x + 3$ est égal à -630,
- mon évaluation en $x = 1$ est égale à 6.

Qui suis-je ?

Fonctions polynomiales

3.25 Dessiner les graphes des fonctions

$$f(x) = -2\,x + 6 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}\,x - 3$$

Résoudre ensuite les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = g(x)$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) < 0$

e) $f(x) > g(x)$

f) $f(x) \geq x$

3.26 Déterminer le signe des fonctions affines suivantes :

a) $f(x) = -2x + 6$

b) $f(x) = 3x + 1$

c) $f(x) = -2$

d) $f(x) = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{4}{5}$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{3}$

3.27 Déterminer le signe des fonctions quadratiques suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 3x - 4$

b) $f(x) = 8\,x^2 - 10x + 3$

c) $f(x) = -x^2 + 6\,x - 9$

d) $f(x) = -2\,x^2 + 7\,x + 4$

e) $f(x) = x^2 + 4$

f) $f(x) = 6\,x^2 + 7\,x$

3.28 Dessiner les graphes des fonctions

$$f(x) = x^2 - x - 6 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 2\,x - 2$$

Résoudre ensuite les équations et inéquations ci-dessous.

a) $f(x) = 0$

b) $g(x) = 0$

c) $f(x) = g(x)$

d) $f(x) > 0$

e) $f(x) < 0$

f) $g(x) \geq 0$

g) $g(x) \leq 0$

h) $f(x) < g(x)$

i) $g(x) \leq -2$

3.29 Établir le tableau des signes des fonctions suivantes. Esquisser le graphe correspondant à chaque fonction, à partir du tableau des signes.

a) $f(x) = x^3 + 2\,x^2 - x - 2$

b) $f(x) = (x^3 - x^2 + x) \cdot (2 - x)$

c) $f(x) = x^3 + 5\,x^2 + 8\,x + 4$

d) $f(x) = x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 1$

e) $f(x) = x\,(x+3)^2 \cdot (4 - x^2) \cdot (x^2 - 1) \cdot (5 - 2\,x)$

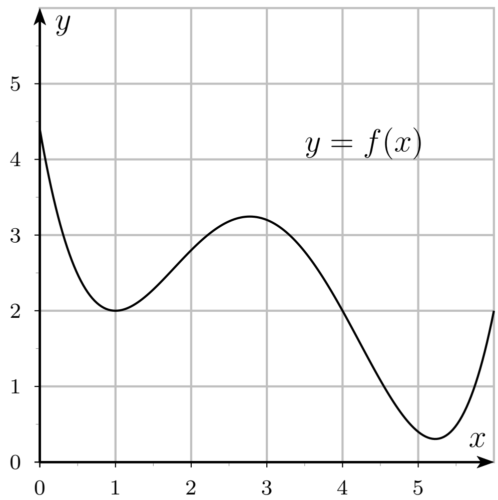
3.30 Établir le tableau des signes des polynômes suivants, puis esquisser les graphes des fonctions correspondantes.

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 11\,x^2 + 9\,x + 18$

b) $f(x) = x^5 - 5\,x^4 + 10\,x^3 - 10\,x^2 + 5\,x - 1$

Lecture et interprétation de graphes

3.31 Une fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer en observant le graphe,

a) la valeur de $f(0)$;

b) la valeur de $f(3)$;

c) les valeurs de x sachant que $f(x) = 2$;

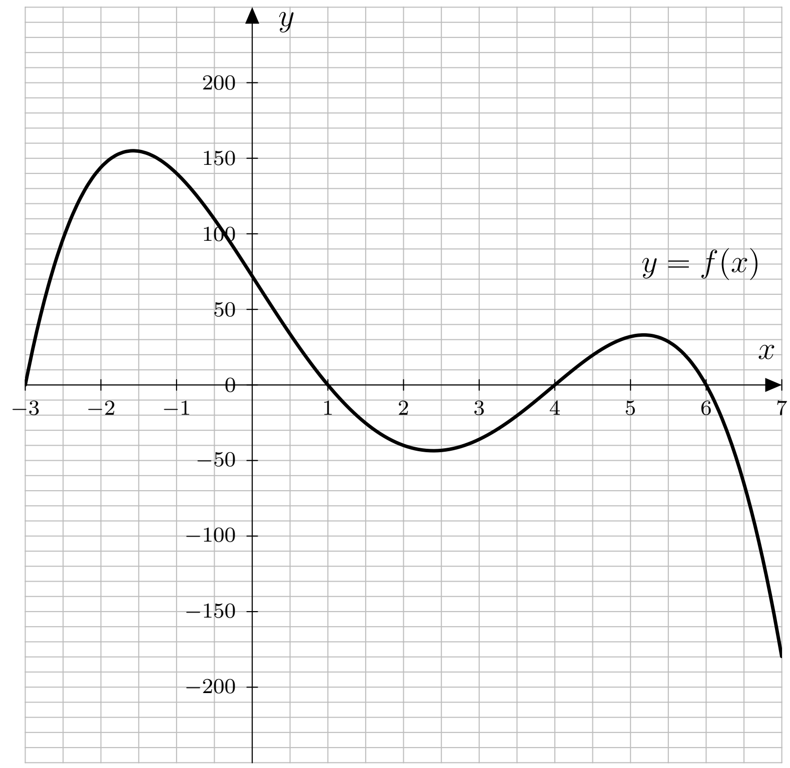
d) les coordonnées du minimum de f ;

e) l'abscisse du maximum de f pour des valeurs de x comprises entre 0 et 6.

On suppose maintenant que $f(x)$ représente l'intensité des précipitations (en millimètres par heure) durant l'après-midi du 17 mars 2009, en fonction du temps x, où x représente le temps (en heures) écoulé depuis midi.

Interpréter par une phrase chaque réponse donnée aux questions précédentes.

3.32 On a tracé ci-dessous le graphe d'une fonction f.



Déterminer graphiquement :

a) l'ordonnée à l'origine de f ;

b) la valeur de $f(2)$;

c) les solutions de l'équation $f(x) = 0$;

d) la valeur de x pour laquelle la fonction f est maximale ;

e) la valeur la plus basse que prend la fonction f.

On suppose maintenant que $f(x)$ représente le bénéfice (en milliers de francs) d'une entreprise en fonction du temps x (en années) écoulé depuis le début de l'année 2010.

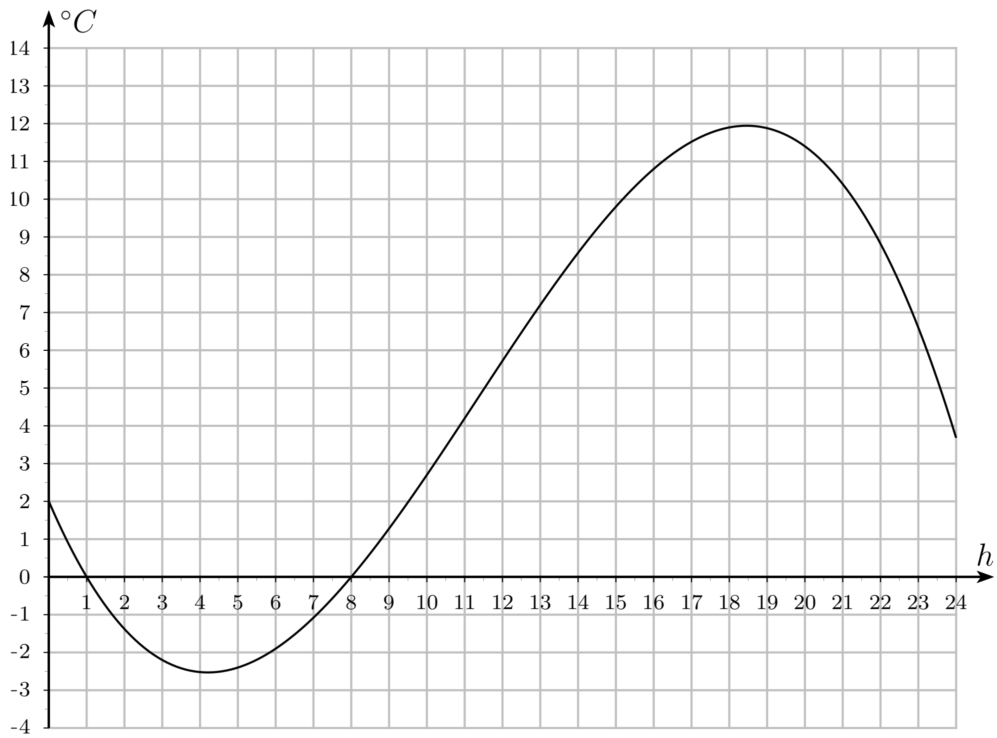
f) Interpréter les valeurs trouvées ci-dessus par des phrases.

g) Quelles sont les années durant lesquelles l'entreprise a été déficitaire ?

h) Si l'entreprise a été créée en 2007, a-t-elle été rentable la première année ?

i) Durant l'année 2013, le bénéfice de l'entreprise était-il en croissance ou en décroissance ?

3.33 Le graphe ci-dessous représente la température en degrés Celsius dans une ville lors d'une journée d'un mois d'automne.



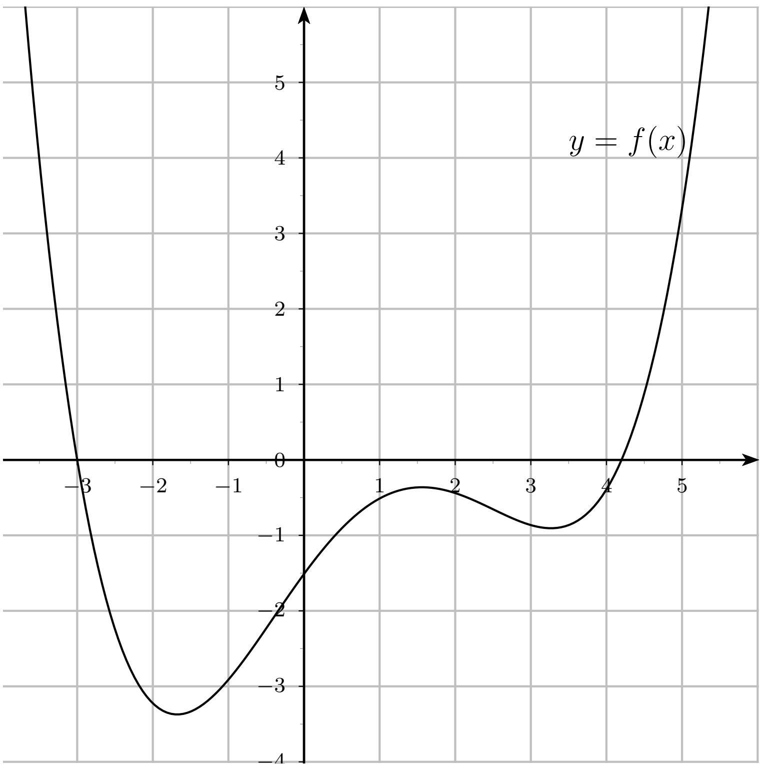
a) A quel(s) moment(s) durant cette journée la température a-t-elle été de zéro degré ?

b) Quelle a été la température maximale atteinte cette journée-là ?

c) On considère généralement que les routes deviennent glissantes lorsque la température est inférieure à 3 degrés. Selon cette information, pendant quel intervalle de temps les routes de cette ville ont-elles été considérées comme glissantes ?

d) A partir de quelle heure la température a-t-elle commencé à augmenter ?
Et jusqu'à quelle heure ?

3.34 La fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer en observant le graphe,

a) la valeur de $f(0)$;

b) la valeur de $f(-2)$;

c) les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$;

d) les valeurs de x sachant que $f(x) = 2$;

e) les valeurs de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution ; quelle est alors cette solution ?

f) les valeurs de x sachant que $f(x) = x$;

g) les valeurs de x sachant que $f(x) = -x$.

Solutions des exercices

Factorisation

3.1

a) $y(x+1)$

b) $a(m+p)$

c) $a^2x^2(a-x)$

d) $2u(2v-w)$

e) $2a(3a+2b)$

f) $12yz^2(2y^2z^3-3)$

g) $2yz^2(z^3+4yz^2+3y^2z-y^3)$

h) $5m^5n^2(3m^2-2n)$

i) $abc^2(3a-c)$

j) $(2x+y)(5a+8b)$

k) $ab^3c^2(3bc-1)$

l) $2u^3v(v+4v^2-3u)$

m) $3(x-3)(x-2)$

n) $(u+v)^2(u+v-1)$

o) $(a-b)(a+b)$

3.2

a) $(ab-m)(ab+m)$

b) $(x^2-y)(x^2+y)$

c) $\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$

d) $(a+1)^2$

e) $(1+x^2)^2$

f) $(a^2-3b)^2$

g) $(a+b+x)(a+b-x)$

h) $(ax+2x-y)(ax-2x+5y)$

i) $(a-b+1)(a-b-1)$

j) $3(a+1)(a-1)$

k) $x^3(2xy+3)(2xy-3)$

l) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

m) $a(a^2+1)(a+1)(a-1)$

n) $\left(\frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{9}\right)\left(\frac{u}{5}+\frac{v}{3}\right)\left(\frac{u}{5}-\frac{v}{3}\right)$

o) $x(x^2y^2+1)(xy+1)(xy-1)$

p) $(3x^2+4y)^2$

q) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

r) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2$

s) $(a+b-c)^2$

t) $5(x-1)^2$

u) $(a+b)(x+1)^2$

3.3

a) $(x^4-5)(x^8+5x^4+25)$

b) $a\left(a-\frac{2b}{3}\right)\left(a^2+\frac{2ab}{3}+\frac{4b^2}{9}\right)$

c) $\left(3c+\frac{1}{4}\right)\left(9c^2-\frac{3}{4}c+\frac{1}{16}\right)$

d) $(z+2ab^2)(z^2-2ab^2z+4a^2b^4)$

e) $(z^2+3)(z^4-3z^2+9)$

f) $(z-2)^3$

g) $(1+3a)^3$

h) $\left(x+\frac{y}{3}\right)^3$

i) $12\left(a+\frac{b}{4}\right)^3$

3.4

a) $(x+2)(x+3)$

b) $(x+1)(x+4)$

c) $(u-2)(u-4)$

d) $(x-7)(x+5)$

e) $(3x+1)^2$

f) $4(z+\frac{1}{4})(z+1)=(4z+1)(z+1)$

g) $(x-10)(x+8)$

h) $3\left(y+\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)\left(y+\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)$

i) $6(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})=(2x+1)(3x+1)$

j) $(x-17)(x-5)$

k) x^2+x+1

l) $(4u-9)^2$

m) $40(x-\frac{4}{5})(x+\frac{7}{8})=(5x-4)(8x+7)$

n) $(a+10)(a-1)$

o) $2\left(x-\frac{5+\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{41}}{4}\right)$

p) $4(m-\frac{3}{4})(m+7)=(4m-3)(m+7)$

3.5

a) $(x+18)(x+1)$

b) $(x-2)^2$

c) $2(x+3)(x-\frac{1}{2})=(x+3)(2x-1)$

d) $(x-7)(x+5)$

e) $(3x+1)^2$

f) $(x-3)(x+3)$

g) $(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})$

h) $x\,(9x-5)$

i) $8\,(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{4})=(2x+1)(4x+1)$

j) $\frac{1}{3}\,x^2-x+4$

3.6

a) $(x+y)(a+b)$

b) $(a+b)(1+x+y)$

c) $(a-b)(x-y)$

d) $(a-4)(x-y)$

e) $(a+1)(x-1)$

f) $(x^2+1)(x-1)$

g) $(10z-x)(x-1)$

h) $(a-b+1)(a-b-1)$

i) $(2x-3y)(2x+3y+1)$

j) $(2a^3+3)(a-1)$

3.7

a) $(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$

b) $(a-2)(a^2+2a+4)(a+3)(a^2-3a+9)$

c) $(x^2+16)(x+4)(x-4)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

d) $(x+3)(x-3)(7x^2+2)$

e) $(x-1)(x^2+x+1)(4x-3)(16x^2+12x+9)$

f) $(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)(2x^2+3)$

g) $(4x^2+25)(2x+5)(2x-5)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

h) $(9z-1)(9z+1)(z^2+1)$

3.8

a) $x(x+1)^2$

b) $2(a+1)^3(a-1)^3$

c) $a(3a+b)(3a-b)$

d) $(1+x-y)(1-x+y)$

e) $(x^2+1)^2$

f) $xy(1-3x)(1+3x)$

g) $(x+3)(x-2)(x^2+2x+4)$

h) $(x+2y)^3$

i) $(b-a)(b^2+ab+a^2)$

j) $3x(x-2)^3$

k) $(a^2+3b)(a^2-3b)(2x-1)(4x^2+2x+1)$

l) $(x-3)(x^2+9)$

m) $x(xy+1)^3$

n) $z^2x^2(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

o) $xy(x+1)(x+6)$

p) $2a(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

q) $(2c+1)^3$

Division euclidienne

3.9

a) $Q(x)=x^2-3x+1,\ R(x)=0$

b) $Q(x)=x^3-3x^2+3x-7,\ R(x)=20x-8$

c) $Q(x)=x^2-3x+3,\ R(x)=-8x+4$

d) $Q(x)=7x^2+8x+1,\ R(x)=0$

e) $Q(x)=x^6+x^5-x^3+x+1,\ R(x)=0$

f) $Q(x)=x^2-4x+2,\ R(x)=x^4-10x$

g) $Q(x)=\dfrac{1}{2}x^3,\ R(x)=-x^4-\dfrac{1}{2}x^3+1$

h) $Q(x)=x^4-2x^3+x^2+5,\ R(x)=-10$

i) $Q(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{10}{9},\ R(x)=0$

j) $Q(x)=x+4,\ R(x)=12x-1$

3.10

a) $A(x) = B(x) \cdot (x^2 - 5\,x + 6)$

b) $A(x) = B(x) \cdot (-4\,x^2 - 5\,x + 2) + (46\,x)$

c) $A(x) = B(x) \cdot (-\,x^3 -\, x^2 + 4) + (-3\,x + 9)$

3.11

Il faut multiplier $x - 5$ par $x^2 + 2\,x + 6$.

3.12

Le polynôme est $10\,x^4 - 6\,x^3 + 7\,x^2 - 4\,x + 2$.

3.13

$P(1) = -3$; $P(3) = 35$; $P(0) = -7$; $P(-2) = -45$; $P(-3) = -103$; $P(\frac{1}{3}) = -\frac{151}{27}$; $P(-\frac{1}{2}) = -\frac{21}{2}$.

3.14

a) 0

b) 132

c) -7

3.15

a) 59

b) 19

c) 0

3.16 $P(1) = 0$.

3.17

a) oui ; b) non ; c) non ; d) oui ; e) oui ; f) oui ; $P(x) = (x-1)(x+1)(x+5)(x-3)$.

3.18

a) quotient : $x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 4$ reste : 5

b) quotient : $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ reste : 0

c) quotient : $3\,x^4 - 14\,x^3 + 35\,x^2 - 69\,x + 133$ reste : -260

3.19

a) $P(x) = (x-5)(x+3)(x-1)(2x+3)$; b) $P(x) = x(x-2)(x-3)(2x+1)$.

3.20

a) $(x-1)\,(x+3)\,(x+7)$

b) $(x-3)\,(x-1)\,(x+1)\,(x+5)$

c) $x(x+1)(x-2)(x+3)$

d) $(x-2)\,(x+2)\,(x+3)\,(x^2+4)$

e) $(x-2)^2\,(x-5)\,(x+3)^2$

f) $(x-2)(x+2)(2x-1)(3x-1)$

3.21 $p(x) = (x-2)\,(x+3)\,(2x+1)$

3.22

a) $S = \{-2\,;\,-1\,;\,1\}$

b) $S = \{-2\,;\,2\,;\,3\}$

c) $S = \{0\,;\,\frac{3}{2}\}$

d) $S = \{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\}$

3.23

a) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1) = 0 \qquad S = \{-3\,;\,2\}$

b) $(x-1)\,(x-2)^3 = 0 \qquad S = \{1\,;\,2\}$

c) $(x+1)\,(5\,x+1)\,(7\,x+1) = 0 \qquad S = \{-1\,;\,-\frac{1}{5}\,;\,-\frac{1}{7}\}$

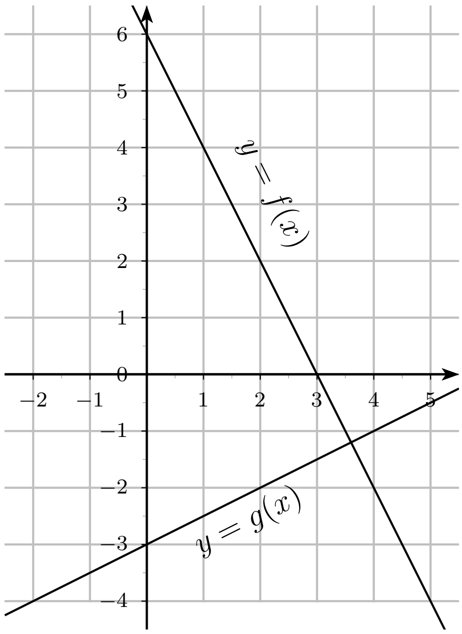
d) $(x-3)\,(x+4)^2 = 0 \qquad S = \{-4\,;\,3\}$

3.24

Je suis $x(x-2)(x+2)(x-3)(2x-1)$.

Fonctions polynomiales

3.25



a) $x = 3$

b) $x = \frac{18}{5}$

c) $x = 2$

d) $x > 3$

e) $x < \frac{18}{5}$

f) $x \leq 2$

3.26

a)

x		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$

b)

x		-1/3	
$f(x)$	$-$	0	$+$

c)

x	
$f(x)$	$-$

d)

x		-2	
$f(x)$	$-$	0	$+$

e)

x		10/3	
$f(x)$	$+$	0	$-$

3.27

a)

x		-1		4	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

b)

x		$1/2$		$3/4$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

c)

x		3	
$f(x)$	$-$	0	$-$

d)

x		-1/2		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

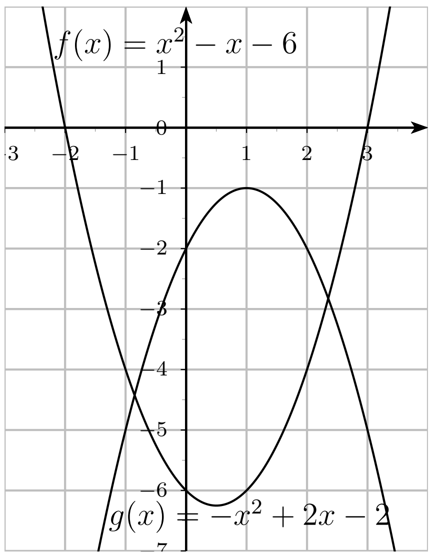
e)

x	
$f(x)$	$+$

f)

x		-7/6		0	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3.28



a) $S = \{-2; 3\}$

b) Pas de solution

c) $S = \left\{ \dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{4} \right\}$

d) $S = \left]-\infty\ ;\ -2\right[\cup \left]\ 3\ ;\ +\infty\right[$

e) $S = \left]-2\ ;\ 3\right[$

f) $S = \emptyset$

g) $S = \mathbb{R}$

h) $S = \left] \dfrac{3 - \sqrt{41}}{4}\ ;\ \dfrac{3 + \sqrt{41}}{4} \right[$

i) $S = \left]-\infty\ ;\ 0\right] \cup \left[\ 2\ ;\ +\infty\right[$

3.29

a)

x		-2		-1		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b)

x		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c)

x		-2		-1	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

d)

x		-1	
$f(x)$	$-$	0	$+$

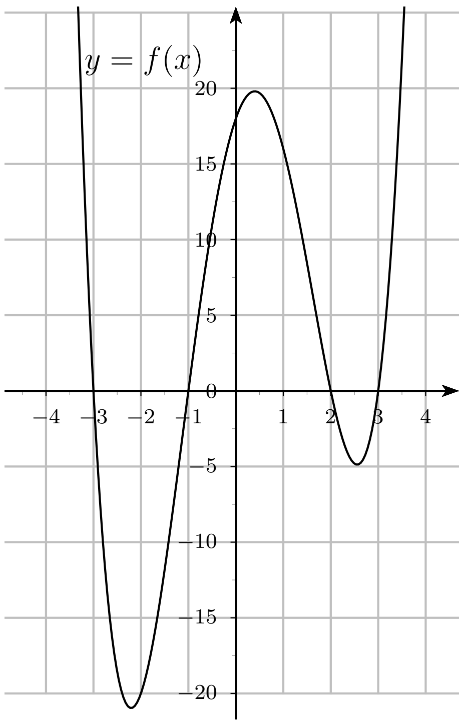
e)

x		-3		-2		-1		0		1		2		$\frac{5}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

3.30

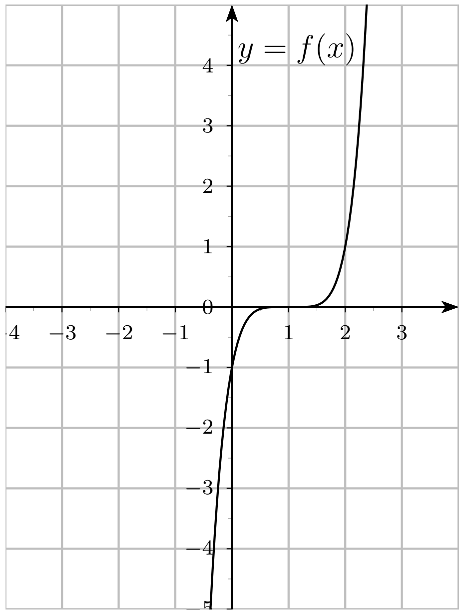
a)

x		-3		-1		2		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



b)

x		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$



Graphes

3.31

a) $f(0) \cong 4.3$

b) $f(3) \cong 3.2$

c) $S = \{1\,;\,4\,;\,6\}$

d) min $(\sim 5.2\,;\sim 0.4)$

e) $x = 0$

Interprétations :

a) A midi, l'intensité de la pluie était de 4.3 mm/h.

b) A 15 heures, l'intensité de la pluie était de 3.2 mm/h.

c) Les moments où l'intensité était de 2 mm/h sont : à 13h, à 16h et à 18h.

d) Le moment où il a plu le moins fort était à 17h12. A ce moment, il a plu à 0.4 mm/h.

e) Le moment où la pluie était la plus forte était à midi.

3.32

a) ~ 70

b) ~ -40

c) $S = \{\, -3\,;\, 1\,;\, 4\,;\, 6 \,\}$

d) ~ -1.6

e) ~ -180

Interprétations :

f)
- Au début de l'année 2010, le bénéfice était d'environ 70'000 francs.
- Au début de l'année 2012, le bénéfice était d'environ -40'000 francs, soit une perte de 40'000 francs.
- Au début des années 2007, 2011, 2014 et 2016, le bilan financier était à zéro. L'entreprise n'avait donc ni bénéfice, ni perte.
- Le bénéfice de l'entreprise était maximal vers l'été 2008.
- La perte la plus grande de l'entreprise était de 180'000 francs.

g) Elle a été déficitaire durant les années 2011, 2012, 2013 et 2016.

h) Oui, le bénéfice était positif durant cette année.

i) Même s'il était négatif, il était en croissance (en augmentation).

3.33

a) Il a fait 0 degré à 1h du matin et à 8h du matin.

b) La température maximale a été de 12 degrés.

c) Les routes ont été glissantes de minuit à environ 10 heures et quart.

d) La température a augmenté entre 4h du matin et 18h30 environ.

3.34

a) $f(0) = -1.5$

b) $f(-2) = -3.2$

c) $f(x) = 0 \iff x \in \{-3; 4{,}2\}$

d) $f(x) = 2 \iff x \in \{-3.3; 4.8\}$

e) si $a = -3.5$

f) $f(x) = x \iff x \in \{-2.4; 5.3\}$

g) $f(x) = -x \iff x \in \{-3.5; 0.7\}$

Chapitre 4

Trigonométrie

Le triangle quelconque

4.1 On aimerait construire un triangle ABC dont

- le côté a mesure 7 cm ;
- l'angle β vaut $52\,^\circ$.

Quelle mesure faut-il donner au côté b pour

a) qu'il soit possible de construire deux triangles différents ?

b) qu'il n'y ait qu'un seul triangle constructible ?

c) que la construction ne soit pas possible ?

Illustrer les trois cas ci-dessus à l'aide d'un dessin à la règle et au compas. Rédiger la marche à suivre de la construction du point b).

4.2 Est-il possible de construire un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse mesure 7.5 cm et dont l'un des côtés adjacent à l'angle droit mesure 3.9 cm ?

4.3 Construire les triangles ABC dont on connaît :

a) $a = 6$ cm $\quad b = 5$ cm $\quad \beta = 30\,^\circ$

b) $c = 8$ cm $\quad \beta = 30\,^\circ \quad \gamma = 120\,^\circ$

4.4 Chaque ligne du tableau ci-dessous donne des informations sur un triangle ABC quelconque On sait que l'on a mesuré les longueurs en centimètres et les angles en degrés.

	a	b	c	α	β	γ	$\mathcal{A}$
a)	5	6	7				
b)	5	7		35			
c)	4	9				54	
d)			8	40	80		
e)	6	5					12
f)		4		70			10

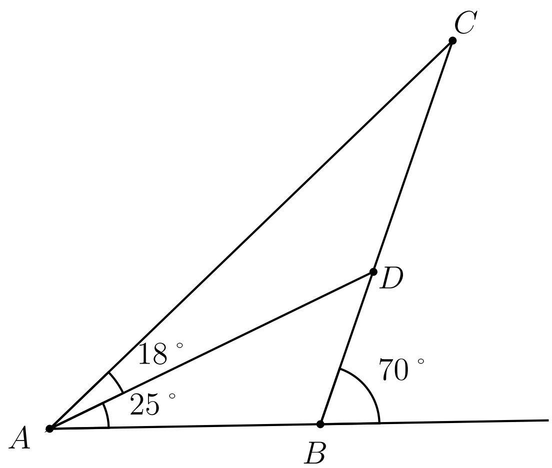
a) En utilisant uniquement les informations données dans le tableau ci-dessus avant qu'il ne soit complété, construire les triangles des points a), c) et d) à l'aide de la règle et du compas, en utilisant un rapporteur pour tracer les angles si nécessaire. Rédiger la marche à suivre de chaque construction.

b) Compléter le tableau par calcul.

4.5 Après avoir construit chaque triangle donné par les éléments ci-dessous, le résoudre :

a) $a = 8$, $b = 11$ et $\beta = 14°$ b) $b = 11$, $c = 9$ et $\gamma = 22°$ c) $a = 11$, $c = 12$ et $\alpha = 154°$

4.6 Calculer la longueur des segments BC, BD, AD et AB, sachant que la longueur du segment AC vaut 88 cm.



4.7 Un triangle ABC est donné par $a = 26.4$, $b = 16.2$ et $c = 20.7$. Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4.8 D'un quadrilatère convexe $ABCD$, on donne l'angle en A : 110°, ainsi que les longueurs des quatres côtés : $AB = 3$, $BC = 6$, $CD = 6$ et $DA = 5$. Calculer l'aire et les angles du quadrilatère.

4.9 Sur la diagonale AC d'un rectangle $ABCD$, on considère un point O tel que $\widehat{BOC} = 57^\circ$. Sachant que $AB = 36$ et $AO = 24$, calculer BC.

4.10 Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux points A et B ayant même altitude et distants de d mètres. On mesure les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ainsi que l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A. Quelle est l'altitude de C si celle de A vaut a ?

Application numérique : $d = 400$ m, $a = 1'000$ m, $\widehat{BAC} = 35^\circ$, $\widehat{ABC} = 110^\circ$ et $\theta = 20^\circ$.

4.11 Montrer que l'aire d'un triangle ABC est égale à :

a) $\mathcal{A} = \dfrac{abc}{4r}$,

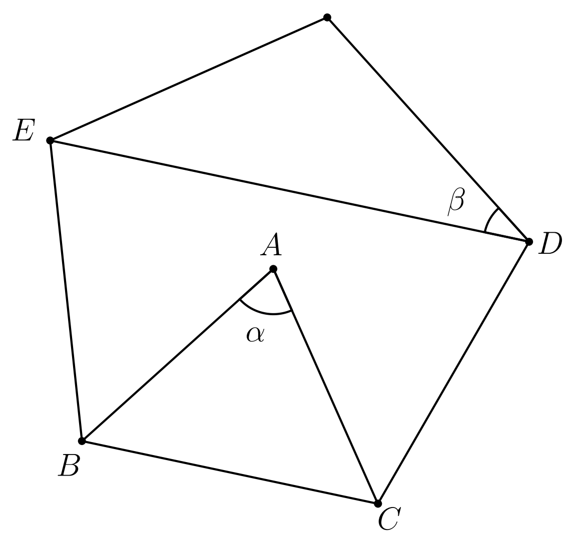
b) $\mathcal{A} = 2r^2 \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)$,

où r désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4.12 On a tracé ci-dessous un pentagone régulier dont le côté mesure 4 cm. Le point A est le centre du pentagone.

a) Calculer la valeur des angles α et β.

b) Calculer la longueur des segments AB et DE.

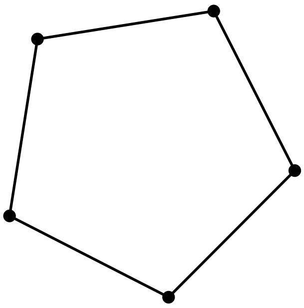


4.13 Dans le parallélogramme $ABCD$, on connaît $\overline{AB} = 30$, $\overline{BC} = 20$ et on sait que l'angle en B vaut $60\,^\circ$. Calculer la longueur des diagonales de ce parallélogramme ainsi que l'angle déterminé par celles-ci. Trouver enfin l'aire du quadrilatère $ABCD$.

4.14 Calculer les trois côtés d'un triangle, sachant qu'ils sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs et que le plus grand angle est le double du plus petit.

4.15 Dans le trapèze $ABCD$, les bases sont $\overline{AD} = 15$ m, $\overline{BC} = 10$ m et les côtés non parallèles sont $\overline{AB} = 8$ m, $\overline{CD} = 7$ m. Calculer les angles et l'aire du trapèze.

4.16 Le Pentagone est le plus grand bâtiment administratif au monde, si l'on considère la surface occupée. La base du bâtiment a la forme d'un pentagone régulier, dont chaque côté mesure 276 m.
Déterminer l'aire de la base du bâtiment.



4.17 Calculer les longueurs des bissectrices d'un triangle ABC si $a = 62.5$, $b = 48.2$ et $c = 37.8$.
On considère la bissectrice issue du sommet A comme étant le segment défini par le sommet A et l'intersection de cette bissectrice avec le côté a.

4.18 Pour calculer la distance séparant deux points A et B situés sur les rives opposées d'un fleuve, un géomètre choisit un point C situé sur la même rive à 240 m du point A. Il détermine alors que les angles $\angle BAC$ et $\angle ACB$ mesurent respectivement $63^\circ\,24'$ et $54^\circ\,6'$. Calculer la distance entre les points A et B (au cm près).

4.19 Calculer le côté et les angles inconnus d'un triangle ABC, connaissant $a = 5$, $c = 7$ et sachant que la longueur de la bissectrice issue de B est égale 4.5.

4.20 Pour un observateur, la direction de visée du sommet d'un pylône fait un angle de $53.6\,^\circ$ avec l'horizontale ; en reculant de 7 m sur le sol horizontal dans le plan de visée, l'angle d'élévation n'est plus que $32\,^\circ$.
Quelle est la hauteur du pylône sachant que l'œil de l'observateur est à 1,7 m du sol ?

4.21 Une tour de 50 m de haut est située sur le flanc d'une colline. Depuis le pied de la tour, on descend de 220 m le long du flanc de la colline et on mesure l'angle vertical θ sous lequel on voit la tour, soit $\theta = 12.5\,^\circ$.
Calculer l'angle d'inclinaison du flanc de la colline relativement à l'horizontale.

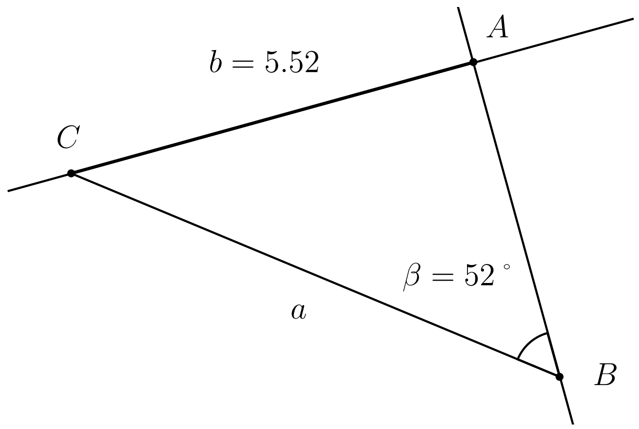
4.22 Un hélicoptère est en vol stationnaire 600 m au-dessus du sommet C d'une montagne qui culmine à 1'560 m d'altitude. Du sommet C et de l'hélicoptère, on peut voir le sommet S d'un deuxième pic plus élevé. Depuis l'hélicoptère, le sommet S est vu sous un angle de dépression (angle vertical entre le rayon visuel descendant et l'horizontale) de $43\,^\circ$; depuis le petit sommet C, on voit le sommet S sous un angle d'élévation (angle vertical entre le rayon visuel montant et l'horizontale) de $18\,^\circ$.
Calculer la distance entre les deux sommets, ainsi que l'altitude du sommet S.

4.23 A l'origine la Tour de Pise était perpendiculaire à la surface du sol et mesurait 54 m de hauteur. Comme elle s'enfonce dans le sol (en pivotant relativement au centre de sa base que l'on suppose fixe), elle penche maintenant d'un angle θ relativement à la verticale. Lorsque le centre du haut de la tour est observé à partir d'un point du sol (plat) distant de 45 m du centre de sa base (dans le plan vertical contenant la tour penchée, du côté où penche celle-ci), l'angle d'élévation est de $53.3\,^\circ$.
Calculer l'angle θ, ainsi que la distance séparant la position actuelle du centre du haut de la tour à sa position lors de l'édification de la tour.

Solutions des exercices

Le triangle quelconque

4.1



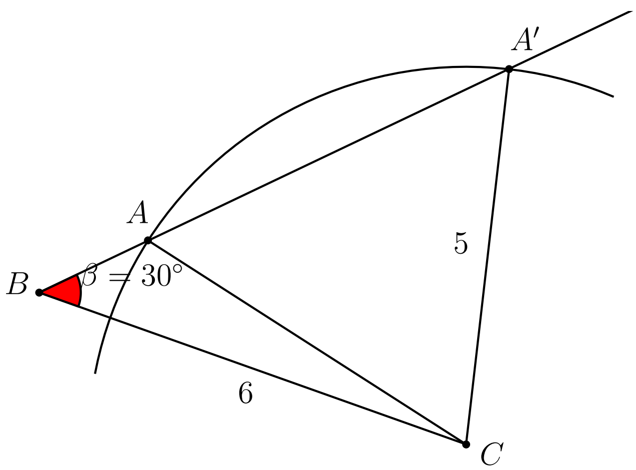
Si $b < 5.52$ cm, la construction n'est pas possible.Si $b \simeq 5{,}52$, un seul triangle possible. Si $5{,}52 < b < 7$, il y a deux triangles possibles. Si $b \geq 7$, un seul triangle possible.

4.2

C'est possible.

4.3

a) Deux triangles sont possibles:



b) On obtient ici un seul triangle.

4.4

	a	b	c	α	β	γ	$\mathcal{A}$
a)	5	6	7	44.4°	57.1°	78.5°	14.7
b)	5	7	8.7 / 2.8	35°	53.4° / 126.6°	91.6° / 18.4°	17.49 / 5.53
c)	4	9	7.4	26.0°	100.0°	54°	14.56
d)	5.9	9.1	8	40°	80°	60°	23.39
e)	6	5	5.0 / 9.8	73.7° / 29.2°	53.1° / 24.0°	53.1° / 126.9°	12
f)	5.5	4	5.3	70°	43.6°	66.4°	10

4.5

a) $c = 18.6$, $\alpha = 10.1\,^\circ$, $\gamma = 155.9\,^\circ$, $\sigma = 18.0$;

b) 1ère solution : $a_1 = 18.2$, $\alpha_1 = 130.8°$, $\beta_1 = 27.3°$, $\sigma_1 = 37{,}5$

2ème solution : $a_2 = 2.2$, $\alpha_2 = 5.3°$, $\beta_2 = 152.8°$, $\sigma_2 = 4{,}5$;

c) impossible.

4.6

$BC \simeq 63.8$ cm ; $BD \simeq 25.4$ cm ; $AD \simeq 56.5$ cm ; $AB \simeq 42.51$ cm.

4.7

Le rayon mesure 13.2.

4.8

Aire$= 23.7$; $\beta = 101.3\,^\circ$; $\gamma = 67.3\,^\circ$; $\delta = 81.4\,^\circ$.

4.9

$BC = 15{,}3$

4.10

L'altitude du sommet C est 1224.13 m.

4.12

L'angle α mesure 72 ° et l'angle β mesure 36 °. Le côté AB mesure environ 3.4 cm et le côté DE mesure environ 6.5 cm.

4.13

Les diagonales mesurent environ 26.46 et 43.59 unités. L'aire du parallélogramme vaut environ 519.6 unités carrées.

4.14 Les longueur des côtés du triangles sont 4, 5 et 6.

4.15

L'aire du trapèze vaut 86,60.

4.16

La surface du pentagone vaut environ 131 059 m^2.

4.17

$b_A = 29.32$, $b_B = 42.63$ et $b_C = 51.59$

4.18

Distance AB : 219.17 m

4.19

$\alpha = 39.1\,^\circ$, $\beta = 79\,^\circ$, $\gamma = 61.9\,^\circ$, $b = 7.8$

4.20

Hauteur du pylône : 9.81 m

4.21

$5.3\ ^\circ$

4.22

Distance de C à S : 502 m ; altitude : 1715 m.

4.23

$\theta = 5.2\,^\circ$; 4.92 m

Chapitre 5

Combinatoire

Principes fondamentaux

5.1 De combien de manières peut-on choisir le délégué, son remplaçant et le responsable des nettoyages dans une classe de 25 élèves ?

5.2 Combien de « mots » de trois lettres comportent seulement des voyelles ou seulement des consonnes ?

5.3 Combien de nombres pairs de 3 chiffres peut-on former avec les trois chiffres 1, 2 et 4 ? Parmi ceux-ci, combien possèdent au moins une fois le chiffre 1 ?

5.4 Une personne veut acheter une voiture. Elle constate qu'elle a non seulement le choix entre 8 modèles, mais que chaque modèle possède 15 couleurs différentes et présente 3 versions différentes, chacune avec ou sans transmission automatique. De combien de manières peut-il effectuer sa commande ?

5.5 On doit former un comité de trois personnes comprenant un représentant de chacune des catégories direction, personnel et consommateurs. Il y a trois représentants possibles parmi le personnel, deux parmi les membres de la direction et quatre parmi les consommateurs. Combien de comités différents peut-on former ?

5.6 Une personne a quatre pantalons, six chemises et trois pulls. De combien de manières différentes peut-elle choisir un pantalon, une chemise et un pull ? De combien de manières différentes peut-elle choisir un pantalon, une chemise et un pull si chaque pull peut être mis avec exactement deux pantalons et chaque chemise avec exactement deux pulls ?

5.7 a) Déterminer le nombre d'entiers positifs à quatre chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 .

b) Parmi les nombres de la question a) , combien ont des chiffres distincts ?

c) Parmi les nombres de la question a) , combien sont-ils inférieurs à 2 200 ?

5.8 De combien de manières cinq personnes peuvent-elles s'asseoir sur un canapé de trois places ?

La notation factorielle

5.9 Je dispose d'une boîte allongée comportant 4 compartiments juxtaposés. Je dois mettre 4 boules de billard dans ma boîte. La première boule est jaune, la deuxième rouge, la troisième bleue et la quatrième verte. De combien de manières différentes puis-je procéder ?

5.10 Trois amis prennent place sur un banc. Si seule la position relative compte, de combien de façons peuvent-ils s'asseoir ?

5.11 D'un jeu de jass, je sors les 9 cartes de coeur. Je dispose ces 9 cartes sur une ligne devant moi. Sachant qu'il me faut 5 secondes pour poser toutes les cartes, combien de temps me faudra-t-il pour pouvoir tester toutes les configurations possibles ?

5.12 Soit n un nombre entier positif. On définit $n!$ de la façon suivante :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

L'expression $n!$ se lit n factorielle. Calculer la valeur de chaque expression ci-dessous :

a) $2!$ d) $2!\,3!$ g) $6!$

b) $3!$ e) $5!$ h) $100!$

c) $10!$ f) $50!$ i) $1000!$

5.13 Simplifier l'expression donnée, puis calculer sa valeur :

a) $\dfrac{12!}{9!}$ c) $\dfrac{12!}{8!\,4!}$ e) $\dfrac{10!}{8!}$ g) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$ i) $\dfrac{5!}{(5-5)!}$

b) $\dfrac{11!}{3!\,2!\,4!}$ d) $\dfrac{100!}{98!\,5!}$ f) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ h) $0!$

Les permutations

5.14 Huit personnes désirent s'asseoir sur un banc. De combien de façons différentes peuvent-elles s'asseoir ?

5.15 Combien existe-t-il d'anagrammes des mots : MERCI ; ENTENTE ?

5.16 On place au hasard les douze tomes d'une encyclopédie sur un rayon de bibliothèque.

a) Quel est le nombre total de possibilités ?
b) Parmi ces possibilités, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte, dans cet ordre ?
c) Parmi ces possibilités, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

5.17 Combien de nombres de 9 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 ?

5.18 On considère un groupe de dix personnes. De combien de manières peut-on le partager :

a) en deux groupes de sept et trois ?
b) en trois groupes de cinq, trois et deux ?

5.19 Si 12 personnes doivent être réparties en 3 comités comptant respectivement 3, 4 et 5 individus, de combien de manières peut-on s'y prendre ?

5.20 On considère un groupe de 10 randonneurs, dont Pierre, Paul et Jacques. Les 10 randonneurs marchent les uns derrière les autres (ils forment une colonne de marcheurs).

a) Combien y a-t-il de colonnes possibles ?
b) Dans combien de colonnes Pierre, Paul et Jacques se suivent-ils (dans un ordre quelconque) ?
c) Quel est le nombre de colonnes pour lesquelles Pierre, Paul et Jacques ne sont ni en tête, ni en queue du groupe ?

5.21 On dispose de sept jetons numérotés, deux portent le chiffre 1, trois portent le chiffre 2 et deux portent le chiffre 3.

a) Combien de nombres de sept chiffres peut-on former en juxtaposant ces jetons ?
b) Parmi ces nombres combien sont inférieurs à 1 300 000 ?

Les arrangements

5.22

a) Combien de nombres de 4 chiffres distincts peut-on écrire avec 1, 2, 4, 5, 6, 7 ?

b) Combien de nombres de 4 chiffres non nécessairement distincts peut-on écrire avec 1, 2, 4, 5, 6, 7 ?

5.23 De combien de façons peut-on disposer 5 voitures dans un parking de 8 places ? Même question si les 3 premières places vont être occupées par les 3 membres de la direction faisant partie des 5 voitures à placer.

5.24 Un sac contient 7 boules numérotées de 1 à 7. Combien y a-t-il de tirages différents de 5 boules sans et avec remise ?

5.25 On lance 10 fois une pièce de monnaie. Combien de résultats différents peut-on obtenir (un résultat est une suite ordonnée de piles et de faces) ?

5.26 Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de huit étages. Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec 5 occupants.

a) De combien de manières ces 5 occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont descendre ?

b) Même question dans le cas où à chaque étage un occupant au plus quitte l'acsenseur ?

5.27 Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec les lettres du mot EQUATION ?

5.28 De combien de manières 10 personnes peuvent-elles s'asseoir sur un banc de 4 places ?

5.29 On considère le mot FRAGMENTS. Combien de mots peut-on former :

a) en prenant toutes les lettres (sans les réutiliser) ?

b) en prenant 8 lettres (sans les réutiliser) ?

c) en prenant 2 lettres (sans les réutiliser) ?

5.30 On considère un jeu forain où 4 souris, numérotées de 1 à 4 peuvent se diriger vers 5 cases A, B, C, D et E, plusieurs souris pouvant choisir la même case. Sur un billet, le joueur inscrit une répartition des souris dans les différentes cases et il gagne si son pronostic se réalise. Combien de pronostics différents peut-il faire ?

Les combinaisons

5.31 Lu sur la carte d'un restaurant : « les 1001 carpaccios ». Dans la pratique, le restaurateur propose au client d'agrémenter son carpaccio de 4 garnitures choisies parmi 15. Quel est le nombre réel de compositions possibles ?

5.32 Un groupe de 12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y-a-t-il de poignées de mains ?

5.33

a) De combien de façons peut-on choisir un bouquet de 7 fleurs parmi 12 ?

b) Les 12 fleurs se répartissent en 8 roses et 4 gerberas. De combien de façons peut-on composer un bouquet de 7 fleurs, si l'on veut :

  i) 4 roses et 3 gerberas ?

  ii) au moins 1 gerbera ?

5.34 On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Combien y a-t-il de mains :

a) au total ?

b) formées de trois as ?

c) formées d'un roi et de deux as ?

d) ne contenant aucun as ?

e) contenant au moins un as ?

f) contenant exactement un as ?

5.35 A partir d'un groupe de 10 candidats formés de 6 hommes et de 4 femmes, de combien de manières diférentes peut-on choisir (chaque personne ne peut occuper qu'une seule fonction) :

a) Un comité formé d'un(e) président(e), d'un(e) cassier(e) et d'un(e) secrétaire ?

b) Une commission de trois personnes ?

c) Une commission de trois personnes formée d'exactement une femme ?

d) Une commission de trois personnes formée d'au moins une femme ?

e) Une commission de trois personnes comportant une personne qui préside la commission et formée d'exactement une femme ?

5.36 Un groupe de gymnasiens est formé de 5 garçons et de 7 filles ; 3 garçons et 1 fille mesurent plus de 190 cm. On choisit deux personnes parmi le groupe de 12 pour former une équipe de beach-volley.

a) Combien d'équipes peut-on former ?

b) Combien d'équipes sont-elles formées d'une fille et d'un garçon ?
c) Combien d'équipes sont-elles formées de deux élèves du même sexe ?
d) Combien d'équipes sont-elles formées d'au moins un élève de plus de 190 cm ?

5.37 Un questionnaire comprend 8 questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes avec 4 oui et 4 non ?

Problèmes mélangés

5.38 Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de 6 places. Quel est le nombre de possibilités ? Même question, mais avec 6 personnes.

5.39

a) Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de « mots » de 4 lettres ?
b) Même question, en se limitant aux mots composés de 4 lettres différentes.

5.40 On tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien y-a-t-il de mains possibles ?

5.41 Combien de nombres de 3 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 2, 3, 5, 6, 7, 9 ? Parmi ceux-ci, combien sont-ils inférieurs à 400 ? impairs ? multiples de 5 ?

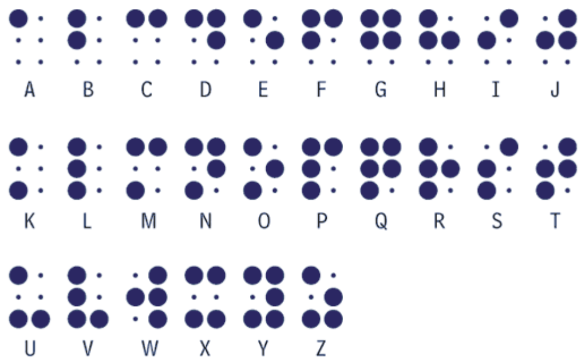
5.42 De combien de façons peut-on aligner 5 dés de couleurs différentes ?
(Chaque dé a six faces numérotées de 1 à 6.)

5.43 Un menu de restaurant propose 10 hors-d'oeuvre, 4 entrées, 11 plats de viande et 9 desserts. Combien peut-on composer de menus contenant chacun de ces 4 types de plats ?

5.44

a) Neuf personnes prennent place autour d'une table ronde. De combien de manières peuvent-elles se disposer (on suppose que seule la place relative de ces personnes importe) ?
b) Même question, si l'on suppose de plus que deux personnes choisies d'avance doivent être placées côte à côte.

5.45 Les symboles de l'écriture braille sont formés d'un assemblage de six points en relief, comme le montre l'image ci-dessous. Combien de symboles différents peut-on fabriquer selon ce principe ?



5.46 De combien de façons différentes peut-on aligner 5 boules rouges, 2 blanches et 3 bleues ?

5.47 Combien de mots peut-on écrire en utilisant une fois et une seule chaque lettre du mot MISSISSIPPI ? Parmi ces mots, combien commencent et se terminent par la lettre S ?

5.48 Combien de mots peut-on écrire en utilisant une fois et une seule chaque lettre du mot TOULOUSE, si les consonnes doivent occuper les première, quatrième et septième places ?

5.49 Combien de mots de 4 lettres peut-on écrire avec les lettres du mot BATAVIA ?

5.50 De combien de manières peut-on asseoir 8 personnes en rang si :

a) aucune restriction n'est mise ;

b) les personnes A et B veulent être ensemble ;

c) les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversement, en supposant qu'il y a 4 hommes et 4 femmes ;

d) les hommes, qui sont 5, doivent rester ensemble ;

e) les personnes forment 4 couples et chaque couple doit rester réuni.

5.51 Douze joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres joueurs. Combien y aura-t-il de parties disputées ?

5.52

a) Dans une société de 25 personnes, on doit en désigner 4 qui formeront le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ?

b) Dans une société de 25 personnes, on doit désigner un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire. De combien de manières différentes peut-on choisir ces 4 personnes ?

5.53 Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut composer une commission de 7 membres comprenant exactement 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?

5.54 On distribue les 36 cartes d'un jeu à 4 joueurs. Quel est le nombre de distributions différentes ?

5.55

a) Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'une épreuve écrite. Combien de choix peut-il faire ?

b) Même question en supposant de plus qu'il doive obligatoirement résoudre :

   i) les 3 premiers problèmes ;

   ii) 4 au moins des 5 premiers problèmes.

5.56 De combien de façons peut-on choisir 5 cartes à jouer dans un jeu de 36 cartes, de manière que ces 5 cartes comprennent :

a) les 4 as ?

b) 2 as et 2 rois ?

c) au moins un as ?

5.57 Dans le jeu du Sport-Toto, on pronostique le résultat de 13 matches (1 = victoire de l'équipe à domicile, x = match nul, 2 = victoire de l'équipe visiteuse). Combien de pronostics différents peut-on écrire ?

5.58 Lorsqu'on jette 20 fois une pièce de monnaie, combien de séquences différentes sont possibles ? Parmi celles-ci, combien contiennent exactement 1 fois pile ? 4 fois pile ? 10 fois pile ? 20 fois pile ?

5.59 De combien de façons peut-on remplir une feuille de loterie à numéros (marquer 6 numéros sur 45) ? Combien, parmi toutes ces possibilités, permettent de réaliser 6 points, 0 point, 3 points ?

5.60

a) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 . On en tire simultanément trois. Déterminer le nombre de tirages différents.

b) Même question si l'on tire successivement 3 boules, sans remettre dans l'urne celles qui ont été tirées, en tenant compte de l'ordre.

c) Même question que sous b) si, après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne.

5.61 (Jeu du MasterMind) Dénombrer le nombre de possibilités qu'il y a de remplir 5 trous avec 8 couleurs différentes. Les couleurs peuvent être répétées et certains trous laissés vides.

5.62 Dans une assemblée de 25 dames et 15 messieurs, il est décidé de nommer un comité de 5 personnes.

a) Combien de comités peut-on envisager ?

b) Combien de ces comités comprennent exactement 3 dames ?

c) Combien de ces comités comprennent au moins 3 dames ?

5.63 Quel est le nombre de possibilités de former deux équipes de beach-volley différentes de 2 joueurs avec 7 personnes ?

5.64 Avec 15 personnes, de combien de manières différentes peut-on former 3 équipes de 5 ?

5.65 Sur un voilier, on dispose d'un instrument de signalisation constitué de 8 pavillons alignés verticalement. Combien de signaux différents peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et d'un pavillon bleu.

5.66 Un gymnase a reçu 3 billets de concert pour les élèves d'une classe. Sachant que cette classe est composée de 19 étudiants, calculer le nombre de façons de distribuer ces trois billets dans chacun des cas suivants :

a) les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet ;

b) les billets sont numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billets ;

c) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet.

5.67

a) Combien de séquences différentes peut-on lire sur un compteur kilométrique de voiture ? Ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9.

b) Parmi les configurations ci-dessus, quel est le nombre de celles où figure exactement trois fois le chiffre 7 ?

c) Même question, mais où figure au moins trois fois le chiffre 7.

d) Même question, mais où figure au moins une fois le chiffre 7.

5.68

a) Sur un damier rectangulaire de 4 colonnes et 3 lignes, de combien de manières peut-on placer 4 jetons de couleurs différentes sur des cases différentes ?

b) Même question s'il doit y avoir un seul jeton dans la première colonne et qu'il soit jaune.

c) Même question qu'au point a) s'il doit y avoir exactement deux jetons dans la troisième colonne.

d) Même question qu'au point a) s'il doit y avoir au moins deux jetons dans la quatrième colonne.

5.69

a) Sur un damier rectangulaire de 7 colonnes et 5 lignes, de combien de manières peut-on disposer 7 jetons, à savoir 4 bleus et 3 jaunes ?

b) Même question si les jetons bleus occupent les cases numérotées 1, 2, 3, 4 de la première ligne.

c) Même question qu'au point a) s'il doit y avoir exactement 1 jeton bleu et 2 jetons jaunes dans la première colonne.

5.70 Sur un damier rectangulaire de 10 colonnes et 30 lignes, quel est le nombre de dispositions possibles pour 6 jetons de même couleur s'il y a :

a) au plus un jeton par colonne ?

b) au plus un jeton par ligne ?

c) au plus un jeton par ligne et par colonne ?

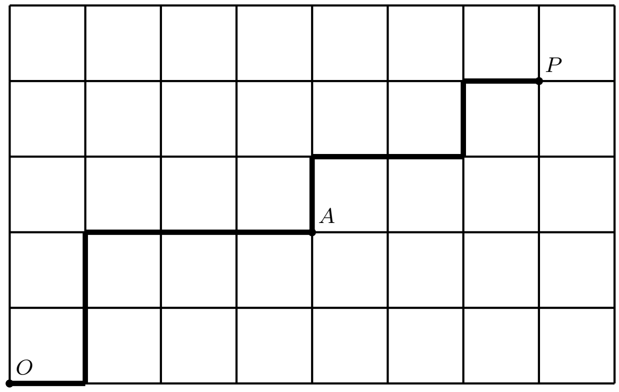
5.71 On dispose de 10 timbres tous différents. Trois d'entre eux sont rouges, cinq sont bleus et deux sont verts. On en choisit quatre. De combien de façons différentes peut-on faire ce choix, sachant que :

a) les timbres choisis sont tous de la même couleur ?

b) une et une seule des couleurs ne figure pas dans les timbres choisis ?

c) les trois couleurs figurent parmi les timbres choisis ?

5.72 Dans le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on veut joindre l'origine $O(0;0)$ au point $P(7;4)$ par un chemin aussi court que possible, en suivant les lignes du réseau :



a) Combien de tels chemins y a-t-il ?

b) Combien y en a-t-il qui passent par $A(4;2)$?

Solutions des exercices

Principes fondamentaux

5.1 $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800$.

5.2 $8\,216$.

5.3 18 ; 10.

5.4 720.

5.5 24.

5.6 72 ; 24.

5.7 a) 256 ; b) 24 ; c) 80.

5.8 60.

5.9 Il y a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ façons de procéder.

5.10 Il y a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ façons de s'asseoir.

5.11 $5 \cdot 9! = 1\,814\,400$ secondes, soit 504 heures !

5.12

a) 2 ;

b) 6 ;

c) $3\,628\,800$;

d) 12 ;

e) 120 ;

f) $30\,414\,093\,201\,713\,378\,043\,612\,608\,166\,064\,768\,844\,377\,641\,568\,960\,512\,000\,000\,000\,000$;

g) 720 ;

h) $\sim 9.33262154439442 \cdot 10^{157}$;

i) $\sim 4.0238726007709 \cdot 10^{2567}$.

5.13

a) $1\,320$;

b) $138\,600$;

c) 495 ;

d) $\dfrac{165}{2}$;

e) 90

f) $n(n-1)$;

g) $(n+2)(n+1)n$.

h) 1 (par définition)

i) 120

5.14 $40\,320$.

5.15 120 ; 210.

5.16 a) $479\,001\,600$; b) $39\,916\,800$; c) $79\,833\,600$.

5.17 $362\,880$.

5.18 a) 120 b) $2\,520$

5.19 $27\,720$.

5.20 a) $3\,628\,800$ b) $241\,920$ c) $1\,693\,440$

5.21 a) 210 b) 40

5.22 a) 360 ; b) $1\,296$.

5.23 $6\,720$; 120.

5.24 $2\,520$; $16\,807$.

5.25 $1\,024$.

5.26 a) $32\,768$ b) $6\,720$

5.27 $1\,680$.

5.28 $5\,040$.

5.29 a) 362 880 b) 362 880 c) 72

5.30 625

5.31 1'365.

5.32 66.

5.33 a) 792 ; b) i) 280 ; ii) 784.

5.34 a) 7 140 ; b) 4 ; c) 24 ; d) 4 960 ; e) 2 180 ; f) 1 984.

5.35 a) 720 ; b) 120 ; c) 60 ; d) 100 ; e) 180.

5.36 a) 66 ; b) 35 ; c) 31 ; d) 38.

5.37 70.

5.38 720 dans les deux cas.

5.39 a) 456'976 ; b) 358'800.

5.40 $635\,013\,559\,600 \simeq 6{,}4 \cdot 10^{11}$.

5.41 120 ; 40 ; 80 ; 20.

5.42 933'120.

5.43 3960.

5.44 a) 40'320 ; b) 10'080.

5.45 64 (en fait 63 à cause de l'espace entre les mots).

5.46 2 520.

5.47 34'650 ; 3'780.

5.48 180.

5.49 208.

5.50

a) $40\,320$; c) $1\,152$; e) 384.
b) $10\,080$. d) $2\,880$;

5.51 66.

5.52

a) 12'650 ; b) 303'600.

5.53 3'780.

5.54 $21\,452\,752\,266\,265\,320\,000 \simeq 2{,}1 \cdot 10^{19}$.

5.55

a) 45 ; b) i) 21 ; ii) 35.

5.56

a) 32 ; b) $1\,008$; c) $175\,616$.

5.57 $1\,594\,323$.

5.58 1'048'576 ; 20 ; 4'845 ; 184'756 ; 1.

5.59 8'145'060 ; 1 ; 3'262'623 ; 182'780.

5.60

a) 220 ; b) $1\,320$; c) $1\,728$.

5.61 59'049.

5.62

a) 658'008 ; b) 241'500 ; c) 484'380.

5.63 105.

5.64 $126\,126$.

5.65 280.

5.66

a) 5'814 ; b) 6'859 ; c) 969.

5.67

a) 10^5 ; c) 856 ;

b) 810 ; d) 40'951.

5.68

a) 11'880 ; b) 1'512 ; c) 2'592 ; d) 2'808.

5.69

a) 235'358'200 ; b) 4'495 ; c) 3'288'600.

5.70

a) $\sim 1{,}5 \cdot 10^{11}$; b) $\sim 5{,}9 \cdot 10^{11}$; c) $\sim 9 \cdot 10^{10}$.

5.71

a) 5 ; b) 100 ; c) 105.

5.72 a) 330 ; b) 150 ;

Chapitre 6

Statistiques

Statistiques descriptives

6.1 Dans chaque situation exposée ci-dessous,

a) décrire la population étudiée ;

b) décrire l'échantillon ;

c) nommer la variable étudiée ;

d) décrire l'ensemble des catégories ou des valeurs de la variable ;

e) donner le type de variable étudiée.

Situation 1
On effectue un sondage auprès de 500 habitants de la ville de Lausanne pour connaître leur chaîne de télévision favorite.

Situation 2
Dans une étude portant sur l'évolution de la situation économique en Suisse de 2000 à 2010, on s'intéresse au taux de chômage annuel de cette décennie.

Situation 3
Afin de déterminer le profil socioéconomique des ménages de la ville de Genève, on a noté le nombre d'enfants par ménage pour un échantillon de 380 ménages.

Situation 4
Selon les données du recensement helvétique de l'an 2000, à la question « Quelle est la langue dans laquelle vous pensez et que vous savez le mieux ? »,

- 63.7% de la population a répondu « l'allemand » ;
- 20.4% de la population a répondu « le français » ;
- 6.5% de la population a répondu « l'italien » ;
- 0.5% de la population a répondu « le romanche » ;
- et 9.0% de la population a cité une langue non nationale ;

6.2 Donner le type de chacune des variables suivantes :

a) La superficie des lacs de Suisse.

b) Le pays d'origine des touristes qui visitent la Suisse.

c) Le nombre d'étudiants dans les gymnases vaudois.

d) La longueur d'un crayon

e) Prenez-vous le train chaque semaine ?

(a) Oui

(b) Non

f) Ressentez-vous du stress avant de prendre l'avion ?

(a) Toujours

(b) Souvent

(c) Parfois

(d) Rarement

(e) Jamais

6.3 Pour chaque question, indiquer le type de variable et l'échelle de mesure.

a) Avez-vous au moins une note insuffisante dans votre bulletin semestriel ?
1. Non   2. Oui

b) Combien de notes insuffisantes avez-vous dans votre bulletin semestriel ?
1. 0   2. 1   3. 2 ou 3   4. 4 et plus

c) Combien de note insuffisante avez-vous dans votre bulletin semestriel ?

d) Quel est votre taux d'échec au semestre ?

$$\left(\text{taux d'échec} = \frac{\text{Nombre de notes insuffisantes}}{\text{Nombre total de notes}}\right)$$

1. 0%   2. De 1% à 15.9%   3. De 16% à 49.9%   4. 50% et plus

e) Quel est votre taux d'échec au semestre ?

f) Dans quelle mesure êtes-vous d'accord avec l'affirmation « Les élèves ayant plus de quatre notes insuffisantes en fin de première année devraient arrêter leurs études gymnasiales ».
1. Fortement en désaccord   2. En désaccord   3. Plutôt d'accord   4. Totalement d'accord

g) Quelle est votre année de naissance ?

6.4 Dans le bulletin météo du journal local, on trouve notamment pour chaque jour de la semaine l'heure du lever du soleil et la vitesse des vents. Indiquer le type de chacune des deux variables et l'échelle de mesure qui lui est associée.

6.5 D'après l'office fédéral de la statistique, les blessés légers victimes d'accidents de la route en 2013 se répartissent par moyen de locomotion de la façon suivante :

Moyen de locomotion	**Blessés légers**
Voiture de tourisme	9570
Motocycle	2479
Bicyclette	2435
Piétons	1570
Autres	1196

a) Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme circulaire.

b) Faire de même à l'aide d'un diagramme en barres.

c) Peut-on déduire de ces chiffres qu'il est moins dangereux de se déplacer en moto plutôt qu'en voiture ?

6.6 Le nombre de véhicules à moteur mis en circulation en Suisse en 2011 est donné par catégorie dans le tableau suivant :

Catégorie	Nombre
Voitures de tourisme	327'955
Véhicules de transport de personnes	3'950
Véhicules de transport de choses	33'119
Véhicules agricoles	3'714
Véhicules industriels	4'006
Motocycles	48'133
Total des véhicules	420'875

Source : Office fédéral de la statistique, site web Statistique suisse 2012

Représenter ces données graphiquement par un diagramme à rectangles horizontaux et par un diagramme circulaire. Laquelle de ces deux représentations est-elle la plus appropriée ?

6.7 Lors d'un sondage, on a demandé à 820 citoyens suisses leur opinion sur les accords bilatéraux Suisse-UE. Les réponses se répartissent comme suit.

Répartition de .... **selon** ....

Utilité	**Effectifs**	**Pourcentage**
Très utiles	95	
Utiles	342	
Nuisibles	210	
Très nuisibles	46	
Sans opinion	127	
Total		

a) Décrire la population étudiée, nommer la variable considérée et le type d'échelle de mesure.
b) Compléter le tableau de distribution ci-dessus ainsi que son titre.
c) Représenter graphiquement la distribution par un diagramme approprié au type de variable.
d) Calculer le taux de confiance en ces accords, soit le pourcentage de personnes qui estiment les accords bilatéraux utiles ou très utiles.

6.8 Donner la première des classes qui permettraient de grouper une série de 36 données, précises au centième, sachant que la plus petite valeur est 2,65 et la plus grande 18,45.

6.9 On désire grouper en classes les revenus de 80 stagiaires. Le plus petit revenu est de 252 francs et le plus grand de 937 francs. Donner la première classe de la distribution des revenus.

6.10 On a récolté les données suivantes :

314	473	500	812	566	212	606	935	247	474	993	432
262	1080	972	383	975	978	366	322	638	570	1094	270
813	227	950	1030	776	503	398	398	755	650	1008	711
563	930	1054	836	631	519	1019	299	1032	500	918	979
570	592	1023	859	759	990	964	598	1097	803	998	337

a) Grouper les données en 6 classes de largeur 150 ([200 ;350[, [350 ;500[, etc.) et dresser un tableau de distribution.

b) Construire l'histogramme et le polygone des fréquences.

6.11 Sur une route où la vitesse est limitée à 80 km/h, on a mesuré la vitesse de 50 véhicules.

84	81	76	71	80	81	83	84	80	83
74	75	92	76	80	82	94	73	83	83
75	81	79	97	78	82	76	78	82	82
78	81	91	68	82	73	82	79	75	77
83	80	77	81	69	78	81	83	87	87

a) Grouper les données en classes **fermées à droites** et dresser un tableau de distribution.

b) Construire l'histogramme et le polygone des fréquences.

c) Compléter l'analyse suivante : « Une .... des véhicules respectent la limitation de vitesse de 80 km/h et ..... % roulent entre 80 et 85 km/h. En tenant compte d'une marge de tolérance de 5 km/h, ... % des véhicules sont amendables. »

d) Pourquoi a-t-on fermé les classes à droite dans ce contexte ?

6.12 Le tableau ci-dessous met en parallèle la distribution de l'âge des Suisses en 1860, lors du premier recensement, et en 2009.

Répartition de la population suisse en 1860 et 2009 selon l'âge.

Âge	**1860**		**2009**	
	Effectif	**Pourcentage**	**Effectif**	**Pourcentage**
] 0 ; 10]	518'538	20.6%	763'546	9.8%
] 10 ; 20]	476'347	18.9%	872'579	11.2%
] 20 ; 30]	429'507	17.1%	978'050	12.6%
] 30 ; 40]	362'978	14.4%	1'096'126	14.1%
] 40 ; 50]	287'564	11.4%	1'277'392	16.4%
] 50 ; 60]	230'276	9.2%	1'031'892	13.3%
] 60 ; 70]	138'932	5.5%	840'583	10.8%
] 70 ; 80]	59'549	2.4%	554'034	7.1%
] 80 ; 90]	11'095	0.4%	311'195	4.0%
90 et plus	610	0.0%	60'409	0.8%
Total	2'515'396	99.9% *	7'785'806	100.1% *

Source : Office fédéral de la statistique, site web Statistique suisse 2012.

*Les pourcentage totaux ne sont pas exactement égaux à 100% à cause des arrondis.

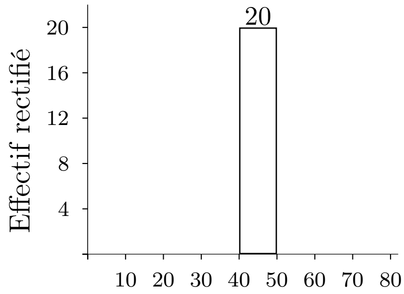
a) Quelle représentation graphique mettrait le mieux en évidence les différences de distribution des deux années étudiées ? Justifier la réponse.

b) Représenter sur un même graphique le polygone des fréquences relatives de ces deux années.

c) Compléter le texte suivant :
« La population suisse a plus que .... entre 1860 et 2009 en passant de .... à presque .... d'habitants. En 1860, la population était très jeune : l'aire sous le polygone est plus grande avant ..... ans qu'après. A cette époque, seulement ....% des habitants avaient plus de 70 ans, contre ....% actuellement, soit une proportion ...... fois plus élevée. En 1860, le groupe des moins de 20 ans représentait près de ....% de la population contre ....% aujourd'hui, soit une proportion réduite de .... En 1860, la classe la plus représentée est celle des .... , avec ....% des habitants, alors qu'en 2009, c'est la classe des .... avec ....% des habitants. »

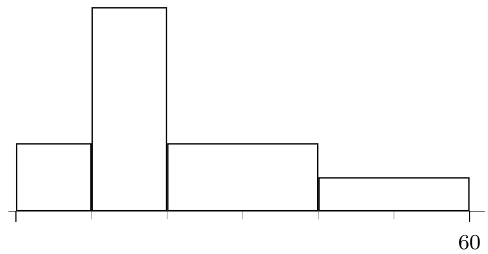
6.13 a) Compléter l'histogramme de la distribution suivante :

Amplitude	Classe	Effectif	Effectif rectifié
	[10 ; 40 [	12	
	[40 ; 50 [	20	
	[50 ; 60 [	18	
	[60 ; 80 [	10	
	Total	60	

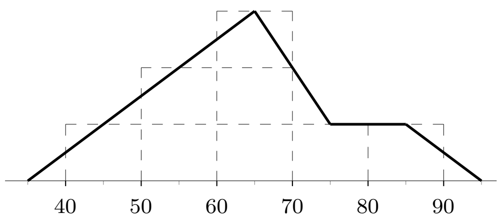


b) Compléter le tableau de distribution en utilisant l'information donnée par l'histogramme.

	Pourcentage
[0 ; [	
[; [	
[; [	
[; 60 [	
Total	100%



c) Le polygone de fréquences ci-contre représente une distribution. Quel est le pourcentage des données ayant une valeur comprise entre 50 et 60 ?



6.14 Dans une usine, lors d'un contrôle qualité, le diamètre, en mm, de 50 boulons tirés au hasard dans la production a été mesuré. Les résultats suivants ont été obtenus.

Répartition de .... selon ....

Diamètre [mm]	Effectifs
$[21.5; 21.8[$	4
$[21.8; 21.9[$	6
$[21.9; 22.0[$	6
$[22.0; 22.1[$	13
$[22.1; 22.2[$	8
$[22.2; 22.3[$	7
$[22.3; 22.5[$	6
Total	50

a) Décrire la population étudiée, nommer la variable considérée, le type de la variable et l'échelle de mesure. Compléter le titre du tableau de distribution.

b) Représenter l'histogramme de ces données.

c) Représenter le polygone des fréquences cumulées.

d) Si la valeur nominale du diamètre des boulons est de 22 mm, calculer le pourcentage de boulons qui s'en écartent de plus de 0.3 mm ? Vérifier la cohérence du résultat sur le polygone des fréquences cumulées.

6.15 Déterminer la moyenne, la médiane et le mode ou la classe modale de chaque jeu de données.

a)

valeur	1	2	3	4	5	6
effectif	1	3	5	5	7	4

b) -0.5 0.1 0.9 0.3 0.2 -0.6 0 -1.0 0.7 -0.1

c)

classe	$[100; 200[$	$[200; 300[$	$[300; 400[$	$[400; 500[$
fréquence	32%	20%	12%	36%

d)

classe	$[0; 2[$	$[2; 3[$	$[3; 4[$	$[4; 5[$	$[5; 10[$
effectif	12	48	94	42	4

6.16 Un professeur de mathématiques recueille toutes les notes qu'il a mises dans une classe donnée et obtient le tableau de distribution suivant :

Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
Effectif	0	1	4	9	9	21	28	33	34	30	21

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

b) Tracer l'histogramme de cette distribution.

c) Calculer le pourcentage associé à chacune des valeurs de ce tableau de distribution.

d) Donner le mode, la médiane et la moyenne.

6.17 Lors d'une journée de recrutement de l'armée, on a mesuré la taille en centimètres de 50 hommes âgés de 20 ans et reporté les mesures ci-dessous :

```
171.5 171.5 172.0 177.0 171.0 169.5 176.0 174.5 170.5 175.0 173.5
172.5 172.0 173.0 175.5 176.5 173.0 173.5 171.0 169.5 173.5 171.0
174.0 166.0 173.5 168.0 177.0 170.0 175.0 167.5 176.5 172.5 177.0
172.5 179.5 168.0 175.0 174.0 178.5 167.0 170.5 176.0 172.0 177.0
174.0 171.0 179.0 176.0 170.0 170.0
```

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

b) Grouper les données en 7 classes de deux centimètres de large, comprises entre 166 cm et 180 cm, calculer l'effectif, la fréquence et la fréquence cumulée pour chaque classe.

c) Tracer l'histogramme de cette distribution et tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.

d) Donner la classe modale, la médiane et la moyenne.

6.18 La taille moyenne de 41 250 000 adultes d'un pays est de 1,67 m. Si l'on sait de plus que, dans ce pays, la taille moyenne des femmes est de 1,61 m et celle des hommes de 1,74 m, de combien le nombre de femmes dépasse-t-il le nombre d'hommes ?

6.19 Le prof de maths m'a dit : « Finalement, vous avez 4.5 de moyenne sur les cinq notes de l'année ». Sachant que mes quatre premières notes étaient 5.2, 3.1, 4.4 et 4.2, calculer la cinquième note.

6.20 En utilisant le tableau de distribution de l'exercice 6.12, page 85,

a) Calculer l'âge moyen de la population suisse en 1860 et en 2009 et représenter chaque moyenne par un triangle sous l'axe des âges des polygones de fréquences construits au point b) de l'exercice 6.12.

b) Calculer l'âge médian de la population suisse en 1860 et en 2009 et marquer chaque médiane par une barre verticale sur le graphique précédent.

c) Déterminer la classe modale de l'âge de la population suisse en 1860 et en 2009. Cette notion est-elle représentative dans le cas étudié ? Justifier la réponse

d) Pourquoi l'âge moyen et l'âge médian de l'année 1860 sont-ils différents ? Pourquoi l'âge moyen et l'âge médian de l'année 2009 sont-ils presque égaux ?

e) Que peut-on conclure en comparant les âges moyens et médians des années 1860 et 2009 ?

6.21 En utilisant le tableau de distribution de l'exercice 6.14, page 87,

a) Calculer le diamètre moyen des boulons et représenter la moyenne par un triangle sous l'axe horizontal de l'histogramme construit au point b) de l'exercice 6.14.

b) Estimer la valeur de la médiane à l'aide du polygone des fréquences cumulées construit au point b) de l'exercice 6.14. Calculer de diamètre médian et vérifier sa proximité avec la valeur estimée. Marquer cette valeur par une barre verticale sur l'histogramme.

c) Déterminer la classe modale. Cette notion est-elle représentative ici ? Justifier la réponse.

d) Que peut-on conclure en comparant la moyenne, la médiane et la classe modale sur la forme de la distribution des diamètres des boulons ?

6.22 Déterminer la variance et l'écart-type de chaque jeu de données.

a)

valeur	1	2	3	4	5	6
effectif	1	3	5	5	7	4

b) -0.5 0.1 0.9 0.3 0.2 -0.6 0 -1.0 0.7 -0.1

c)

classe	$[100;200[$	$[200;300[$	$[300;400[$	$[400;500[$
fréquence	32%	20%	12%	36%

d)

classe	$[0;2[$	$[2;3[$	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;10[$
effectif	12	48	94	42	4

6.23 On a mesuré la vitesse de 50 véhicules :

Vitesse	Effectif
$[65; 70[$	2
$[70; 75[$	7
$[75; 80[$	15
$[80; 85[$	20
$[85; 90[$	2
$[90; 95[$	3
$[95; 100[$	1

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

b) Trouver la classe modale.

c) Calculer le pourcentage associé à chacune des valeurs de ce tableau de distribution.

d) Tracer l'histogramme de cette distribution.

e) Calculer les fréquences cumulées.

f) Tracer le polygone des fréquences cumulées.

g) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette distribution.

6.24

a) Une série A représente l'âge des cinq membres d'une famille et une série B celui des élèves d'une classe de gymnase. Laquelle des deux séries aura le plus grand écart-type ?

b) Un professeur de mathématiques fait passer un travail dans deux classes. Les deux groupes obtiennent la même moyenne, mais l'écart-type de la première classe est plus grand que celui de la seconde. Dans quelle classe peut-on dire que les élèves ont à peu près tous le même niveau sur ce sujet ?

c) Dans une région aride du globe, on enregistre les précipitations quotidiennes, en mm, durant 60 jours consécutifs. La moyenne des 60 données est de 0. Quelle est la valeur de l'écart-type ?

d) Dans une classe de première année de gymnase, la moyenne d'âge est de 16,16 ans, avec un écart-type de 0,76 an. Si les élèves de cette classes restent les mêmes, que vaudront la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type s en troisième année ?

e) Vrai ou faux ? Toutes les données d'une distribution dont la moyenne est 70 et l'écart-type 10 sont comprises entre 60 et 80.

6.25 Un maître rend un test dans une classe de 22 élèves en disant : « La moyenne de la classe est de 4.20 avec un écart-type de 0.83 ». Donner une interprétation de ces informations.

6.26 Au laboratoire de physique, une série de mesures de l'accélération de la pesanteur terrestre a donné les résultats suivants : 9.95 9.85 10.13 9.69 9.47 9.98 9.87 9.46 10.00.
Calculer la moyenne et l'écart-type de ces résultats et interpréter.

6.27 En reprenant les données du tableau de distribution de l'exercice 6.23, page 90,

a) Calculer une approximation de la vitesse moyenne et de l'écart-type et interpréter.

b) Les données sont-elles homogènes ?

6.28 Deux enseignants, l'un travaillant en Suisse où les tests sont notés de 1 à 6 et l'autre travaillant en France où les tests sont notés de 0 à 20, discutent de leur classe.
L'enseignant suisse constate que sa classe a une moyenne de 4.1 avec un écart type de 1.2.
L'enseignant français constate que sa classe a une moyenne de 12.5 avec un écart type de 5.3.

a) Si x est une note attribuée dans le système français et y une note attribuée dans le système suisse, déterminer la relation entre x et y qui permet de transposer les notes d'un système à l'autre.

b) Si on compare les moyennes des ces deux classes, laquelle est la meilleure ?

c) Pourquoi le coefficient de variation $\dfrac{\sigma}{\bar{x}}$ ne permet-il pas de mesurer l'homogénéité des résultats de ces classes ?

d) Quelle est la classe la plus homogène ? Justifier la réponse par un calcul adéquat à définir.

6.29 Déterminer la médiane $\tilde{x}$ et les quartiles Q_1 et Q_3 de chaque jeu de données, puis représenter les données sous la forme d'un boxplot.

a)

1	3	6	6	3	4	1
2	1	2	5	2	10	0
6	3	2	3	7	4	2

b)

valeur	-2	-1	0	1	2
effectif	18	10	15	12	5

c)

classe	$[140;150[$	$[150;160[$	$[160;165[$	$[165;170[$	$[170;180[$
fréquence	10%	15%	40%	20%	15%

6.30 On reprend le tableau de distribution de l'exercice 6.16, page 88,

a) Calculer la variance et l'écart-type.

b) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

c) Tracer la boîte à moustaches correspondante.

6.31 On reprend le tableau de distribution de l'exercice 6.17, page 88,

a) Calculer la variance et l'écart-type.

b) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

c) Tracer la boîte à moustaches correspondante.

6.32 On reprend le tableau de distribution de l'exercice 6.23, page 90,

a) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

b) Tracer la boîte à moustaches correspondante.

6.33 Voici les âges de 20 personnes qui se présentent au permis de conduire :

18	19	19	23	36	21	57	23	22	19
18	18	20	21	19	26	32	19	21	20

a) Donner le type de la variable étudiée.

b) Calculer la moyenne, la médiane et le mode de cette série statistique. Quelle est le paramètre de position le plus approprié ?

c) Quel est le pourcentage de personnes de 25 ans au plus qui se présentent à l'examen ?

d) Quel est la cote z du candidat le plus âgé ? Interpréter le résultat.

e) Quel âge aurait un candidat avec un score $z = -1$? Est-ce possible ?

6.34 Trois élèves se disputent le prix du meilleur financement de la semaine spéciale dans une école :

— Edgar a vendu 85 tablettes de chocolat, alors que la moyenne de vente est de 52 tablettes par élève avec un écart-type de 13 tablettes.

— Faustine a vendu 25 arrangements de fleurs, avec une moyenne de 12 arrangements et un écart-type de 6.

— Georges a vendu 75 abonnements au journal de l'école, avec une moyenne de 47 abonnements et un écart-type de 10.

Qui mérite le prix ?

6.35 Voici la durée d'hospitalisation en jours de 40 bébés nés à terme :

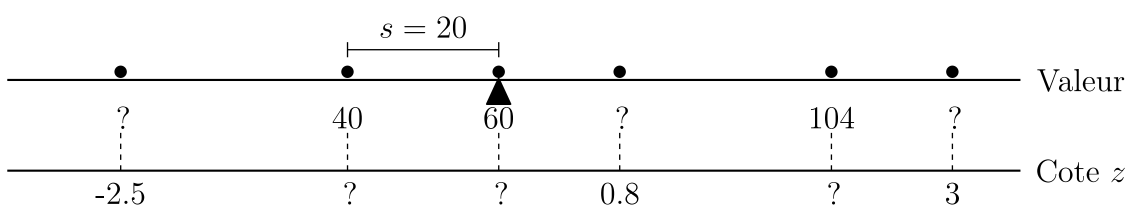
2	1	7	1	33	2	2	3	4	3
4	3	3	10	9	2	5	4	3	3
20	6	2	4	5	2	1	3	3	4
4	2	3	4	3	2	3	4	2	3

a) Représenter cette distribution sous la forme d'une boîte à moustaches.

b) Quel est la cote z du bébé qui est resté 20 jours à l'hôpital ?

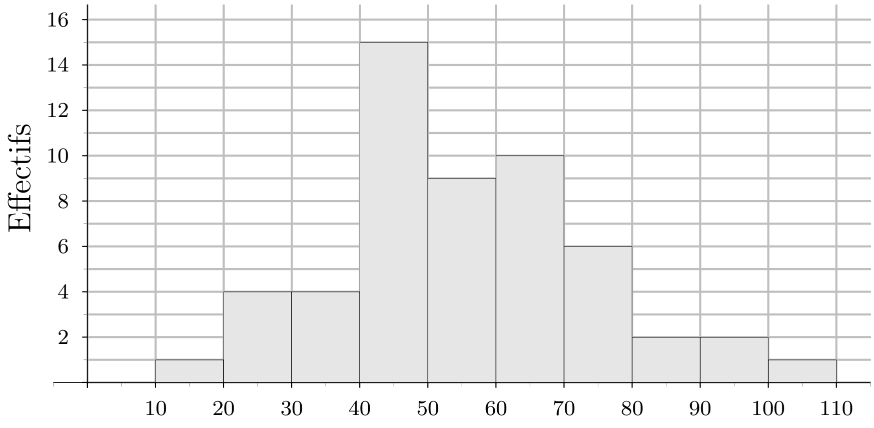
c) Calculer le pourcentage des bébés dont l'écart à la moyenne n'excède pas un écart-type. Quelle a été la durée de leur hospitalisation ?

6.36 À l'aide de l'information donnée pour chacun des points du pictogramme ci-dessous, déterminer, selon les cas, la valeur ou la cote z de chaque point du graphique.



6.37 Le nombre de points obtenus par les écoles de Suisse au concours de *Mathématiques sans Frontières* est représenté dans l'histogramme suivant :

Répartition de .... selon ....



a) Nommer précisément la variable étudiée, donner son type et le type d'échelle de mesure. Compléter le titre du graphique.

b) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de ces résultats et interpréter ces mesures. Marquer ces résultats sur le graphique de façon appropriée.

c) Quelle est la cote z d'une école ayant obtenu 110 points ?
Quelle est le nombre de points obtenus par une école qui présente une cote z égale à -2 ?

d) Les données sont-elles homogènes ? Justifier la réponse.

6.38 Le nombre d'heures de fonctionnement de 50 piles à combustible a été mesuré.

15	238	164	222	764	501	2	43	140	104
492	158	85	311	432	130	308	954	489	491
335	60	209	104	286	229	22	347	326	332
20	225	89	125	61	34	3	287	125	318
91	305	192	491	209	168	869	183	541	552

a) Regrouper ces données dans un tableau de distribution en formant des classes d'amplitude égale à 100 heures, avec une dernière classe ouverte « ≥ 600 » et représenter le polygone des fréquences correspondant.

b) A l'aide du tableau, estimer par calculs la moyenne et l'écart-type. Représenter sur le graphique la moyenne par un triangle et l'écart-type par un intervalle et interpréter.

c) En utilisant la moyenne et l'écart-type obtenus sous b), calculer la cote z des deux valeurs extrêmes. Interpréter et critiquer l'interprétation.

d) Représenter le polygone des fréquences cumulées.

e) Déterminer graphiquement les quartiles et interpréter.

f) La compagnie qui fabrique ces piles garantit leur durée de vie. Ainsi, si une pile achetée dure moins de a heures, la compagnie s'engage à la remplacer gratuitement. D'après cet échantillon, quelle doit être la valeur de a si le fabricant ne veut pas remplacer plus de 3% des piles vendues ?

Solutions des exercices

6.1

Situation 1

a) *Population :* tous les habitants de la ville de Lausanne.

b) *Echantillon :* les 500 habitants choisis parmi la population totale.

c) *Variable étudiée :* la chaîne de télévision préférée d'une personne.

d) *Ensemble des catégories :* les noms des chaînes que peuvent recevoir les habitants de la ville de Lausanne, pour autant qu'on les retiennent pour le sondage.

e) *Type de variable :* qualitative nominale.

Situation 2

a) *Population :* la situation économique de la Suisse durant les années comprises entre 2000 et 2010.

b) *Echantillon :* toute la population est étudiée ici, il n'y a pas d'échantillon.

c) *Variable étudiée :* le taux de chômage.

d) *Ensemble des catégories :* tous les pourcentages compris entre 0% et 100%.

e) *Type de variable :* quantitative continue.

Situation 3

a) *Population :* les ménages de la ville de Genève.

b) *Echantillon :* les 380 ménages sélectionnés.

c) *Variable étudiée :* le nombre d'enfants par ménage.

d) *Ensemble des catégories :* l'ensemble des nombres entiers inférieurs à 20, en tous cas !

e) *Type de variable :* quantitative discrète.

Situation 4

a) *Population :* la population suisse.

b) *Echantillon :* la quasi-totalité de la population suisse.

c) *Variable étudiée :* la première langue d'une personne.

d) *Liste des catégories :* « l'allemand », « le français », « l'italien », « le romanche », « autre langue ».

e) *Type de variable :* qualitative nominale.

6.2

a) C'est une variable quantitative continue.

b) C'est une variable qualitative nominale.

c) C'est une variable quantitative discrète.

d) C'est une variable quantitative continue.

e) C'est une variable qualitative nominale.

f) C'est une variable qualitative ordinale (les valeurs peuvent être classées).

6.3

a) Variable qualitative nominale ; échelle nominale.

b) Variable quantitative discrète ; échelle ordinale.

c) Variable quantitative discrète ; échelle de rapports.

d) Variable quantitative continue ; échelle ordinale.

e) Variable quantitative continue ; échelle de rapports.

f) Variable qualitative ordinale ; échelle ordinale.

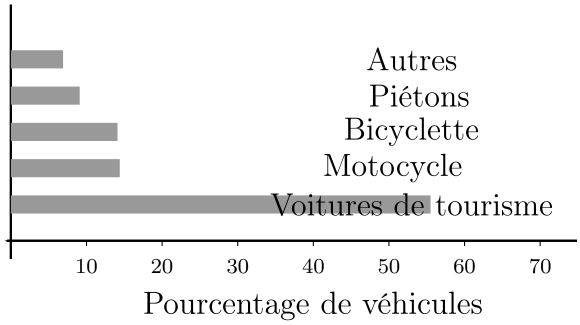
g) Variable quantitative discrète ; échelle d'intervalle.

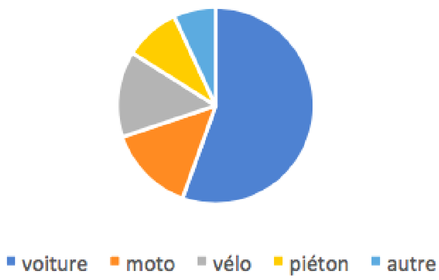
6.4

Heure du lever du soleil : variable quantitative continue ; échelle d'intervalle. La valeur 0h n'indique pas une absence de temps et diviser une heure par une autre n'a pas de sens. Vitesse des vents : variable quantitative continue ; échelle de rapports. Toutes les opérations mathématiques peuvent être effectuées sur les données.

6.5

Moyen de locomotion	Blessés légers	Pourcentage	Angle
Voitures de tourisme	9570	55,5%	199,7°
Motocycle	2479	14,4%	51,7°
Bicyclette	2435	14,1%	50,8°
Piétons	1570	9,1%	32,8°
Autres	1196	6,9%	25 °
Total	17250	100%	360°



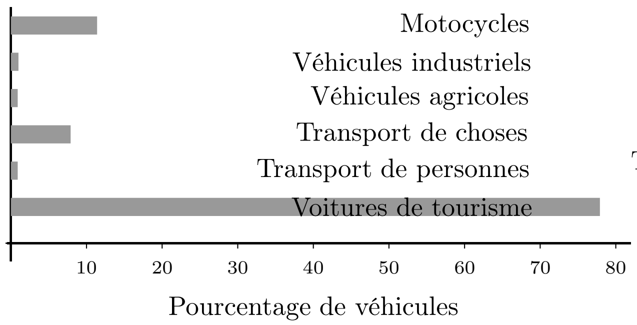


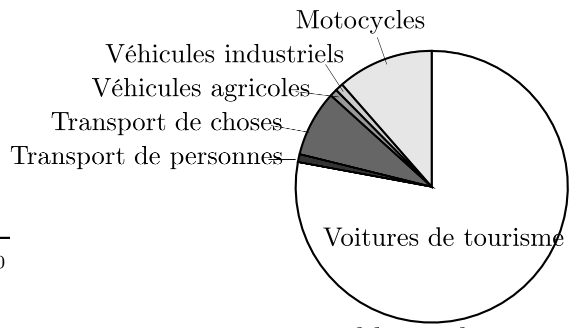
Non, on ne peut pas en déduire qu'il est moins dangereux de se déplacer en moto qu'en voiture car on ne sait pas le nombre total d'utilisateurs d'une voiture ou d'une moto. Il faudrait comparer les pourcentages relatifs et non absolus.

6.6

Répartition par catégorie des véhicules à moteur mis en circulation en CH en 2011.

Catégorie	Nombre	Pourcentage	Angle
Voitures de tourisme	327'955	77.9%	280.5°
Transport de personnes	3'950	0.9%	3.4°
Transport de choses	33'119	7.9%	28.3°
Véhicules agricoles	3'714	0.9%	3.2°
Véhicules industriels	4'006	1.0%	3.4°
Motocycles	48'133	11.4%	41.2°
Total des véhicules	420'875	100%	360°





Les deux représentations graphiques conviennent car on traite une variable qualitative relevée sur une échelle nominale. On atteint toutefois la limite de visibilité des petites parts sur le diagramme circulaire.

6.7

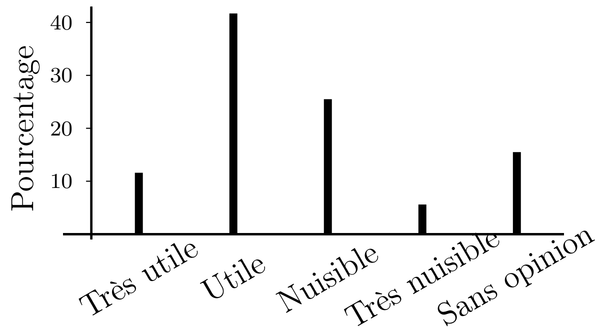
a) Population étudiée : les citoyens suisses, variable : opinion sur les accords bilatéraux, Si on excepte la catégorie "sans opinion", échelle ordinale ; sinon échelle nominale.

Répartition de 820 répondants selon leur opinion sur les accords bilatéraux.

b)

Utilité	**Effectifs**	**Frq**
Très utiles	95	11.6%
Utiles	342	41.7%
Nuisibles	210	25.6%
Très nuisibles	46	5.6%
Sans opinion	127	15.5%
Total	820	100%

c)



d) $11.6\% + 41.7\% = 53.3\%$ des sondés sont favorables aux accords bilatéraux.

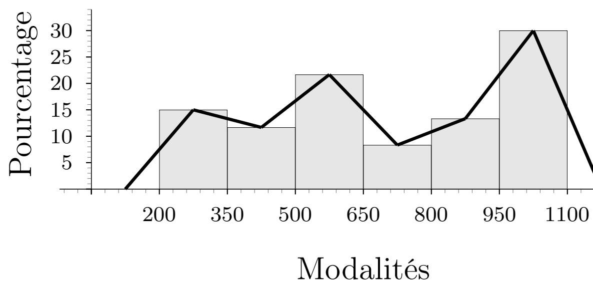
6.8 $k \approx 6$, $E = 18.45 - 2.65 = 15.8$, amplitude théorique : $\dfrac{15.8}{6} \approx 2.63$.
Amplitude choisie : 2.5, première classe $[\ 2.5\,;\ 5.0\ [$ et on formera finalement 7 classes.

6.9 $k \approx 7$, $E = 937 - 252 = 685$, amplitude théorique : $\dfrac{685}{7} \approx 98$.
Amplitude choisie : 100, première classe $[\ 250\,;\ 350\ [$ et on formera finalement 7 classes.

6.10

Répartition des données.

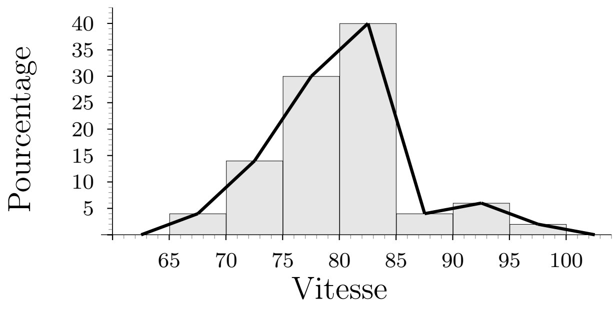
Classes	Effectif	Pourcentage
$[200; 350[$	9	15%
$[350; 500[$	7	11.67%
$[500; 650[$	13	21.67%
$[650; 800[$	5	8.33%
$[800; 950[$	8	13.33%
$[950; 1100[$	18	30%
Total	60	100%



6.11

Répartition de 50 véhicules selon leur vitesse.

Vitesse [km/h]	Effectif	Pourcentage
$]65; 70]$	2	4%
$]70; 75]$	7	14 %
$]75; 80]$	15	30%
$]80; 85]$	20	40%
$]85; 90]$	2	4%
$]90; 95]$	3	6%
$]95; 100]$	1	2%
Total	50	100%



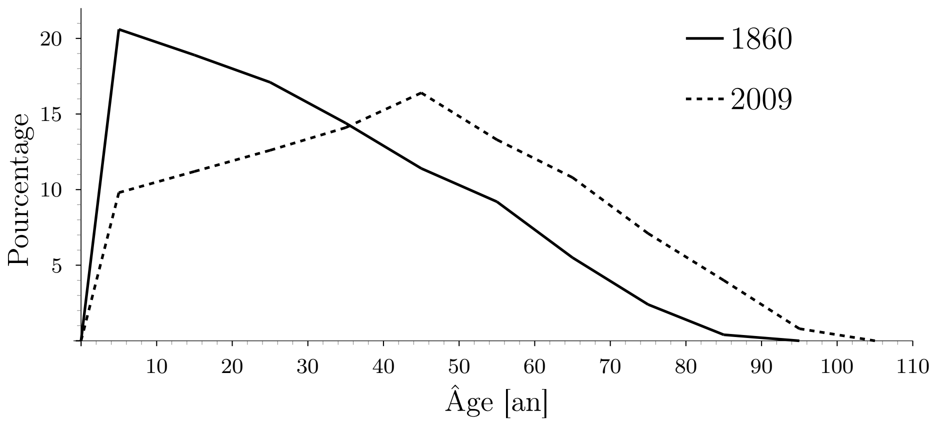
c) Une petite moitié des véhicules respectent la limitation de vitesse de 80 km/h et 40% roulent entre 80 et 85 km/h. En tenant compte d'une marge de tolérance de 5 km/h, 12% des véhicules sont amendables.

d) Parce que les véhicules roulant exactement à 80 km/h respectent la limitation et doivent être groupées avec ceux roulant plus lentement.

6.12

a) Le plus approprié est de représenter sur un même graphique le polygone des fréquences de chacune des deux années. Deux histogrammes superposés produiraient un graphique illisible. On utilise les fréquences relatives car les deux distributions n'ont pas le même effectif total.

b) **Répartition de la population suisse en 1860 et 2009 selon l'âge.**

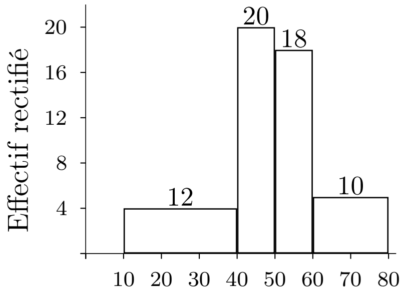


c) « La population suisse a plus que triplé entre 1860 et 2009 en passant de 2,5 millions à presque 7,8 millions d'habitants. En 1860, la population était très jeune : l'aire sous le polygone est plus grande avant 30 ans qu'après. A cette époque, seulement 3% des habitants avaient plus de 70 ans, contre 12% actuellement, soit une proportion quatre fois plus élevée. En 1860, le groupe des moins de 20 ans représentait près de 40% de la population contre 21% aujourd'hui, soit une proportion réduite de moitié. En 1860, la classe la plus représentée est celle des 0 à 10 ans, avec 20.6% des habitants, alors qu'en 2009, c'est la classe des 40 à 50 ans avec 16.4% des habitants. »

6.13

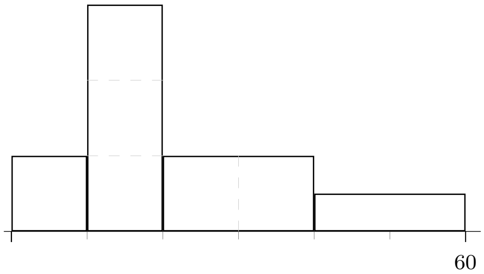
a)

Amplitude	Classe	Effectif	Effectif rectifié
30	[10 ; 40 [	12	4
10	[40 ; 50 [	20	20
10	[50 ; 60 [	18	18
20	[60 ; 80 [	10	5
	Total	60	



b)

	Pourcentage
[0; 10[	14.3% (1/7)
[10; 20[	42.9% (3/7)
[20; 40[	28.6% (2/7)
[40; 60[	14.3% (1/7)
Total	100%

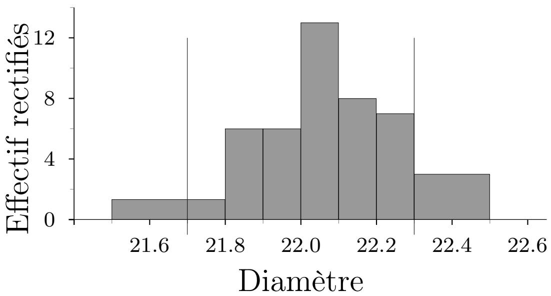


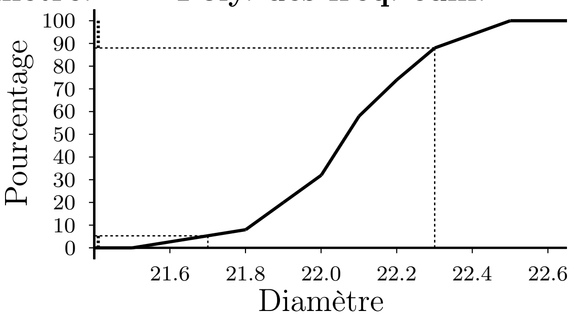
c) $\dfrac{\text{Aire de la portion comprise entre les abscisses 50 et 60}}{\text{Aire totale du polygone}} = \dfrac{2}{8} = 25\%.$

6.14

a) Population étudiée : Tous les boulons de la production, variable : diamètre des boulons, variable quantitative continue, échelle de rapport.

Répartition de 50 boulons selon leur diamètre. **Poly. des fréq. cum.**





d) $\dfrac{4}{50} \cdot \dfrac{2}{3} = 5.3\%$ des boulons ont un diamètre < 21.7 mm et $\dfrac{6}{50} = 12\%$ ont un diamètre > 22.3 mm. Ainsi, 17.3% des boulons ont un diamètre qui s'écarte de plus de 0.3 mm de la valeur nominale.

6.15

a) moyenne : $\bar{x} = 4.04$ médiane : $\tilde{x} = 4$ mode : $M = 5$

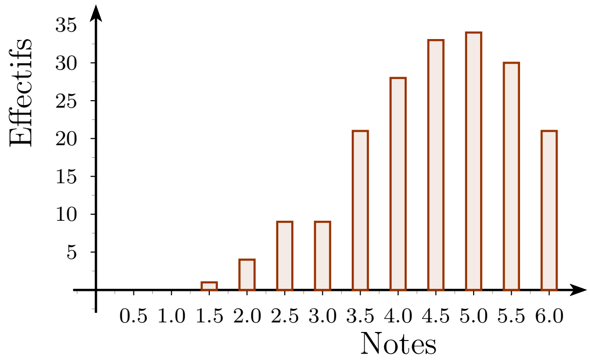
b) moyenne : $\bar{x} = 0$ médiane : $\tilde{x} = 0.05$ le mode n'existe pas

c) moyenne : $\bar{x} = 302$ médiane : $\tilde{x} = 290$ classe modale : $[400; 500[$

d) moyenne : $\bar{x} = 3.4$ médiane : $\tilde{x} \cong 3.43$ classe modale : $[3; 4[$

6.16 a) On étudie l'ensemble des travaux écrits passés par les élèves de cette classe. La variable est la note qui figure sur le travail après correction. Il s'agit d'une variable quantitative discrète qui peut prendre 11 valeurs.

b)



c)

Note	Effectif	Fréquence [%]
1.5	1	0.5
2	4	2.1
2.5	9	4.7
3	9	4.7
3.5	21	11.1
4	28	14.7
4.5	33	17.4
5	34	17.9
5.5	30	15.8
6	21	11.1
Total	190	100

d) le mode vaut 5, la médiane $\tilde{x} = 4.5$ et la moyenne $\bar{x} \cong 4.49$

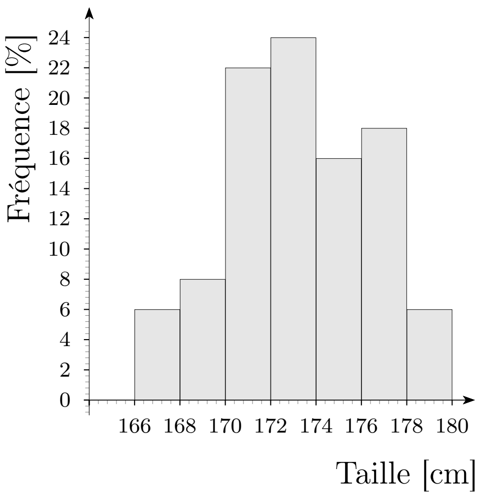
6.17

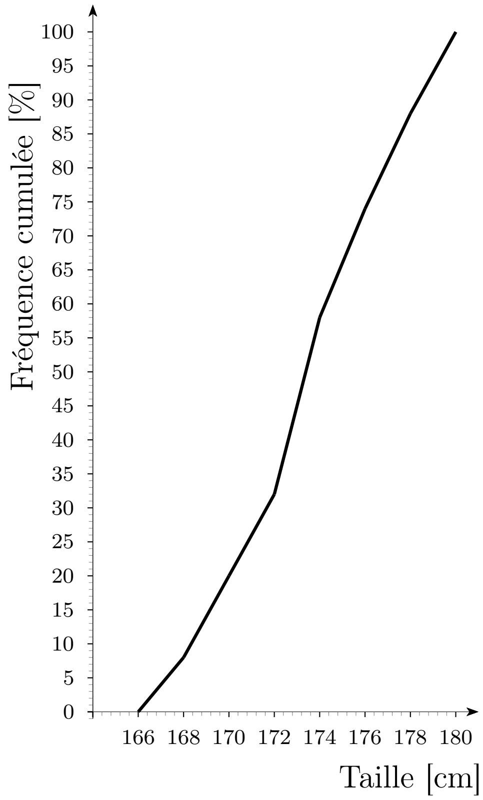
a) La variable étudiée est la taille en centimètres, variable quantitative continue.

b)

Taille [cm]	Effectif	Fréq.	Fréq. cumulées
$[166; 168[$	3	6%	6%
$[168; 170[$	4	8%	14%
$[170; 172[$	11	22%	36%
$[172; 174[$	12	24%	60%
$[174; 176[$	8	16%	76%
$[176; 178[$	9	18%	94%
$[178; 180[$	3	6%	100 %
Total	50	100%	-

c) **Répartition de 50 hommes selon leur taille en cm.**





d) La classe modale : $[172; 174[$, la médiane $\tilde{x} \cong 173.17$, la moyenne $\overline{x} \cong 173.28$

6.18 Soit x le nombre de femmes. On peut écrire

$$x \cdot 1.61 + (41\,250\,000 - x) \cdot 1.74 = 41\,250\,000 \cdot 1.67$$

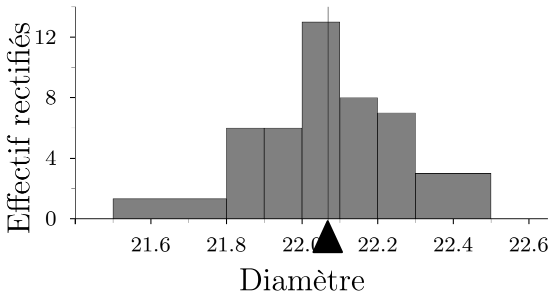
Et donc, $x \simeq 21\,211\,538.46 \simeq 21\,211\,538$, vu que l'on de considère pas des fractions de personnes.

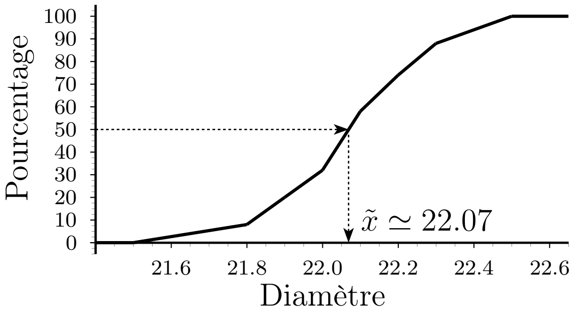
Il y a donc 3 173 077 femmes de plus que d'hommes.

6.19 La cinquième note est 5.6

6.20 **a)** $\bar{x}_{1860} = 29.1$ ans, $\bar{x}_{2009} = 41.4$ ans **b)** $\tilde{x}_{1860} = 26.1$ ans, $\tilde{x}_{2009} = 41.4$ ans
c) 0 à 10 ans pour 1860 et 40 à 50 ans pour 2009. Ces classes modales sont peu significatives car leurs effectifs ne sont pas beaucoup plus élevés que ceux des autres grandes classes.
d) En 1860, l'âge moyen est plus élevé que l'âge médian, car les quelques personnes très âgées tirent la moyenne vers le haut. En 2009, les âges moyen et médian sont identiques, car la répartition de la population autour de ces mesures est symétrique. **e)** La population est plus vieille en 2009 qu'en 1860.

6.21





a) $\bar{x} = 22.068$ mm **b)** $\tilde{x} = 22.069$ mm **c)** La classe modale $[22.0\,;22.1[$ est significative car son effectif est nettement plus élevé que ceux des autres classes. **d)** La classe modale contient la moyenne et la médiane qui sont très proches. La distribution est de type normale, en forme de cloche.

6.22

a) variance : $s^2 = 1.9584$ écart-type : $s \cong 1.40$

b) variance : $s^2 = 0.306$ écart-type : $s \cong 0.55$

c) variance : $s^2 = 16096$ écart-type : $s \cong 126.87$

d) variance : $s^2 = 1.135$ écart-type : $s \cong 1.07$

6.23

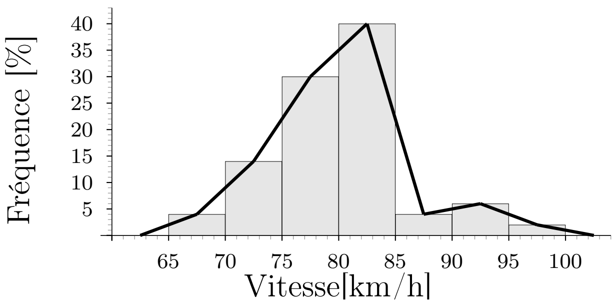
a) On étudie la vitesse des véhicules, variable quantitative continue.

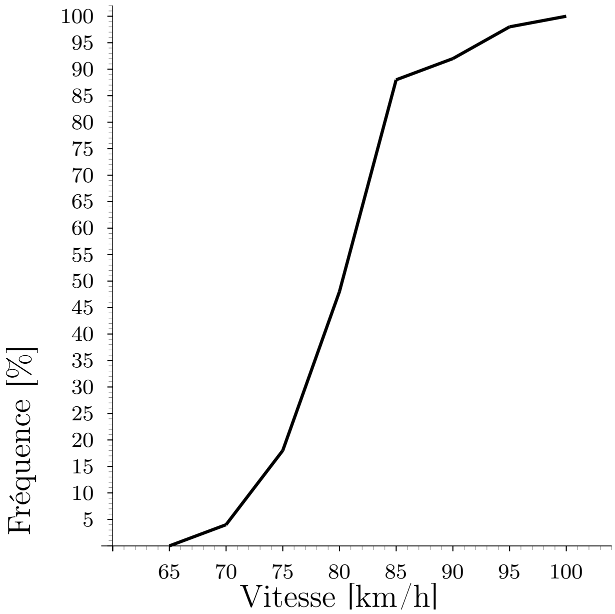
b) Classe modale : [80 ;85 [

c)

Vitesse [km/h]	Effectif	Frq.	Frq. cum
$[65;70[$	2	4%	4%
$[70;75[$	7	14 %	18%
$[75;80[$	15	30%	48%
$[80;85[$	20	40%	88%
$[85;90[$	2	4%	92%
$[90;95[$	3	6%	98%
$[95;100[$	1	2%	100%
Total	50	100%	-

Répartition de 50 véhicules selon leur vitesse.





g) Moyenne $\bar{x} = 80{,}1$ km/h. Ecart-type $s \cong 6{,}02$.

6.24

a) C'est la série A. En effet, il y a plus d'écart à la moyenne dans une famille que dans une classe.

b) Plus l'écart-type est faible, plus les résultats sont proches. C'est donc dans la deuxième classe que les élèves ont à peu près le même niveau sur ce sujet.

c) L'écart-type et la moyenne sont tous les deux nuls, car aucune des données n'est inférieure à 0. On peut aussi écrire $s = \overline{x} = 0$

d) Nouvelle moyenne : $\overline{x}' = 18.16$. Nouvel écart-type : $s' = s = 0.76$.

e) C'est faux ; une part importante des données est comprise entre 60 et 80, mais pas toutes.

6.25 Une pluralité de notes sont comprises entre 3.37 et et 5.03, c'est-à-dire entre 3.5 et 5.0 si les notes sont arrondies au demi-point.

6.26 $\bar{x} = 9.822$ et $s = 0.222$.

Une pluralité de mesures donne une accélération comprise entre 9.600 et 10.044 m/s^2.

6.27 **a)** $\bar{x} = 80.1$ $s = 6.0$. Une pluralité de véhicules roulent entre 74.1 km/h et 86.1 km/h.

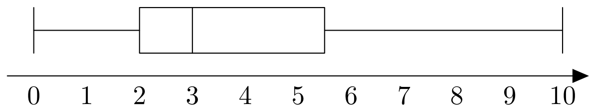
b) coefficient de variation $= \dfrac{6.0}{80.1} = 0.075 = 7.5\% < 15\%$. Les données sont homogènes.

6.28 **a)** $y = \dfrac{x}{4} + 1$ et $x = 4 \cdot (y - 1)$ **b)** La classe française. **c)** Les notes suisses se mesurent sur une échelle d'intervalle et non de rapport. De plus, dans les deux cas, les notes sont bornées supérieurement.

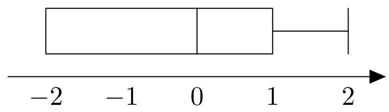
d) $\dfrac{1.2}{6-1} = 0.24 < \dfrac{5.3}{20-0} = 0.263$. La classe suisse est plus homogène que la française.

6.29

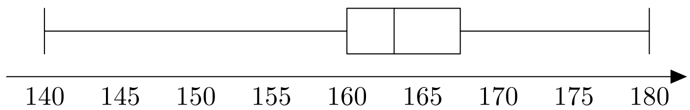
a) $Q_1 = 2 \quad \tilde{x} = 3 \quad Q_3 = 5.5$



b) $Q_1 = -2 \quad \tilde{x} = 0 \quad Q_3 = 1$



c) $Q_1 = 160 \quad \tilde{x} = 163.125 \quad Q_3 = 167.5$

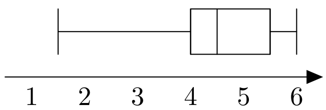


6.30 a) $s^2 \cong 1.074$ écart-type : $s \cong 1.04$

b) Q_1, 48^e valeur $\Rightarrow Q_1 = 4$, médiane $\tilde{x} = \dfrac{4.5 + 4.5}{2} = 4.5$

et Q_3, 143^e valeur $\Rightarrow Q_3 = 5{,}5$,

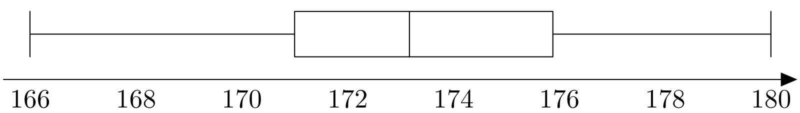
c)



6.31 a) $s^2 \cong 9.92$ écart-type : $s \cong 3.15$

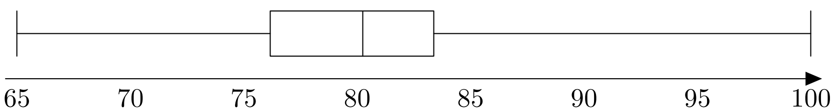
b) $Q_1 = 171$ cm $\quad \tilde{x} \cong 173{,}17 \quad Q_3 \cong 175{,}88$ cm

c)



6.32 a) $Q_1 \cong 76.17 \quad \tilde{x} = 80.25 \quad Q_3 \cong 83.38$

b)



6.33

a) Variable quantitative continue (traitée comme discrète).

b) La médiane vaut 20.5 et la moyenne $\overline{x} = 23.55$ et le mode vaut 19. La médiane est la mesure la plus appropriée, car elle n'est pas influencée par les très grandes valeurs contrairement à la moyenne. Le mode ne présente pas une fréquence suffisante par rapport aux autres valeurs.

c) Il y a 80% des candidats qui ont moins de 25 ans.

d) On calcule la cote z comme suit :

$$z = \frac{57 - 23.55}{8.93} \simeq 3.75$$

L'âge du candidat est très éloigné de la moyenne. Cela constitue une exception.

e) Si la cote z vaut -1, cela implique que $x \simeq 14.62 < 18$. Cette situation ne peut pas se produire, vu que l'âge minimal pour se présenter à l'examen du permis de conduire est de 18 ans !

6.34 On a calculé la cote z du nombre d'objets vendus pour chacun des élèves concernés :

$$z_E \simeq 2.54 \qquad z_F \simeq 2.17 \qquad z_G = 2.8$$

C'est Georges qui obtiendra le prix, vu que la cote z de ses ventes est la plus élevée.

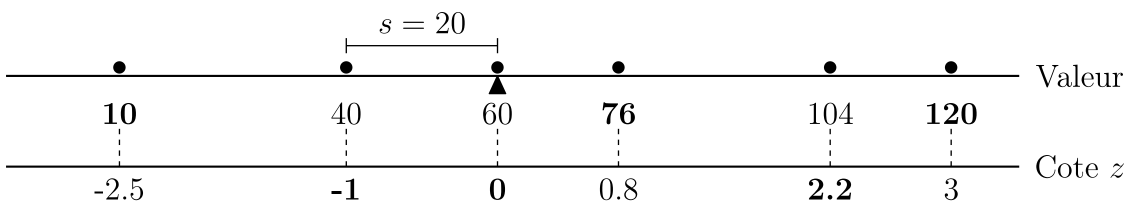
6.35

a) $Q_1 = 2 \quad \tilde{x} = 3 \quad Q_3 = 4$

b) $z \simeq (20 - 4.6)/5.55 \simeq 2.77$

c) Si $z = -1$, alors $x = -0.95$ et donc $x = 1$. Si $z = 1$, alors $x = 10.15$. L'ensemble des valeurs de cette variable comprises entre 1 et 10 représentent le 95% de toutes les valeurs. On peut donc affirmer que 95% des bébés sont restés entre 1 et 10 jours.

6.36



6.37 a) Le nombre de points obtenus est une variable quantitative discrète, mesurée sur une échelle de rapport. Titre du graphique : Répartition de 54 écoles suisses selon le nombre de points obtenus au concours.

b) $\bar{x} \simeq 55.37$; $s \simeq 18.85$. Une pluralité d'écoles ont obtenus entre 37 et 74 points.

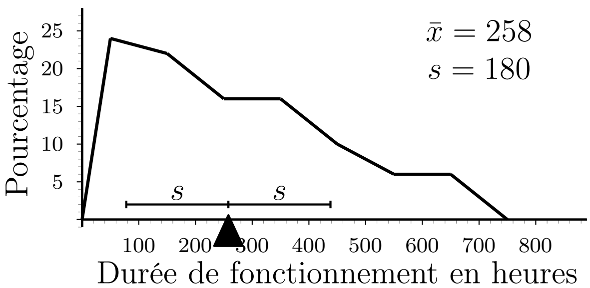
c) $z_{110} \simeq 2.9$ et $x_{-2} \simeq 18$ points. **d)** $CV = 34\% > 15\%$. Les résultats ne sont pas du tout homogènes.

6.38

a) Répartition de 50 piles à combustible selon leur durée de fonctionnement.

Durée [h]	Effectif	Pourcentage
$[0; 100[$	12	24%
$[100; 200[$	11	22%
$[200; 300[$	8	16%
$[300; 400[$	8	16%
$[400; 500[$	5	10%
$[500; 600[$	3	6%
≥ 600	3	6%
Total	50	100%

b) Polygone des fréquences.

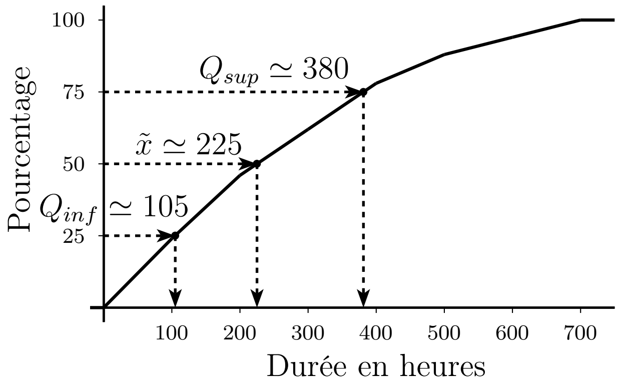


Une pluralité de piles ont une durée de fonctionnement comprise entre 78 et 438 heures.

c) $z_{min} = \dfrac{2 - 258}{180} = -1.42$ et $z_{max} = \dfrac{954 - 258}{180} = 3.87.$

D'après les cotes z, une durée de fonctionnement de 954 heures est exceptionnelle alors qu'une durée de fonctionnement de 2 heures ne constitue pas un cas particulièrement rare. Cette dernière interprétation n'est toutefois pas valide pour ces données dont la plus petite cote z possible est $\dfrac{0 - 258}{180} = -1.4\bar{3}$.

d) Polygone des fréquences cumulées.



e) 50% des piles fonctionnent entre 105 et 380 heures, 25% des piles fonctionnent moins de 105 heures et 25% des piles plus de 380 heures.

A partir des données brutes, on obtient les quartiles suivants :

$Q_0 = x_{min} = 2, \quad Q_1 = Q_{inf} = 104,$

$Q_2 = \bar{x} = 215.5, \quad Q_3 = Q_{sup} = 335,$

$Q_4 = x_{max} = 954.$

Par calcul sur les données regroupées en classe, on obtient les valeurs suivantes :

$Q_0 = 0, \quad Q_1 = 104.5, \quad Q_2 = 225,$

$Q_3 = 381.25, \quad Q_4 = 700$

f) 3% des piles de l'échantillon ont duré moins de $a = \dfrac{3\%}{24\%} \cdot 100 = 12.5$ heures.
Ainsi, les piles ayant duré moins de 12.5 heures devraient être remplacées gratuitement.