1 Programmation linéaire

1.1 Introduction à la programmation linéaire

1.1.1 Inéquations linéaires

Modèle 1. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une inéquation du type

$$ax + by + c < 0 \quad (\text{ou } > 0) \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$$

Méthode :

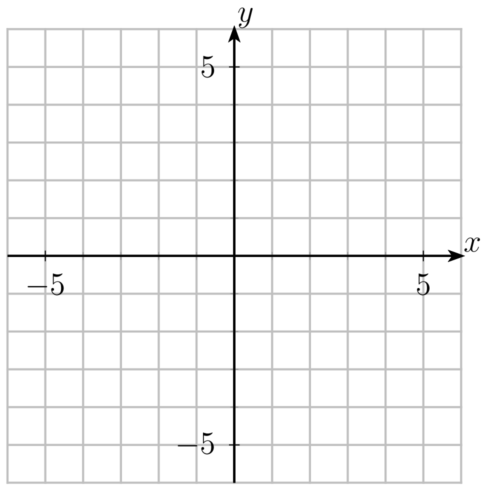
1) Ecrire l'équation $ax + by + c = 0$ associée à l'inéquation, puis isoler "y".
2) Représenter la droite **frontière** d'équation : $y = mx + h$.
3) Vérifier si l'origine satisfait l'inéquation.
4) Hachurer le demi-plan contenant tous les points solutions de l'inéquation.

Exemples :

$3x - 4y > 12$

1)

2) 4)

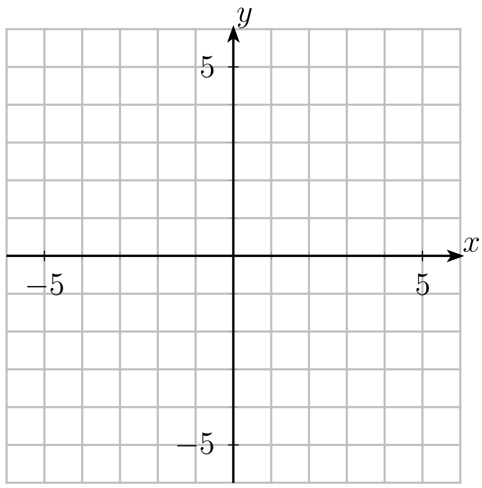


3)

$x + y \leq 3$

1)

2) 4)



3)

TRUC :

Remarque :

1.1.2 Systèmes d'inéquations linéaires

Modèle 2. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système d'inéquations.

Méthode :

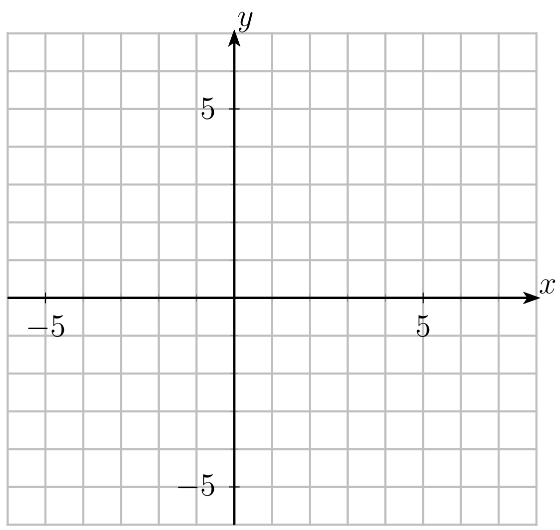
1) Ecrire l'équation $ax + by + c = 0$ associée à chaque inéquation, puis isoler "y".
2) Représenter la droite associée à chaque équation.
3) Vérifier si l'origine satisfait chaque inéquation.
4) Hachurer les demi-plans contenant tous les points solutions de chaque inéquation.
5) Hachurer la **région R** du plan contenant tous les points solutions du système d'inéquations : c'est l'intersection des demi-plans de la partie 4).

Exemple :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$

1) 1)

2) 4) 5)



3) 3)

1.1.3 Polygones des contraintes

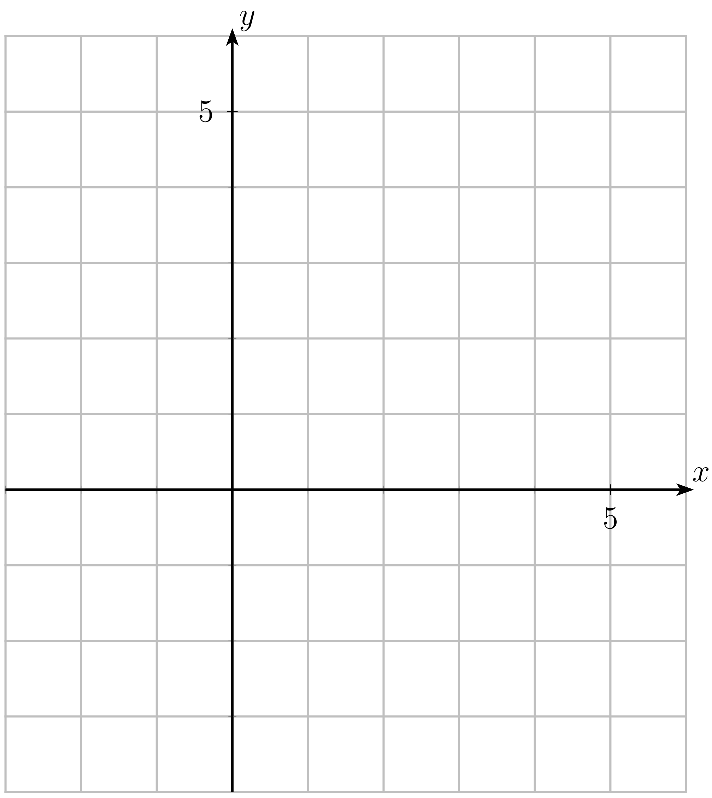
Modèle 3. Déterminer les sommets du polygone de solutions d'un système d'inéquations.

Méthode :

1) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations.
2) Déterminer algébriquement les coordonnées des sommets du **polygone des contraintes** : ce sont les sommets du polygone convexe délimitant la région R vue au modèle 2.

Exemple :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



1.1.4 Optimisation d'une fonction à deux variables

Modèle 4. Dans le polygone des contraintes, déterminer le maximum (ou le minimum) d'une fonction f appelée **fonction économique** (ou fonction objectif).

Méthode :

1) Représenter le polygone des contraintes.
2) Déterminer les coordonnées des sommets du polygone des contraintes.
3) Calculer la valeur prise par la fonction f en chacun des sommets.

Exemple :
On donne le système d'inéquations suivant (vu au modèle 3) :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

On considère la fonction économique f définie par

$$f(x; y) = 5x + 2y$$

a) Parmi les deux points $D(1\,;2)$ et $E(2\,;1)$, lequel maximise-t-il le mieux la fonction f ?

- $f(1\,;2) = ...$
- $f(2\,;1) = ...$

$\Rightarrow$ le point ... maximise le mieux la fonction f.

b) Quel pourrait être le point $P(x; y)$ du polygone des contraintes $OABC$ maximisant la fonction f ?

Selon le modèle 3, les sommets du polygone des contraintes $OABC$ sont :

$A(9/5\,;0)$; $B(21/8\,;11/8)$; $C(0\,;4)$

- $f(9/5\,;0) = ...$
- $f(21/8\,;11/8) = ...$
- $f(0\,;4) = ...$

$\Rightarrow$ le point maximisant la fonction f est en fait le sommet ... .

1.1.5 Problème de programmation linéaire à deux variables

Modèle 5. Résoudre l'exercice 1.7.

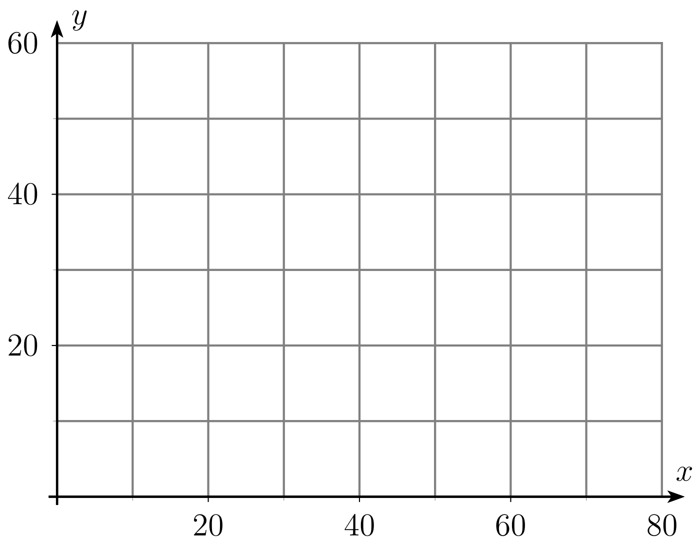
a) • Variables : $x = ...$ $y = ...$

• Fonction économique (objectif) : $f(x;y) = ...\,x + ...\,y$

• Contraintes :

$$\begin{cases} ... \\ ... \\ ... \\ ... \end{cases}$$

b) Polygone des contraintes :



c) Profit maximal :

1.2 Problèmes

Modèle 6. Résoudre un problème de programmation linéaire à deux variables.

Méthode :

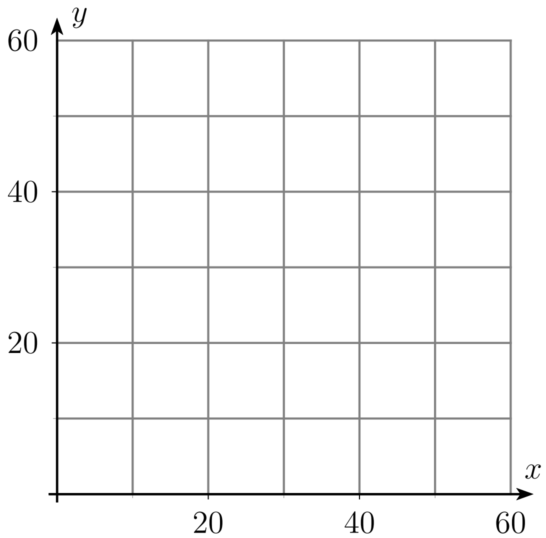
1) Définir les deux variables (souvent x et y).
2) Traduire toutes les contraintes en un système d'inéquations.
3) Exprimer la fonction économique f à optimiser.
4) Représenter le polygone des contraintes.
5) Par l'origine, tracer la droite d représentant la fonction f.
6) Lors de la translation de la droite d, déterminer graphiquement le point optimal P comme le dernier point du polygone des contraintes touché par d'.
7) Déterminer algébriquement les coordonnées du point optimal P.
8) Répondre au problème par une phrase.

Exemple : exercice 1.8 a)

1) Variables : $x = ...$ $y = ...$
2) Système des contraintes :

$$\begin{cases} ... \\ ... \\ ... \\ ... \end{cases}$$

3) Fonction économique : $f(x; y) = ...\,x + ...\,y$
4) Polygones des contraintes :



5) sur le graphique
6) sur le graphique
7) ...

8) ...