1 Programmation linéaire

1.1 Introduction à la programmation linéaire

1.1.1 Équations linéaires

Modèle 1. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une équation du type

$$ax + by + c = 0 \quad , \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$$

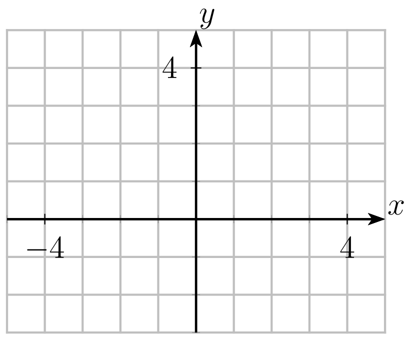
Méthode :

1) Isoler "y".
2) Représenter la droite d'équation : $y = mx + h$.

Exemple :

$$x - 2y + 2 = 0$$

1) $x - 2y + 2 = 0 \iff 2y = x + 2 \iff$ ...
2) pente $m =$ ... et ordonnée à l'origine $h =$ ...

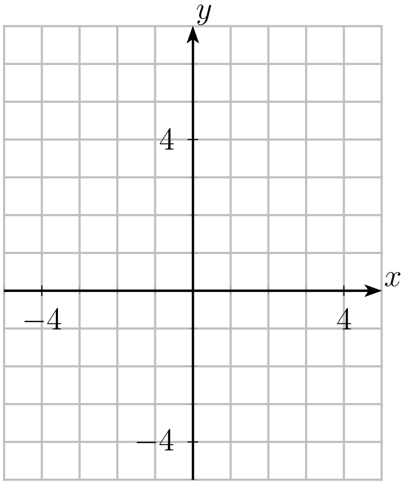


Exercice 1.0
Faire de même avec :

a) $3x + y - 2 = 0$

1)

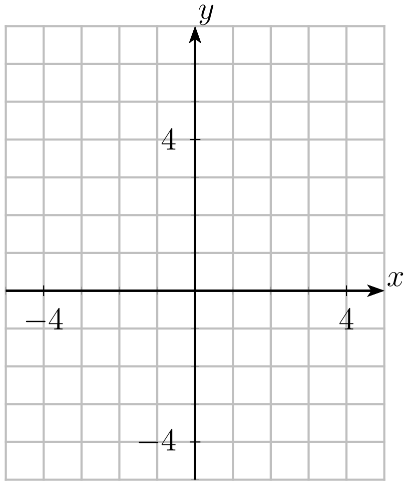
2)



b) $2x - y - 3 = 0$

1)

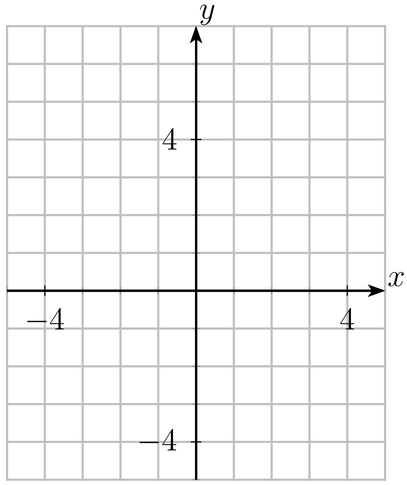
2)



c) $5x + 4y - 8 = 0$

1)

2)



1.1.2 Inéquations linéaires

Modèle 2. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une inéquation du type

$$ax + by + c < 0 \quad (\text{ou } > 0) \quad , \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$$

Méthode :

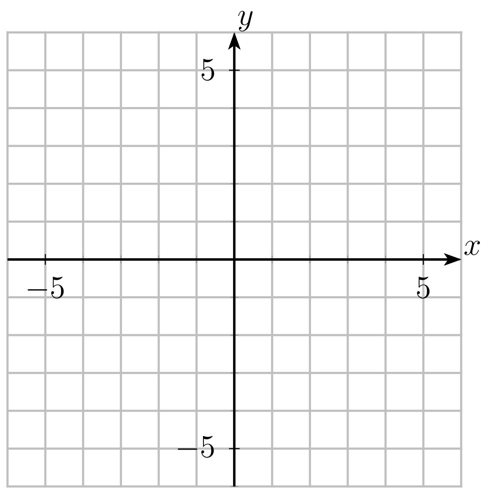
1) Ecrire l'équation $ax + by + c = 0$ associée à l'inéquation, puis isoler "y".
2) Représenter la droite **frontière** d'équation : $y = mx + h$.
3) Vérifier si l'origine satisfait l'inéquation.
4) Hachurer le demi-plan contenant tous les points solutions de l'inéquation.

Exemples :

$3x - 4y > 12$

1)

2) 4)

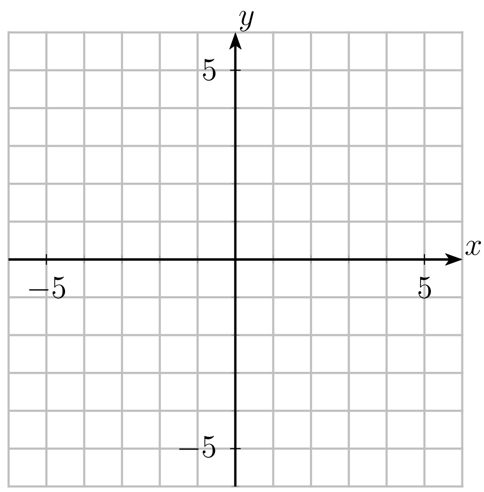


3)

$x + y \leq 3$

1)

2) 4)



3)

TRUC :

Remarque :

1.1.3 Systèmes d'inéquations linéaires

Modèle 3. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système d'inéquations.

Méthode :

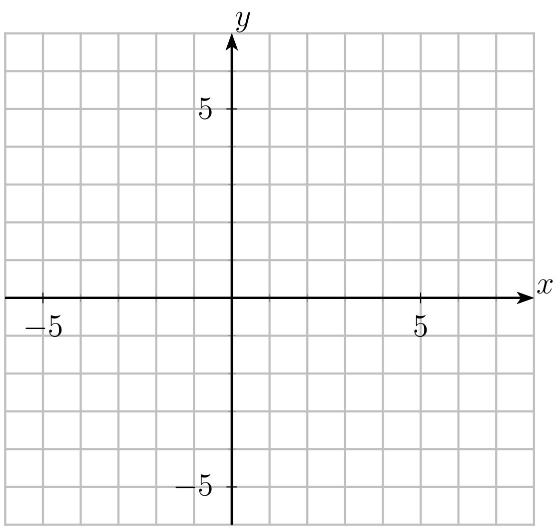
1) Ecrire l'équation $ax + by + c = 0$ associée à chaque inéquation, puis isoler "y".
2) Représenter la droite associée à chaque équation.
3) Vérifier si l'origine satisfait chaque inéquation.
4) Hachurer les demi-plans contenant tous les points solutions de chaque inéquation.
5) Hachurer la **région R** du plan contenant tous les points solutions du système d'inéquations : c'est l'intersection des demi-plans de la partie 4).

Exemple :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$

1) | 1)

2) 4) 5)



3) | 3)

1.1.4 Polygones des contraintes

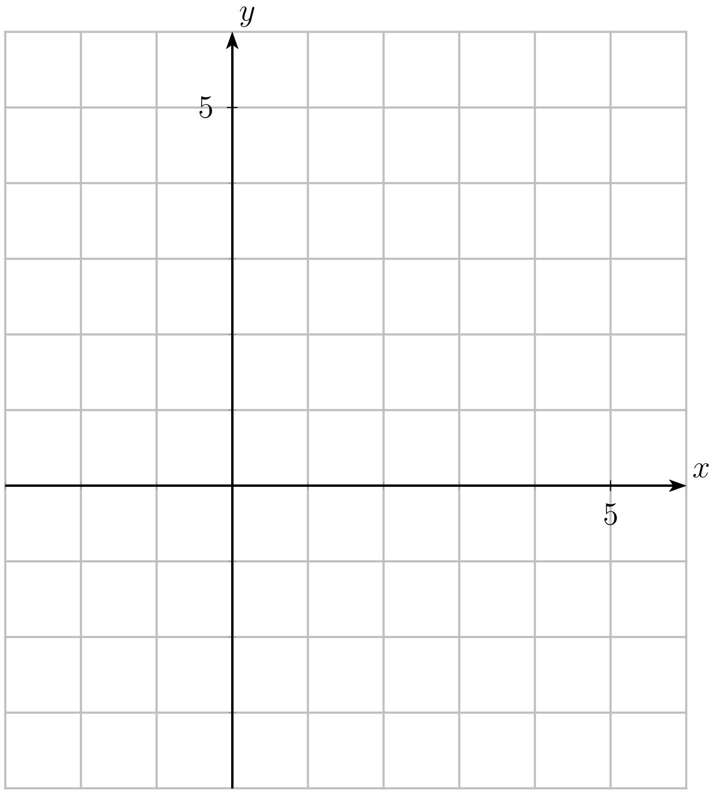
Modèle 4. Déterminer les sommets du polygone de solutions d'un système d'inéquations.

Méthode :

1) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations.
2) Déterminer algébriquement les coordonnées des sommets du **polygone des contraintes** : ce sont les sommets du polygone convexe délimitant la région R vue au modèle 2.

Exemple :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



1.1.5 Optimisation d'une fonction à deux variables

Modèle 5. Dans le polygone des contraintes, déterminer le maximum (ou le minimum) d'une fonction f appelée **fonction économique** (ou fonction objectif).

Méthode :

1) Représenter le polygone des contraintes.
2) Déterminer les coordonnées des sommets du polygone des contraintes.
3) Calculer la valeur prise par la fonction f en chacun des sommets.

Exemple :
On donne le système d'inéquations suivant (vu au modèle 3) :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

On considère la fonction économique f définie par

$$f(x; y) = 5x + 2y$$

a) Parmi les deux points $D(1\,;2)$ et $E(2\,;1)$, lequel maximise-t-il le mieux la fonction f ?

- $f(1\,;2) = ...$
- $f(2\,;1) = ...$

$\Rightarrow$ le point ... maximise le mieux la fonction f.

b) Quel pourrait être le point $P(x; y)$ du polygone des contraintes $OABC$ maximisant la fonction f ?

Selon le modèle 3, les sommets du polygone des contraintes $OABC$ sont :

$A(9/5\,;0)$; $B(21/8\,;11/8)$; $C(0\,;4)$

- $f(9/5\,;0) = ...$
- $f(21/8\,;11/8) = ...$
- $f(0\,;4) = ...$

$\Rightarrow$ le point maximisant la fonction f est en fait le sommet ... .

1.1.6 Problème de programmation linéaire à deux variables

Modèle 6. Résoudre l'exercice 1.7.

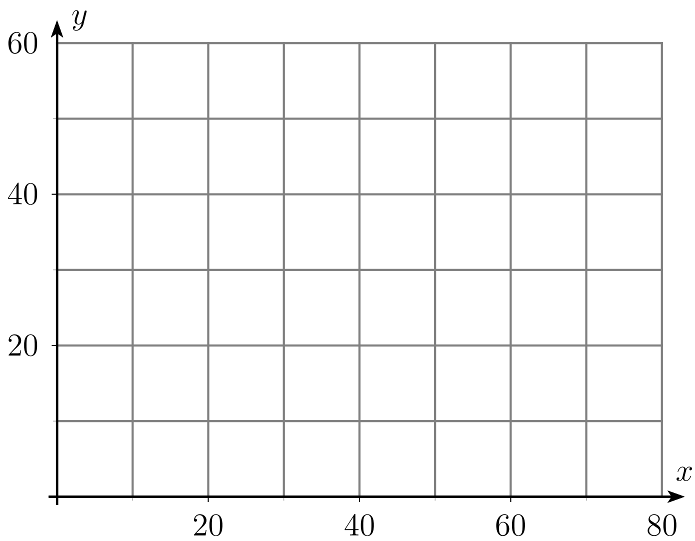
a) • Variables : $x = ...$ $y = ...$

• Fonction économique (objectif) : $f(x;y) = \ldots\, x + \ldots\, y$

• Contraintes :

$$\begin{cases} ... \\ ... \\ ... \\ ... \end{cases}$$

b) Polygone des contraintes :



c) Profit maximal :

1.2 Problèmes

Modèle 7. Résoudre un problème de programmation linéaire à deux variables.

Méthode :

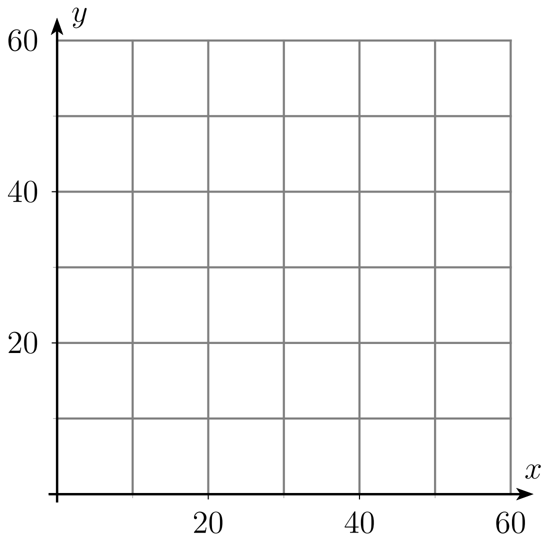
1) Définir les deux variables (souvent x et y).
2) Traduire toutes les contraintes en un système d'inéquations.
3) Exprimer la fonction économique f à optimiser.
4) Représenter le polygone des contraintes.
5) Par l'origine, tracer la droite d représentant la fonction f.
6) Lors de la translation de la droite d, déterminer graphiquement le point optimal P comme le dernier point du polygone des contraintes touché par d'.
7) Déterminer algébriquement les coordonnées du point optimal P.
8) Répondre au problème par une phrase.

Exemple : exercice 1.8 a)

1) Variables : $x = ...$ $y = ...$
2) Système des contraintes :

$$\begin{cases} ... \\ ... \\ ... \\ ... \end{cases}$$

3) Fonction économique : $f(x;y) = \ \ldots\ x + \ \ldots\ y$
4) Polygones des contraintes :



5) sur le graphique
6) sur le graphique
7) ...

8) ...

2 Fonctions quadratiques, graphes et optimisation

2.1 Généralités et esquisse du graphe

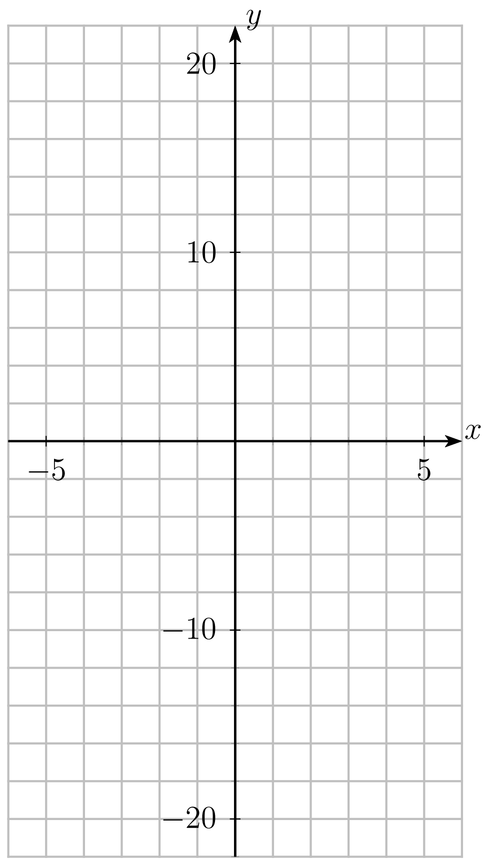
2.1.1 Esquisse du graphe d'une fonction quadratique

Modèle 8. Résoudre l'exercice 2.1 (la fonction f).

• Tableau de valeurs :

x	$f(x) = 2x^2 - 4x - 16$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	

• Graphe de f :



2.1.2 Caractéristiques de la parabole associée à une fonction quadratique

Modèle 9. Suite de l'exercice 2.1 avec $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$.

$$a = ... \,;\ b = ... \,;\ c = ...$$

Méthode :

1) Déterminer **l'orientation** de la parabole en déterminant le signe de a.
2) Déterminer **les zéros** de f s'ils existent en résolvant $f(x) = 0$.
3) Déterminer **l'ordonnée à l'origine** de f en calculant $f(0) = c$.
4) Déterminer les coordonnées du **sommet** S de la parabole : $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

1) Orientation : ...

2) Zéros de f : $Z_f = \{\, ... \,;\, ... \,\} \Rightarrow Z_1(\, ... \,;\, 0\,)\ ;\ Z_2(\, ... \,;\, 0\,)$

   ...

3) Ordonnée à l'origine : $f(0) = ... \Rightarrow H(\,0\,;\, ...\,)$

4) Sommet S : ...

2.2 Problèmes d'optimisation

Modèle 10. Résoudre l'exercice 2.10.

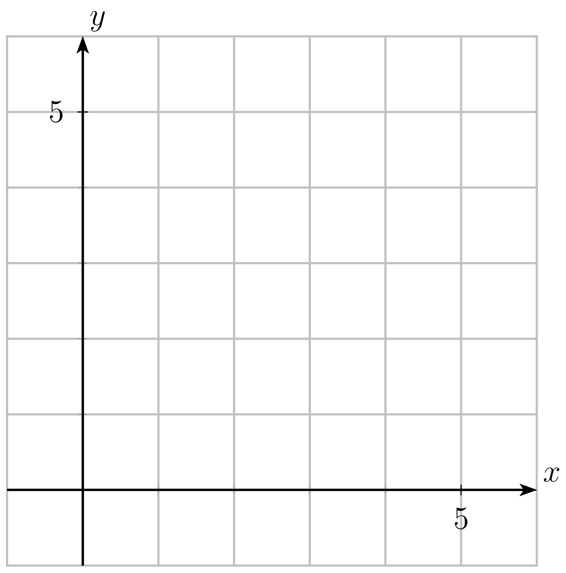
Méthode :

1) Lire attentivement la donnée, esquisser la situation à l'aide d'un schéma et définir les deux variables (souvent x et y).
2) Exprimer la quantité Q à optimiser comme une fonction à deux variables.
3) Etablir une équation liant les deux variables.
4) Transformer Q en une fonction à une seule variable.
5) Esquisser le graphe de Q.
6) Répondre au problème par une phrase.

Remarque : si une variable suffit, les étapes 2 et 3 n'ont pas lieu d'être.

1) Variables : $x = ...$ $y = ...$

2) Fonction pour l'aire : $A(x; y) = ...$
3) Equation pour le périmètre : ...
4) $\Rightarrow A(x) = ...$
5) Graphe de A :



6) ...

3 Polynômes et fonctions polynomiales

3.1 Factorisation

L'ordre des méthodes de factorisation pour transformer un polynôme sous forme de produits est le suivant :

1) Mise en évidence ;
2) Produits remarquables ;
3) Trinôme du 2ème degré unitaire (méthode S - P) ;
4) Division euclidienne (et schéma de Horner).

3.1.1 La mise en évidence

Modèle 11. Factoriser par mise en évidence.
Extraire le plus grand monôme commun dans

$$6x^3 + 2x^2 - 4x = ...$$

3.1.2 Les produits remarquables

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

Modèle 12. Factoriser $9x^2 - 4$ avec le produit remarquable $A^2 - B^2$.

Méthode :

1) Déterminer si **le coefficient de** x^2 et **la valeur absolue du terme constant** sont des carrés ;
2) Déterminer α et β tels que **le coefficient de** $x^2 = \alpha^2$ et **le terme constant** $= -\beta^2$;
3) Factoriser $9x^2 - 4 = (\alpha x + \beta)(\alpha x - \beta)$.

$$\begin{array}{r|l} 9x^2 - 4 & \dots \\ & \\ & \dots \end{array}$$

Modèle 13. Factoriser $9x^2 + 12x + 4$ avec le produit remarquable $A^2 + 2AB + B^2$.

Méthode :

1) Déterminer si **le coefficient de** x^2 et **le terme constant** sont des carrés ;
2) Déterminer α et β tels que **le coefficient de** $x^2 = \alpha^2$, **le coefficient de** $x = 2 \cdot \alpha \cdot \beta$ et **le terme constant** $= \beta^2$;
3) Factoriser $9x^2 + 12x + 4 = (\alpha x + \beta)^2$.

$$\begin{array}{r|l} 9x^2 + 12x + 4 & \dots \\ & \\ & \dots \end{array}$$

3.1.3 La méthode du trinôme unitaire (méthode S - P)

Modèle 14. Factoriser $x^2 - 4x - 5$ avec la méthode Somme - Produit.

Méthode :

1) Déterminer la somme $S =$ **le coefficient de** x et le produit $P =$ **le terme constant** ;
2) Déterminer α et β tels que $S = \alpha + \beta$ et $P = \alpha \cdot \beta$;
3) Factoriser $x^2 + Sx + P = (x + \alpha)(x + \beta)$.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x - 5 & \dots \\ & \\ & \dots \end{array}$$

3.2 La division euclidienne de polynômes

Division euclidienne d'entiers
En arithmétique, lorsqu'on étudie la division des nombres entiers avec reste, si l'on divise 2'356 (c'est le dividende) par 8 (c'est le diviseur) on obtient le quotient Q= 294 et le reste R= 4. La division se termine lorsque le reste est inférieur au diviseur.
L'égalité fondamentale correspondante est la suivante : $2'356 = 8 \cdot 294 + 4$

Degré d'un polynôme
Rappelons que le degré d'un polynôme relativement à une lettre est donné par la plus grande puissance de cette lettre dans le polynôme simplifié.

3.2.1 Division euclidienne de polynômes

Modèle 15. Diviser le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ (c'est le dividende) par le polynôme $S(x) = x^2 + 3x + 1$ (c'est le diviseur) se présente de la manière suivante :

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +2x^3 & & -5x & +1 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{6-6} -x^4 & -3x^3 & -x^2 & & & x^2 - x + 2 \\ \cline{1-3} & -x^3 & -x^2 & -5x & & \\ & x^3 & +3x^2 & +x & & \\ \cline{2-4} & & 2x^2 & -4x & +1 & \\ & & -2x^2 & -6x & -2 & \\ \cline{3-5} & & & -10x & -1 & \end{array}$$

La division se termine lorsque le reste est nul ou lorsque le degré du reste est strictement inférieur au degré du diviseur.
L'égalité fondamentale correspondante est la suivante :

$$x^4 + 2x^3 - 5x + 1 = (x^2 + 3x + 1)(\;...\;x^2 - \;...\;x + \;...\;) + \;\dots$$

3.2.2 Schéma de Horner

Le schéma de Horner permet de simplifier la présentation de la division euclidienne par un polynôme du type $x - a$.

Modèle 16. Diviser le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1$ par $S(x) = x - 2$ avec le schéma de Horner.

Méthode :

1) Commencer par disposer sur la 1ère ligne les coefficients du polynôme que l'on veut diviser ; attention, le nombre de coefficients à noter doit être égal à $\deg(P(x)) + 1$;
2) Placer ensuite la valeur qui annule le diviseur au début de la 2ème ligne ;
3) Selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & 2 & 12 & 24 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 12 & 25 \end{array}$$

$$Q(x) = \ ...\ x^3 + \ ...\ x^2 + \ ...\ x + \ ... \quad ; \quad R(x) = \ ...$$

• division euclidienne :

$$\begin{array}{rl|l} 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 & \quad\quad + 1 & x - 2 \\ \cline{3-3} -2x^4 + 4x^3 & & 2x^3 + x^2 + 6x + 12 \\ \hline x^3 + 4x^2 & & \\ -x^3 + 2x^2 & & \\ \hline 6x^2 & & \\ -6x^2 + 12x & & \\ \hline 12x & + 1 & \\ -12x & + 24 & \\ \hline & 25 & \end{array}$$

Le dernier nombre obtenu (25) est le reste de la division de $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1$ par $x - 2$. L'égalité fondamentale correspondante est la suivante :

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1 = (x - 2)(2x^3 + x^2 + 6x + 12) + 25$$

3.2.3 Calcul du reste de la division par $x - a$.

Le reste R de la division d'un polynôme $P(x)$ par $S(x) = x - a$ est un nombre réel.

Modèle 17. Calculer le reste de la division de $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ par $S(x) = x + 1$.

Méthode :

1) Chercher la valeur qui annule le diviseur : $x - a = 0 \iff x = a$.
2) Le reste de la division est la valeur numérique $R = P(a)$ de P en $x = a$.

$S(x) = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = \ ...\ \Rightarrow R = P(\ ...\ ) = \ \ldots$

3.3 Fonctions polynomiales

Signe et graphe d'une fonction polynomiale

Modèle 18. Résoudre l'exercice 3.29 a).

Méthode :

1) Factoriser la fonction polynomiale comme produit de facteurs du premier et du deuxième degré ;
2) Etablir un tableau de signes puis étudier séparément le signe de chacun des facteurs ;
3) Appliquer la règle des signes sur chaque intervalle ;
4) Esquisser le graphe de la fonction polynomiale.

1) Factoriser $f(x)$:

$$\begin{array}{rll} & x^3+2x^2-x-2 & \quad | \quad \ldots \\ & & \quad | \\ & & \quad | \\ & & \quad | \\ \Longleftrightarrow & (x+\ \ldots\ )(\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ ) & \quad | \quad \ldots \\ \Longleftrightarrow & \ldots & \end{array}$$

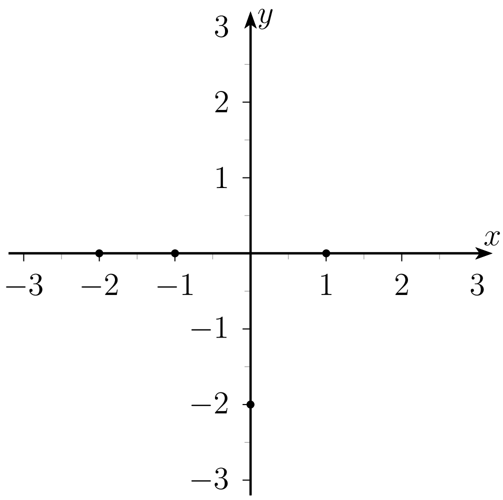
$\Rightarrow \ Z_f = \{-\ldots\,;-\ldots\,;\ldots\}$

2) Tableau de signes de f :

3)

x		$-\ldots$		$-\ldots$		$\ldots$	
$x+\ldots$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+\ldots$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-\ldots$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\mathrm{sgn}(f)$	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$

4) Graphe de f :



3.4 Lecture et interprétation du graphe d'une fonction polynomiale

Modèle 19. Résoudre l'exercice 3.32.

Méthode par graphique :

1) Déterminer **l'ordonnée à l'origine** h de f avec $f(0)$: c'est l'intersection du graphe de f et l'axe Oy ;
2) Déterminer les **zéros** de f s'ils existent en résolvant $f(x) = 0$: c'est l'intersection du graphe de f et l'axe Ox ;
3) Déterminer les coordonnées du **maximum absolu** $M(x_1; y_1)$ de f en résolvant $f(x_1) = y_1 \,|f(x) < y_1$ si $x \neq x_1$;
4) Déterminer les coordonnées du **minimum absolu** $m(x_2; y_2)$ de f en résolvant $f(x_2) = y_2 \,|f(x) > y_2$ si $x \neq x_2$;

- Lecture :

a) L'ordonnée à l'origine : $h = f(0) \cong \ldots \Rightarrow H(\,0\,;\,\ldots\,)$

b) $f(2) \cong \ldots$

c) L'ensemble des zéros de f : $Z_f = \{\ldots\,;\,\ldots\,;\,\ldots\,;\,\ldots\}$

d) $M(\,\ldots\,;\,\ldots\,)$

e) $m(\,\ldots\,;\,\ldots\,)$

- Interprétation :

f) ...

g) ...

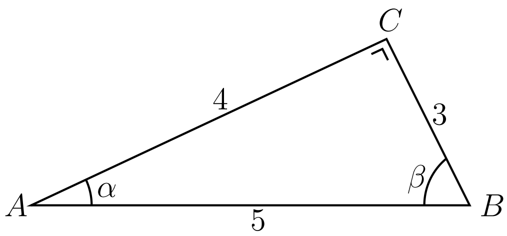
h) ...

i) ...

4 Trigonométrie

4.1 Le triangle rectangle

Modèle 20. Soit un triangle ABC rectangle au sommet C.



Rappels :

- $\sin(\alpha) = ...$
- $\cos(\alpha) = ...$
- $\tan(\alpha) = ...$
- $\sin(\beta) = ... \quad \Rightarrow \beta = ...$
- $\cos(\beta) = ... \quad \Rightarrow \beta = ...$
- $\tan(\beta) = ... \quad \Rightarrow \beta = ...$

4.2 Le triangle quelconque

4.2.1 Construction d'un triangle quelconque

Modèle 21. Résoudre l'exercice 4.1.

a) ...

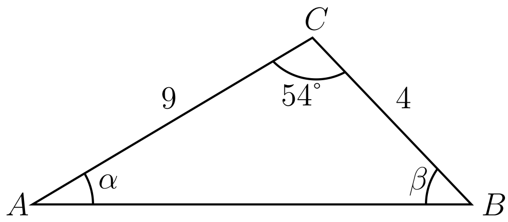
b) ...

c) ...

4.2.2 Le théorème du cosinus

Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés diminuée du double-produit de ces deux côtés multiplié par le cosinus de l'angle compris entre ces deux côtés.

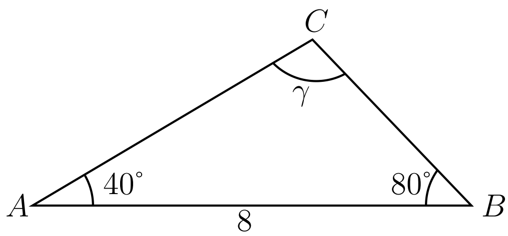
Modèle 22. Résoudre l'exercice 4.4 c).



4.2.3 Le théorème du sinus

Dans tout triangle, les trois rapports d'un côté par le sinus de son angle opposé sont égaux.

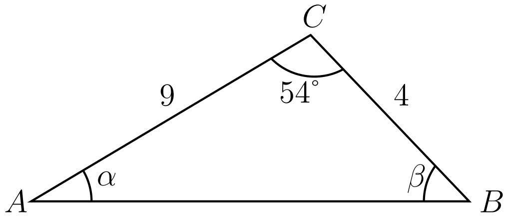
Modèle 23. Résoudre l'exercice 4.4 d).



4.2.4 Le théorème de l'aire

Dans tout triangle, l'aire est donnée par la moitié du produit de deux côtés multipliée par le sinus de l'angle compris entre eux.

Modèle 24.



5 Combinatoire

5.1 Principes fondamentaux

1) La règle du produit est utilisée lorsque l'on compte le nombre de cas en parcourant l'arbre des issues possibles des branches principales jusqu'aux feuilles, les branches d'un niveau donné devant avoir toutes le même nombre de sous-branches.
2) La règle d'addition est utilisée lorsque l'on divise l'arbre des issues possibles en plusieurs sous–arbres et que l'on somme les nombres des issues des différents sous–arbres.
3) En général, la règle du produit correspond à la conjonction « et » et la règle d'addition à la conjonction « ou ».

Modèle 25. Résoudre l'exercice 5.4.

5.2 La notation factorielle

Modèle 26. Calculer l'exercice 5.12.

c) $10! = ...$ e) $5! = ...$

f) $50! = ...$ g) $6! = ...$

5.3 Les permutations

Disposition ordonnée de tous les n objets.

5.3.1 Les permutations simples

Modèle 27. Résoudre l'exercice 5.15.

Formule : $P_n = ...$

5.3.2 Les permutations avec répétition

Modèle 28. Résoudre l'exercice 5.15 (suite).

Formule : $\overline{P}_n(r_1; r_2; ...; r_k) = ...$

5.4 Les arrangements

Disposition ordonnée de p objets tirés parmi n, $p \leq n$.

5.4.1 Les arrangements simples

Modèle 29. Résoudre l'exercice 5.24.

Formule : $A_p^n = ...$

5.4.2 Les arrangements avec répétition

Modèle 30. Résoudre l'exercice 5.24(suite).

Formule : $\overline{A}_p^n = ...$

5.5 Les combinaisons

Disposition non ordonnée de p objets tirés parmi n, $p \leq n$.

Modèle 31. Résoudre l'exercice 5.32.

Formule : $C_p^n = ...$

5.6 Problèmes mélangés

Permutation - Arrangement - Combinaison :
quelle méthode de dénombrement choisir ? P_n ; $\overline{P}_n(r)$; A_p^n ; $\overline{A}_p^n$; C_p^n **???**

Modèle 32. Une urne contient les 6 jetons suivants :

1 2 3 4 5 6

a) On tire simultanément 5 jetons. Combien de tirages différents contenant 2 chiffres pairs et 3 impairs peut-on avoir ?
- ordre :
- répétition :
- nb. de jetons tirés :

---

b) On tire successivement les 6 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents formés des 6 chiffres peut-on ainsi avoir ?
- ordre :
- répétition :
- nb. de jetons tirés :

---

c) On tire successivement 4 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents peut-on avoir ?
- ordre :
- répétition :
- nb. de jetons tirés :

---

d) On tire simultanément 4 jetons. Combien de tirages différents peut-on avoir ?
- ordre :
- répétition :
- nb. de jetons tirés :

---

e) On répète 4 fois l'opération suivante :
On tire un jeton, on note le chiffre obtenu puis on le remet dans l'urne.
Combien de nombres différents peut-on avoir ?
- ordre :
- répétition :
- nb. de jetons tirés :

6 Statistiques descriptives

La statistique est la science qui traite des éléments suivants :

- ⋆ Récolte de données ;
- ⋆ Classification des données ;
- ⋆ Représentation et analyse des données (**statistiques descriptives**) ;
- ⋆ Interprétations, conclusions et prévisions pouvant être tirées de l'analyse des données (**inférence statistique** au chapitre 4 en 3C).

Aujourd'hui la statistique a pris une grande place grâce aux nouvelles techniques et à la puissance des ordinateurs. Géographie, médecine, sciences humaines, sciences économiques, biologie, politique, etc... : aucun domaine n'est épargné.

6.1 Caractéristiques d'un ensemble d'individus

Vocabulaire statistique :

- **Population** : ensemble de toutes les personnes, de tous les objets ou de tous les faits sur lesquels porte l'étude.
- **Individu** : élément de la population.
- **Sondage** : étude réalisée sur un **échantillon** de la population, soit un sous-ensemble de la population (lorsque la population est trop grande pour être étudiée dans son ensemble).
- **Variable statistique** (v.s.) : caractéristique étudiée dans la population.
- **Modalités ou valeurs** : différents états ou valeurs prises par la variable statistique.

Notation : on emploie une lettre majuscule (par exemple X) pour désigner une v.s. et une lettre minuscule (x_i) pour désigner une de ses valeurs.

Si l'échantillon est choisi au hasard, que sa taille est suffisamment grande et qu'il peut être considéré comme représentatif, on peut généraliser certains résultats obtenus à l'ensemble de la population.

Une variable statistique est dite **quantitative** si les valeurs qu'elle peut prendre sont des nombres. Dans le cas contraire, elle est **qualitative**, et ses valeurs s'appellent des **modalités** (ou des **catégories**).

Si les valeurs que peut prendre une variable statistique quantitative sont isolées les unes des autres, on dit que la variable est **discrète**.
Si les valeurs constituent des intervalles de nombres, on dit qu'elle est **continue**.

Modèle 33. Dans chaque situation exposée ci-dessous :

1) Décrire la population étudiée ;
2) Décrire l'échantillon ;
3) Nommer la variable étudiée ;
4) Donner le type de variable étudiée.
5) Décrire l'ensemble des modalités ou des valeurs de la variable.

Exemples :

a) On demande à 200 passagers pris au hasard dans un aéroport de donner leur nationalité.
   1) Population : ...
   2) Echantillon : ...
   3) Variable statistique : ...
   4) Type de variable : ...
   5) Modalités ou valeurs : ...

b) Durant le mois d'avril, on mesure la température maximale de la journée à La Tour-de-Peilz.
   1) Population : ...
   2) Echantillon : ...
   3) Variable statistique : ...
   4) Type de variable : ...
   5) Modalités ou valeurs : ...

c) On demande à 5'000 familles résidant en Suisse le nombre d'enfants de leur foyer.
   1) Population : ...
   2) Echantillon : ...
   3) Variable statistique : ...
   4) Type de variable : ...
   5) Modalités ou valeurs : ...

6.2 Variables qualitative et quantitative discrète

Notation : on désigne la taille de l'échantillon par n et les valeurs prises par la v.s. X dans l'échantillon par $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

6.2.1 Tableau de distribution d'une variable qualitative

Une fois les données récoltées, on les regroupe par modalité dans un tableau de distribution.

Modèle 34. On a demandé à tous les élèves d'une classe quelle était leur matière préférée parmi les matières suivantes : français, anglais, maths et musique.

musique	français	français	anglais	français
anglais	musique	maths	musique	musique
musique	musique	musique	français	français
français	anglais	musique	anglais	maths

Tableau de distribution :

Répartition des .... selon ....

Matière	Effectif d'élèves $= n_i$	Fréquence $= f_i$
Total		

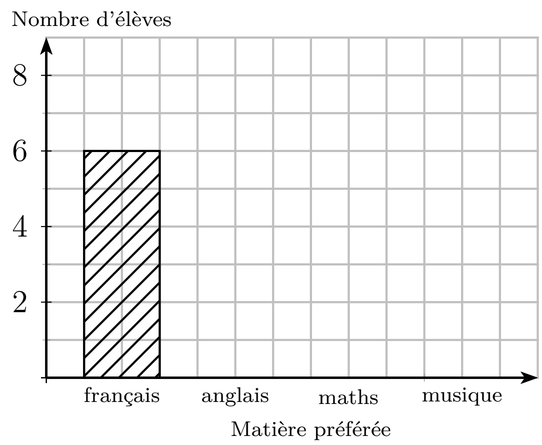
Remarques :

1. La somme des effectifs est toujours égale au nombre N d'individus de la population :
$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$$
2. La somme des fréquences ($f_i = \dfrac{n_i}{N}$) est toujours égale à $1 = 100\%$.

6.2.2 Représentation graphique d'une variable qualitative

Modèle 35. Répartition des 20 élèves d'une classe selon leur matière préférée.

Diagramme à rectangles



6.2.3 Tableau de distribution d'une variable quantitative discrète

Modèle 36. On a demandé à ces même élèves leur dernière note d'anglais.

5	4.5	3.5	5	6	3.5	4	2.5	4	4.5
4	4.5	4.5	4.5	3	4	4.5	5	3.5	4

Tableau de distribution :

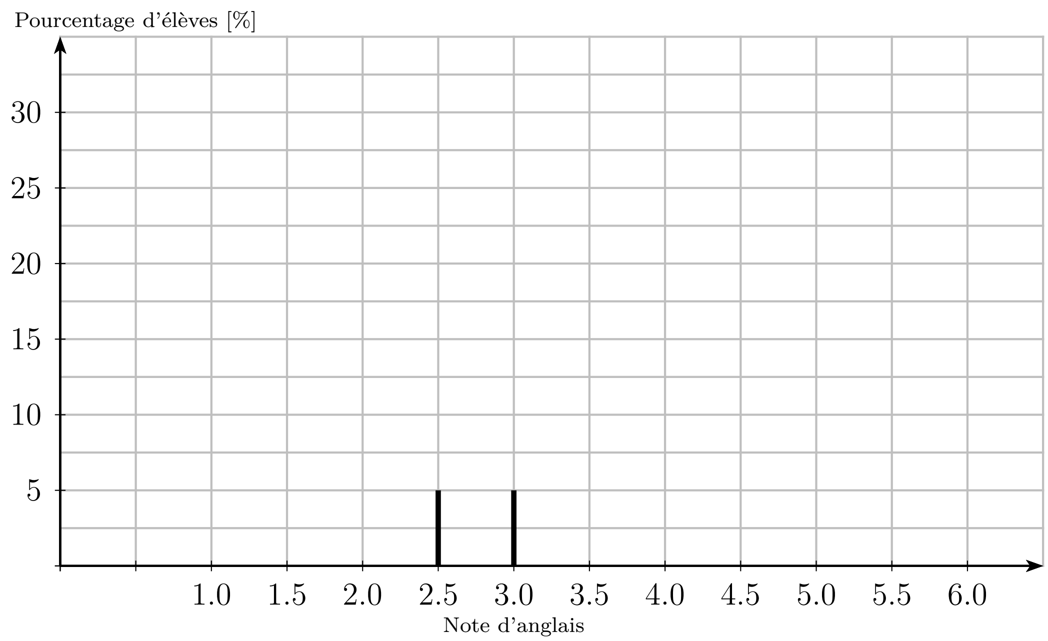
Répartition des .... selon ....

Note	Effectif $= n_i$	Fréquence $= f_i$
Total		

6.2.4 Représentation graphique d'une variable quantitative discrète

Modèle 37. Répartition des 20 élèves d'une classe selon leur dernière note d'anglais.

Diagramme en batons



6.3 Variables quantitative continue et discrète à grand nombre de valeurs

6.3.1 Tableau de distribution d'une variable quantitative continue

Modèle 38. On a demandé à ces élèves leur taille en centimètre.

172	157	162	156	167	179	173	173	178	160
168	171	165	166	184	170	165	164	160	175

....

....

Tableau de distribution :

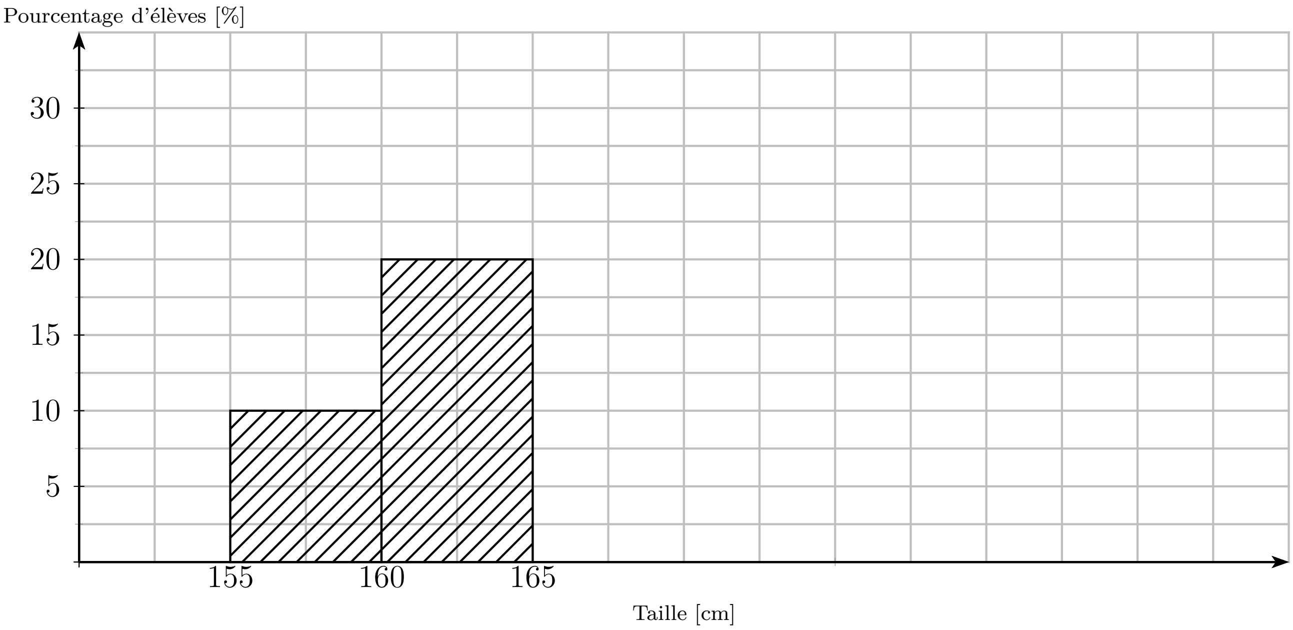
Répartition des .... selon ....

Taille	Effectif = n_i	Fréquence = f_i
Total		

6.3.2 Représentation graphique d'une variable quantitative continue

Modèle 39. Répartition des 20 élèves d'une classe selon leur taille.

Histogramme et polygone des fréquences



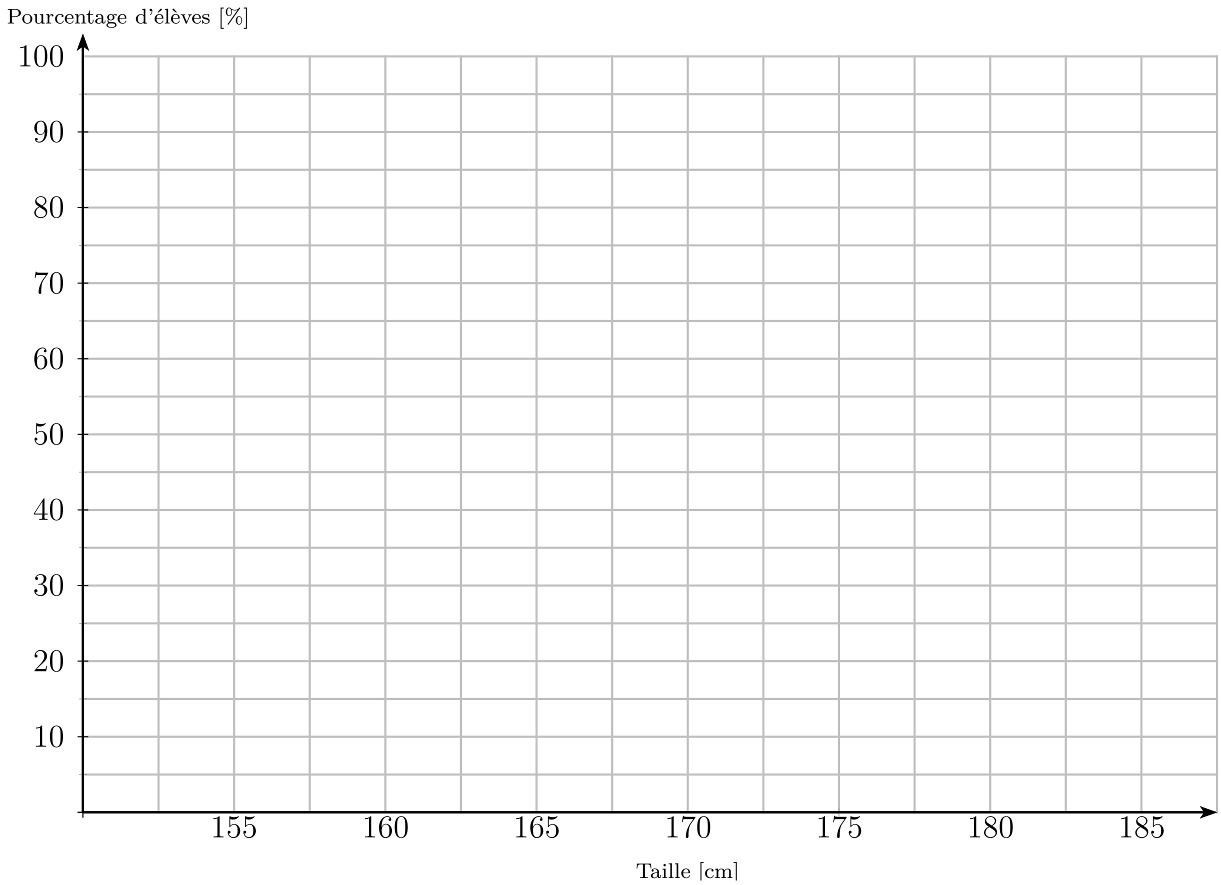
Le **polygone des fréquences** est la ligne polygonale obtenue en joignant les milieux respectifs des côtés supérieurs des rectangles de l'histogramme. On commence et on termine le polygone des fréquences en ajoutant une classe de fréquence nulle avant la première classe et une autre après la dernière classe.

Modèle 40. Répartition des 20 élèves d'une classe selon leur taille.

Polygone des fréquences cumulées (ou courbe de fréquences cumulées)

Taille	Effectif $= n_i$	Fréquence $= f_i$	Fréquence cumulée $= F_i$
$[155;160[$	2	10 %	
$[160;165[$	4	20 %	
$[165;170[$	5	25 %	
$[170;175[$	5	25 %	
$[175;180[$	3	15 %	
$[180;185[$	1	5 %	
Total	20	100 %	

polygone des fréquences cumulées



30 % des élèves mesurent ....

.... % des élèves mesurent moins de 1.75 mètre.

5 % des élèves mesurent au moins ....

Remarque
L'abscisse du point correspondant à une fréquence cumulée croissante de 50 % s'appelle la .... de la v.s. (ici ≅ ......).

6.4 Mesure de tendance centrale

But : résumer une série statistique par une seule valeur.

6.4.1 Moyenne

Calcul de la moyenne dans le cas discret

Modèle 41. On reprend les dernières notes d'anglais des 20 élèves d'une classe (modèle 35 p.23).

5	4.5	3.5	5	6	3.5	4	2.5	4	4.5
4	4.5	4.5	4.5	3	4	4.5	5	3.5	4

Calcul de la moyenne arithmétique $\bar{x}$ (se lit x barre) :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}}$$

$\bar{x} = \ldots$

Calculatrice :

Calcul de la moyenne à partir du tableau de distribution (formule plus rapide) :

Répartition des 20 élèves d'une classe selon leur note d'anglais

Note (modalité) = c_i	Effectif = n_i	Fréquence = f_i
1 / 1.5 / 2	0	0 %
2.5	1	5 %
3	1	5 %
3.5	3	15 %
4	5	25 %
4.5	6	30 %
5	3	15 %
5.5	0	0 %
6	1	5 %
Total	20	100 %

$$\boxed{\bar{x} = \frac{n_1 \cdot c_1 + n_2 \cdot c_2 + \cdots + n_k \cdot c_k}{n} = f_1 \cdot c_1 + f_2 \cdot c_2 + \cdots + f_k \cdot c_k}$$

$\bar{x} = \ldots$

Calculatrice :

Calcul de la moyenne dans le cas continu

Modèle 42. On reprend les tailles des 20 élèves d'une classe (modèle 37 p.24).

172	157	162	156	167	179	173	173	178	160
168	171	165	166	184	170	165	164	160	175

Calcul direct de la moyenne (à partir des données brutes) :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}}$$

$\bar{x} = \ldots$

Calcul de la moyenne à partir du tableau de distribution (formule plus rapide) :

Répartition des 20 élèves d'une classe selon leur taille

Taille	Valeur centrale $= c_i$	Effectif $= n_i$	Fréquence $= f_i$	Fréquence cumulée $= F_i$
$[\,155\,;160\,[$		2	10 %	10 %
$[\,160\,;165\,[$		4	20 %	30 %
$[\,165\,;170\,[$		5	25 %	55 %
$[\,170\,;175\,[$		5	25 %	80 %
$[\,175\,;180\,[$		3	15 %	95 %
$[\,180\,;185\,[$		1	5 %	100 %
Total		20	100 %	

$$\boxed{\bar{x} = \frac{n_1 \cdot c_1 + n_2 \cdot c_2 + \cdots + n_k \cdot c_k}{n} = f_1 \cdot c_1 + f_2 \cdot c_2 + \cdots + f_k \cdot c_k}$$

$\bar{x} = \ldots$

Remarque
La valeur de la moyenne n'est pas la même selon la méthode utilisée. Dans le deuxième cas, on ne dispose plus des données brutes, on doit donc estimer la valeur de $\bar{x}$ avec l'information disponible.

Représentation graphique de la moyenne
On place un pivot (▲) sous l'axe horizontal, au point correspondant à la moyenne, celle-ci coïncide avec le centre d'équilibre du diagramme. Les modèles 36 et 38 sont à compléter.

6.4.2 Médiane

Calcul de la médiane dans le cas discret
La médiane partage une série de données triées en deux parties égales.
Si $\tilde{x}$ est la médiane d'une série statistique, il y a donc 50 % des données qui sont plus petites ou égales à $\tilde{x}$ et 50 % qui sont plus grandes ou égales à $\tilde{x}$.

Modèle 43. Dans l'exemple des notes d'anglais des 20 élèves d'une classe (modèle 35 p.23).

Calcul de la médiane $\tilde{x}$ (se lit x tilde) :

$$\boxed{\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}}$$

Il y a deux formules différentes, car si n est impair et les données sont triées, il y a une donnée au milieu de la série. Si n est pair, par contre, il y a deux données qui sont au milieu, et on utilise donc la moyenne arithmétique de ces deux valeurs.

Remarque importante :
Cette mesure de tendance centrale est plus robuste que la moyenne, elle est moins affectée par les valeurs extrêmes.

Exemple :
Dans une entreprise de 35 employés, supposons que le patron gagne 40'000 francs par mois, alors que les 34 employés gagnent 3'000 francs par mois.

Calcul du revenu mensuel moyen : $\bar{x} = \ldots$

Cette moyenne ne reflète en rien la réalité des travailleurs de cette entreprise. La valeur extrême du salaire du patron a un impact trop grand sur la moyenne.

Calcul de la médiane : $\tilde{x} = \ldots$

Il est correct de dire que le salaire moyen dans cette entreprise est de .... mais il vaudrait mieux dire que le salaire **médian** est de .... par mois, donc qu'au moins la moitié des employés gagnent ....

Calcul de la médiane dans le cas continu

Modèle 44. Dans l'exemple des tailles des 20 élèves d'une classe (modèle 37 p.24).

Calcul direct de la médiane (à partir des données brutes) :

$$\boxed{\tilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)}$$

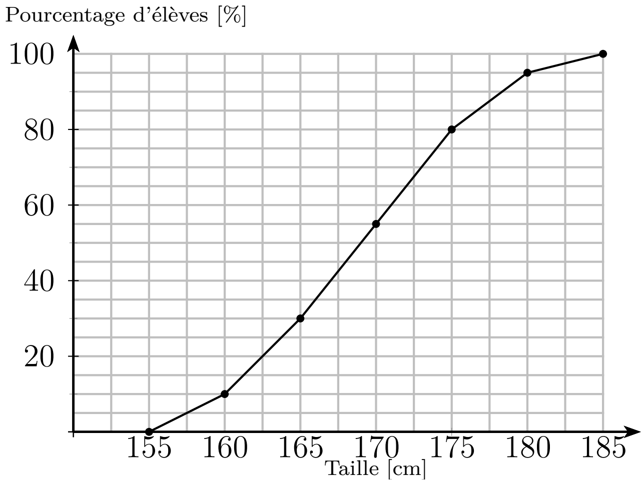
$\tilde{x} = \dots$

Si on ne dispose que du tableau de distribution, on doit estimer la médiane autrement.

Répartition des 20 élèves d'une classe selon leur taille

Taille	Centre	Effectif	Fré.	Fré.cum.
$[\,155\,;160\,[$	157.5	2	10 %	10 %
$[\,160\,;165\,[$	162.5	4	20 %	30 %
$[\,165\,;170\,[$	167.5	5	25 %	55 %
$[\,170\,;175\,[$	172.5	5	25 %	80 %
$[\,175\,;180\,[$	177.5	3	15 %	95 %
$[\,180\,;185\,[$	182.5	1	5 %	100 %
Total		20	100 %	

Polygone de fréquences cumulées



Classe médiane :

Calcul de la médiane par proportionnalité entre les fréquences et les valeurs :

Remarque
La valeur de la médiane n'est pas la même selon la méthode utilisée. Dans le deuxième cas, on ne dispose plus des données brutes, on doit donc estimer la valeur de $\tilde{x}$ avec l'information disponible.

6.4.3 Mode et classe modale

Le mode est la valeur (ou la catégorie dans le cas qualitatif) qui revient le plus souvent dans une série statistique.
La classe modale est la classe qui regroupe le plus de données dans le cas d'une variable continue.

Remarques

1. Le mode ou la classe modale ne sont significatifs que si leur effectif est largement plus grand que celui des autres modalités ou des autres classes.
2. Le mode est la seule mesure de tendance centrale qui peut être utilisée pour une variable qualitative.

Modèle 45. Déterminer le mode pour chacune des parties :

a) Dans l'exemple des matières préférées, le mode est ....

Interprétation : ....

b) Dans l'exemple des notes d'anglais, le mode est ....

Interprétation : ....

c) Dans l'exemple des tailles, la classe modale est ....

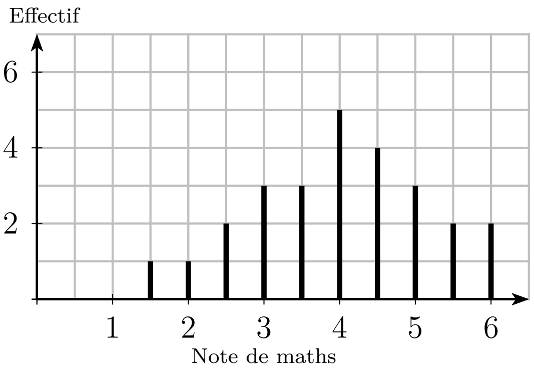
Interprétation : ....

6.5 Mesures de dispersion

Lorsqu'on résume une série statistique par une mesure de tendance centrale (souvent la moyenne), on ne donne aucune information sur la manière dont les données se répartissent autour de cette valeur : sont-elles toutes assez proches de la moyenne, ou trouve-t-on des valeurs très dispersées autour de celle-ci ? Cette question nécessite de donner une valeur supplémentaire, appelée mesure de dispersion.

Pour illustrer ces mesures de dispersion, nous allons nous baser sur les notes de maths de trois classes parallèles, données par des diagrammes en bâtons.

Classe A

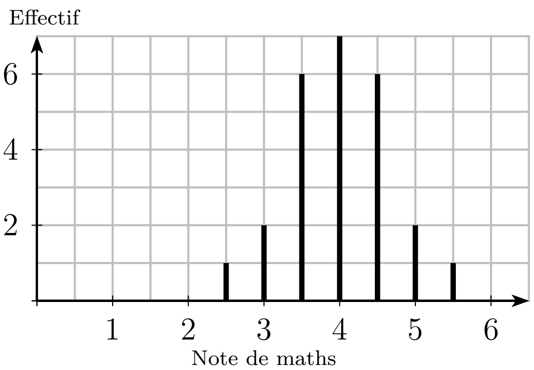


Moyenne :

Médiane :

Mode :

Classe B

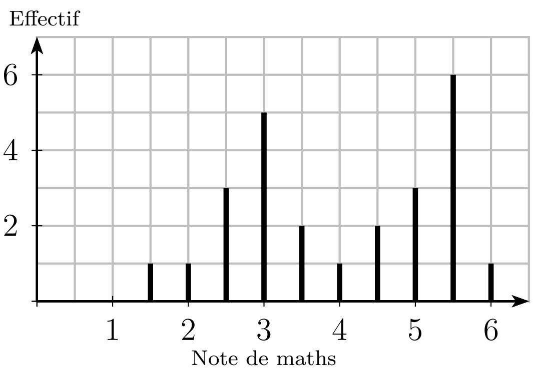


Moyenne :

Médiane :

Mode :

Classe C



Moyenne :

Médiane :

Mode :

Remarque
Ces mesures de tendance centrale ne suffisent pas à décrire les différences entre ces trois classes.

6.5.1 Etendue

Modèle 46. L'étendue est la "distance" entre la plus petite et la plus grande valeur.

Classe	A	B	C
Etendue			

Cette mesure permet de différencier les situations des classes ... et ... , mais pas des classes ... et ...

6.5.2 Variance et écart-type

La variance s^2 est l'écart quadratique moyen à la moyenne. Elle se calcule par la formule suivante :

$$\boxed{s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Dans le cas de données regroupées par modalités ou par classes, la formule devient :

$$\boxed{s^2 = \frac{n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_k(c_k - \bar{x})^2}{n} = f_1(c_1 - \bar{x})^2 + f_2(c_2 - \bar{x})^2 + \ldots + f_n(c_k - \bar{x})^2}$$

Comme la variance est calculée à partir de grandeurs au carré, on définit l'écart-type, noté s, comme la racine de la variance. On obtient ainsi une mesure de la dispersion dans la même unité que les mesures initiales.

Calculatrice :

Modèle 47. Calculer la variance et l'écart-type des classes A, B et C à l'aide des diagrammes en bâtons de la page 31.

Classe	A	B	C
Variance			
Ecart-type			

Grâce à ces nouvelles mesures, on peut maintenant affirmer que les notes de la classe ... sont les moins dispersées autour de la moyenne, et que celles de la classe ... sont les plus dispersées.

6.5.3 Homogénéité des données

Le coefficient de variation (CV) mesure l'homogénéité des données. Il se calcule par la formule :

$$\boxed{\mathrm{CV} = \frac{s}{\bar{x}}}$$

Plus il est faible, plus les données sont homogènes et plus la moyenne est représentative.

En pratique, on considère qu'un coefficient de variation inférieur à 15% indique une bonne homogénéité des données.

6.6 Mesure de position

6.6.1 Quantiles

La médiane est une valeur qui partage les données de l'échantillon en deux groupes de taille égale : 50% des données sont inférieures ou égales à la médiane, et 50% des données lui sont supérieures ou égales.

Cette idée se généralise pour n'importe quel pourcentage. Par exemple, quelle est la valeur qui sépare les 25% les plus petits des 75% les plus grands ?

Un quantile à p% est une valeur qui est supérieure ou égale aux p% des données les plus petites, et inférieure ou égale au reste des données. On le note q_p%.

Cas particuliers

- Les quartiles (Q_1, Q_2, Q_3) sont les quantiles à 25%, 50% et 75%. Ils partagent les données en quatre parties égales. Le deuxième quartile (Q_2) est égal à la médiane.
- Les quintiles (V_1, V_2, V_3, V_4) sont les quantiles à 20%, 40%, 60% et 80%. Ils partagent les données en cinq parties égales.
- Les déciles $(D_1, D_2, \ldots, D_9)$ sont les quantiles à 10%, 20%,..., 90%. Ils partagent les données en 10 parties égales.
- Les centiles $(C_1, C_2, \ldots, C_{99})$ sont les quantiles à 1%, 2%,..., 99%. Ils partagent les données en cent parties égales.

Les quantiles se déterminent en utilisant le même principe que pour la médiane.

Remarque
Pour que les quantiles aient du sens, il faut que l'échantillon soit suffisamment grand. On ne calculera jamais le premier décile d'une distribution composée d'une dizaine de valeurs !

6.6.2 Boxplot

Un boxplot (ou boîte à moustache) est une manière de représenter graphiquement la distribution d'une variable statistique en faisant apparaître la médiane, les quartiles et les deux valeurs extrêmes (la plus petite et la plus grande).

Modèle 48. On suppose que le nombre de périodes d'absences par année des élèves d'un gymnase se répartit de la manière suivante :

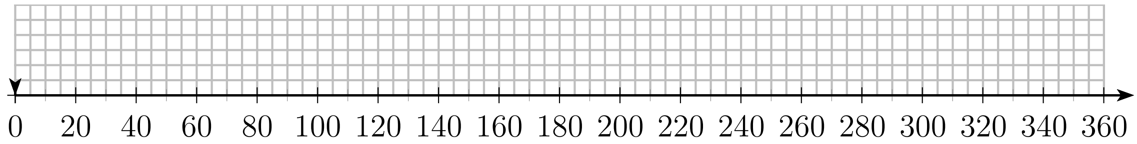
Périodes d'absence	$[0\,;10[$	$[10\,;30[$	$[30\,;60[$	$[60\,;90[$	$[90\,;120[$	$[120\,;360[$	Total
Fréquence	14 %	60 %	15 %	7 %	2 %	2 %	100 %
Fréquence cumulée	... %	... %	... %	... %	... %	... %	100 %

a) Calcul de la médiane (Q_2) :

b) Calcul du premier quartile (Q_1) :

c) Calcul du troisième quartile (Q_3) :

d) Box-Plot :



6.6.3 Cote Z

Modèle 49. Un gymnase souhaite engager un ancien étudiant pour donner des cours d'appui de mathématiques. Les quatre candidats ont suivi leur troisième année dans quatre gymnases différents, mais on souhaite tout de même déterminer le meilleur étudiant en fonction de ses résultats à l'examen de maturité.

Candidat	Note de l'élève	Note moyenne de son gymnase	Ecart-type de son gymnase
Loïc	4.5	3.7	1.1
Muriel	5	4.1	0.6
Antonin	5.5	5.1	0.4
Eloïse	5	4.0	0.9

Si le gymnase ne se fie qu'à la note de l'élève, il devrait engager ...

S'il tient aussi compte de la moyenne du gymnase, il engagera plutôt ...

Enfin, en tenant compte de l'écart-type du gymnase, il choisira alors ...

Pour décrire la position d'une donnée par rapport à une distribution, on utilise la cote Z.

$$\boxed{\text{Cote } Z \text{ de } x_i : z_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}}{s}}$$

La cote Z mesure la distance d'une valeur à la moyenne, mesurée en nombre d'écart-type.

Cote Z de Loïc :

Cote Z de Muriel :

Cote Z d'Antonin :

Cote Z d'Eloïse :

Interprétation de la cote Z
Une cote Z positive signifie que la valeur est supérieure à la moyenne, alors qu'une cote Z négative indique qu'elle est en dessous de la moyenne.
Une cote Z de 3 ou plus, ou de -3 ou moins indique une valeur très rare. La cote Z permet donc d'identifier des situations exceptionnelles ou peu plausibles.

Modèle 50. Un cinéma accueille en moyenne 120 spectateurs les soirs de semaine, avec un écart-type de 14 spectateurs.
Il décide de proposer une offre spéciale le mardi soir, avec des places à tarif réduit.
Le mardi suivant, 172 spectateurs assistent à la projection.
Peut-on déduire que l'offre spéciale a eu de l'effet ?

Un lundi soir, une exposition a lieu tout près du cinéma. Ce même soir, le cinéma vend 104 billets.
Le gérant se plaint de l'effet négatif de l'exposition, qui lui aurait "volé" des clients. Est-ce justifié ?

Notes personnelles :