Exercice 6.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

- Factorisation de $f(x)$:

$$\begin{aligned} & x^3 + 2x^2 - x - 2 && \mid \text{ groupements} \\ \Longleftrightarrow\ & x^2(x+2) - 1(x+2) && \mid \\ \Longleftrightarrow\ & (x+2)(x^2-1) && \mid\ A^2 - B^2 = ... \\ \Longleftrightarrow\ & (x+2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

- $Z_f = \{-2\,;-1\,;1\}$

- Tableau de signes de f :

x		-2		-1		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\text{sgn}(f)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b) $f(x) = (x^3 - x^2 + x) \cdot (2 - x)$

- Fin de la factorisation de $f(x)$:

$$\begin{aligned} & (x^3 - x^2 + x)(2-x) && \mid \text{ mise en évidence} \\ \Longleftrightarrow\ & x(x^2 - x + 1)(2-x) && \mid\ \Delta = -3 < 0 \end{aligned}$$

- $Z_f = \{0\,;2\}$

- Tableau de signes de f :

x		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
x^2-x+1	$+$		$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\text{sgn}(f)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

- candidats (diviseurs de 4) : $\pm 1\,;\pm 2\,;\pm 4$
  $f(1) \neq 0 \iff f(x)$ n'est pas divisible par $x-1$
  $f(-1) = 0 \iff f(x)$ est divisible par $x+1$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + 4x + 4 \quad ; \quad r = 0$$

- Factorisation de $f(x)$:

$$\begin{array}{ll} x^3 + 5x^2 + 8x + 4 & \mid \text{ Horner} \\ \iff (x+1)(x^2 + 4x + 4) & \mid \ A^2 + 2AB + B^2 = ... \\ \iff (x+1)(x+2)^2 & \end{array}$$

- $Z_f = \{-2\,;-1\}$

- Tableau de signes de f :

x		-2		-1	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$\mathrm{sgn}(f)$	$-$	0	$-$	0	$+$

d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

- candidats (diviseurs de 1) : ± 1
  $f(1) \neq 0 \iff f(x)$ n'est pas divisible par $x-1$
  $f(-1) = 0 \iff f(x)$ est divisible par $x+1$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + 2x + 1 \quad ; \quad r = 0$$

- Factorisation de $f(x)$:

$$\begin{array}{ll} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 & \mid \text{ Horner} \\ \iff (x+1)(x^2 + 2x + 1) & \mid \ A^2 + 2AB + B^2 = ... \\ \iff (x+1)(x+1)^2 = (x+1)^3 & \end{array}$$

- $Z_f = \{\,-1\,\}$

- Tableau de signes de f :

x		-1	
$\mathrm{sgn}(f)$	$-$	0	$+$

e) $f(x) = x(x+2)^2 \cdot (2-x^2) \cdot (x^2-1) \cdot (3-2x)$

- Fin de la factorisation de $f(x)$:

$$\begin{array}{rlr} & x(x+2)^2 \cdot (2-x^2) \cdot (x^2-1) \cdot (3-2x) & \quad \mid \quad A^2 - B^2 = ... \\ \Longleftrightarrow & x(x+2)^2 \cdot (\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x) \cdot (x+1)(x-1) \cdot (3-2x) & \end{array}$$

- $Z_f = \{-2\,;-\sqrt{2}\,;-1\,;0\,;1\,;\sqrt{2}\,;3/2\}$

- Tableau de signes de f :

x		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$3/2$	
x	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$\sqrt{2}+x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$\sqrt{2}-x$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3-2x$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\text{sgn}(f)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$