Exercice 5.

a) $p(x) = x^3 - 7x + 6$

- candidats (diviseurs de 6) : $\pm 1\,; \pm 2\,; \pm 3\,; \pm 6$
- $p(1) = 1 - 7 + 6 = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 1$
- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + x - 6 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{array}{rll} & x^3 - 7x + 6 = 0 & \mid \ \text{Horner} \\ \iff & (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 & \mid \ \text{méthode somme-produit} \\ \iff & (x-1)(x+3)(x-2) = 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{-3\,; 1\,; 2\}}$$

b) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

- candidats (diviseurs de 2) : $\pm 1\,; \pm 2$
- $p(1) = 1 + 3 + 3 + 2 = 9 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) = -1 + 3 - 3 + 2 = 1 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  $p(2) = 8 + 12 + 6 + 2 = 28 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 2$
  $p(-2) = -8 + 12 - 6 + 2 = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x + 2$
- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & & -2 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{array}{rll} & x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0 & \mid \ \text{Horner} \\ \iff & (x+2)(x^2 + x + 1) = 0 & \mid \ \Delta = -3 < 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{-2\}}$$

c) $p(x) = 8x^3 - 4x + 1$

- candidats (diviseurs de 1) : ± 1

- $p(1) = 8 - 4 + 1 = 5 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) = -8 + 4 + 1 = -3 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  Théorème 3b) p.75 : $p(1/2) = 1 - 2 + 1 = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - \dfrac{1}{2}$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 8 & 0 & -4 & 1 \\ \frac{1}{2} & & 4 & 2 & -1 \\ \hline & 8 & 4 & -2 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = 8x^2 + 4x - 2 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} & 8x^3 - 4x + 1 = 0 && \mid \text{ Horner} \\ \iff & (x - 1/2)(8x^2 + 4x - 2) = 0 && \mid \text{ mise en évidence} \\ \iff & 2(x - 1/2)(4x^2 + 2x - 1) = 0 && \mid \ \Delta = 20 > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \ ; \ x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{5})}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{1}{2} \ ; \ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right\}}$$

d) $p(x) = 2x^3 - 9x^2 - 2x + 24$

- candidats (diviseurs de 24) : $\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 4 ; \pm 6 ; \pm 8 ; \pm 12 ; \pm 24$

- $p(1) = 2 - 9 - 2 + 24 = 15 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) = -2 - 9 + 2 + 24 = 15 \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  $p(2) = 16 - 36 - 4 + 24 = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 2$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -9 & -2 & 24 \\ 2 & & 4 & -10 & -24 \\ \hline & 2 & -5 & -12 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = 2x^2 - 5x - 12 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} & 2x^3 - 9x^2 - 2x + 24 = 0 && \mid \text{ Horner} \\ \iff & (x - 2)(2x^2 - 5x - 12) = 0 && \mid \text{ méthode tâtonnement} \\ \iff & (x - 2)(2x + 3)(x - 4) = 0 && \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{-3/2 \, ; 2 \, ; 4\}}$$