

Exercice 34.

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

- candidats (diviseurs de 18) : $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18$

$$f(1) \neq 0 \iff f(x) \text{ n'est pas divisible par } x - 1$$

$$f(-1) = 0 \iff f(x) \text{ est divisible par } x + 1$$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -11 & 9 & 18 \\ -1 & & -1 & & 2 & 9 & -18 \\ \hline & 1 & -2 & -9 & 18 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18 \quad ; \quad r = 0$$

- Fin de la factorisation de $f(x)$:

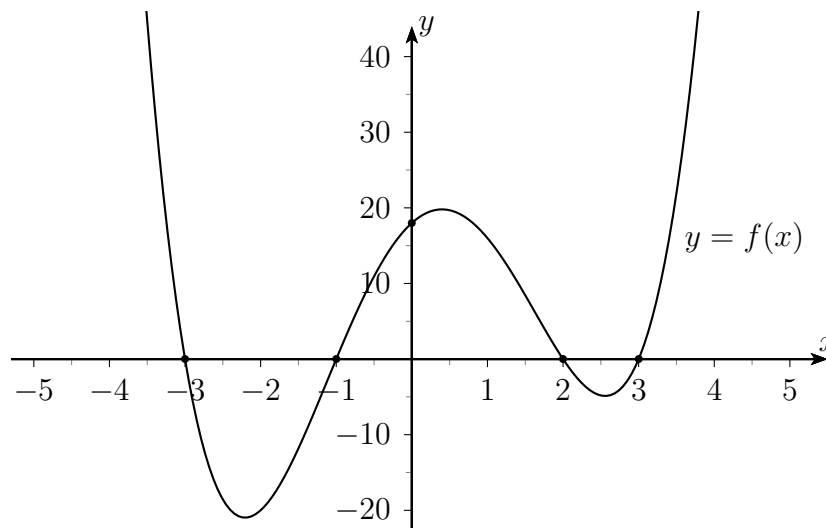
$$\begin{array}{lcl} x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 & | & \text{Horner} \\ \iff (x+1)(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) & | & \text{groupements} \\ \iff (x+1)[x^2(x-2) - 9(x-2)] & | & \\ \iff (x+1)((x-2)(x^2 - 9)) & | & A^2 - B^2 = \dots \\ \iff (x+1)(x-2)(x+3)(x-3) \end{array}$$

- $Z_f = \{-3; -1; 2; 3\}$

- Tableau de signes de f :

x		-3	-1	2	3	
$x+1$	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-		-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+
$x-3$	-	-		-	-	0
$\text{sgn}(f)$	+	0	-	0	+	0

- Graphe de f :



b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

- candidats (diviseurs de 1) : ± 1

$$f(1) = 0 \iff f(x) \text{ est divisible par } x - 1$$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \quad ; \quad r = 0$$

- $q(1) = 0 \iff q(x)$ est divisible par $x - 1$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & 1 & -3 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

$$t(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

- Factorisation de $f(x)$:

$$\begin{aligned} & x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 & | & \text{Horner} \\ \iff & (x - 1)(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) & | & \text{Horner} \\ \iff & (x - 1)(x - 1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = (x - 1)^2(x - 1)^3 = (x - 1)^5 \end{aligned}$$

- $Z_f = \{1\}$

- Tableau de signes de f :

x	1
$\text{sgn}(f)$	- 0 +

- Graphe de f :

