Exercice 33.

a) $p(x) = 6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(6x^3 + 19x^2 + x - 6)$

- candidats (diviseurs de 6) : $\pm 1\,;\pm 2\,;\pm 3\,;\pm 6$

- $p(1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x-1$
  $p(-1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x+1$
  $p(2) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x-2$
  $p(-2) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x+2$
  $p(3) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x-3$
  $p(-3) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x+3$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 6 & 19 & 1 & -6 \\ -3 & & -18 & -3 & 6 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = 6x^2 + x - 2 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} & 6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = 0 && \mid \text{ mise en évidence} \\ \iff & x^2(6x^3 + 19x^2 + x - 6) = 0 && \mid \text{ Horner} \\ \iff & x^2(x+3)(6x^2 + x - 2) = 0 && \mid \text{ méthode tâtonnement} \\ \iff & x^2(x+3)(3x+2)(2x-1) = 0 && \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left\{-3\,;-\frac{2}{3}\,;0\,;\frac{1}{2}\right\}}$$

b) $p(x) = 6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1$

- candidats (diviseurs de 1) : ± 1
- $p(1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  Théorème 3b) p.75 : $p(1/3) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - \dfrac{1}{3}$
- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 6 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & & 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 6 & 3 & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = 6x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} & 6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1 = 0 && | \text{ Horner} \\ \iff & (x - 1/3)(6x^3 + 3x^2 + 6x + 3) = 0 && | \text{ mise en évidence} \\ \iff & 3(x - 1/3)(2x^3 + x^2 + 2x + 1) = 0 && | \text{ groupements} \\ \iff & 3[x - 1/3][x^2(2x + 1) + (2x + 1)] = 0 \\ \iff & 3(x - 1/3)(2x + 1)(x^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left\{ -\frac{1}{2} \, ; \, \frac{1}{3} \right\}}$$

c) $p(x) = 3x^4 + 11x^3 + 9x^2 + 2x = x(3x^3 + 11x^2 + 9x + 2)$

- candidats (diviseurs de 2) : $\pm 1 \,; \pm 2$

- $p(1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 1$
  $p(-1) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 1$
  $p(2) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x - 2$
  $p(-2) \neq 0 \iff p(x)$ n'est pas divisible par $x + 2$
  Théorème 3b) p.75 : $p(-2/3) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x + \dfrac{2}{3}$

- schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & 11 & 9 & 2 \\
-\frac{2}{3} & & -2 & -6 & -2 \\
\hline
 & 3 & 9 & 3 & 0
\end{array}$$

$$q(x) = 3x^2 + 9x + 3 \quad ; \quad r = 0$$

- résolution de l'équation :

$$\begin{array}{rll}
 & 3x^4 + 11x^3 + 9x^2 + 2x = 0 & | \text{ mise en évidence} \\
\iff & x(3x^3 + 11x^2 + 9x + 2) = 0 & | \text{ Horner} \\
\iff & x(x + 2/3)(3x^2 + 9x + 3) = 0 & | \text{ mise en évidence} \\
\iff & 3x(x + 2/3)(x^2 + 3x + 1) = 0 & | \ \Delta = 5 > 0 \\
\Rightarrow & x_1 = 0 \,; x_2 = -\dfrac{2}{3} \,;\ x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left\{ -\frac{2}{3} \,; 0 \,; \ \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}}$$