

Exercice 26.

• $p(x)$ est un polynôme de degré 4.

• $p(0) = 0 \iff p(x)$ est divisible par x

• $p(x)$ est divisible par $x - 3$

• $2 \in Z_p \iff p(2) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 2$

$\Rightarrow p_1(x) = k \cdot x^2(x-3)(x-2)$ ou $p_2(x) = k \cdot x(x-3)^2(x-2)$ ou $p_3(x) = k \cdot x(x-3)(x-2)^2$

• $p_1(-3) = -630 \iff k_1 \cdot (-3)^2(-3-3)(-3-2) = -630 \iff 270k_1 = -630$

$$\iff k_1 = -\frac{630}{270} = -\frac{7}{3} \Rightarrow \boxed{p_1(x) = -\frac{7}{3}x^2(x-3)(x-2)}$$

• $p_2(-3) = -630 \iff k_2 \cdot (-3)(-3-3)^2(-3-2) = -630 \iff 540k_2 = -630$

$$\iff k_2 = -\frac{630}{540} = -\frac{7}{6} \Rightarrow \boxed{p_2(x) = -\frac{7}{6}x(x-3)^2(x-2)}$$

• $p_3(-3) = -630 \iff k_3 \cdot (-3)(-3-3)(-3-2)^2 = -630 \iff 450k_3 = -630$

$$\iff k_3 = -\frac{630}{450} = -\frac{7}{5} \Rightarrow \boxed{p_3(x) = -\frac{7}{5}x(x-3)(x-2)^2}$$

Exercice 27.

• $p(x)$ est un polynôme de degré 3.

• $p(x)$ est divisible par $x - 1$

• $-2 \in Z_p \iff p(-2) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x + 2$

$\Rightarrow p(x) = (ax + b)(x - 1)(x + 2)$

• $p(0) = 14 \iff b \cdot (0 - 1)(0 + 2) = 14 \iff -2b = 14 \iff b = -7$

• $p(2) = -12 \iff (2a - 7) \cdot (2 - 1)(2 + 2) = -12 \iff$

$\iff 8a - 28 = -12 \iff 8a = 16 \iff a = 2$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = (2x - 7)(x - 1)(x + 2)}$$

Exercice 28.

- $p(x)$ est un polynôme de degré 4.
- $p(0) = 0 \iff p(x)$ est divisible par x
- $p(x)$ est divisible par $x - 2$
- $3 \in Z_p \iff p(3) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 3$

$$\Rightarrow p(x) = x(ax + b)(x - 2)(x - 3)$$

$$\bullet p(-1) = -24 \iff (-1)(-a + b)(-1 - 2)(-1 - 3) = -24 \iff$$

$$\iff 12a - 12b = -24 \iff a - b = -2$$

$$\bullet p(1) = 16 \iff 1(a + b)(1 - 2)(1 - 3) = 16 \iff 2a + 2b = 16 \iff a + b = 8$$

- On va résoudre le système suivant par substitution :

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ a + b = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a - (8 - a) = -2 \\ b = 8 - a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a - 8 = -2 \iff 2a = 6 \iff a = 3$$

$$\text{et } b = 8 - 3 = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = x(3x + 5)(x - 2)(x - 3)}$$