

Exercice 20.

- $p(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$; $d(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$
- $Z_d = \{2; 3\}$
- $p(2) = 32 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + a \cdot 2 + b = 0 \iff 2a + b = -104$
- $p(3) = 243 + 2 \cdot 81 + 3 \cdot 27 + 4 \cdot 9 + a \cdot 3 + b = 0 \iff 3a + b = -522$
- On va résoudre le système suivant par substitution :

$$\begin{cases} 2a + b = -104 \\ 3a + b = -522 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + (-3a - 522) = -104 \\ b = -3a - 522 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a - 3a - 522 = -104 \iff -a = 418 \iff a = -418$$

$$\text{et } b = (-3) \cdot (-418) - 522 = 732$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -418 \text{ et } b = 732}$$

Exercice 23.

- $p(x)$ est un polynôme de degré 4.
 - $-2 \in Z_p \iff p(-2) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x + 2$
 - $p(x)$ est divisible par $x + 1$
 - $p(x)$ est divisible par x
 - $p(2) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 2$
- $$\Rightarrow p(x) = k \cdot x(x + 2)(x + 1)(x - 2)$$
- $p(3) = 180 \iff k \cdot 3(3 + 2)(3 + 1)(3 - 2) = 180 \iff 60k = 180 \iff k = 3$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = 3x(x + 2)(x + 1)(x - 2)}$$

Exercice 24.

- $p(x)$ est un polynôme de degré 5.
- $p(0) = 0 \iff p(x)$ est divisible par x
- $2 \in Z_p \iff p(2) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 2$
- $p(x)$ est divisible par $x + 2$
- $p(1) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 1$
- $p(x)$ est divisible par $x - 3$

$$\Rightarrow p(x) = k \cdot x(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

$$\begin{aligned} \bullet p(-3) = 720 &\iff k \cdot (-3)(-3 - 2)(-3 + 2)(-3 - 1)(-3 - 3) = 720 \iff \\ &\iff -360k = 720 \iff k = -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = -2x(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x - 3)}$$

Exercice 25.

- $p(x)$ est un polynôme de degré 5.
- $p(0) = 0 \iff p(x)$ est divisible par x
- $p(1) = 0 \iff p(x)$ est divisible par $x - 1$
- $p(x)$ est divisible par $x + 1$
- $p(x)$ est divisible par $x + 2$
- $p(x)$ est divisible par $x - 2$

$$\Rightarrow p(x) = k \cdot x(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 2)$$

$$\bullet p(3) = 360 \iff k \cdot 3(3 - 1)(3 + 1)(3 + 2)(3 - 2) = 360 \iff 120k = 360 \iff k = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = 3x(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 2)}$$