Exercice 11.

a) • $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad ; \quad d(x) = x - 1$

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$q(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \quad ; \quad r(x) = 5$$

• division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & +x^2 & +x+1 & & x-1 \\ \cline{6-6} -x^4 & +x^3 & & & & x^3+2x^2+3x+4 \\ \cline{1-2} & 2x^3 & +x^2 & & & \\ & -2x^3 & +2x^2 & & & \\ \cline{2-3} & & 3x^2 & +x & & \\ & & -3x^2 & +3x & & \\ \cline{3-4} & & & 4x & +1 & \\ & & & -4x & +4 & \\ \cline{4-5} & & & & 5 & \end{array}$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{p(x) = (x-1)(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) + 5}$

b) • $p(x) = x^5 + 1 \quad ; \quad d(x) = x + 1$

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \quad ; \quad r(x) = 0$$

• division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} x^5 & & & & & & +1 & x+1 \\ \cline{8-8} -x^5 & -x^4 & & & & & & x^4-x^3+x^2-x+1 \\ \cline{1-2} & -x^4 & & & & & & \\ & x^4 & +x^3 & & & & & \\ \cline{2-3} & & x^3 & & & & & \\ & & -x^3 & -x^2 & & & & \\ \cline{3-4} & & & -x^2 & & & & \\ & & & x^2 & +x & & & \\ \cline{4-5} & & & & x & +1 & & \\ & & & & -x & -1 & & \\ \cline{5-6} & & & & & 0 & & \end{array}$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{p(x) = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}$

c) • $p(x) = 3x^5 - 8x^4 + 7x^3 + x^2 - 5x + 6 \quad ; \quad d(x) = x + 2$

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 3 & -8 & 7 & 1 & -5 & 6 \\ -2 & & -6 & 28 & -70 & 138 & -266 \\ \hline & 3 & -14 & 35 & -69 & 133 & -260 \end{array}$$

$$q(x) = 3x^4 - 14x^3 + 35x^2 - 69x + 133 \quad ; \quad r(x) = -260$$

• division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 3x^5 & -8x^4 & +7x^3 & +x^2 & -5x & +6 & x+2 \\ \cline{7-7} -3x^5 & -6x^4 & & & & & 3x^4 - 14x^3 + 35x^2 - 69x + 133 \\ \cline{1-2} & -14x^4 & +7x^3 & & & & \\ & 14x^4 & +28x^3 & & & & \\ \cline{2-3} & & 35x^3 & +x^2 & & & \\ & & -35x^3 & -70x^2 & & & \\ \cline{3-4} & & & -69x^2 & -5x & & \\ & & & 69x^2 & +138x & & \\ \cline{4-5} & & & & 133x & +6 & \\ & & & & -133x & -266 & \\ \cline{5-6} & & & & & -260 & \end{array}$$

• Egalité fondamentale : $\boxed{p(x) = (x+2)(3x^4 - 14x^3 + 35x^2 - 69x + 133) - 260}$

Exercice 12.

• schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrrr|r} & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \\ 1 & & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 & 0 \end{array}$$

$$q(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 \quad ; \quad r(x) = 0$$

• E.F. : $\boxed{x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 = (x-1)(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)}$

• Le reste vaut $0 \Rightarrow x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$ est divisible par $x - 1$.

Exercice 13.

a) • $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 \quad ; \quad d(x) = x - 2$

• schéma de Horner :

	1	-3	2	-1	2
2		2	-2	0	-2
	1	-1	0	-1	0

$$q(x) = x^3 - x^2 - 1 \quad ; \quad r(x) = 0$$

• E.F. : $f(x) = (x-2)(x^3 - x^2 - 1)$

• $\boxed{f(2) = (2-2) \cdot q(2) = 0}$

b) • $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^2 + 2 \quad ; \quad d(x) = x + 2$

• schéma de Horner :

	1	-3	2	0	-1	0	2
-2		-2	10	-24	48	-94	188
	1	-5	12	-24	47	-94	190

$$q(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 47x - 94 \quad ; \quad r(x) = 190$$

• E.F. : $f(x) = (x+2)(x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 47x - 94) + 190$

• $\boxed{f(-2) = (-2+2) \cdot q(-2) + 190 = 190}$

c) • $f(x) = 6x^7 - 3x^6 - 24x^5 + 4x^4 + x^3 - 7x^2 + 3x \quad ; \quad d(x) = x - 3$

• schéma de Horner :

	6	-3	-24	4	1	-7	3	0
3		18	45	63	201	606	1797	5400
	6	15	21	67	202	599	1800	5400

$$q(x) = 6x^6 + 15x^5 + 21x^4 + 67x^3 + 202x^2 + 599x + 1'800 \quad ; \quad r(x) = 5'400$$

• E.F. : $f(x) = (x-3) \cdot q(x) + 5'400$

• $\boxed{f(3) = (3-3) \cdot q(3) + 5'400 = 5'400}$

d) • $f(x) = 3x^3 - x^2 + x + 9 \quad ; \quad d(x) = x + 2$

• schéma de Horner :

	3	-1	1	9
-2		-6	14	-30
	3	-7	15	-21

$$q(x) = 3x^2 - 7x + 15 \quad ; \quad r(x) = -21$$

• E.F. : $f(x) = (x+2)(3x^2 - 7x + 15) - 21$

• $\boxed{f(-2) = (-2+2) \cdot q(-2) - 21 = -21}$