Exercice 7.

a) • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

• $||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{BC}|| = ||\overrightarrow{CD}|| = ||\overrightarrow{AD}|| = \sqrt{49}\,[\text{u}] = 7\,[\text{u}]$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{BD}|| = \sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = 7\sqrt{2}\,[\text{u}]$

$\Rightarrow$ $ABCD$ est un quadrilatère avec 4 côtés isométriques et les diagonales isométriques, donc c'est un losange particulier : un carré.

b) • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

• $||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{BC}|| = ||\overrightarrow{CD}|| = ||\overrightarrow{AD}|| = \sqrt{66}\,[\text{u}]$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{30}\,[\text{u}]$; $||\overrightarrow{BD}|| = \sqrt{234} = 3\sqrt{26}\,[\text{u}]$

$\Rightarrow$ $ABCD$ est un quadrilatère avec 4 côtés isométriques et les diagonales non isométriques, donc c'est un losange.

Exercice 8.

• On pose $P(p_1; p_2)$

• $\overrightarrow{AB_u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||} = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/15 \\ 12/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AP} = \pm 3 \cdot \overrightarrow{AB_u} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_1 - 4 \\ p_2 + 1 \end{pmatrix} = \pm 3 \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -9/5 \\ 12/5 \end{pmatrix}$

$+ \Rightarrow \boxed{P_1\left(\dfrac{11}{5} ; \dfrac{7}{5}\right)}$

$- \Rightarrow \boxed{P_2\left(\dfrac{29}{5} ; -\dfrac{17}{5}\right)}$

Exercice 9.

• On cherche $k \in \mathbb{R}$ tel que $||\overrightarrow{a} + k \cdot \overrightarrow{b}|| = \sqrt{82}$ [u]

• $\overrightarrow{a} + k \cdot \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2k \\ 3+4k \end{pmatrix}$

• $||\overrightarrow{a} + k \cdot \overrightarrow{b}|| = \sqrt{(2-2k)^2 + (3+4k)^2} = \sqrt{4 - 8k + 4k^2 + 9 + 24k + 16k^2} =$

$= \sqrt{20k^2 + 16k + 13} = \sqrt{82} \iff 20k^2 + 16k + 13 = 82 \iff 20k^2 + 16k - 69 = 0 \iff$

$\iff (10k + 23)(2k - 3) = 0 \iff \boxed{k_1 = -\frac{23}{10} \text{ ou } k_2 = \frac{3}{2}}$

Exercice 10.

• $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}$

• $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ [u]

• $||\overrightarrow{AC}|| = 1$ [u]

• $||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{181}$ [u]