Exercice 39.

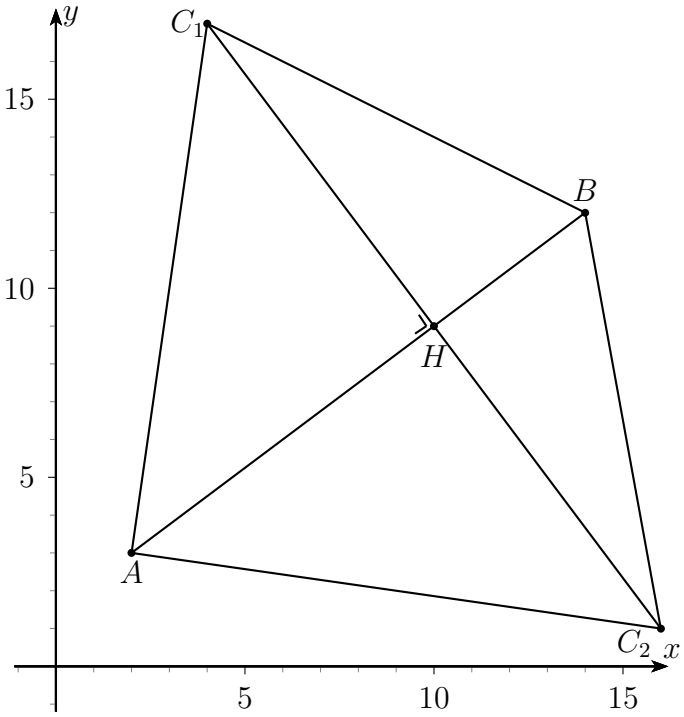
• $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

a) A, B et H sont alignés $\overset{\text{ex.59 p.40}}{\Longleftrightarrow}$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires $\overset{\text{p.22}}{\Longleftrightarrow}$ $\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AH}) = 0$

$\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AH}) = \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 12 \cdot 6 - 9 \cdot 8 = 72 - 72 = 0 \iff$

$\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires $\iff$ A, B et H sont alignés

b) Figure d'étude :



• $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{225} = 15\,[\text{u}]$

• $\sigma(\Delta ABC) = \dfrac{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{CH}||}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot ||\overrightarrow{CH}|| = 75\,[\text{u}^2] \Rightarrow ||\overrightarrow{CH}|| = 10\,[\text{u}]$

• On pose $C(c_1; c_2)$

• $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}_u = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||} = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_\perp} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

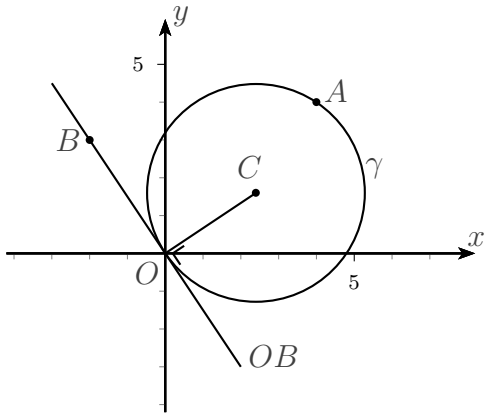
• $\overrightarrow{HC} = \pm 10 \cdot \overrightarrow{v_\perp} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 - 10 \\ c_2 - 9 \end{pmatrix} = \pm 10 \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$+ \Rightarrow \boxed{C_1\,(4\,;17)}$

$- \Rightarrow \boxed{C_2\,(16\,;1)}$

Exercice 40.

Figure d'étude :



$*$ On pose $C(x;y)$

$* \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$

$* r = ||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{OC}|| \iff$

$\iff \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \overset{()^2}{\Rightarrow}$

$\overset{()^2}{\Rightarrow} (x-4)^2+(y-4)^2 = x^2+y^2 \iff$

$\iff x^2-8x+16+y^2-8y+16 = x^2+y^2 \iff$

$\iff 8x+8y-32=0 \iff x+y-4=0$

$* \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC} \iff \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC} = 0 \iff$

$\iff \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff -2x+3y=0$

$*$ on va résoudre le système suivant par substitution :

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ -2x+3y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y+4 \\ -2(-y+4)+3y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y-8+3y=0 \iff 5y=8 \iff y=8/5$$

$$\text{et } x=12/5 \Rightarrow \boxed{C(12/5\,;8/5)}$$

$* r = ||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-8/5)^2+(-12/5)^2} = \sqrt{208/25} = \dfrac{4\sqrt{13}}{5}$ [u]

ou autre méthode ...