Exercice 1.

Il s'agit de montrer que la norme de chacun de ces vecteurs vaut 1.

Exercice 2.

a) sans corrigé.

b) • On cherche un vecteur $\overrightarrow{v_u}$ tel que $\overrightarrow{v_u} = k \cdot \overrightarrow{a}$ et $||\overrightarrow{v_u}|| = 1\,[\text{u}]$

• Méthode 1 :

$$||\overrightarrow{v_u}|| = ||k \cdot \overrightarrow{a}|| = ||k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}|| = ||\begin{pmatrix} 3k \\ 4k \end{pmatrix}|| = \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = \sqrt{25k^2} = 1 \iff$$

$$\iff 25k^2 = 1 \iff 25k^2 - 1 = 0 \iff (5k+1)(5k-1) = 0 \iff k_1 = -\frac{1}{5} \text{ ou } k_2 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_u} = \pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

• Méthode 2 :

$$\overrightarrow{a_u} = \frac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_u} = \pm\overrightarrow{a_u} \iff \overrightarrow{v_u} = \pm\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \iff \boxed{\overrightarrow{v_u} = \pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Idem avec les autres vecteurs.

Exercice 3.

a) sans corrigé.

b) • On cherche un vecteur $\overrightarrow{v_u}$ tel que $\overrightarrow{v_u} = k \cdot \overrightarrow{a}$ et $||\overrightarrow{v_u}|| = 1\,[\text{u}]$

• Méthode 1 :

$$||\overrightarrow{v_u}|| = ||k \cdot \overrightarrow{a}|| = ||k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}|| = ||\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -2k \end{pmatrix}|| = \sqrt{k^2 + (2k)^2 + (-2k)^2} = \sqrt{9k^2} = 1$$

$$\iff 9k^2 = 1 \iff 9k^2 - 1 = 0 \iff (3k+1)(3k-1) = 0 \iff k_1 = -\frac{1}{3} \text{ ou } k_2 = \frac{1}{3}$$

On veut un vecteur de sens contraire, on ne garde que $k_1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_u} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}$

• Méthode 2 :

$$\overrightarrow{a_u} = \frac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_u} = -\overrightarrow{a_u} \iff \overrightarrow{v_u} = -\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \iff \boxed{\overrightarrow{v_u} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Idem avec les autres vecteurs.

Exercice 4.

a) • On cherche un vecteur $\overrightarrow{v_u}$ tel que $\overrightarrow{v_u} = k \cdot \overrightarrow{a}$ et $||\overrightarrow{v_u}|| = 1\,[\mathrm{u}]$

• Méthode 1 :

$$||\overrightarrow{v_u}|| = ||k \cdot \overrightarrow{a}|| = ||k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}|| = ||\begin{pmatrix} 2k \\ -7k \end{pmatrix}|| = \sqrt{(2k)^2 + (-7k)^2} = \sqrt{53k^2} = 1 \iff$$

$$\iff 53k^2 = 1 \iff 53k^2 - 1 = 0 \iff (\sqrt{53}\,k + 1)(\sqrt{53}\,k - 1) = 0 \iff$$

$$\iff k_1 = -\frac{1}{\sqrt{53}} \text{ ou } k_2 = \frac{1}{\sqrt{53}} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_u} = \pm\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

• Méthode 2 :

$$\overrightarrow{a_u} = \frac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{53}} \\ -\frac{7}{\sqrt{53}} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_u} = \pm\overrightarrow{a_u} \iff \overrightarrow{v_u} = \pm\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{53}} \\ -\frac{7}{\sqrt{53}} \end{pmatrix} \iff \boxed{\overrightarrow{v_u} = \pm\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

b) Idem partie a, mais en multipliant $\frac{1}{\sqrt{53}}$ par 5.

Exercice 5.

a) • On cherche un vecteur $\overrightarrow{v_u}$ tel que $\overrightarrow{v_u} = k \cdot \overrightarrow{a}$ et $||\overrightarrow{v_u}|| = 1\,[\mathrm{u}]$

• Méthode 1 :

$$||\overrightarrow{v_u}|| = ||k \cdot \overrightarrow{a}|| = ||k \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}|| = ||\begin{pmatrix} 14k \\ -8k \\ 8k \end{pmatrix}|| = \sqrt{(14k)^2 + (-8k)^2 + (8k)^2} =$$

$$= \sqrt{324k^2} = 1 \iff 324k^2 = 1 \iff 324k^2 - 1 = 0 \iff (18k+1)(18k-1) = 0 \iff$$

$$\iff k_1 = -\frac{1}{18} \text{ ou } k_2 = \frac{1}{18} \Rightarrow \overrightarrow{v_u} = \pm\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_u} = \pm\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

• Méthode 2 :

$$\overrightarrow{a_u} = \frac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||} = \begin{pmatrix} 14/18 \\ -8/18 \\ 8/18 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_u} = \pm\overrightarrow{a_u} \iff \overrightarrow{v_u} = \pm\begin{pmatrix} 7/9 \\ -4/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} \iff \boxed{\overrightarrow{v_u} = \pm\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

b) Idem partie a, mais en multipliant $\frac{1}{9}$ par 9.

Exercice 6.

La distance entre les points A et $B = \delta(A\,;B) = ||\overrightarrow{AB}||$ (voir théorie p.52)

a) • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 0-(-3) \\ 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

• $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-2)^2+3^2+8^2} = \boxed{\sqrt{77}\,[\mathrm{u}]}$

b) • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix}$

• $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{10^2+(-6)^2+(-15)^2} = \sqrt{361} = \boxed{19\,[\mathrm{u}]}$

c) • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

• $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{5^2+6^2+6^2} = \boxed{\sqrt{97}\,[\mathrm{u}]}$

d) • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

• $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{8^2+(-3)^2+9^2} = \boxed{\sqrt{154}\,[\mathrm{u}]}$