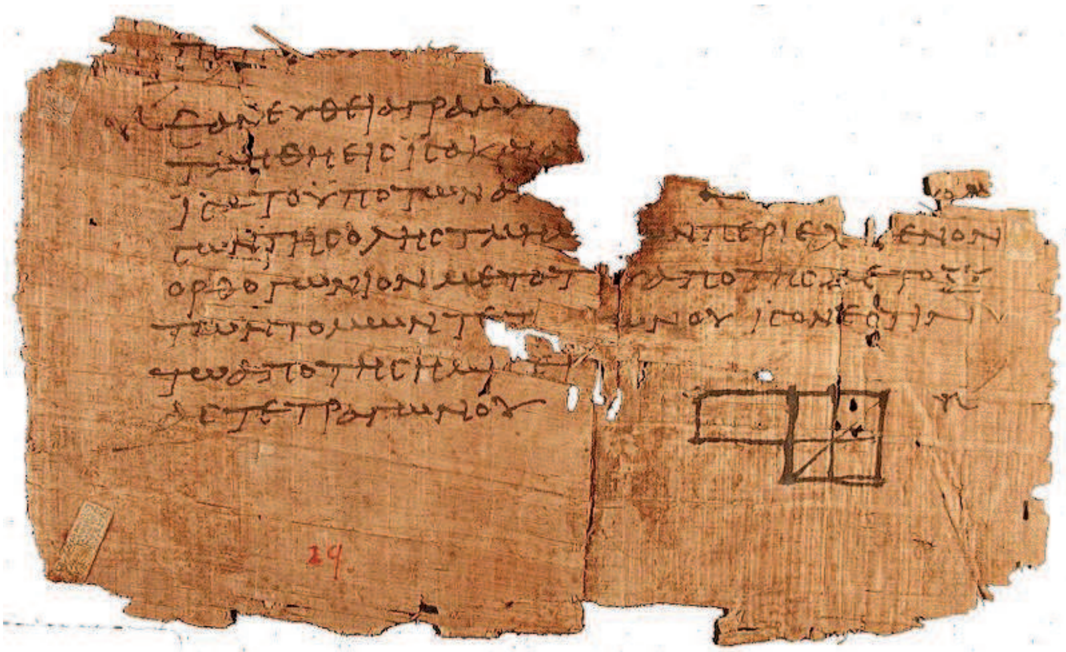
Mathématiques

GEOMETRIE + STATISTIQUES

1$^{\text{ère}}$ année Maturité
niveau standard



GYMNASE DE BURIER

Table des matières

Avant-propos

Cette histoire est une légende urbaine fort sympathique :

J'ai reçu un coup de fil d'un collègue à propos d'un étudiant. Il estimait qu'il devait lui donner un zéro à une question de physique, alors que l'étudiant réclamait un 20. Le professeur et l'étudiant se mirent d'accord pour choisir un arbitre impartial et je fus choisi. Je lus la question de l'examen : "Montrez comment il est possible de déterminer la hauteur d'un building a l'aide d'un baromètre". L'étudiant avait répondu : "On prend le baromètre en haut du building, on lui attache une corde, on le fait glisser jusqu'au sol, ensuite on le remonte et on calcule la longueur de la corde. La longueur de la corde donne la hauteur du building."

L'étudiant avait raison vu qu'il avait répondu juste et complètement à la question. D'un autre côté, je ne pouvais pas lui mettre ses points : dans ce cas, il aurait reçu son grade de physique alors qu'il ne m'avait pas montré de connaissances en physique. J'ai proposé de donner une autre chance à l'étudiant en lui donnant six minutes pour répondre à la question avec l'avertissement que pour la réponse, il devait utiliser ses connaissances en physique. Après cinq minutes, il n'avait encore rien écrit. Je lui ai demandé s'il voulait abandonner, mais il répondit qu'il avait beaucoup de réponses pour ce problème et qu'il cherchait la meilleure d'entre elles. Je me suis excusé de l'avoir interrompu et lui ai demandé de continuer. Dans la minute qui suivit, il se hâta pour me répondre : "On place le baromètre à la hauteur du toit. On le laisse tomber en calculant son temps de chute avec un chronomètre. Ensuite en utilisant la bonne formule connue par tous, on trouve la hauteur du building". À ce moment, j'ai demandé à mon collègue s'il voulait abandonner. Il me répondit par l'affirmative et donna presque 20 à l'étudiant. En quittant son bureau, j'ai rappelé l'étudiant, car il avait dit qu'il avait plusieurs solutions à ce problème. "Hé bien, dit-il, il y a plusieurs façons de calculer la hauteur d'un building avec un baromètre. Par exemple, on le place dehors lorsqu'il y a du soleil. On calcule la hauteur du baromètre, la longueur de son ombre et la longueur de l'ombre du building. Ensuite, avec un simple calcul de proportion, on trouve la hauteur du building."

Bien, lui répondis-je, et les autres ? À quoi l'élève répondit : "Il y a une méthode assez basique que vous allez apprécier. On monte les étages avec un baromètre et en même temps on marque la longueur du baromètre sur le mur. En comptant le nombre de traits, on a la hauteur du building en longueur de baromètre. C'est une méthode très directe. Bien sûr, si vous voulez une méthode plus sophistiquée, vous pouvez pendre le baromètre à une corde, le faire balancer comme un pendule et déterminer la valeur de g au niveau de la rue et au niveau du toit. À partir de la différence de g la hauteur de building peut être calculée. De la même façon, on l'attache à une grande corde et en étant sur le toit, on le laisse descendre jusqu'à peu près le niveau de la rue. On le fait balancer comme un pendule et on calcule la hauteur du building à partir de sa période de balancement."

Finalement, l'élève conclut : "Il y a encore d'autres façons de résoudre ce problème. Probablement la meilleure est d'aller au sous-sol, frapper à la porte du concierge et lui dire : "J'ai pour vous un superbe baromètre si vous me dites quelle est la hauteur du building."

J'ai ensuite demandé à l'étudiant s'il connaissait la réponse que j'attendais. Il a admis que oui, mais qu'il en avait marre du collège et des professeurs qui essayaient de lui apprendre comment il devait penser.

Pour l'anecdote, l'étudiant était Niels Bohr (prix Nobel de Physique en 1923) et l'arbitre Rutherford (prix Nobel de Chimie en 1908).

Dessin ci-dessus de Philippe Geluck

7ème édition, La Tour-de-Peilz, juillet 2022

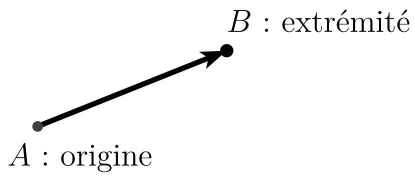
Chapitre 1

Géométrie vectorielle et affine

1.1 Vecteurs du plan et de l'espace

Une **flèche** est un couple de points du plan ou de l'espace.

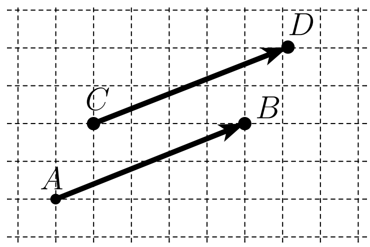
Par exemple, la flèche $(A; B)$ représentée ci-contre est d'origine A et d'extrémité B.



Deux flèches sont dites **équipollentes** s'il existe une translation permettant de passer de l'une des flèches à l'autre flèche.

Autrement dit, deux flèches sont équipollentes si elles ont **même direction**, **même sens** et **même longueur**.

Les flèches $(A; B)$ et $(C; D)$ représentées ci-contre sont équipollentes.



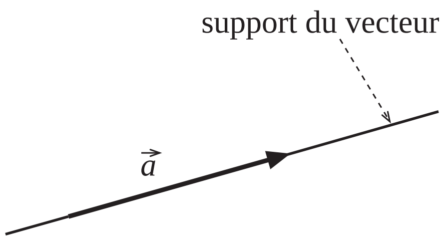
Vecteur (idée...)

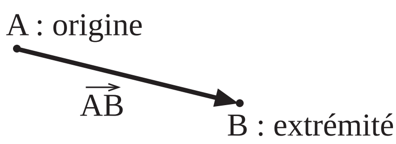
Toutes les flèches équipollentes représentent le même **vecteur**.

Ainsi un **vecteur** est caractérisé par :

- sa direction
- son sens
- sa longueur

Un vecteur se note $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$...
L'ensemble des vecteurs du plan se note V_2.
L'ensemble des vecteurs de l'espace se note V_3.

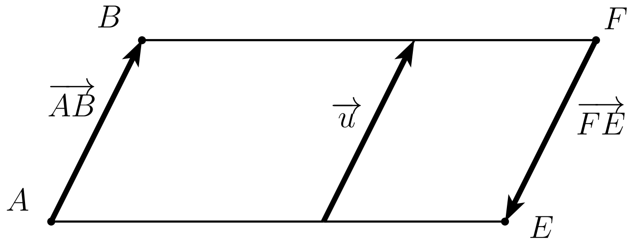




1.1.1 Vecteurs opposés

Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont dits opposés s'ils ont même direction, même longueur, mais sont de sens contraires ; on note $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$$
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{FE}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$$



1.1.2 Vecteur nul

Le **vecteur nul** noté $\overrightarrow{0}$ est le vecteur $\overrightarrow{AA}$ où A est un point quelconque du plan ou de l'espace.

Le vecteur nul n'a pas de direction déterminée.

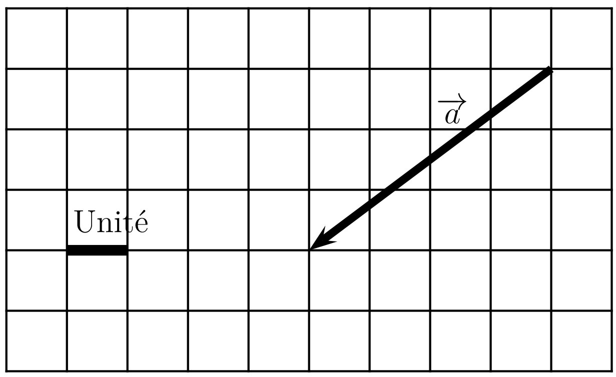
1.1.3 Norme d'un vecteur

La **norme** du vecteur $\overrightarrow{v}$ notée $\|\overrightarrow{v}\|$ est la **longueur** de l'une des flèches qui représente le vecteur $\overrightarrow{v}$.

La norme d'un vecteur est donc un **nombre** réel positif (ou nul).

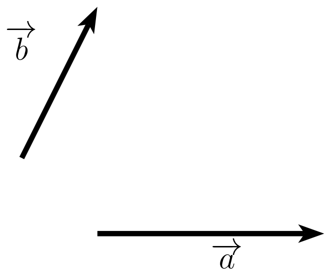
Exemple 1.1.

Dans la représentation ci-contre, on considère 1 carré comme unité.
Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{a}$ représenté.



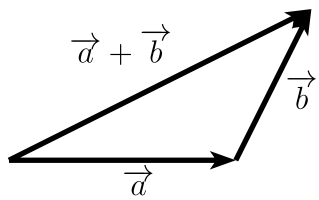
1.2 Addition de vecteurs

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$



Méthode du triangle

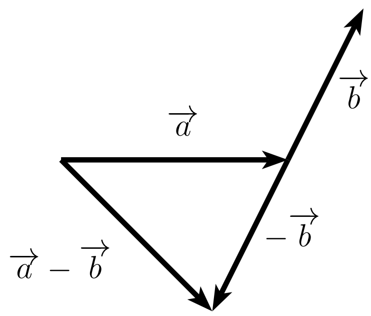
On place l'origine de la flèche qui représente le vecteur $\overrightarrow{b}$ à l'extrémité de la flèche qui représente le vecteur $\overrightarrow{a}$.



1.3 Soustraction de vecteurs

La soustraction du vecteur $\overrightarrow{b}$ au vecteur $\overrightarrow{a}$ est définie par :

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$$

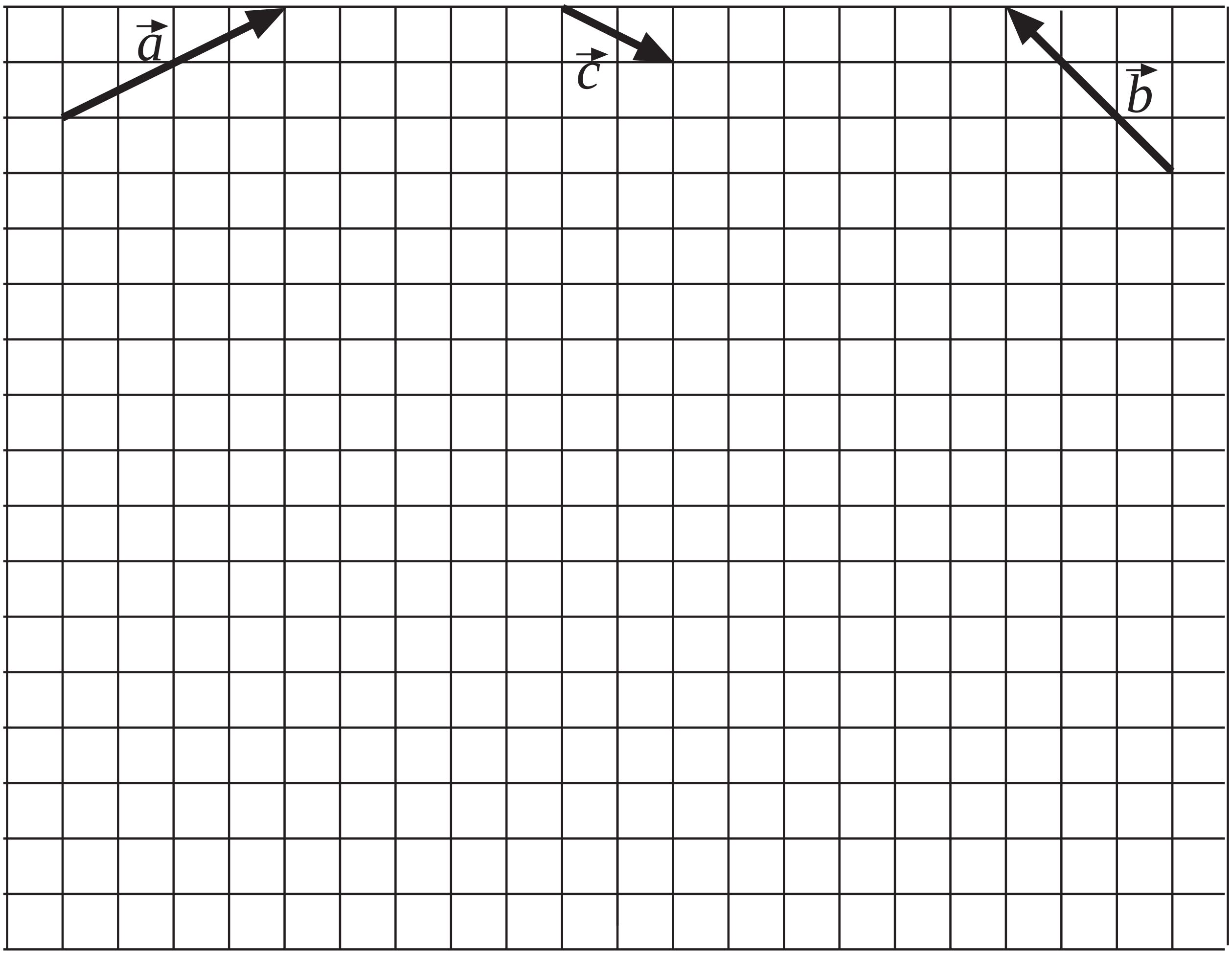


Exemple 1.2.

Constuire sur le dessin ci-dessous :

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}+\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}-\overrightarrow{a},\ \left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c} \text{ et } \overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)$$

Que constate-t-on ?



Propriétés de l'addition et de la soustraction de vecteurs

Si $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ sont trois vecteurs du plan ou de l'espace, on a :

a) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$ (l'addition est **commutative**)

b) $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)$ (l'addition est **associative**)

c) Si $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$ alors $-\overrightarrow{a}=\overrightarrow{BA}$

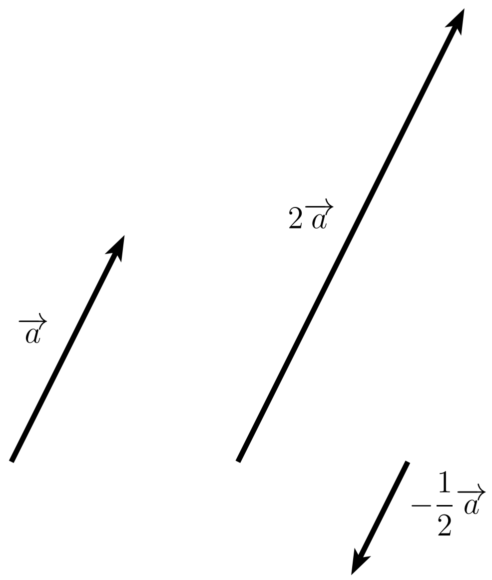
d) La règle des signes est valable : $\overrightarrow{a}-(-\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$

1.4 Produit d'un vecteur par un scalaire

Un **scalaire** est un nombre réel.

Le **produit** $k \cdot \overrightarrow{a}$ est le vecteur

- de même direction que $\overrightarrow{a}$ si $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$
- de norme $\|k \cdot \overrightarrow{a}\| = |k| \cdot \|\overrightarrow{a}\|$
- qui a même sens que $\overrightarrow{a}$ si $k > 0$ et qui est de sens contraire si $k < 0$
- qui est le vecteur $\overrightarrow{0}$ si $k = 0$.



Exemple 1.3.

Soient les points A, B, C et D de la droite graduée suivante :

Compléter afin d'obtenir des égalités :

$\overrightarrow{AB} =$ ....$\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DC} =$ ....$\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AC} =$ ....$\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{DB} =$ ....$\overrightarrow{AB}$

1.5 Combinaisons linéaires de vecteurs

- $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ s'il existe $k, m \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}$.
- $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$, s'il existe $k, m, n \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}$.

Remarque 1.1.

On peut simplifier une combinaison linéaire de vecteurs en suivant des règles identiques à celles du calcul littéral.

Exemple 1.4.

Simplifier les combinaisons linéaires suivantes :

a) $\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) - (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$

b) $\overrightarrow{w} = 5(3\overrightarrow{a} - 6\overrightarrow{b}) - 3(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$

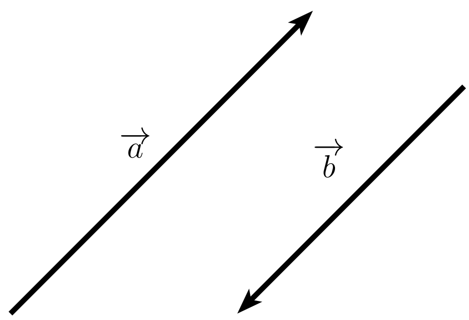
1.6 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont dits **colinéaires** si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

a) $\overrightarrow{a}$ ou $\overrightarrow{b}$ est nul (ou les deux sont nuls)

b) $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ont même direction.

Cette définition est valable dans le plan et dans l'espace.



Théorème 1.1 (*1^er^ critère de colinéarité*)

$\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ colinéaires $\Longleftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}$ avec $\overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}$ ou $\overrightarrow{b} = k \cdot \overrightarrow{a}$

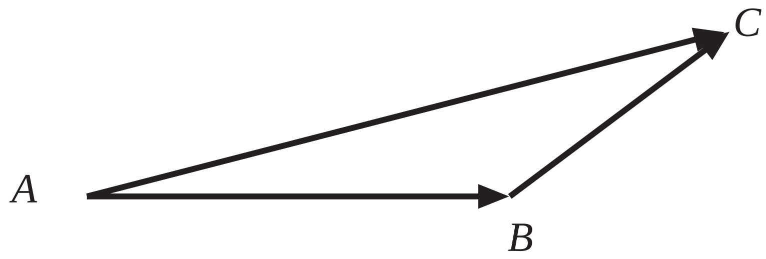
Remarque 1.2.

a) Le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs.

b) Le 1^{er} critère de colinéarité est valable autant dans le plan que dans l'espace.

1.7 Règle de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$



Michel Chasles 1793-1880, mathématicien français...

Utilisation de la règle de Chasles

Elle permet de simplifier des expressions vectorielles.

Exemple 1.5.

a) Soient A, B et C trois points quelconques du plan ou de l'espace. Simplifier

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$$

b) Soient O, A et B trois points quelconques du plan ou de l'espace, ainsi que le point C situé au quart du segment AB depuis A.
Exprimer $\overrightarrow{OC}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

A partir du prochain paragraphe, seule la géométrie plane sera traitée.

1.8 Bases et composantes des vecteurs du plan

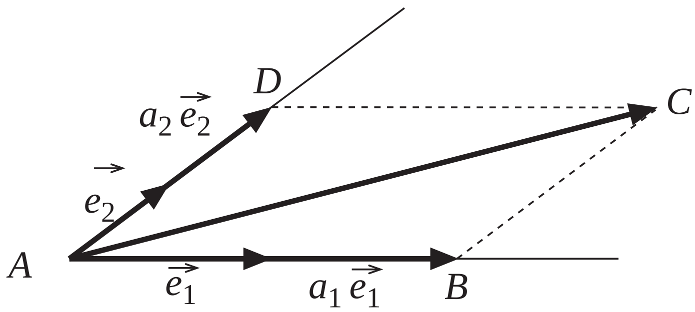
Tout couple $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ de vecteurs non colinéaires du plan V_2 forme une **base des vecteurs du plan**.

Remarque 1.3.
Il s'agit de distinguer la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ de la base $(\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_1})$.

Composantes d'un vecteur relativement à une base

Les composantes de $\overrightarrow{a}$ relativement à la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ sont les deux nombres réels a_1 et a_2 tels que $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$.

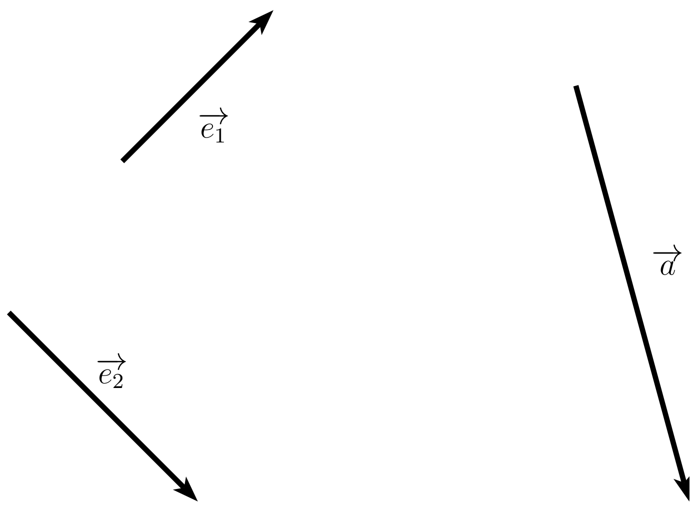
On note $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.



Remarque 1.4.

- a_1 est la **première composante** de $\overrightarrow{a}$
- a_2 est la **deuxième composante** de $\overrightarrow{a}$

Exemple 1.6.
Déterminer graphiquement les composantes du vecteur $\overrightarrow{a}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.



Calculs avec des composantes

a) Les composantes sont uniques

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

b) Addition des vecteurs = Addition des composantes

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

c) Produit d'un vecteur par un scalaire = Produit des composantes par le scalaire

$$k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.7.

Relativement à une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$ dans la base $\mathcal{B}$.

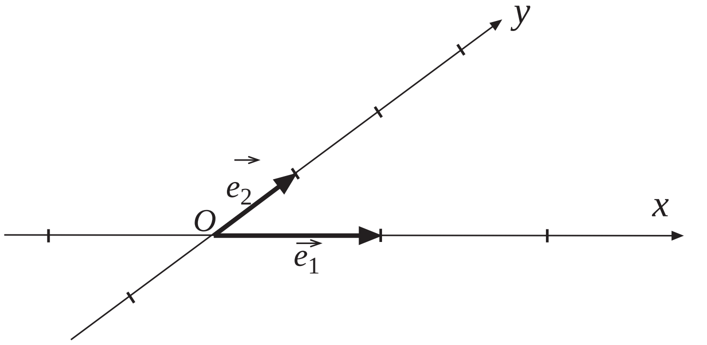
b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

1.9 Repère et coordonnées du plan

Un repère $\mathcal{R}$ du plan est un systèmes d'axes gradués Oxy.

$\mathcal{R}$ est défini par un point O et une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ de vecteurs du plan.

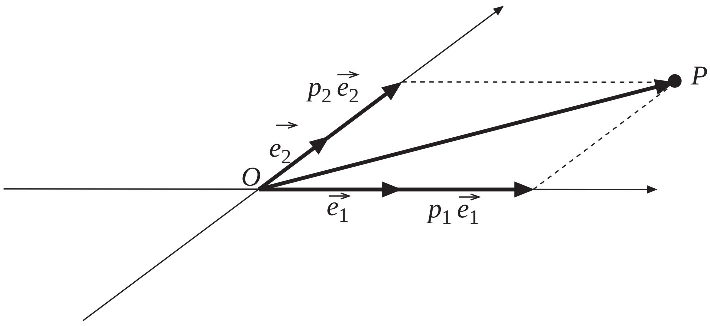
- O est **l'origine** du repère
- $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est la **base associée**
- On note $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.



1.9.1 Coordonnées d'un point du plan

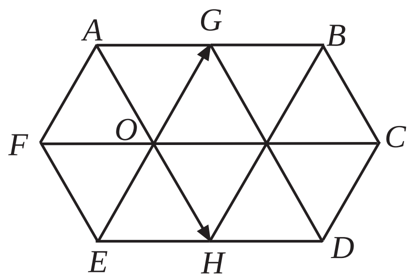
$$P(p_1; p_2) \iff \overrightarrow{OP} = p_1\overrightarrow{e_1} + p_2\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

- p_1 : 1$^{\text{ère}}$ coordonnée ou **abscisse** de P
- p_2 : 2$^{\text{e}}$ coordonnée ou **ordonnée** de P.



Exemple 1.8.

Soit l'hexagone $ABCDEF$ formé de dix triangles équilatéraux juxtaposés comme le représente la figure ci-dessous, ainsi que le repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ avec $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OH}$. Calculer les coordonnées des points F et D.



1.9.2 Calcul des composantes d'un vecteur

Soient $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$ deux points exprimés dans un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

Par la **règle de Chasles**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.9.
Relativement à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, on considère les points :

$$A(5; 5), B(7; -1) \text{ et } C(-2; -3)$$

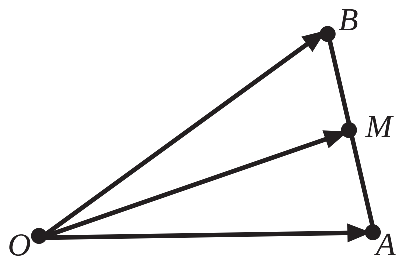
a) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b) Calculer les coordonnés du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.10 Milieu d'un segment

Soit M le milieu d'un segment AB.

a) **Méthode vectorielle** :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$



b) **Méthode analytique** :
Relativement à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, si

$$A(a_1; a_2) \text{ et } B(b_1; b_2)$$

on a

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Exemple 1.10.

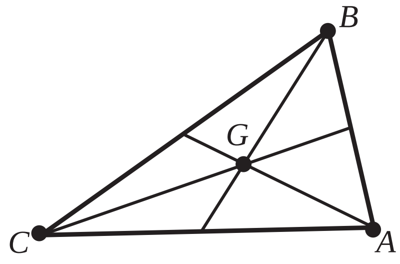
Dans le plan muni d'un repère, calculer les coordonnées du milieu M du segment AB d'extrémités $A(3; -5)$ et $B(-1; 11)$.

1.11 Centre de gravité d'un triangle

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC.

a) **Méthode vectorielle** :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$



b) **Méthode analytique** :
Relativement à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, si

$$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2) \text{ et } C(c_1; c_2)$$

on a

$$G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$$

Exemple 1.11.

Dans le plan muni d'un repère, calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC de sommets $A(3; -5), B(-1; 11)$ et $C(-5; 3)$.

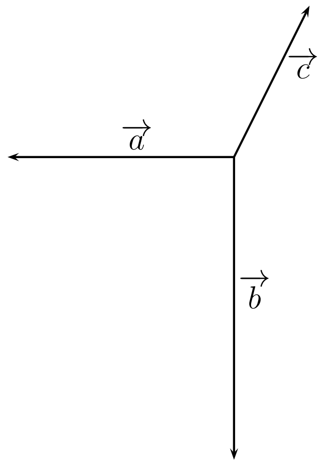
1.12 Exercices

1.1

Représenter un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O. Donner le nombre de vecteurs différents que l'on peut définir à l'aide des lettres de cette figure, ainsi qu'un représentant de chaque vecteur.

1.2

a) Construire la somme des trois vecteurs ci-dessous :

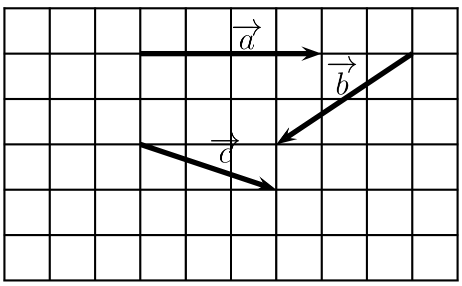


b) Tracer trois vecteurs non nuls et n'ayant pas la même direction mais dont la somme soit le vecteur nul.

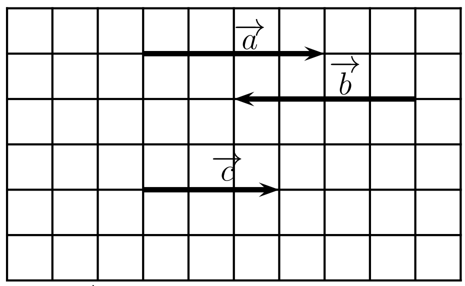
1.3

Dans les deux cas suivants, construire le vecteur demandé.

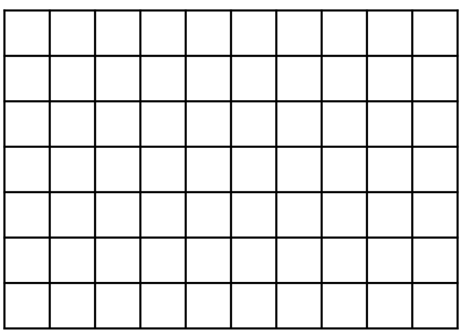
Cas 1

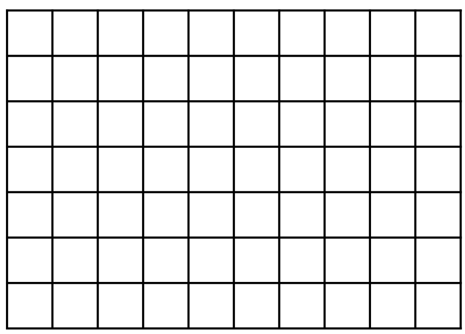


Cas 2

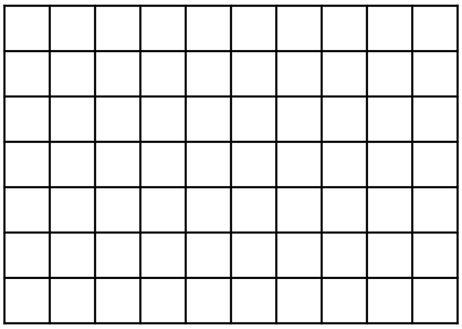
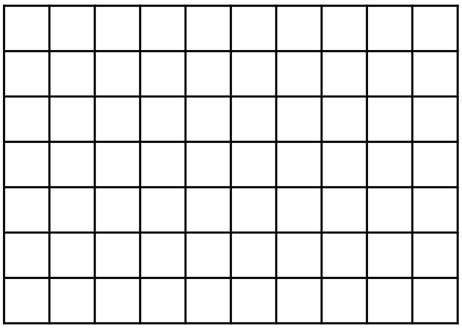


Le vecteur $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$

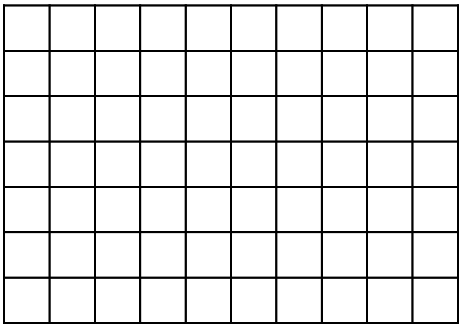
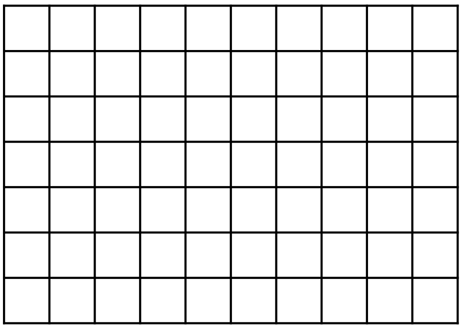




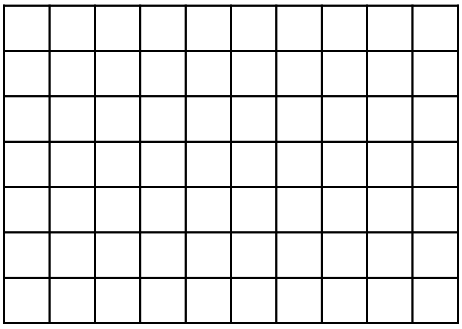
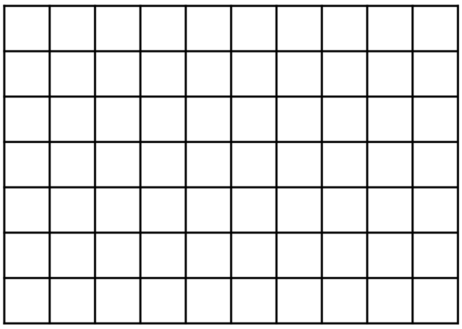
Le vecteur $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}$

Le vecteur $\overrightarrow{a} - \left(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\right)$

Le vecteur $\overrightarrow{x}$ tel que $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$

1.4

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Exprimer plus simplement les vecteurs qui suivent. Utiliser le point O lorsque c'est nécessaire.

a) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$

c) $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}$

d) $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}$

e) $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}$

f) $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD}$

1.5

On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté ci-dessous. Simplifier au maximum les expressions vectorielles suivantes :

a) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

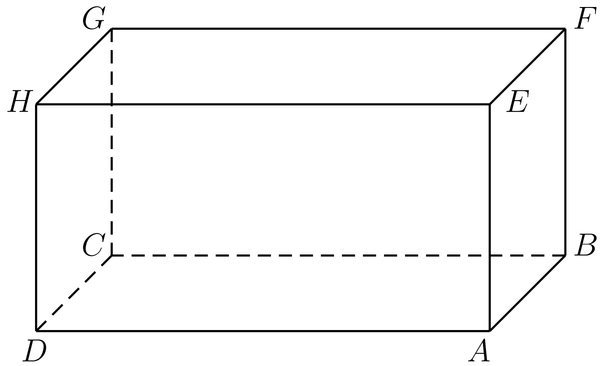
b) $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

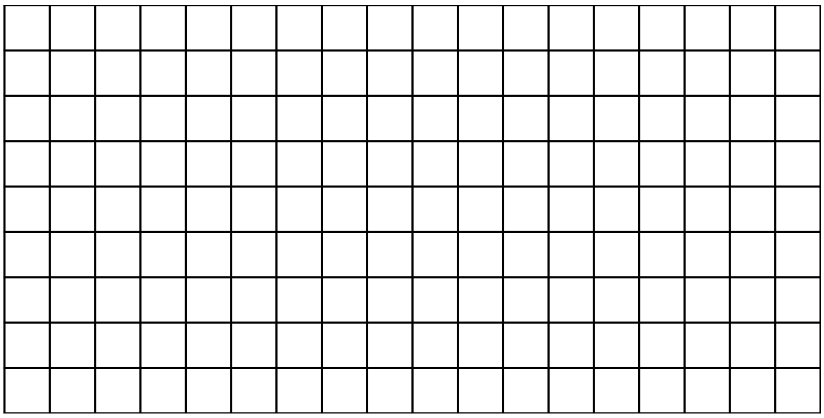
f) $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$



1.6

Reprendre les vecteurs de l'exercice 1.3 et représenter dans les deux cas le vecteur

$$\frac{5}{2}\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$$



1.7

Exprimer $\overrightarrow{v}$ en fonction de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ si

$$3\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{v}\right) - 6\overrightarrow{b} = -7\left(\frac{15}{7}\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{b}\right) + 12\overrightarrow{a}.$$

1.8

Représenter trois points A, B et P pour lesquels :

a) $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{BP}$

d) $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{BP}$

e) $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{-4}\overrightarrow{PB}$

g) $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$

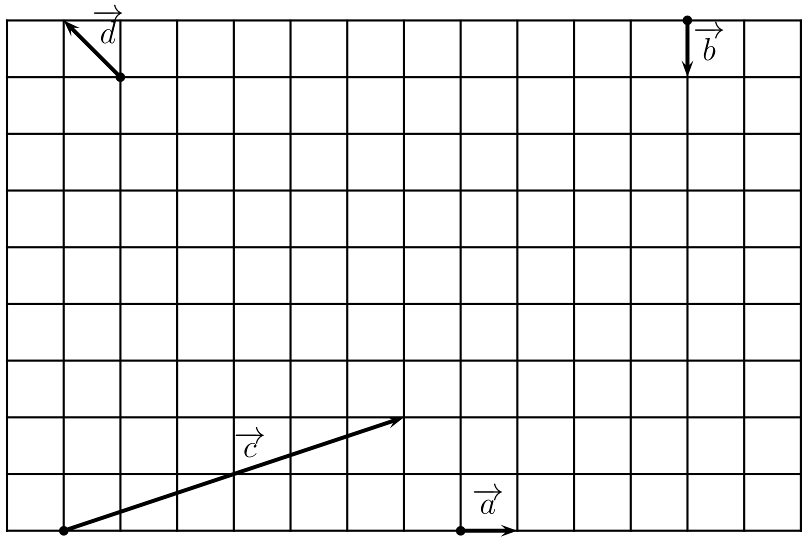
1.9

Par rapport aux vecteurs de la figure :

a) Exprimer $\overrightarrow{c}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{d}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

c) Exprimer $\overrightarrow{x} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{c} - 5\overrightarrow{d}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.



1.10

Soit $ABCDEFGH$ un cube pour lequel on pose $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AE}$. Soit M le milieu du côté FG, N celui de HG et P le centre de la face $ABCD$. Faire une figure d'étude puis exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$: $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{NP}$, et $\overrightarrow{PM}$.

1.11

Soit une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{SC}$. Réaliser une bonne figure d'étude. Exprimer chacun des vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$: $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

1.12

Soit $ABCD$ un parallélogramme pour lequel on pose $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Soit M le milieu de BC et P le point tel que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{DM}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

1.13

Soit A, B, C, D et E des points quelconques. Sans utiliser de dessin, simplifier le plus possible les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$

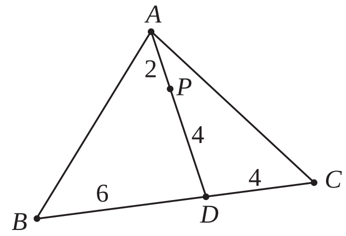
c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

1.14

Dans la figure ci-contre, les nombres représentent les longueurs des segments concernés.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

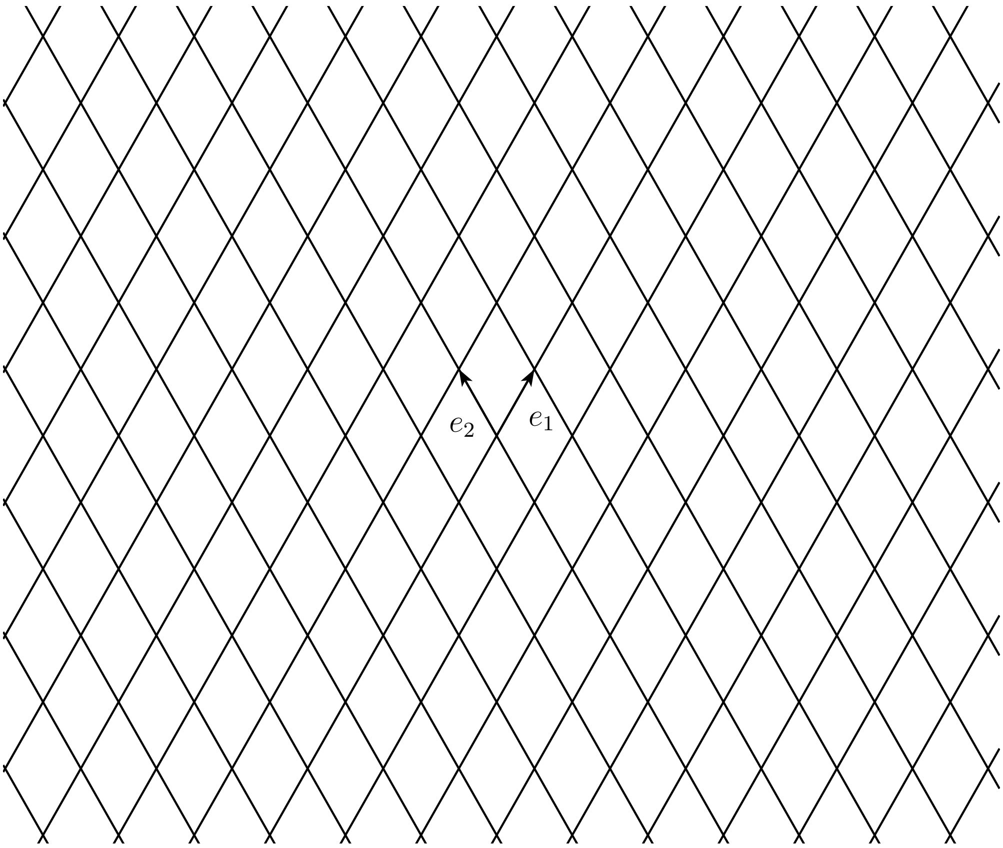


1.15

Démontrer que l'égalité suivante est toujours vraie : $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AB}$.

1.16

On considère la figure suivante



a) Représenter les vecteurs suivants, dont les composantes sont données relativement à la base $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$$

b) Représenter les vecteurs $\vec{b} + \vec{c}$ et $3\,\vec{b} + 2\,\vec{c}$ et donner leurs composantes dans $\mathfrak{B}$.

1.17

Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $3\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$

b) $\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$

c) $-5\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} - 8\overrightarrow{c}$

1.18

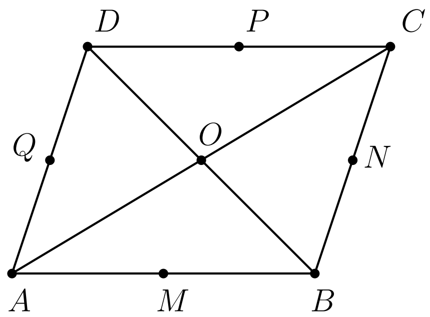
Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Calculer les nombres k et m tels que $k\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$.

1.19

Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.



a) Donner, dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$

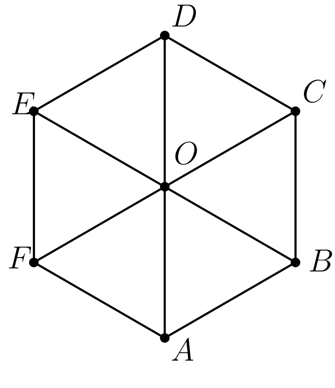
b) Mêmes questions, mais relativement à la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AM}\right)$

1.20

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Donner les composantes des vecteurs
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$

a) dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{ED}\right)$

b) dans la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OC}\right)$



1.21

Soit $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = \left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right)$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner les composantes de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

b) Donner les composantes de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

1.22

Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on considère les vecteurs :

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

1.23

Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\overrightarrow{x}$ colinéaire à $\overrightarrow{a}$ tels quel $\overrightarrow{x} + \lambda\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$

1.24

On donne les points $A(5;2)$, $B(8;0)$, $C(-2;-4)$ et $D(4;-6)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

e) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

f) $4\overrightarrow{CD} - 3\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}\right)$

1.25

Dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, on donne les points $A(-1;4)$, $B(2;5)$, $C(3;3)$ et $D(-2;2)$.

a) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{AB}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

1.26

On donne les points $A(1;1)$, $B(10;5)$ et $C(4;12)$.
Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme

b) $ABDC$ soit un parallélogramme

1.27

Soit les points $A(-4;2)$, $B(1;3)$ et $C(2;5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

1.28

On considère les points $A(2;-1)$ et $B(0;3)$.

a) Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit l'origine O du repère.

b) Déterminer ensuite le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.29

Les points $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ et $P(-2;2)$ sont les milieux des côtés d'un triangle dont on demande de calculer les sommets.

1.30

On donne les points $A(3;2)$, $B(-5;6)$ et $C(-2;-3)$.
Trouver les coordonnées du point K situé au quart de AB depuis A, et du point M situé aux deux tiers de BC depuis B.

1.31

Calculer les coordonnées des points qui divisent le segment $[AB]$ en cinq parties égales, si $A(2;3)$ et $B(3;8)$.

1.32

a) Les points $A(-4;5), B(2;-3)$ et $C(23;-30)$ sont-ils alignés ?

b) Déterminer la valeur de la constante k pour laquelle les points A, B et C donnés ci-dessous sont alignés.

$$A(1;2), \quad B(-3;3) \quad \text{et} \quad C(k;1)$$

1.33

On donne $A(7;-3)$ et $B(23;-6)$.
Déterminer les coordonnées du point C de l'axe Ox qui est aligné avec A et B.

1.13 Réponses

1.1 19 vecteurs :
$\overrightarrow{OO}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FC}$.

1.4
a) $\overrightarrow{FE}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{DB}$ e) $\overrightarrow{AD}$ f) $\overrightarrow{FC}$

1.5
a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{HA}$ d) $\overrightarrow{EA}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{AE}$

1.7 $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + 3\,\overrightarrow{b}$

1.9 a) $\overrightarrow{c} = 6\overrightarrow{a} - 2\,\overrightarrow{b}$ b) $\overrightarrow{d} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ c) $\overrightarrow{x} = 2\,\overrightarrow{a} + 6\,\overrightarrow{b}$

1.10
a) $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \vec{c}$ d) $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$ g) $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$
b) $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$ e) $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$
c) $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ f) $\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$

1.11
a) $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ c) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ e) $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$
b) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ d) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ f) $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$

1.12
a) $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} - \frac{2}{3}\overrightarrow{b}$ b) $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} - \frac{1}{6}\overrightarrow{b}$ c) $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$

1.13
a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{DC}$ d) $\overrightarrow{DA}$ e) $\overrightarrow{0}$

1.14 $\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{15}\vec{AB} + \dfrac{1}{5}\vec{AC}$

1.16 b) $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $3\,\overrightarrow{b} + 2\,\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

1.17

a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$

1.18 $k = 3, m = 2$

1.19
a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.20
a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.21
a) $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$
b) $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$ $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$

1.22 $\vec{a} = \dfrac{1}{2}\,\vec{d} = 9\,\vec{h}$; $\vec{b} = -\dfrac{3}{2}\,\vec{\imath}$; $\vec{c} = -2\,\vec{g}$; $\vec{f}$; $\vec{e}$ colinéaire à tous les vecteurs.

1.23 $\lambda = \dfrac{35}{29}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{105}{29} \\ \frac{-30}{29} \end{pmatrix}$

1.24

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 33 \\ -14 \end{pmatrix}$

1.25 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{AC} - \dfrac{7}{9}\overrightarrow{AD}$

1.26

a) $(-5;8)$
b) $(13;16)$

1.27 $M_{AB}(-\frac{3}{2};\frac{5}{2})$, $M_{AC}(-1;\frac{7}{2})$, $M_{BC}(\frac{3}{2};4)$, $G(-\frac{1}{3};\frac{10}{3})$

1.28
a) $C(-2;-2)$
b) $D(0;-6)$

1.29 $A(-5;7)$, $B(1;-3)$, $C(3;1)$

1.30 $K(1;3)$, $M(-3;0)$

1.31 $(2.2;4)$ $(2.4;5)$ $(2.6;6)$ $(2.8;7)$

1.32

a) non alignés.
b) $k=5$

1.33 $C(-9;0)$

Chapitre 2

Géométrie métrique

2.1 Base orthonormée, repère orthonormé

Dans le plan,

- une **base** $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est **orthonormée** si $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ et $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 1$.
- le **repère** $R = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est **orthonormé** si la base associée $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est orthonormée.

Une base orthonormée du plan est parfois notée $B = (\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ et le repère orthonormé se note $R = (O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$.

Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

$$\|\overrightarrow{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Remarque 1

a) Les affirmations ci-dessus sont fausses si la base n'est pas orthonormée !

b) Pour calculer la distance entre deux points A et B du plan, on calcule $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exemple 2.1.

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(-1; -9), B(-10; 3)$ et $C(6; 15)$. Prouver que le triangle ABC est rectangle.

2.2 Produit scalaire

Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont dits **orthogonaux** si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite.

a) $\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{w}$ est nul (ou les deux vecteurs sont nuls)
b) $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ont des directions perpendiculaires.

Propriétés de vecteurs orthogonaux

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \iff \|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2$$

Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire se définit relativement à une **base orthonormée** :

$$\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 \in \mathbb{R}$$

Propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire jouit des propriétés suivantes :

a) $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{v}$
b) $\overrightarrow{v} \bullet (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{t}) = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{t}$
c) $\overrightarrow{v} \bullet (k\overrightarrow{w}) = (k\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = k(\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})$
d) $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{w}\|^2)$
e) La valeur du produit scalaire est indépendante de la base orthonormée choisie !

Théorème 2.1 (*Condition d'orthogonalité*)

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \iff \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0$$

Exemple 2.2.
Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(-1;-9)$, $B(-10;3)$ et $C(6;15)$.

Prouver que le triangle ABC est rectangle en utilisant le produit scalaire.

Vecteurs orthogonaux à un vecteur donné du plan

Relativement à une base orthonormée du plan, si $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, on a

a) $\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ sont les deux seuls vecteurs orthogonaux et de même norme que $\overrightarrow{v}$.

b) $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{n} = k \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

c) Dans le plan, il existe une **unique direction perpendiculaire** à un vecteur donné.

Exemple 2.3.

Un triangle ABC rectangle en A est connu par ses sommets $A(3; -1)$ et $B(7; -4)$.

Calculer les coordonnées du sommet C sachant que son aire vaut 10 [u^2].

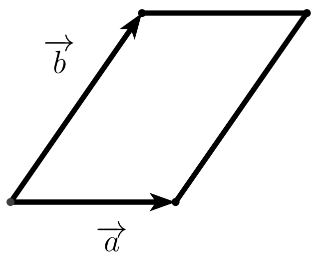
2.3 Déterminant d'un couple de vecteurs du plan

Le déterminant du couple $\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)$, où $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, est le **nombre réel**

$$\det\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)=\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

Propriétés du déterminant de deux vecteurs du plan

On pose $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.



a) **L'aire d'un parallélogramme** construit sur les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est donnée par

$$\sigma\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)=\left|\det\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)\right|=\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|=|a_1b_2-a_2b_1|$$

b) **2$^{\text{ème}}$ critère de colinéarité dans le plan**

$$\overrightarrow{a}\text{ et }\overrightarrow{b}\text{ colinéaires}\iff\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=0$$

Exemple 2.4.

a) Calculer $\det\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)$ où $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) Calculer l'aire du triangle de sommets $A(-1;4), B(2;5)$ et $C(5;-3)$.

2.4 Exercices

2.1

a) Calculer la norme des vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

b) Vérifier que le vecteur suivant est unitaire (de norme 1) : $\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

c) On donne les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\| + \|\overrightarrow{c}\|; \|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\|; \| - 2\overrightarrow{a}\| + 2\|\overrightarrow{a}\|; \|\overrightarrow{a}\|\overrightarrow{c}; \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a}; \left\| \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a} \right\|$$

d) On donne $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre k sachant que la norme de $\overrightarrow{d}$ vaut 10.

e) On donne $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre m tel que

$$\|\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v}\| = \sqrt{82}$$

xx

2.2

Calculer en valeur approchée le périmètre du triangle ABC avec $A(2; 1), B(4; 3)$ et $C(2; 6)$.

2.3

Soit $A(7; 1)$, $B(5; 5)$, $C(5; -3)$ et $I(2; 1)$.
Prouver que les points A, B et C sont situés sur le même cercle centré en I.

2.4

Déterminer k pour que $P(2; -1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB, si $A(5; 3)$ et $B(-2; k)$.

2.5

On donne $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Evaluer les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

a) $\overrightarrow{a} \bullet \left(7\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$

b) $\left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{b}$

c) $\left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{d}\right)$

d) $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}\right)$

e) $\|\overrightarrow{d}\| \left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{d}\right)$

f) $\overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}\right)$

2.6

Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

2.7

On donne les points $A(-2;4)$, $B(1;-2)$ et $C(k;k), k \in \mathbb{R}$.
Déterminer k pour que le triangle ABC soit rectangle

a) en A ;
b) en B ;
c) en C ;

Représenter ensuite les solutions sur une figure à l'échelle.

2.8

On donne les points $A(-2;-1)$, $B(7;0)$ et $C(1;5)$.
Déterminer les coordonnés du sommet D du parallélogramme $ABCD$ et calculer son aire.

2.9

Etablir que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire si $A(6;4)$, $B(12;-2)$ et $C(17;9)$.

2.10

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze rectangle non rectangle, puis calculer son aire, si $A(7;5), B(8;7), C(12;5)$ et $D(13;2)$.

2.11

Relativement à un repère orthonormé on considère les points $A(3;-4)$ et $C(5;2)$.

Sachant que A et C sont les sommets non consécutifs d'un carré $ABCD$, déterminer les coordonnées de B et D.

2.12

Relativement à un repère orthonormé on considère les points $A(0;2)$, $B(6;6)$, $C(8;3)$ et $D(2;-1)$

a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Démontrer.
b) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

2.13

Relativement à un repère orthonormé on considère les points $A(-3;-2)$, $B(3;0)$, $C(5;6)$ et $D(-1;4)$

a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Démontrer.
b) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

2.14

Relativement à un repère orthonormé, on considère les points $A(-1; 2)$ et $B(7; 8)$.

Calculer les coordonnées du point P situé sur le segment AB et situé à une distance de 7 unités du point A.

2.15

Soit $A(-7; -3)$, $B(1; 3)$ et $C(-1; 4)$.
Calculer la longueur de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

2.5 Réponses

2.1

a) $5\,;\ \sqrt{73}\,;\ \sqrt{6.5}\,;\ 1.$

c) $24\,;\ \sqrt{82}\,;\ 20\,;\ \begin{pmatrix}-30\\0\end{pmatrix}\,;\ \begin{pmatrix}0.6\\0.8\end{pmatrix}\,;\ 1$

d) $k=-5$ ou $k=7$

e) $m=-2.3$ ou $m=1.5$

2.2

$\sqrt{8}+\sqrt{13}+5 \simeq 11.43$

2.3

$\|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IC}\| = 5$

2.4

$k=-4$ ou $k=2$

2.5

a) 102

b) $\begin{pmatrix}55\\-11\end{pmatrix}$

c) 14

d) 50

e) 36

f) Pas défini.

2.6

a) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont perpendiculaires.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont perpendiculaires.

d) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

2.7

a) $k=10$

b) $k=-5$

c) $k=-2$ ou $k=2.5$

2.8 $D(-8;4)$; son aire vaut 51 [u^2].

2.9

Le triangle est isocèle car $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$. Son aire vaut 48 [u^2].

2.10

Son aire vaut 12.5 [u^2].

2.11

$B(7;-2)$, $D(1;0)$ ou l'inverse

2.12

$ABCD$ est un rectangle d'aire 26 [u^2]

2.13

$ABCD$ est un losange d'aire 32 [u^2]

2.14

$P(4.6;6.2)$

2.15

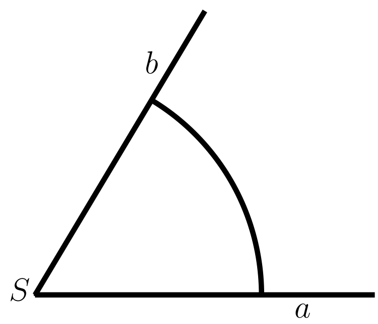
$h=2$

Chapitre 3

Angles et trigonométrie du triangle rectangle

3.1 Angles

Deux demi-droites Sa et Sb qui ont même origine S définissent un angle. Le point S est le **sommet** de l'angle ; les demi-droites Sa et Sb sont les **côtés**.



3.1.1 Mesures d'un angle

Mesure en degrés

- Un tour mesure 360 degrés (noté 360°).
- Un angle de $k°$ s'obtient en considérant k fois $\frac{1}{360}$ de tour.

Degrés sexagésimaux

On divise un degré en 60 parties égales, appelées **minutes** (notées $'$) et chaque minute en 60 parties égales, appelées **secondes** (notées $''$) :

$$1° = 60' = 3600'' \text{ et } 1' = 60''$$

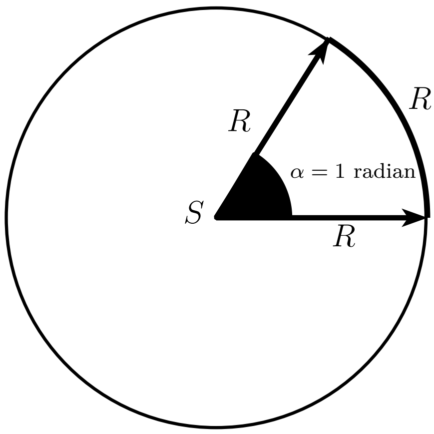
Exemple 3.1.

a) Traduire en degrés sexagésimaux un angle de $62.444°$.

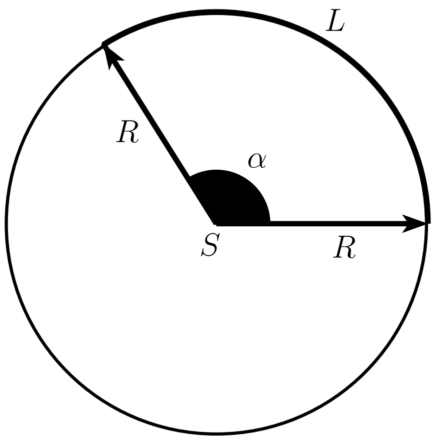
b) Traduire en degrés décimaux un angle de $56°45'36''$.

Mesure en radians

Un angle α qui découpe sur un cercle de rayon R centré en son sommet S un arc de longueur R a une mesure de 1 radian.



La mesure en **radians** d'un angle α est le rapport $\frac{L}{R}$ de la longueur L de l'arc de cercle découpé par l'angle α sur un cercle de rayon R centré au sommet de l'angle.



Changement d'unités

On utilise une règle de trois !

Degrés	**Radians**
360	2π
180	π
d	$r = d \cdot \dfrac{\pi}{180}$
$d = r \cdot \dfrac{180}{\pi}$	r

Exemple 3.2.

a) Quelle est la mesure en radians d'un angle de $50°$?

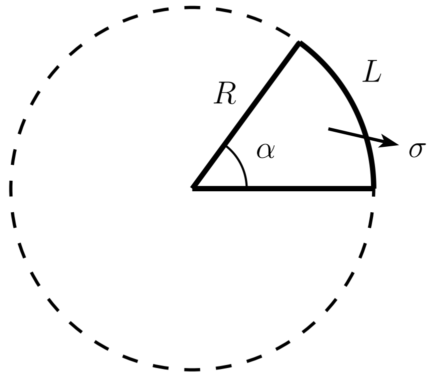
b) Quelle est la mesure en radians d'un angle de $135.4°$?

c) Quelle est la mesure en degrés d'un angle de 1 radian ?

d) Quelle est la mesure en degrés d'un angle de $\dfrac{5\pi}{4}$ radians ?

3.1.2 Longueur d'un arc. Aire d'un secteur circulaire

Longueur de l'arc $\boldsymbol{L}$:



En degrés : $L = 2\pi R \cdot \dfrac{\alpha_{deg}}{360} = \pi R \cdot \dfrac{\alpha_{deg}}{180}$

En radians : $L = R \cdot \alpha_{rad}$

Aire du secteur circulaire $\boldsymbol{\sigma}$:

En degrés : $\sigma = \pi R^2 \cdot \dfrac{\alpha_{deg}}{360}$

En radians : $\sigma = \dfrac{1}{2} R^2 \cdot \alpha_{rad}$

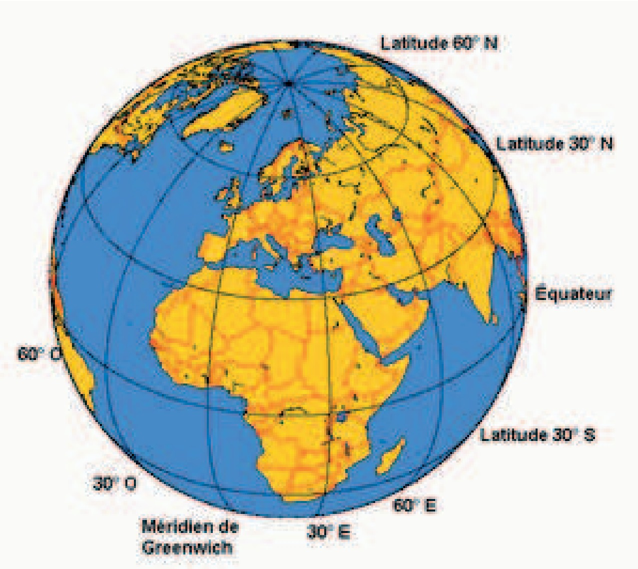
Exemple 3.3.

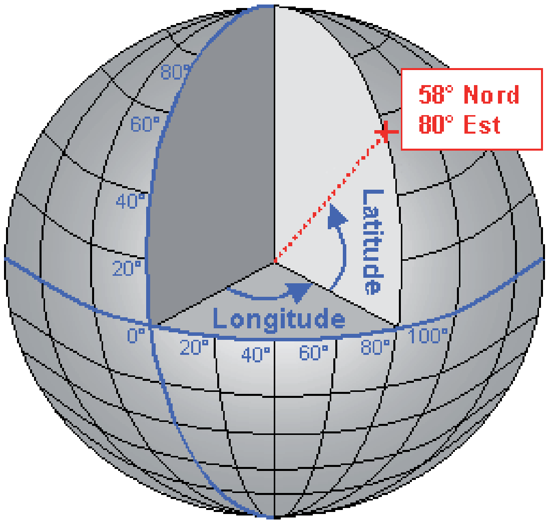
a) Quelle est la longueur de l'arc découpé par un angle $\alpha = 134°$ sur un cercle de 8 cm de rayon ? Quelle est l'aire du secteur circulaire correspondant ?

b) Une étiquette de 10 cm de largeur est collée sur une bouteille de 7,2 cm de diamètre. Si le collage de l'étiquette se fait par rotation de la bouteille autour de son axe, quel est l'angle de rotation lors du collage ?

3.1.3 Coordonnées terrestres

Latitudes. Longitudes





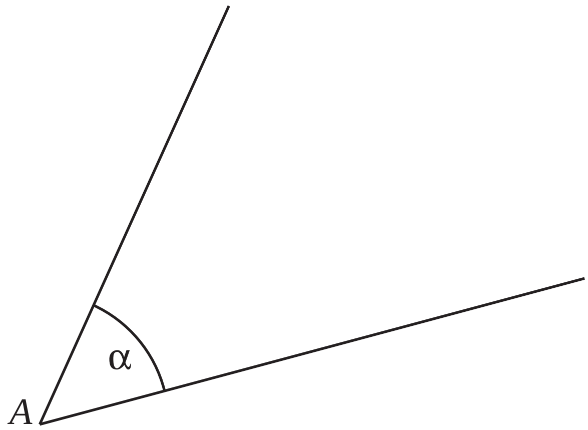
Exemple 3.4.

La ville de Montreux se trouve à $46°26'$ de latitude Nord et $6°55'$ de longitude est.

Calculer la distance minimale entre la ville de Montreux et l'équateur en considérant que le rayon terrestre mesure 6370 km.

3.2 Trigonométrie du triangle rectangle

Un **angle aigu** est un angle dont la mesure est comprise entre 0° et 90°.

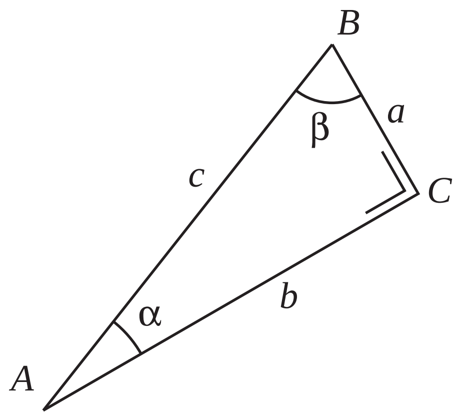


Relation trigonométrique dans le triangle rectangle

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} =$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} =$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} =$$



Remarque 1 On désigne les sommets d'un triangle avec des lettres majuscules. Les lettres minuscules correspondant à chaque sommet désignent les côtés opposés à chacun des sommets. Enfin, la lettre grecque minuscule correspondant à la lettre du sommet désigne l'angle du triangle correspondant au sommet.

Exemple 3.5.

Une échelle mesurant 3 mètres de long est appuyée contre un mur vertical. Elle forme avec le sol un angle de 72°.

a) A quelle hauteur l'échelle repose-t-elle contre le mur (arrondir la réponse au cm près) ?
b) On recule le pied de l'échelle de 20 cm. Quel sera le nouvel angle formé par l'échelle avec le sol (arrondir la réponse à 0.1° près) ?

3.3 Exercices

3.1

Convertir en degrés les angles donnés par leur mesure en radians

a) $\pi/6$
b) $2\,\pi/3$
c) $7\pi/10$
d) $5\,\pi/6$
e) 1
f) 0.7

3.2

Convertir en radians les angles donnés par leur mesure en degrés

a) $45°$
b) $60°$
c) $75°$
d) $120°$
e) $22.7°$
f) $152.5°$

3.3

Calculer, à 1 mm près, le rayon d'un cercle sur lequel

a) un arc de $1°$ mesure 3 mm.
b) un arc de 0.03 rad mesure 2 mm.

3.4

Calculer, à 1 mm près, la longueur d'un arc

a) de $32°$ sur un cercle de rayon 15 cm.
b) de 2 rad sur un cercle de rayon 7cm.

Pour les exercices qui suivent, prendre, si nécessaire, un rayon terrestre de 6370 km.

3.5

a) Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $\frac{1}{60}$ degré (ou 1 minute d'arc). Quelle est leur distance (elle définit le mille nautique) ?
b) Peut-on poser la même question pour deux points situés sur un même parallèle dont les longitudes diffèrent ?

3.6

Bulle et Porrentruy se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont $46°37'$N et $47°25'$N. Calculer la distance «à vol d'oiseau » entre ces deux villes.

3.7

Sion et Delémont se trouvent sur le même méridien terrestre. Leur distance « à vol d'oiseau » est de 123 km. Sachant que la latitude de Sion est de $46°14'$N, calculer la latitude de Delémont (qui se situe au nord de Sion !).

3.8

Dunkerque et Barcelone se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont 49°45′N et 40°15′N. Calculer la distance «à vol d'oiseau » entre ces deux villes.
La mesure de la distance entre Dunkerque et Barcelone s'est faite par triangulation entre 1792 et 1798. Elle a servi de base à la première définition du mètre comme la dix millionième partie du quart de méridien terrestre.

3.9

Deux points A et B de la surface terrestre sont situés sur le même méridien et distants de 800 km. Lorsque le Soleil est à la verticale de A, les rayons du Soleil forment avec la verticale, en B, un angle de 7.2°
En déduire la circonférence et le rayon terrestres.
Cette méthode a été imaginée par Eratosthène (284-195 av. J.-C.) après avoir appris que, un certain jour de l'année à midi, le Soleil se réfléchit verticalement dans un puits profond près de Syène (aujourd'hui Assouan) qui correspondait au point A. Le point B était Alexandrie, située à 800 km au nord de Syène. Pour déterminer l'angle à midi, on mesurait l'ombre d'un pilier vertical.

3.10

Le diamètre d'un cercle mesure 48 cm. Trouver la longueur de l'arc et la surface du secteur circulaire défini par un angle au centre de 20°.

3.11

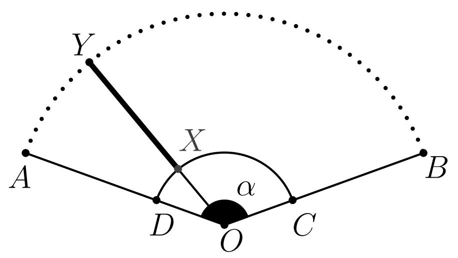
La terre effectue une rotation complète après 23 h 56 min 4 s. Calculer de combien de degrés la terre tourne en une seconde.

3.12

Un pneu de voiture mesure 75 cm de diamètre. A quelle vitesse angulaire en tours/minute la roue tourne-t-elle sur son axe si la voiture roule à 72 km/h ?

3.13

Un essuie-glace mesure 40 cm de long de son point de rotation O à son extrémité Y et balaie sur une longueur de 30 cm, entre les points X et Y.



On suppose que l'angle d'oscillation α mesure 140°
.

a) Calculer la longueur en cm de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru par l'extrémité Y du balai d'essuie-glace durant une oscillation de gauche à droite.

b) Calculer l'aire en cm² de la surface $ABCD$ balayée par l'essuie-glace XY .

3.14

Un triangle rectangle ABC est rectangle en A. Résoudre ce triangle connaissant :

a) $\gamma = 32°$ et $BC = 10$.

b) $AB = 10$ et $\gamma = 27°$.

c) $AC = 6$ et $AB = 10$.

3.15

Dans un triangle ABC rectangle en B, on donne $\gamma = 27°$ et $AB = 40$ cm. Calculer les longueurs BC, CH et HA où H est le pied de la hauteur sur AC issue de B.

3.16

Quelle est la hauteur d'un clocher qui a une ombre de 36 m lorsque le soleil est élevé de 37.5° au-dessus de l'horizon ?

3.17

Une route en ligne droite fait un angle de 2.3° avec sa projection horizontale. Quel chemin faut-il parcourir pour s'élever de 109.20 m au-dessus du niveau du point de départ ?

3.18

La voûte d'un tunnel est un arc de cercle d'angle au centre 220°. Calculer le rayon r de cet arc de cercle pour que la largeur de la route soit de 12 m, ainsi que la hauteur maximum de la voûte au-dessus du sol.

3.19

Déterminer le périmètre et l'aire du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 6 cm.

3.20

Quel est le rayon d'un cercle dans lequel une corde de 18.40 cm sous-tend un arc de 48° ?

3.21

De mon balcon situé à 9 m au-dessus du sol, j'observe l'immeuble d'en face. Pour voir le bas de l'immeuble, je dois baisser les yeux d'un angle de 20°, alors que pour en voir le sommet, je dois lever les yeux d'un angle de 10°. Quelle est la hauteur de l'immeuble d'en face ?

3.22

Natacha se trouve à 9 m d'un peuplier qu'elle aperçoit sous un angle de 58° (on néglige la hauteur des yeux par rapport au sol). Sous quel angle le verra-t-elle si elle recule de 30 m ?

3.23

Couché par terre à Ouchy, j'observe le jet d'eau de Genève. J'en vois une portion de 24 m de haut. Sachant que la distance d'Ouchy au pied du jet d'eau est de 50 km, mesurée à la surface du lac et que le rayon de la terre est de $6'350$ km, quelle est la hauteur du jet d'eau ?

3.24

Considérons un cube $ABCDEFGH$ de longueur d'arête égale à 6 cm. Soit J le milieu de FG et I le milieu de BC.

a) Calculer la mesure des angles $\widehat{JAI}$, $\widehat{JAB}$ et $\widehat{JAD}$,

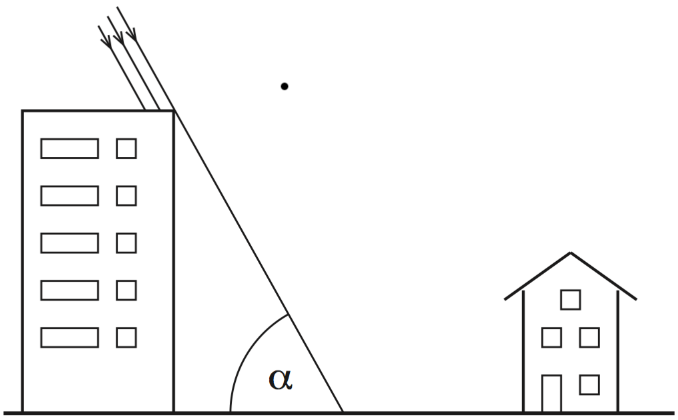
b) Calculer la longueur d'une des diagonales du cube.

3.25

L'angle d'élévation du sommet d'une tour verticale est de 43° à 72 m de la tour, l'oeil de l'observateur étant à 1.10 m au dessus du sol. Quelle est la hauteur de cette tour ?

3.26

Un propriétaire apprend que l'on va construire un immeuble de 20 m de haut à 40 m de sa maison (distance entre les deux murs les plus proches de l'immeuble et de la maison) ; on note α l'angle que forment les rayons du soleil avec le sol.



a) On suppose que $\alpha = 72°$; calculer la longueur (au cm près) de l'ombre de l'immeuble et vérifier que cette ombre ne touche pas la maison.

b) On suppose que $\alpha = 22°$; montrer par calculs que l'ombre de l'immeuble touche la façade la plus proche de la maison et calculer la hauteur maximale atteinte par l'ombre sur cette façade.

3.27

L'angle d'élévation du sommet d'une tour verticale dont le pied est inaccessible est 24° ; on s'avance de 32 m vers la tour sur une horizontale, et l'angle d'élévation du sommet est alors égal à 40°. On sait encore que l'oeil de l'observateur est élevé de 1.5 m. Quelle est la hauteur de la tour ?

3.28

Une personne placée au bord d'une rivière voit sous un angle de 60° un arbre planté sur la rive opposée ; lorsqu'elle s'éloigne de 40 m, cet angle n'est plus que 20°. Quelle est la hauteur de l'arbre et la largeur de la rivière ?

3.4 Réponses

3.1

a) 30°
b) 120°
c) 126°
d) 150°
e) 57.3°
f) 40.1°

3.2

a) $\frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{5\,\pi}{12}$
d) $\frac{2\,\pi}{3}$
e) 0.40
f) 2.66

3.3

a) 172 mm
b) 67 mm

3.4

a) 84 mm
b) 140 mm

3.5

a) 1853 m
b) Non

3.6

88.94 km

3.7

47°20′N

3.8

1056 km

3.9

Circonférence : 40000km ; rayon : 6370 km

3.10

$L \simeq 8.38$ cm et $A \simeq 100.53$ cm^2.

3.11

En une seconde, la Terre tourne de 0.00417 degrés.

3.12

509.30 tours/minutes.

3.13

a) 97,7 cm
b) 1832,60 cm^2

3.14

a) $\beta = 58°$, $AC \simeq 8.48$, $AB \simeq 5.30$;
b) $\beta = 63°$, $BC \simeq 22.03$, $AC \simeq 19.63$;
c) $\beta \simeq 30.96°$, $\gamma \simeq 59.04$, $BC \simeq 11.66$.

3.15

$BC \simeq 78.50$ cm, $CH \simeq 69.95$ cm, $HA \simeq 18.16$ cm.

3.16

Le clocher mesure ~ 27.62 m.

3.17

Il faut parcourir $2'721.03$ m.

3.18

Le rayon mesure ~ 6.39 m et la hauteur de la voûte est de ~ 8.57 m.

3.19

Le périmètre mesure 35.27 cm et l'aire est de 85.6 cm^2.

3.20

Le rayon est de ~ 22.62 cm.

3.21

La hauteur du bâtiment est de ~ 13.36 m.

3.22

Elle le voit sous un angle de $\sim 20.27°$.

3.23

La hauteur du jet d'eau est ~ 221 m.

3.24

a) $\widehat{JAI} \simeq 41.81°$, $\widehat{JAB} \simeq 48.19°$, $\widehat{JAD} \simeq 70.53°$; b) ~ 10.39 cm.

3.25

La hauteur de la tour est d'environ 68.24 m.

3.26

a) 6.50 m (< 40 m) ; b) 3.84 m

3.27

La hauteur de la tour est d'environ 31.9 m.

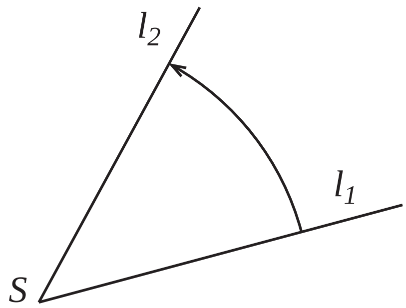
3.28

L'arbre mesure environ 18.4 m de haut et la rivière 10.6 m de large.

Chapitre 4

Trigonométrie du triangle quelconque

4.1 Angle orienté



Un **angle orienté** possède

- un **sommet** S
- un **côté initial** l_1
- un **côté final** l_2.

La flèche indique l'**orientation de l'angle**.

Un angle orienté est vu comme une **rotation de centre *S* qui envoie** l_1 **sur** l_2.

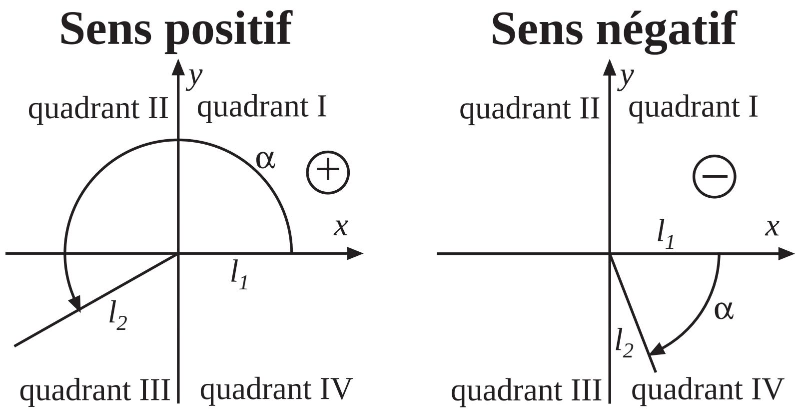
- Si l'on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, l'angle est dit **positif**.
- Si l'on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, l'angle est dit **négatif**

Angle orienté de mesure quelconque

Soit α un nombre réel. On définit un angle orienté de mesure α (degrés ou radians) en le positionnant comme suit dans un système d'axes orthonormés Oxy :

- On place le sommet à l'origine O.
- On fait coïncider le côté initial l_1 avec la partie positive de l'axe Ox.
- On fait tourner la partie positive de l'axe Ox autour de l'origine O d'un angle α ce qui nous donne la position l_2.
  - Si $\alpha > 0$, on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (angle positif).
  - Si $\alpha < 0$, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (angle négatif).

Quadrants et orientation d'un angle



Exemple 4.1.

Déterminer la mesure des angles ayant même côté final que l'angle α de mesure 135°.

4.2 Les fonctions trigonométriques

Le cercle trigonométrique

Dans un système d'axes Oxy, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre $O(0;0)$ origine du repère et de rayon $r = 1$.

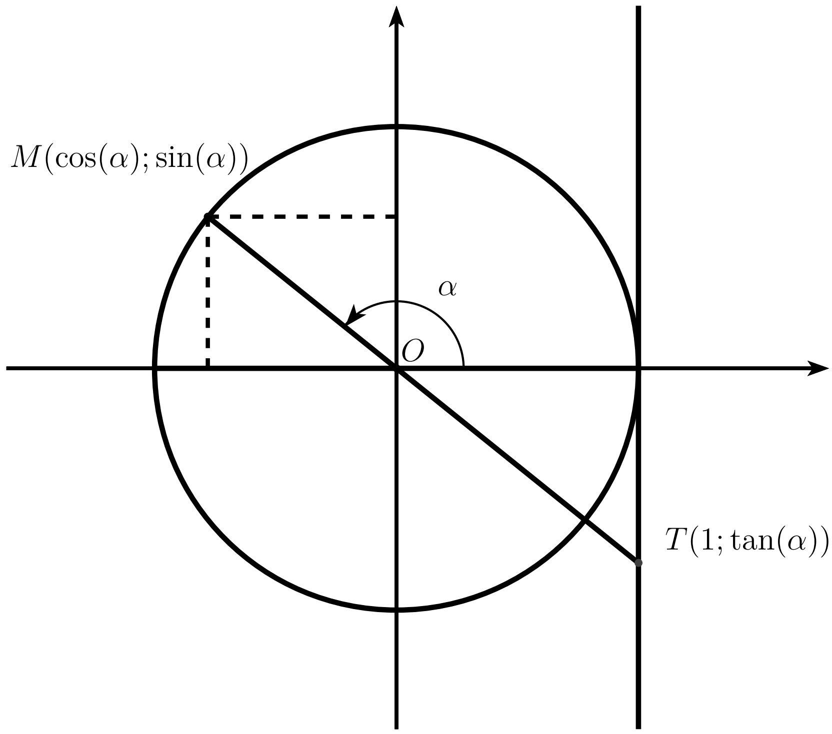
Soit α un nombre réel. On considère le point M d'intersection du côté final de l'angle orienté de mesure α avec le cercle trigonométrique, ainsi que le point T intersection du prolongement de celui-ci avec la droite verticale $x = 1$.

Fonctions trigonométriques

$\cos(\alpha)$:
$1^{\text{ère}}$ coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

$\sin(\alpha)$:
2^{e} coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

$\tan(\alpha)$:
2^{e} coordonnée du point T situé sur la droite $x = 1$.



Remarque 4.1.

a) Lorsque α est compris entre 0°et 90°, on retrouve les rapports trigonométriques définis dans le triangle rectangle.

b) Si aucune mesure n'est précisée, les fonctions trigonométriques sont données en **radians**.

c) $\sin(\alpha) \in [-1;1]$, $\cos(\alpha) \in [-1;1]$ et $\tan(\alpha) \in]-\infty;+\infty[$.

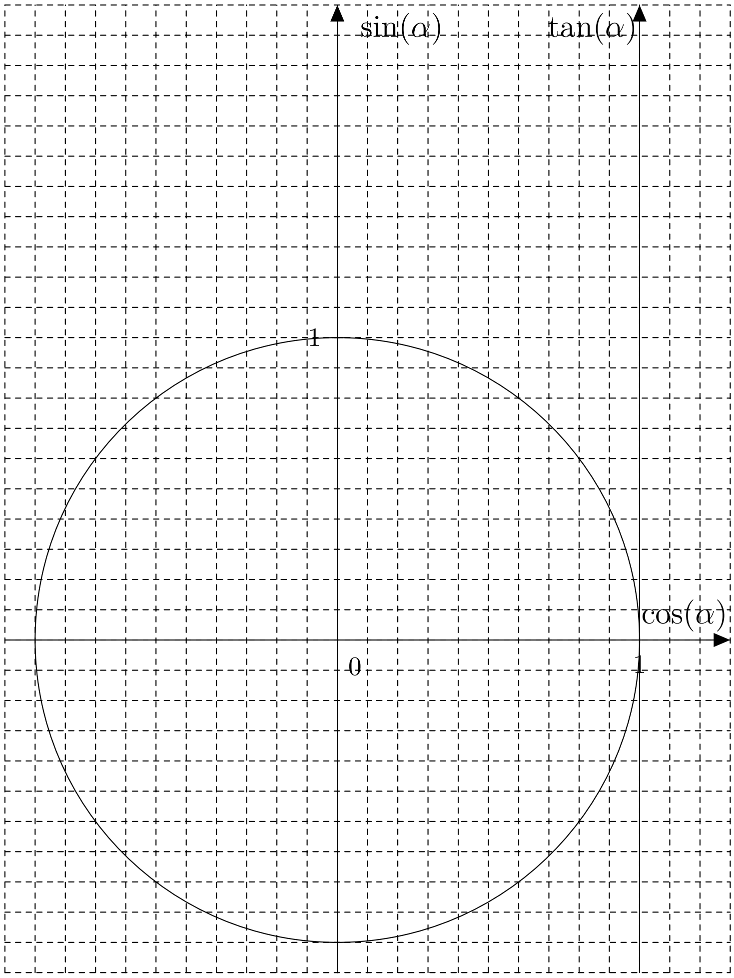
d) Les fonctions trigonométriques sont périodiques :

En radians : $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

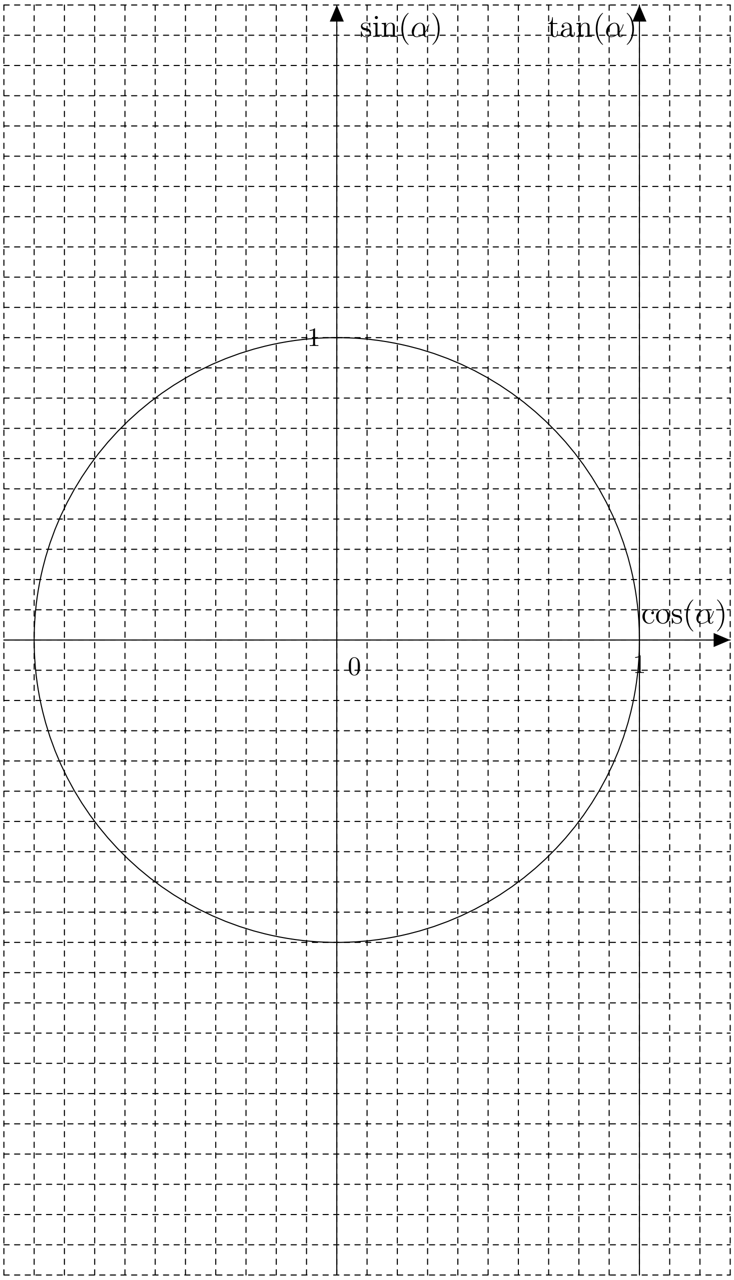
En degrés : $\sin(\alpha + 360) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 360) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha + 180) = \tan(\alpha)$

Exemple 4.2.

a) Placer les angles 145°, 240° sur le cercle. En déduire une valeur approchée de leur sinus, cosinus et tangente.



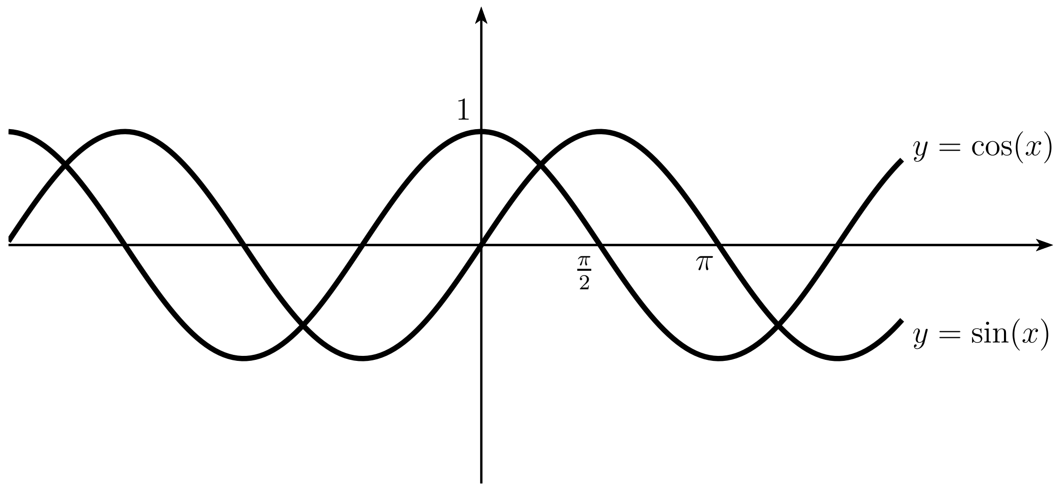
b) Placer les angles 130° et −150° sur le cercle. En déduire une valeur approchée de leur sinus, cosinus et tangente.



c) Exprimer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\alpha = -150°$ à l'aide des rapports trigonométriques du triangle rectangle.

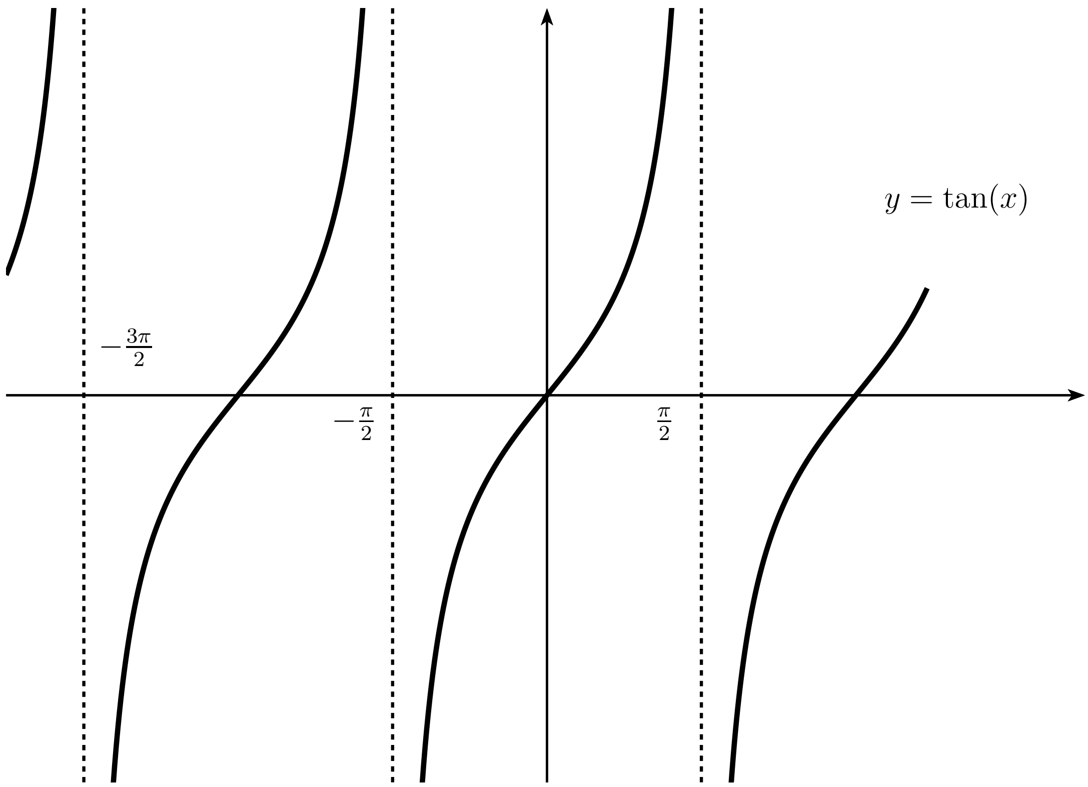
Graphes des fonctions trigonométriques

Graphes des fonctions sinus et cosinus (en radians)



$$\begin{array}{rcrcl} \sin & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;1] \\ & & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} \cos & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;1] \\ & & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

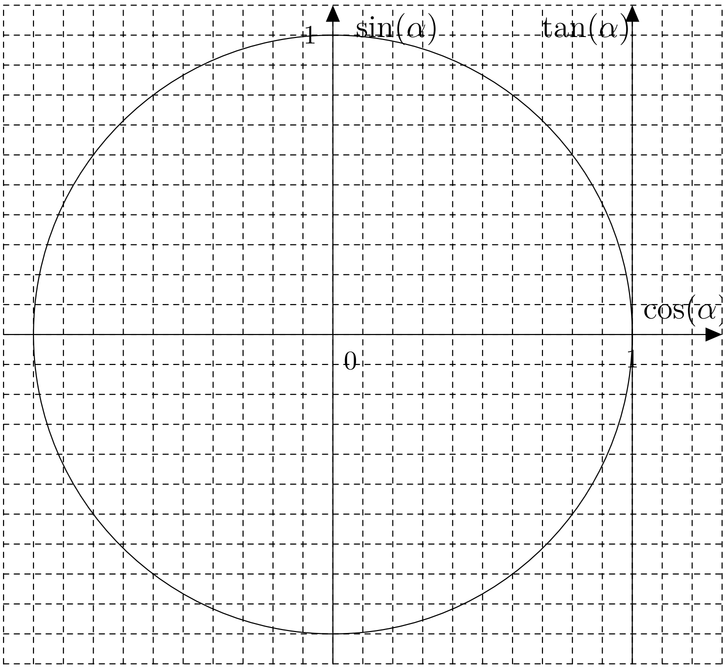
Graphe de la fonction tangente (en radians)



$$\begin{array}{rcccc} \tan & : & \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

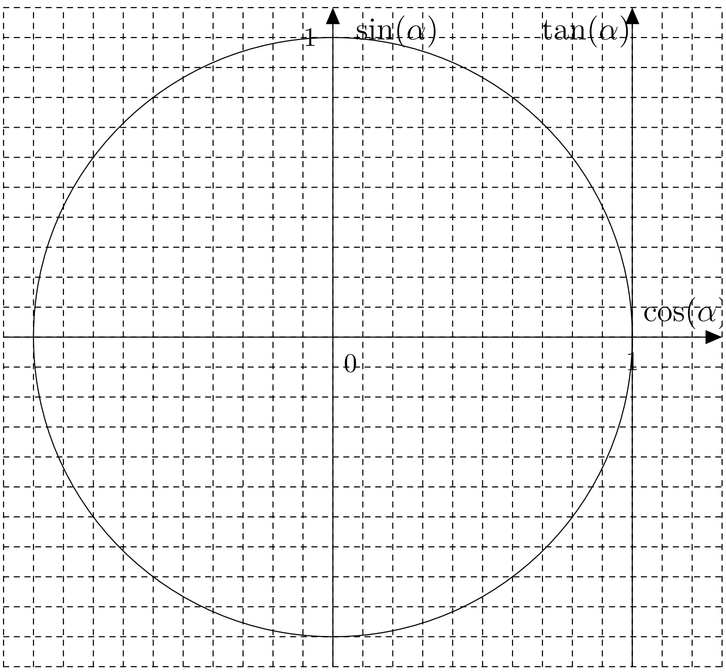
Exemple 4.3.

a) Pour quels angles entre 0 ° et 360 ° a-t-on $\sin(x) = 0.4$?



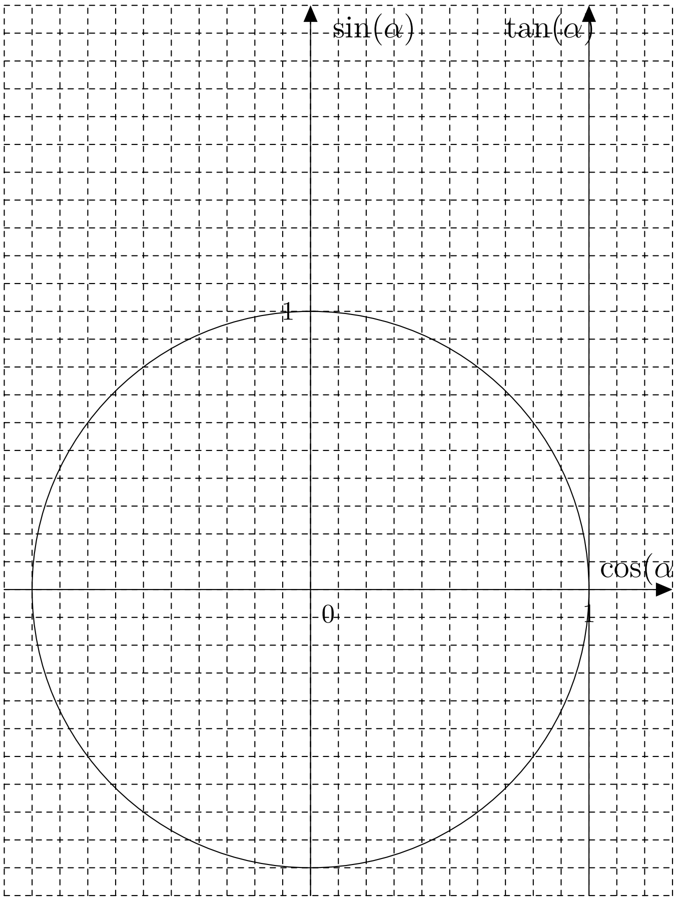
Règle :

b) Pour quels angles entre 0 ° et 360 ° a-t-on $\cos(x) = -0.4$?



Règle :

c) Pour quels angles entre 0 ° et 360 ° a-t-on $\tan(t) = 1.5$?



Règle :

Propriétés fondamentales

a) A l'aide du théorème de Pythagore, on obtient :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

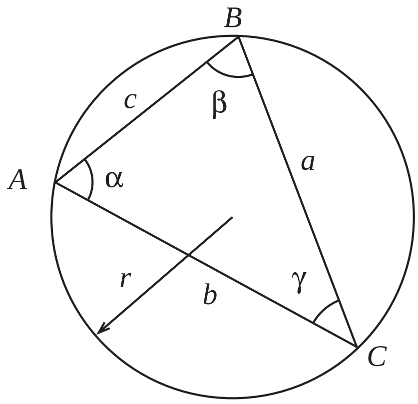
b) A l'aide du théorème de Thalès, on obtient :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

4.3 Trigonométrie du triangle quelconque

Soit ABC un triangle quelconque.
Notons

- a, b et c les longueurs des côtés du triangle,
- α, β et γ les angles intérieurs du triangles,
- r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.



Théorème 4.1 (*Théorème du cosinus*)

Il généralise le théorème de Pythagore au triangle quelconque :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Théorème 4.2 (*Théorème du sinus*)

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$

Théorème 4.3 (*Théorème de l'aire*)

Si $\sigma(ABC)$ représente l'aire du triangle ABC :

$$\sigma(ABC) = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta)$$

Exemple 4.4.

Pour déterminer la distance entre deux points A et B séparés par un obstacle, on choisit un point C depuis lequel on voit les points A et B.

On mesure ensuite les distances $AC = 100$ m et $BC = 800$ m ainsi que la mesure de l'angle $\gamma = \angle(ACB) = 100°$.

Calculer la distance AB.

Relations trigonométriques inverses cos^{-1} et sin^{-1}

Les intervalles où se trouve l'angle donné par $\cos^{-1}$ et $\sin^{-1}$ sont les suivants :

Equation	**Valeur de *k***	**Solution de la calculatrice**
$\sin(\alpha) = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\alpha = \sin^{-1}(k)$ avec $-90° \leq \alpha \leq 90°$
$\cos(\alpha) = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\alpha = \cos^{-1}(k)$ avec $0 \leq \alpha \leq 180°$

Relations trigonométriques cos^{-1} et sin^{-1} dans un triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, si l'on connaît le cosinus $c = \cos(\alpha)$ ou le sinus $s = \sin(\alpha)$ de l'angle α, il n'existe qu'un seul angle possible donné par $\alpha = \cos^{-1}(c)$ ou par $\alpha = \sin^{-1}(s)$.

Exemple 4.5.

Calculer la mesure des angles et la longueur des côtés d'un triangle ABC rectangle en C connaissant $a = 5$ et $c = 13$.

Relations trigonométriques cos^{-1} et sin^{-1} dans un triangle quelconque

a) Dans un triangle quelconque, si l'on connaît le cosinus $c = \cos(\alpha)$ de l'angle α, il n'existe qu'un seul angle possible donné par $\alpha = \cos^{-1}(c)$

b) Dans un triangle quelconque, si l'on connaît le sinus $s = \sin(\alpha)$ de l'angle α, il existe en général deux angles possibles donnés par $\alpha = \sin^{-1}(s)$ et $\alpha = 180° - \sin^{-1}(s)$

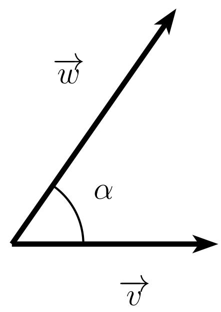
Exemple 4.6.

Calculer la mesure des angles et la longueur des côtés d'un triangle ABC connaissant $b = 20$, $c = 12$ et $\alpha = 10°$

4.4 Expression trigonométrique du produit scalaire

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \ \cos(\alpha)$$

où α est l'angle formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (angle, compris entre 0° et 180°, formé par les vecteurs placés à la même origine).



Exemple 4.7.

a) Calculer l'angle entre les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Calculer la mesure de l'angle α du triangle ABC de sommets

$$A(1;2), B(5;-7) \text{ et } C(6;5)$$

4.5 Exercices

4.1

a) Exprimer les fonctions trigonométriques des angles 135°, 320° et −160° à l'aide des rapports trigonométriques du triangle rectangle.

b) Donner les expressions suivantes en fonction de t uniquement :

1) $\cos(270° + t)$
2) $\sin(-t - 270°)$
3) $\sin(t - 270°)$
4) $\cos(t - 270°)$
5) $\cos(-\frac{19\,\pi}{2} - t)$

4.2

Résoudre dans $[0; 360°[$ les équations suivantes.

a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

b) $\sin(t) = 0.829$

c) $\cos(t) = -1.43$

d) $\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.3

Est-il possible de **construire** un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse mesure 7.5 cm et dont l'un des côtés adjacent à l'angle droit mesure 3.9 cm ?

4.4

Construire les triangles ABC dont on connaît $a = 6$ cm, $b = 5$ cm et $\beta = 45°$.

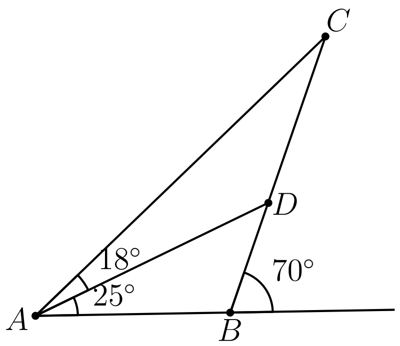
4.5

Après avoir construit chaque triangle donné par les éléments ci-dessous, le résoudre :

a) $a = 8$, $b = 11$ et $\beta = 14°$ b) $b = 11$, $c = 9$ et $\gamma = 22°$ c) $a = 11$, $c = 12$ et $\alpha = 154°$

4.6

Calculer la longueur des segments BC, BD, AD et AB, sachant que la longueur du segment AC vaut 88 cm.



4.7

Un triangle ABC est donné par $a = 26.4$, $b = 16.2$ et $c = 20.7$. Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4.8

D'un quadrilatère convexe $ABCD$, on donne l'angle en A : 110°, ainsi que les longueurs des quatres côtés : $AB = 3$, $BC = 6$, $CD = 6$ et $DA = 5$. Calculer l'aire et les angles du quadrilatère.

4.9

Sur la diagonale AC d'un rectangle $ABCD$, on considère un point O tel que $\widehat{BOC} = 57°$. Sachant que $AB = 36$ et $AO = 24$, calculer BC.

4.10

Dans le parallélogramme $ABCD$, on connaît $\overline{AB} = 30$, $\overline{BC} = 20$ et on sait que l'angle en B vaut 60°. Calculer la longueur des diagonales de ce parallélogramme ainsi que l'angle déterminé par celles-ci. Trouver enfin l'aire du quadrilatère $ABCD$.

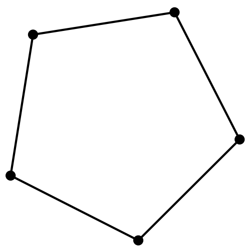
4.11

Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux points A et B distants de d mètres. On mesure les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ainsi que l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A. Quelle est l'altitude de C si celle de A vaut h ?

Application numérique : $d = 400$ m, $h = 1'000$ m, $\widehat{BAC} = 35°$, $\widehat{ABC} = 110°$ et $\theta = 20°$.

4.12

Le Pentagone est le plus grand bâtiment administratif au monde, si l'on considère la surface occupée. La base du bâtiment a la forme d'un pentagone régulier, dont chaque côté mesure 276 m.
Déterminer l'aire de la base du bâtiment.



4.13

Un hélicoptère est en vol stationnaire 600 m au-dessus du sommet C d'une montagne qui culmine à 1'560 m d'altitude. Du sommet C et de l'hélicoptère, on peut voir le sommet S d'un deuxième pic plus élevé. Depuis l'hélicoptère, le sommet S est vu sous un angle de dépression (angle vertical entre le rayon visuel descendant et l'horizontale) de 43° ; depuis le petit sommet C, on voit le sommet S sous un angle d'élévation (angle vertical entre le rayon visuel montant et l'horizontale) de 18°.
Calculer la distance entre les deux sommets, ainsi que l'altitude du sommet S.

4.14

Pour calculer la distance séparant deux points A et B situés sur les rives opposées d'un fleuve, un géomètre choisit un point C situé sur la même rive à 240 m du point A. Il détermine alors que les angles $\angle BAC$ et $\angle ACB$ mesurent respectivement $63°24'$ et $54°6'$. Calculer la distance entre les points A et B (au cm près).

4.15

Pour un observateur, la direction de visée du sommet d'un pylône fait un angle de 53.6° avec l'horizontale ; en reculant de 7 m sur le sol horizontal dans le plan de visée, l'angle d'élévation n'est plus que 32°.
Quelle est la hauteur du pylône sachant que l'œil de l'observateur est à 1,7 m du sol ?

4.16

Une tour de 50 m de haut est située sur le flanc d'une colline. Depuis le pied de la tour, on descend de 220 m le long du flanc de la colline et on mesure l'angle vertical θ sous lequel on voit la tour, soit $\theta = 12.5°$.
Calculer l'angle d'inclinaison du flanc de la colline relativement à l'horizontale.

4.17

A l'origine la Tour de Pise était perpendiculaire à la surface du sol et mesurait 54 m de hauteur. Comme elle s'enfonce dans le sol (en pivotant relativement au centre de sa base que l'on suppose fixe), elle penche maintenant d'un angle θ relativement à la verticale. Lorsque le centre du haut de la tour est observé à partir d'un point du sol (plat) distant de 45 m du centre de sa base (dans le plan vertical contenant la tour penchée, du côté où penche celle-ci), l'angle d'élévation est de 53.3°.
Calculer l'angle θ, ainsi que la distance séparant la position actuelle du centre du haut de la tour à sa position lors de l'édification de la tour.

4.18

On donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Calculer la mesure des angles $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{d})$, $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c})$, $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{d})$ et $\sphericalangle(\vec{c}, \vec{d})$.

4.19

On donne un triangle ABC par ses sommets $A(-2;-3)$, $B(0;4)$ et $C(7;5)$.
Calculer la mesure des angles intérieurs du triangle ABC.

4.20

On donne les droites $a = AB$ et $b = CD$ par les points $A(1;5)$, $B(7;3)$, $C(2;1)$ et $D(-3;1)$.
Calculer l'angle aigu formé par les droites a et b.

4.21

On donne le quadrilatère $ABCD$ de sommets $A(-4;0)$, $B(0;5)$, $C(7;1)$ et $D(1;-2)$.
Calculer les angles intérieurs du quadrilatère et calculer son aire.

4.6 Réponses

4.1

a) $\sin(135°) = \sin(45°), \cos(135°) = -\cos(45°), \tan(135°) = -\tan(45°)$
$\sin(320°) = -\sin(40°), \cos(320°) = \cos(40°), \tan(320°) = -\tan(40°)$
$\sin(-160°) = -\sin(20°), \cos(-160°) = -\cos(20°), \tan(-160°) = \tan(20°)$

b) 1) $\cos(270° + t) = \sin(t)$
2) $\sin(-t - 270°) = \cos(t)$
3) $\sin(t - 270°) = \cos(t)$
4) $\cos(t - 270°) = -\sin(t)$
5) $\cos(-\frac{19\,\pi}{2} - t) = \sin(t)$

4.2

a) $S = \{120°; 240°\}$

b) $S = \{56°; 124°\}$

c) Pas de solution.

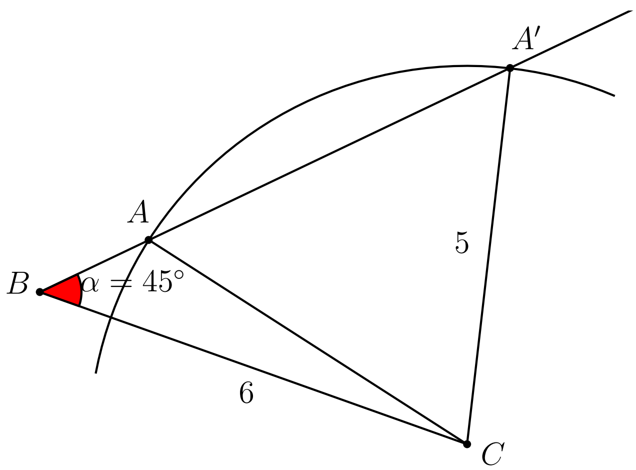
d) $S = \{240°; 300°\}$

4.3

C'est possible.

4.4

Deux triangles sont possibles:



4.5

a) $c = 18.6$, $\alpha = 10.1°$, $\gamma = 155.9°$; b) $a = 18.2/2.2$, $\alpha = 130.8°/5.3°$, $\beta = 27.3°/152.8°$; c) impossible.

4.6

$BC \simeq 63.8$ cm ; $BD \simeq 25.4$ cm ; $AD \simeq 56.5$ cm ; $AB \simeq 42.51$ cm.

4.7

Le rayon mesure 13.2.

4.8

Aire= 23.7 ; $\beta = 101.3°$; $\gamma = 67.3°$; $\delta = 81.4°$.

4.9

$BC = 15,3$

4.10

Les diagonales mesurent environ 26.46 et 43.59 unités. L'aire du parallélogramme vaut environ 519.6 unités carrées. Les angles mesurent 64.29° et 115.71°.

4.11

L'altitude du sommet C est 1224.13 m.

4.12

La surface du pentagone vaut environ 131 059 m^2.

4.13

Distance de C à S : 502 m ; altitude : 1715 m.

4.14

Distance AB : 219.17 m

4.15

Hauteur du pylône : 9.81 m

4.16

5.3°

4.17

$\theta = 5.2°$; 4.92 m

4.18

18.4° ; 90° ; 101.3° ; 71.6° ; 29.7°

4.19

$\alpha = 32.4°$; $\beta = 114.1°$; $\gamma = 33.5°$

4.20

18.4°

4.21

$\alpha = 73.1°$; $\beta = 98.9°$; $\gamma = 56.3°$; $\delta = 131.6°$

Aire : 39 [u^2]

Chapitre 5

Statistiques

5.1 Symbole somme Σ

Le symbole Σ, *sigma* majuscule de l'alphabet grec, permet abréger l'écriture d'une somme avec beaucoup de termes.

$$\text{Si } m < p, \text{ on écrit } : x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_{p-1} + x_p = \sum_{k=m}^{p} x_k$$

Exemple 5.1.

a) On donne $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 9$ et $x_4 = 27$.

Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i =$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} i =$

c) $13 + 14 + 15 + \cdots + 24 = \displaystyle\sum_{i=...}^{...} ...$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(2i+1) =$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2k \ + \ 1 =$

f) $3 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 16 + 6 \cdot 25 = \displaystyle\sum_{i=...}^{...} ...$

g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i =$

h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} (2i - 5) =$

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i - 5) =$

5.2 Statistique descriptive, terminologie

Statistique

Science qui traite des éléments suivants :

- Récolte de données
- Classification des données
- Représentation et analyse des données (**statistique descriptive**)
- Etude des conclusions pouvant être tirées de l'analyse des données (**inférence statistique**)

Vocabulaire statistique

- **Population**
  Ensemble de toutes les personnes, de tous les objets ou de tous les faits sur lesquels porte l'étude

- **Unité statistique ou individu**
  Elément de la population

- **Recensement**
  Etude réalisée sur tous les individus de la population.

- **Sondage**
  Etude réalisée sur un **échantillon** de la population, soit un sous-ensemble de la population (lorsque la population est trop grande pour être étudiée dans son ensemble)

- **Caractère** ou **variable statistique**
  Caractéristique étudiée dans la population

- **Modalités** ou **valeurs**
  Différents états ou valeurs prises par la variable statistique.

Remarques

a) Si l'échantillon est choisi au hasard, que sa taille est suffisamment grande et qu'il peut être considéré comme représentatif, on peut généraliser certains résultats obtenus à l'ensemble de la population.

b) On emploie une lettre majuscule (X, Y ou Z) pour désigner une variable, et une lettre minuscule (x, y ou z) pour désigner sa valeur

Exemple 5.2.
Dans un sondage, on interroge 1000 électeurs choisis au hasard parmi tous les électeurs de Suisse afin de connaître leur intention de vote relativement à la prochaine initiative.

Population :

Unité statistique :

Echantillon :

Caractère X : Intention de vote

Modalités x :

Caractère Y : Age en année

Modalités y :

Caractère Z : Sexe

Modalités z :

Caractère T :

Modalités t :

Exemple 5.3.
Chaque année, l'Office fédéral de la statistique dresse le bilan des infractions criminelles commises en Suisse en utilisant les données inscrites sur un formulaire par le policier qui rapporte l'infraction.

Population :

Unité statistique :

Echantillon :

Caractère X :

Modalités x :

Variables qualitative et quantitative

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \text{Variable} \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & \text{qualitative} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \text{quantitative} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{nominale} & & \text{ordinale} & & \text{discrète} & & \text{continue}
\end{tikzcd}
$$

- **variable quantitative** : les valeurs prises sont des nombres
  - **variable quantitative discrète** : les valeurs prises sont isolées les unes des autres
  - **variable quantitative continue** : les valeurs prises varient dans un intervalle

- **variable qualitative** : les valeurs prises ne sont pas des nombres
  - **variable qualitative ordinale** : on peut établir une relation d'ordre entre ses modalités
  - **variable qualitative nominale** : on ne peut pas établir une relation d'ordre entre ses modalités

5.3 Variables qualitative et quantitative discrète

Tableaux de distribution

On note

- n la taille de l'échantillon
- $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les valeurs prises par la variable statistique X dans l'échantillon

Exemple 5.4.

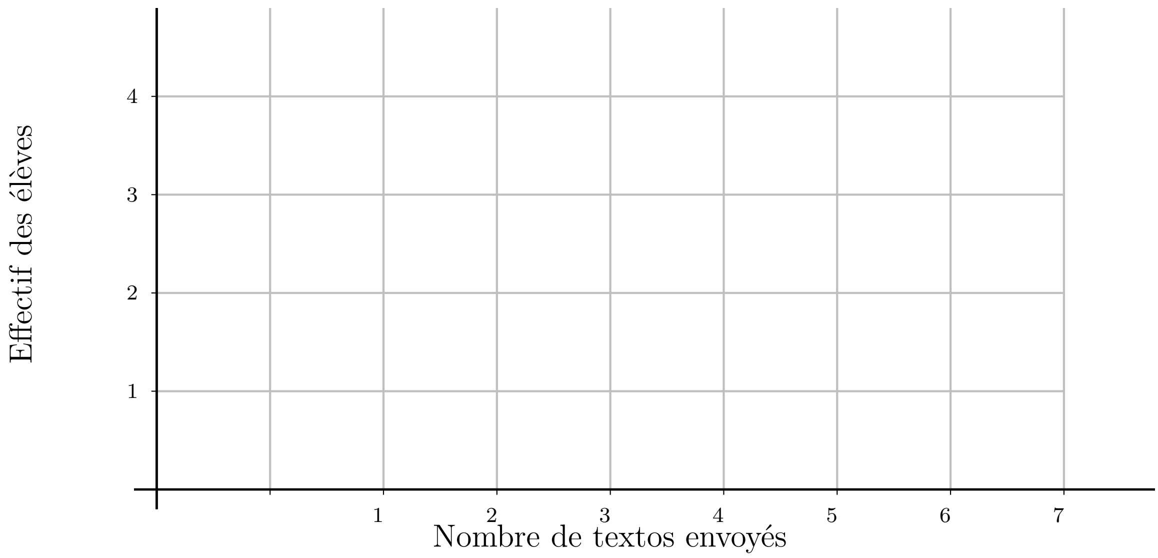
On demande à une classe de gymnasiens combien de textos chacun a envoyé durant une période de cours donnée à l'insu de l'enseignant. On récolte les données suivantes :

$$\{2, 2, 4, 0, 3, 5, 3, 1, 0, 2, 4, 7, 5, 3, 2\}$$

Répartition de 15 élèves selon le nombre de textos envoyés durant une période de cours

Nombre de textos	**Effectif d'élèves ou fréquence absolue**	**Pourcentage d'élèves ou fréquence relative**
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
Total		

Diagramme en bâtons

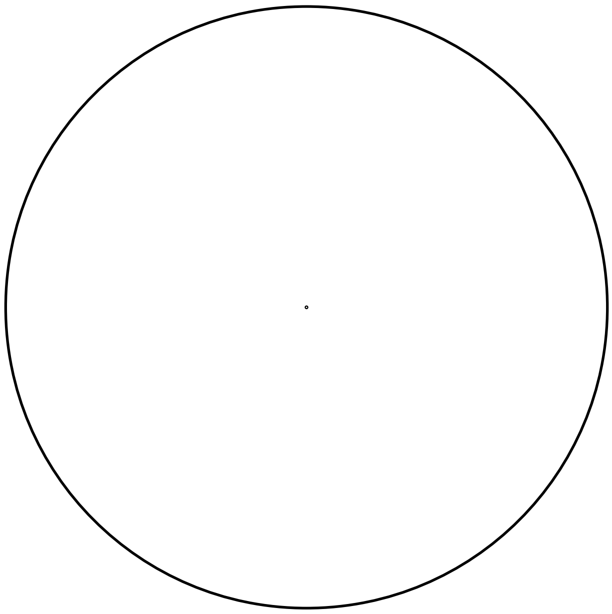


Exemple 5.5.

Répartition des sièges du Conseil National selon les partis, législature 2019-2023

	UDC	*PSS*	*PLR*	*PES*	*PDC*	*PVL*	*divers*	***Total***
Effectif	*53*	*39*	*29*	*28*	*25*	*16*	*10*	*200*
Pourcentage								
Angle en degré								

Diagramme circulaire



5.4 Variables quantitatives continues et discrètes à grand nombre de valeurs

- On groupe les données en **classes** (intervalles de nombres réels)
- On fait correspondre à chaque classe l'effectif ou le pourcentage des données qu'elles contiennent.

Exemple 5.6.

Dans une pépinière, on a mesuré la hauteur d'une quarantaine de sapins âgés de 8 ans, destinés aux décorations de Noël. Les hauteurs obtenues en cm sont les suivantes

138	164	150	132	144	125	149	157	146	158
140	147	136	148	152	144	168	126	138	**176**
163	**119**	154	165	146	173	142	147	135	153
140	135	161	145	135	142	150	156	145	128

Répartition de 40 sapins selon leur hauteur en cm

Hauteur X [cm]	**Effectif de sapins**	**Pourcentage**
$[110; 120[$		
$[120; 130[$		
$[130; 140[$		
$[140; 150[$		
$[150; 160[$		
$[160; 170[$		
$[170; 180[$		
Total		

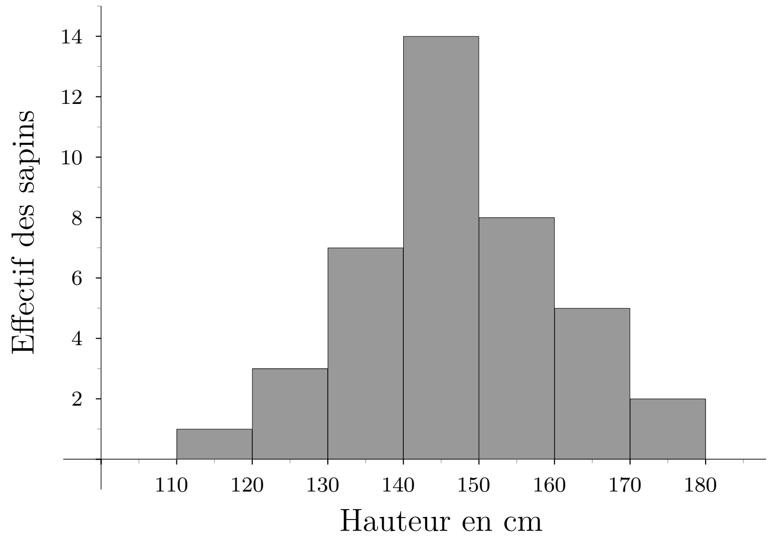
Analyse des résultats :

Représentations graphiques

Histogramme

- Les rectangles sont adjacents
- les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs ou aux pourcentages des classes

Répartition de 40 sapins selon leur hauteur



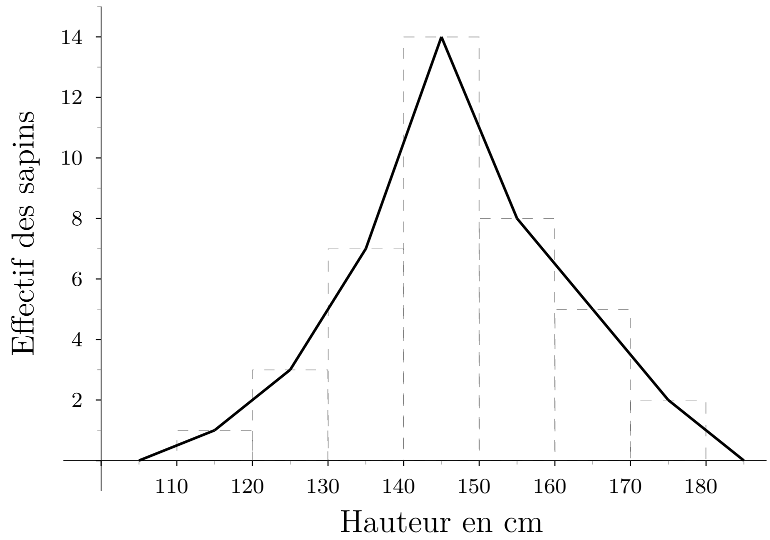
Analyse des résultats :

Polygone des effectifs ou des fréquences

- Pour construire le polygone des fréquences, on joint par des segments de droites les milieux respectifs des côtés supérieurs des rectangles de l'histogramme
- On ferme le polygone en ajoutant à gauche et à droite de l'histogramme une classe d'effectif nul

Exemple 5.7. (voir exemple 5.6)

Répartition de 40 sapins selon leur hauteur



Analyse des résultats :

Histogrammes à classes d'amplitudes inégales

- Il est en principe préférable d'avoir des classes de même amplitude
- Si une ou plusieurs classes contiennent peu de données, voire aucune, plusieurs classes peuvent être regroupées en une seule d'amplitude plus large
- Une signification particulière pour les classes peut conduire à la création de classes d'amplitudes inégales

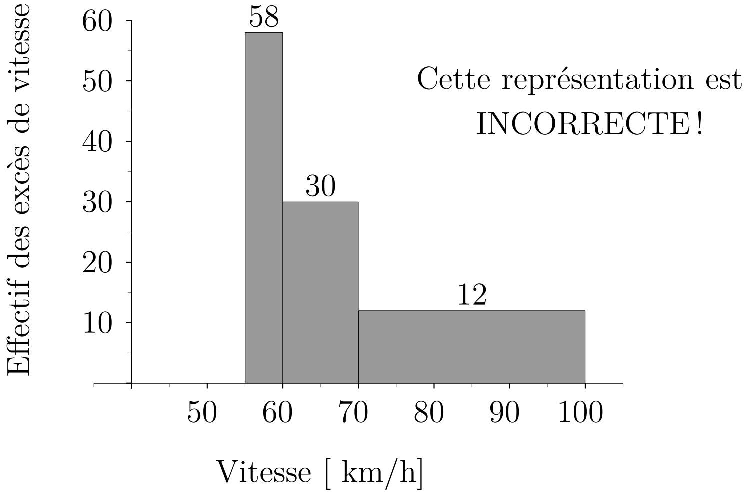
Exemple 5.8.

Lors d'un contrôle radar, les véhicules ayant dépassé la vitesse de 55 km/h ont été enregistrés. Trois classes ont été définies, correspondant chacune à un niveau de gravité associé à un montant d'amende spécifique.

Répartition des excès de vitesse selon leur gravité

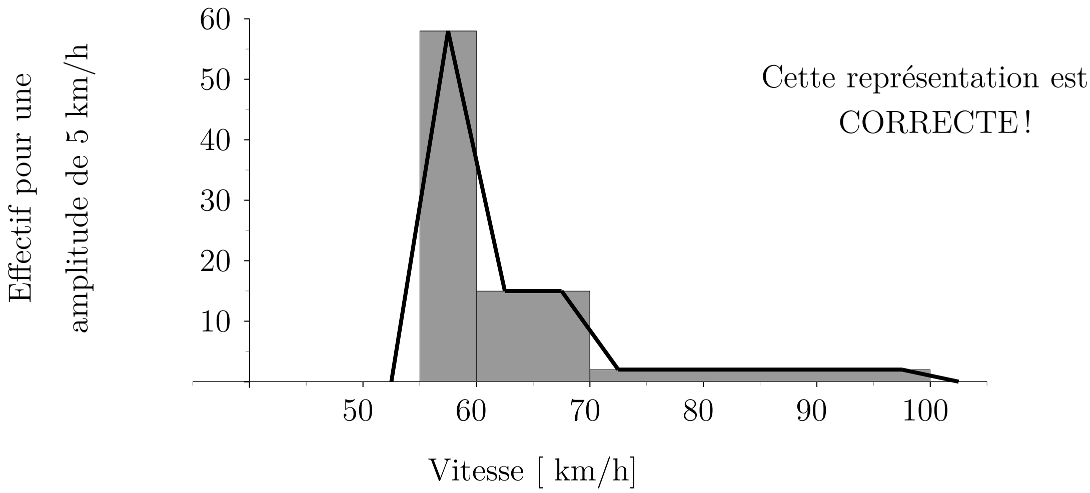
Classe	Vitesse [km/h]	Fréquence absolue
1	$[55; 60[$	58
2	$[60; 70[$	30
3	$[70; 100]$	12
	Total	100

Si l'**amplitude des classes varie**, on respecte la **règle des aires** qui impose que l'aire de chaque rectangle est proportionnelle à la fréquence de la classe qu'il représente !



Classe	Vitesse [km/h]	Effectif	Amplitude	Effectif rectifié
1	$[55; 60[$	58		
2	$[60; 70[$	30		
3	$[70; 100]$	12		
	Total	100		

Répartition des excès de vitesse selon leur gravité



Classes ouvertes

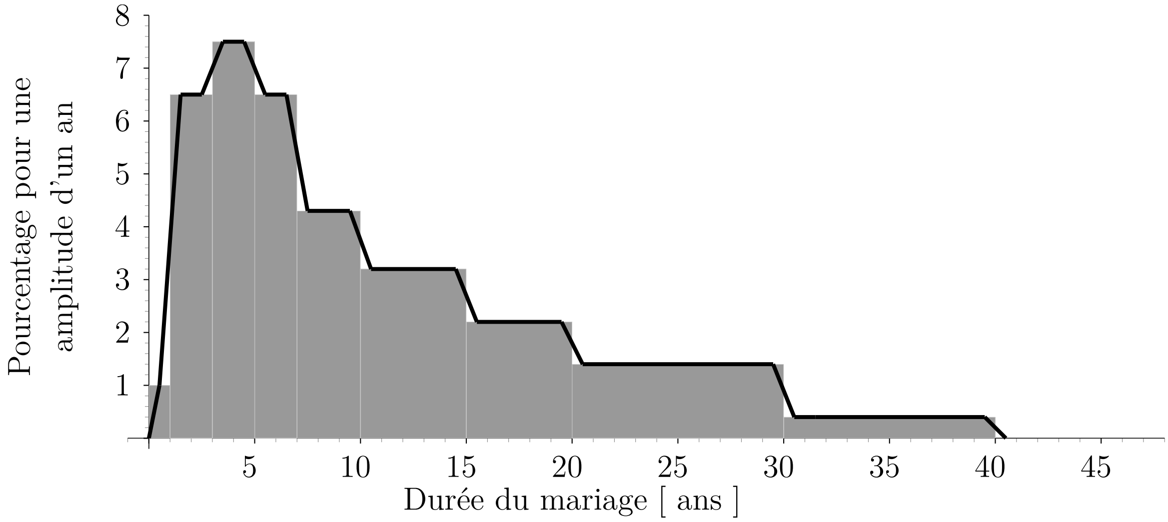
- On parle de **classe ouverte** lorsque la limite inférieure de la première classe ou la limite supérieure de la dernière classe n'est pas clairement définie
- Si une classe est ouverte, on construit l'histogramme ou le polygone des fréquences en **fermant cette classe** et en lui donnant la **même amplitude que sa classe adjacente**

Exemple 5.9.

Le tableau suivant donne le nombre de divorces en Suisse entre 1989 et 1993 en fonction de la durée en années du mariage.

Durée	Nombre	%	Amplitude	% corrigé
$[0;1[$	142	1%		
$[1;3[$	1951	13%		
$[3;5[$	2218	15%		
$[5;7[$	1954	13%		
$[7;10[$	1915	13%		
$[10;15[$	2277	16%		
$[15;20[$	1576	11%		
$[20;30[$	2054	14%		
$\geqslant 30$	577	4%		
Total	14664	100%		

Répartition des divorces en Suisse entre 1989 et 1993 selon la durée du mariage



Polygone des fréquences cumulées

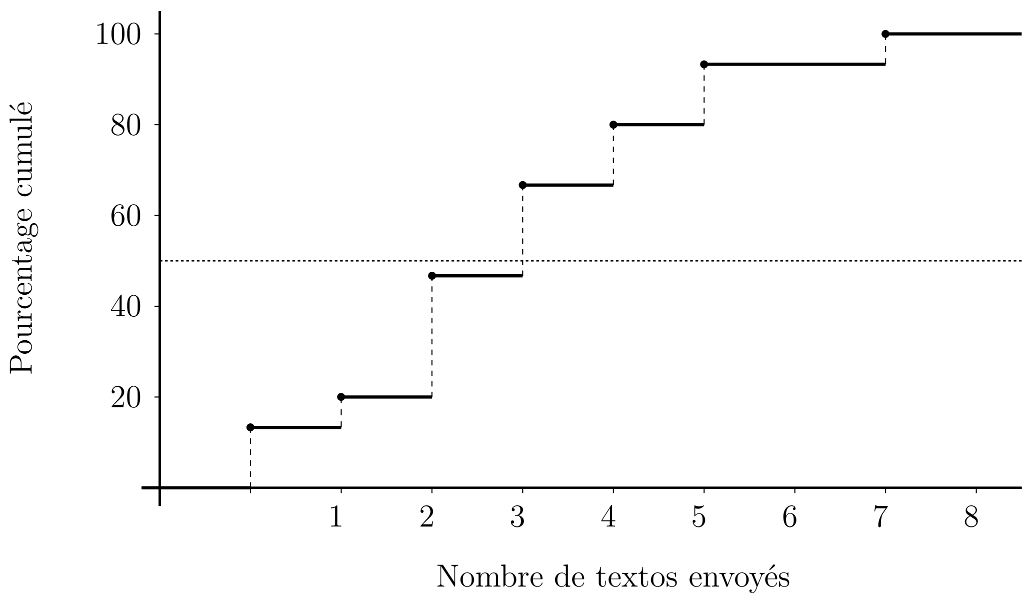
- On associe à **chaque valeur** de la variable un **effectif cumulé** ou un **pourcentage cumulé** qui est égal à la somme des effectifs ou des pourcentages des valeurs inférieures ou égales à la valeur traitée.

Exemple 5.10. (voir exemple 5.4)

Répartition de 15 élèves selon le nombre de textos envoyés durant une période de cours

Nombre de textos	Effectif	Pourcentage	Effectif cumulé	Pourcentage cumulé
0	2	13.3%		
1	1	6.7%		
2	4	26.7%		
3	3	20.0%		
4	2	13.3%		
5	2	13.3%		
6	0	0.0%		
7	1	6.7%		
Total	**15**	**100%**		

Fréquences cumulées du nombre de textos envoyés durant une période de cours par 15 élèves



Données réparties en classes

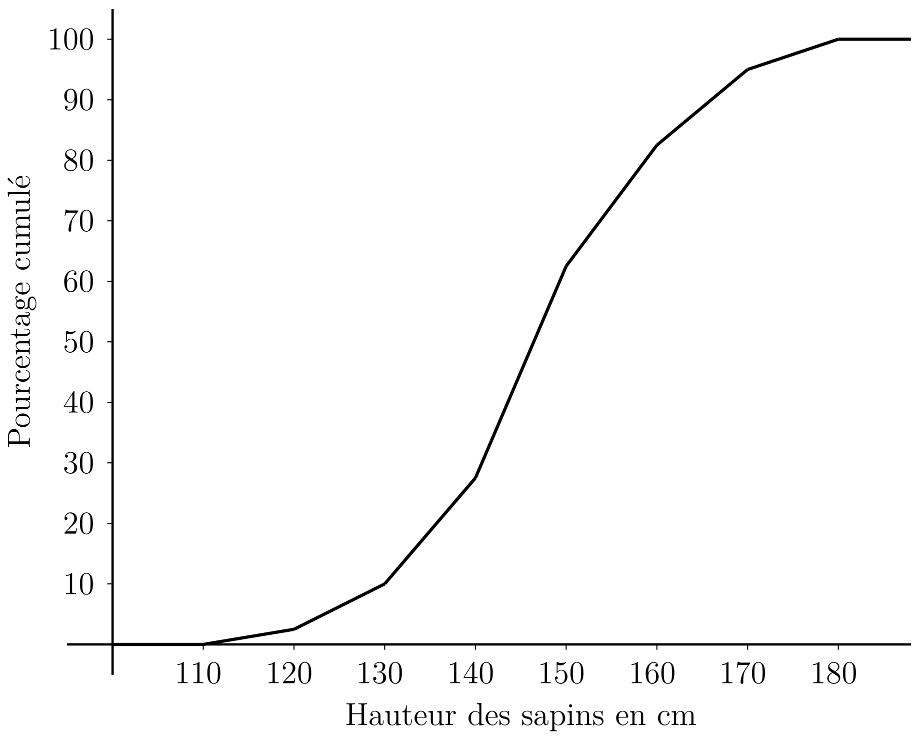
- On associe à **chaque classe** de la variable un **effectif cumulé** ou un **pourcentage cumulé** qui est égal à la somme des effectifs ou des pourcentages des classes inférieures ou égales à la valeur traitée.

Exemple 5.11. (voir exemple 5.6)

Répartition des sapins selon leur hauteur en cm

Hauteur X **[cm]**	**Effectif**	**pourcentage**	**Effectif cumulé**	**pourcentage cumulé**
[110 ;120[	1	2.5%		
[120 ;130[	3	7.5%		
[130 ;140[	7	17.5%		
[140 ;150[	14	35.0%		
[150 ;160[	8	20.0%		
[160 ;170[	5	12.5%		
[170 ;180[	2	5.0%		
Total	40	100%		

Polygone des fréquences cumulées de la hauteur de 40 sapins âgés de 8 ans



5.5 Paramètres de position

Pour affiner l'analyse de données quantitatives, on utilise des **paramètres de position** ou **mesures de tendance centrale** qui permettent de situer précisément la position du « centre » des données, la notion de centre étant à définir.

5.5.1 Moyenne

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n données d'une série statistique quantitative. La moyenne, notée μ (dans le cas du recensement) ou $\bar{x}$ (dans le cas du sondage), est définie par :

$$\boxed{\bar{x} \text{ ou } \mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Remarque

Le calcul de la moyenne peut aussi se faire à partir du tableau de répartition :

a) Si la variable statistique quantitative discrète X prend les k valeurs $a_1, \ldots a_k$ avec des effectifs $n_1, \ldots n_k$ ou des fréquences relatives $f_1, \ldots f_k$, on a :

$$\bar{x} \text{ ou } \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot n_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot f_i$$

b) Si les données sont répartis en classe, on prend comme valeurs $a_1, \ldots a_k$ les **centres des classes**.

Exemple 5.12. (voir exemple 5.4)

Répartition des élèves selon le nombre de textos envoyés durant une période de cours

Nombre de textos a_j	Effectif n_j	Fréquence relative f_j
0	2	$2/15 \cong 0.133 = 13.3\%$
1	1	$1/15 \cong 0.067 = 6.7\%$
2	4	$4/15 \cong 0.267 = 26.7\%$
3	3	$3/15 \cong 0.200 = 20.0\%$
4	2	$2/15 \cong 0.133 = 13.3\%$
5	2	$2/15 \cong 0.133 = 13.3\%$
6	0	$0/15 \cong 0.000 = 0.0\%$
7	1	$1/15 \cong 0.067 = 6.7\%$
Total	15	

Calculer le nombre moyen de textos envoyés au cours d'une période.

Exemple 5.13. (voir exemple 5.8)

Répartition des excès de vitesse selon leur gravité

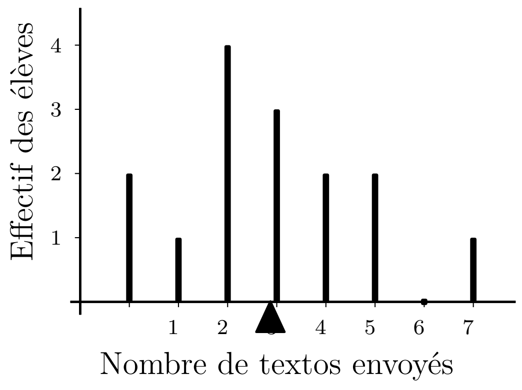
Classe j	Vitesse [km/h]	Effectif n_j	Centre de la classe c_j
1	$[55; 60[$	58	$\dfrac{55+60}{2} = 57.5$
2	$[60; 70[$	30	$\dfrac{60+70}{2} = 65$
3	$[70; 100[$	12	$\dfrac{70+100}{2} = 85$
	Total	100	

Calculer la vitesse moyenne des véhicules en excès de vitesse.

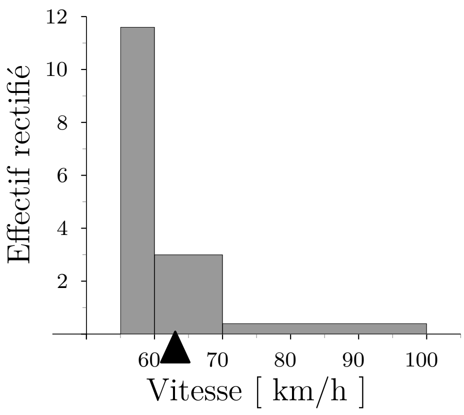
Représentation graphique de la moyenne

Si on place un pivot, sous l'axe horizontal, au point correspondant à la moyenne, celle-ci coïncide avec le centre d'équilibre du diagramme.

Répartition des élèves selon le nombre de textos envoyés durant un cours



Répartition des excès de vitesse selon leur gravité



5.5.2 Le mode et la classe modale

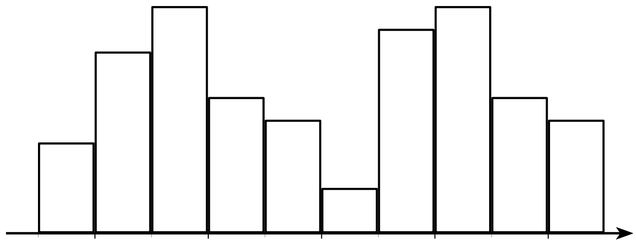
Le **mode** d'une série statistique est la valeur ou la catégorie qui revient le plus souvent.

La **classe modale** est la classe qui regroupe le plus grand nombre de données. On considère le centre de cette classe comme une approximation du mode de la distribution.

Un échantillon peut avoir un ou plusieurs mode. On parle alors de distribution **unimodale, bimodale, trimodale...**.

Exemple 5.14.

Un centre de fitness mixte a fait une étude sur le poids de ses membres. La distribution des données recueillies est représentée par l'histogramme ci-contre. L'explication de la cause de cette bimodalité est laissée à la perspicacité du lecteur.



5.5.3 La médiane

Exemple 5.15.

Les salaires des sept employés d'une petite entreprise sont donnés ci-après.

Salaire en CHF	4300	5100	6200	6750	9300	12800	21000

Calculer le salaire moyen des employés de cette entreprise. Est-il représentatif du salaire « central » de cette entreprise ?

La **médiane**, notée $\tilde{x}$ ou $x_{1/2}$, partage l'échantillon en deux parts de taille égale. Lorsque les données sont rangées par ordre croissant, la médiane, est :

- La valeur centrale de la liste lorsque le nombre de données est impair,
- la moyenne des deux valeurs centrales de la liste lorsque le nombre de données est pair

Si $x_{(i)}$ désigne la $i-$ème valeur de la liste triée par ordre croissant, la formule de calcul de la médiane est

$$\boxed{\tilde{x} = x_{1/2} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n \text{ impair} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right), & n \text{ pair} \end{cases}}$$

Exemple 5.16.

Les salaires des sept employés d'une petite entreprise sont donnés ci-après.

Salaire en CHF	4300	5100	6200	6750	9300	12800	21000

Déterminer le salaire médian de la petite entreprise.

Exemple 5.17.

Déterminer la médiane des notes suivantes :

$$4, 4, 5, 3, 2, 4, 6, 4, 5, 6, 3, 5, 6, 5$$

Médiane dans le cas de données groupées en classes

- On repère la classe, appelée **classe médiane**, dans laquelle la fréquence cumulée franchit pour la première fois les 50 %
- Comme on considère que les données sont distribuées de manière uniforme dans les classes, on utilise la proportionnalité pour calculer la médiane.

Exemple 5.18. (voir exemple 5.6)

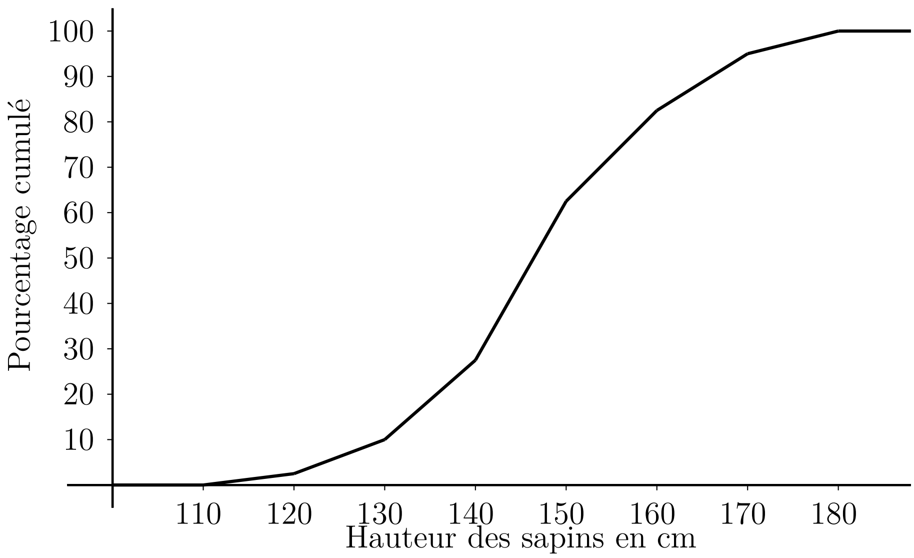
Répartition des sapins selon leur hauteur en cm

Hauteur X **[cm]**	**Effectif**	**pourcentage**	**Effectif cumulé**	**pourcentage cumulé**
[110 ;120[	1	2.5%	1	2.5%
[120 ;130[	3	7.5%	4	10.0%
[130 ;140[	7	17.5%	11	27.5%
[140 ;150[	14	35.0%	25	62.5%
[150 ;160[	8	20.0%	33	82.5%
[160 ;170[	5	12.5%	38	95.0%
[170 ;180[	2	5.0%	40	100.0%
Total	40	100%		

Déterminer la classe médiane et calculer la médiane.

Faire ressortir graphiquement la médiane sur le polygone des fréquences cumulées représenté ci-dessous.

Polygone des fréquences cumulées de la hauteur de 40 sapins âgés de 8 ans

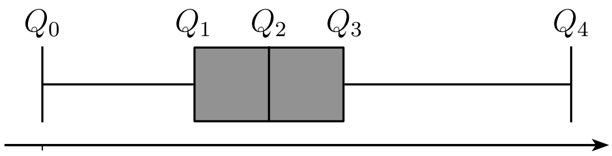


5.5.4 Quartiles et Box-Plot

Les **quartiles** partagent la série statistique en quatre parties de taille égale.

- Les **quartiles**, notés Q_1, Q_2, Q_3, partagent la série en quatre parties comprenant chacune 25% des données. Q_1 est le quartile inférieure, Q_3 est le quartile supérieur et Q_2 est égal à la médiane
- La représentation des quartiles Q_1, Q_2, Q_3 complétés avec la valeur minimale notée Q_0 et la valeur maximale noteé Q_4 forment le **résumé en cinq points** et se représente par un **Box-Plot**

Un box-plot se présente de la manière suivante :



Exemple 5.19. (voir exemple 5.4)

Répartition des élèves selon le nombre de textos envoyés durant une période de cours

Nombre de textos a_j	**Effectif n_j**
0	2
1	1
2	4
3	3
4	2
5	2
6	0
7	1
Total	15

Déterminer les quartiles et représenter le Box-Plot pour le nombre de textos envoyés par les 15 élèves au cours d'une période.

Exemple 5.20. (voir exemple 5.6)

Répartition des sapins selon leur hauteur en cm

Hauteur X **[cm]**	**Effectif**	**pourcentage**	**Effectif cumulé**	**pourcentage cumulé**
[110 ;120[	1	2.5%	1	2.5%
[120 ;130[	3	7.5%	4	10.0%
[130 ;140[	7	17.5%	11	27.5%
[140 ;150[	14	35.0%	25	62.5%
[150 ;160[	8	20.0%	33	82.5%
[160 ;170[	5	12.5%	38	95.0%
[170 ;180[	2	5.0%	40	100.0%
Total	40	100%		

Déterminer les quartiles et représenter le Box-Plot de la hauteur des sapins.

5.6 Paramètres de dispersion

Un paramètre de tendance centrale décrit uniquement une « position moyenne » d'une série de données : il ne donne pas d'information quant à leur dispersion. Par exemple, les séries $S_1 = \{3, 4, 4, 4, 4, 4, 5\}$, $S_2 = \{1, 3, 4, 4, 5, 5, 6\}$ et $S_3 = \{1, 1, 4, 4, 6, 6, 6\}$ possèdent la même moyenne et la même médiane, toutes deux égales à 4, mais il est clair que les données des séries 2 et 3 sont plus dispersées que celles de la série 1. S'il s'agit des notes obtenues lors d'un test dans une petite classe, on se rend bien compte que les trois séries représentent des situations fort différentes. Il faut donc une **mesure de dispersion** pour compléter l'analyse statistique.

5.6.1 Etendue

- L'**étendue** E est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série :

$$E = x_{max} - x_{min}$$

5.6.2 Variance et écart-type

On veut mesurer la dispersion des données $x_1, x_2, \ldots, x_n$ autour de leur moyenne $\bar{x}$.

Remarque

La somme des écarts à la moyenne est nulle $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.

La dispersion des données autour de leur moyenne est définie par :

- La **variance** des données $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est la moyenne des carrés des écarts $x_i - \bar{x}$:

$$Variance = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- Afin d'avoir une **mesure de dispersion de même unité que les données**, on définit l'**écart-type**, noté s pour un échantillon et σ pour une population, en prenant la racine carrée de la variance.

$$\boxed{s \text{ ou } \sigma = \sqrt{Variance} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

On note fréquemment la variance s^2 pour un échantillon et σ^2 pour une population

Pour rendre le calcul plus agréable de la variance, on utilise le résultat suivant, dû au mathématicien allemand Johann Samuel König (1712-1757) :

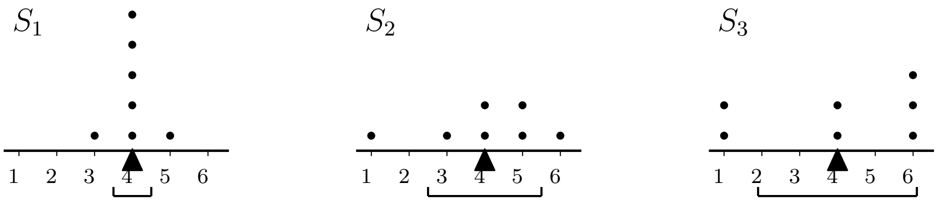
$$\boxed{s^2 \text{ ou } \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right) - \bar{x}^2}$$

Utilité de l'écart-type pour l'analyse de données.

Généralement, on trouve une grande partie des données d'une distribution dans l'intervalle $[\bar{x} - s\ ; \bar{x} + s\ ]$ pour un échantillon ou $[\mu - \sigma\ ; \mu + \sigma\ ]$ pour une population .

Exemple 5.21.

Les trois groupes de données suivantes : $S_1 = \{3, 4, 4, 4, 4, 4, 5\}$, $S_2 = \{1, 3, 4, 4, 5, 5, 6\}$ et $S_3 = \{1, 1, 4, 4, 6, 6, 6\}$ représentées ci-dessous ont une même moyenne de 4. Calculer pour chaque série la variance et l'écart-type



Remarques

a) Le calcul de l'écart-type peut aussi se faire à partir du tableau de répartition. Si les différentes valeurs observées sont $a_1, \ldots a_k$, avec des effectifs $n_1, \ldots n_k$ et des fréquences relatives $f_1, \ldots f_k$, l'écart-type est obtenu à l'aide de moyennes pondérées :

$$s \text{ ou } \sigma \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (a_i - \bar{x})^2\ n_i} \quad = \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (a_i - \bar{x})^2\ f_i}\ .$$

b) Si les données sont réparties en classes, les **valeurs observées** a_i sont à **remplacer par les milieux de classes** c_i, ce qui donne les *valeurs approchées*

$$s \text{ ou } \sigma \quad \simeq \quad \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (c_i - \bar{x})^2\ n_i} \quad = \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (c_i - \bar{x})^2\ f_i}\ .$$

Exemple 5.22. (voir exemple 5.8)

Répartition des excès de vitesse selon leur gravité

Classe j	**Vitesse [km/h]**	**Effectif n_j**	**Centre de la classe c_j**
1	$[55; 60[$	58	
2	$[60; 70[$	30	
3	$[70; 100[$	12	
	Total	100	

Calculer la variance et l'écart type de la vitesse des voitures prises en excès de vitesse.

Variance d'échantillon et écart-type corrigé

Dans le cadre d'une étude par sondage, l'écart-type de l'échantillon est retenu pour estimer celui de la population. Toutefois, les statisticiens ont montré que l'estimation est meilleure si on divise le numérateur de la formule de la variance ou de l'écart-type par $n-1$ au lieu de n. On parle alors de la **variance d'échantillon corrigée**, notée s'^2, et de **l'écart-type corrigé**, noté s'.

$$\boxed{s'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{et} \qquad s' = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

Pour des échantillons de grande taille, la différence entre s^2 et s'^2 est en général négligeable.

Calculs des paramètres statistiques à l'aide de la calculette

Voici comment procéder pour calculer la moyenne et l'écart-type de la série $\{1, 3, 4, 4, 5, 5, 6\}$ en utilisant les fonctions statistiques de la TI-30.

a) Si nécessaire, vider la mémoire en pressant $\boxed{\text{ON/AC}}$.

b) Introduire une à une chaque valeur suivie de $\boxed{\Sigma+}$ pour les stocker dans la mémoire :
presser 1 $\boxed{\Sigma+}$ 3 $\boxed{\Sigma+}$ 4 $\boxed{\Sigma+}$ 4 $\boxed{\Sigma+}$ 5 $\boxed{\Sigma+}$ 5 $\boxed{\Sigma+}$ 6 $\boxed{\Sigma+}$.
Après chaque pression de la touche $\boxed{\Sigma+}$, le nombre total de valeurs stockées est affiché.
En cas d'erreur, la dernière valeur stockée peut être effacée avec $\boxed{\Sigma-}$ en pressant $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\Sigma+}$.

c) Pour obtenir la moyenne $\bar{x}$, presser $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{x^2}$. La valeur 4 s'affiche.
Pour obtenir l'écart-type σxn, presser $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\div}$. La valeur 1.511857892 s'affiche.
Pour obtenir l'écart-type corrigé σxn-1, presser $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sqrt{x}}$. La valeur 1.632993162 s'affiche.

Les valeurs stockées restent en mémoire jusqu'à ce que l'on presse à nouveau $\boxed{\text{ON/AC}}$.

Si une valeur apparait plusieurs fois, on peut stocker toutes ses occurences en une fois avec $\boxed{\text{FRQ}}$, au-dessus de la touche $\boxed{1/x}$. Ainsi, pour la série $\{3, 4, 4, 4, 4, 4, 6\}$ dans laquelle la valeur 4 apparait cinq fois, le point b) devient :

b) 3 $\boxed{\Sigma+}$ 4 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{1/x}$ 5 $\boxed{\Sigma+}$ 6 $\boxed{\Sigma+}$.

Les autres étapes de la marche à suivre restent inchangées.

5.6.3 Cote z

La **cote z** permet de situer une donnée par rapport aux autres dans une série statistique. Elle mesure le nombre d'écart-type qu'il y a entre une valeur particulière x_i et la moyenne d'un échantillon.

$$\boxed{z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}}$$

Ce sont des variables sans dimension, indépendantes de l'unité des données. Elles permettent de comparer des résultats de provenances diverses ou de nature différente.

Exemple 5.23.

Un employeur désire engager un apprenti. Il examine les dossiers de quatre candidats et voudrait bien embaucher le meilleur d'entre eux. Voici les informations dont il dispose à propos de leur dernier résultat scolaire noté sur une échelle allant de 0 à 100 points.

	Note	Moyenne du groupe	Écart-type du groupe	Différence Note-Moyenne	Cote z
Aline	85	75	10		
Blaise	76	70	3		
Chantal	70	60	4		
David	75	80	5		

Compléter le tableau et compléter le texte suivant :

Si l'employeur se fie uniquement à la note, il embauchera ....

S'il considère aussi la moyenne du groupe, il choisira .... ou ....

Et s'il tient compte des trois données (note individuelle, moyenne et écart-type du groupe), c'est-à-dire de la cote z, il engagera ....

Relevons que dans la pratique, une cote z plus grande que 2 ou plus petite que -2, c'est assez grand et qu'une cote z plus grande que 3 ou plus petite que -3, c'est très grand !

5.7 Exercices

5.1

On donne $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$, $x_4 = 2$ et $x_5 = 7$. Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} {x_j}^3$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} (x_i + 8)$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (8 \cdot x_k)$

5.2

Calculer :

a) $\sum_{i=0}^{5} i^2$ b) $\sum_{j=-2}^{6} 3j$ c) $\sum_{k=0}^{5} k(k-1)$ d) $\sum_{i=1}^{6} \dfrac{6}{i}$

5.3

Développer et calculer les sommes suivantes

a) $\sum_{i=0}^{n} 1$ b) $\sum_{j=0}^{n} 4j$ c) $\sum_{j=1}^{2011} (-1)^j$ d) $\sum_{k=-n}^{n} (k+1)$

5.4

Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ.

a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 248$

b) $1000 + 1010 + 1020 + \cdots + 1540$

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 15^2$

d) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$

e) $2 + 3 + 5 + 9 + 17 + \cdots + 1025$

f) $4 + 12 + 36 + 108 + 324$

5.5

Dans chaque situation exposée ci-dessous

a) décrire la population étudiée ;
b) décrire l'échantillon ;
c) nommer la variable étudiée ;
d) donner quelques valeurs possibles de la variable ;
e) donner le type de variable étudiée.

Situation 1. *On effectue un sondage auprès de 500 habitants de la ville de Lausanne pour connaître leur chaîne de télévision favorite.*

Situation 2. *Dans une étude portant sur l'évolution de la situation économique en Suisse de 2000 à 2010, on s'intéresse au taux de chômage annuel de cette décennie.*

Situation 3. *Afin de déterminer le profil socioéconomique des ménages de la ville de Genève, on a noté le nombre d'enfants par ménage pour un échantillon de 380 ménages.*

Situation 4. *Selon les données du recensement helvétique de l'an 2000, à la question « Quelle est la langue parlée en Suisse dans laquelle vous pensez et que vous savez le mieux ? »*

5.6

Le nombre de véhicules à moteur mis en circulation en Suisse en 2011 est donné par catégorie dans le tableau suivant :

Catégorie	Nombre
Voitures de tourisme	327'955
Véhicules de transport de personnes	3'950
Véhicules de transport de choses	33'119
Véhicules agricoles	3'714
Véhicules industriels	4'006
Motocycles	48'133
Total des véhicules	420'875

Source : Office fédéral de la statistique, site web Statistique suisse 2012

Représenter ces données graphiquement par un diagramme à rectangles horizontaux et par un diagramme circulaire. Laquelle de ces deux représentations est-elle la plus appropriée ?

5.7

Lors d'un sondage, on a demandé à 820 citoyens suisses leur opinion sur les accords bilatéraux Suisse-UE. Les réponses se répartissent comme suit.

Utilité	**Effectifs**	**Pourcentage**
Très utiles	95	
Utiles	342	
Nuisibles	210	
Très nuisibles	46	
Sans opinion	127	
Total		

a) Décrire la population étudiée, nommer la variable considérée, ainsi que son type.

b) Compléter le tableau de distribution ci-dessus.

c) Représenter la distribution par un diagramme approprié au type de variable.

d) Calculer le taux de confiance en ces accords, soit le pourcentage de personnes qui estiment les accords bilatéraux utiles ou très utiles.

5.8

Sur une route où la vitesse est limitée à 80 km/h, on a mesuré la vitesse de 50 véhicules.

84	81	76	71	80	81	83	84	80	83
74	75	92	76	80	82	94	73	83	83
75	81	79	97	78	82	76	78	82	82
78	81	91	68	82	73	82	79	75	77
83	80	77	81	69	78	81	83	87	87

a) Grouper les données en classes et dresser un tableau de distribution.

b) Construire l'histogramme et le polygone des fréquences.

c) Compléter l'analyse suivante : « Une .... des véhicules respectent la limitation de vitesse de 80 km/h et ..... % roulent entre 80 et 85 km/h. En tenant compte d'une marge de tolérance de 5 km/h, ... % des véhicules sont amendables. »

5.9

Le tableau ci-dessous donne la distribution de l'âge des Suisses en 1860 et en 2009.

Répartition de la population suisse en 1860 et 2009 selon l'âge

Âge	**1860**		**2009**	
	Effectif	**Pourcentage**	**Effectif**	**Pourcentage**
] 0 ; 10]	518'538	20.6%	763'546	9.8%
] 10 ; 20]	476'347	18.9%	872'579	11.2%
] 20 ; 30]	429'507	17.1%	978'050	12.6%
] 30 ; 40]	362'978	14.4%	1'096'126	14.1%
] 40 ; 50]	287'564	11.4%	1'277'392	16.4%
] 50 ; 60]	230'276	9.2%	1'031'892	13.3%
] 60 ; 70]	138'932	5.5%	840'583	10.8%
] 70 ; 80]	59'549	2.4%	554'034	7.1%
] 80 ; 90]	11'095	0.4%	311'195	4.0%
90 et plus	610	0.0%	60'409	0.8%
Total	2'515'396	99.9% *	7'785'806	100.1% *

Source : Office fédéral de la statistique, site web Statistique suisse 2012.

a) Quelle représentation graphique mettrait le mieux en évidence les différences de distribution des deux années étudiées ? Justifier la réponse.

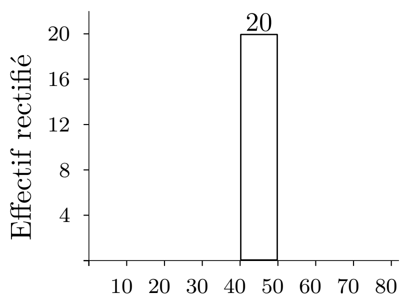
b) Représenter sur un même graphique le polygone des fréquences relatives de ces deux années.

c) Compléter le texte suivant :
« La population suisse a plus que .... entre 1860 et 2009 en passant de .... à presque .... d'habitants. En 1860, la population était très jeune : l'aire sous le polygone est plus grande avant ..... ans qu'après. A cette époque, seulement ....% des habitants avaient plus de 70 ans, contre ....% actuellement, soit une proportion ...... fois plus élevée. En 1860, le groupe des moins de 20 ans représentait près de ....% de la population contre ....% aujourd'hui, soit une proportion réduite de .... En 1860, la classe la plus représentée est celle des .... , avec ....% des habitants, alors qu'en 2009, c'est la classe des .... avec ....% des habitants. »

5.10

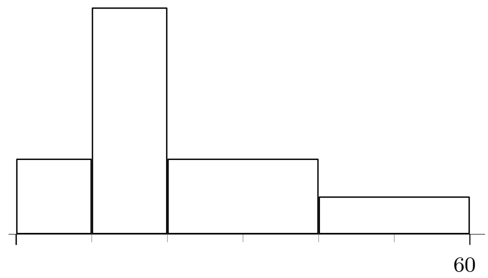
a) Compléter l'histogramme de la distribution suivante :

Amplitude	Classe	Effectif	Effectif rectifié
	[10 ; 40 [	12	
	[40 ; 50 [	20	
	[50 ; 60 [	18	
	[60 ; 80 [	10	
	Total	60	

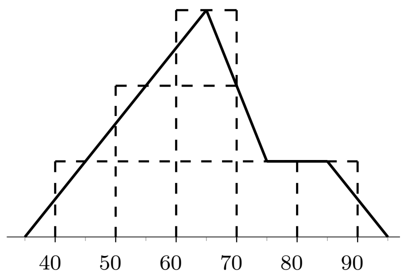


b) Compléter le tableau de distribution en utilisant l'information donnée par l'histogramme.

	Pourcentage
[0 ; [	
[; [	
[; [	
[; 60 [	
Total	100%



c) Le polygone de fréquences ci-contre représente une distribution. Quel est le pourcentage des données ayant une valeur comprise entre 50 et 60 ?



5.11

Dans une usine, lors d'un contrôle qualité, le diamètre, en mm, de 50 boulons tirés au hasard dans la production a été mesuré. Les résultats suivants ont été obtenus.

Répartition de .... **selon** ....

Diamètre [mm]	**Effectifs**
$[21.5; 21.8[$	4
$[21.8; 21.9[$	6
$[21.9; 22.0[$	6
$[22.0; 22.1[$	13
$[22.1; 22.2[$	8
$[22.2; 22.3[$	7
$[22.3; 22.5[$	6
Total	50

a) Décrire la population étudiée, nommer la variable considérée et le type de la variable. Compléter le titre du tableau de distribution.

b) Représenter l'histogramme de ces données ainsi que le polygone des fréquences cumulées.

c) Si la valeur nominale du diamètre des boulons est de 22 mm, calculer le pourcentage de boulons qui s'en écartent de plus de 0.3 mm ?

5.12

Le prof de maths m'a dit : « Finalement, vous avez 4.5 de moyenne sur les cinq notes de l'année ». Sachant que mes quatre premières notes étaient 5.2, 3.1, 4.4 et 4.2, calculer la cinquième note.

5.13

La taille moyenne de 2'000 élèves d'un gymnase est de 1.71 m. Si on sait de plus que dans ce gymnase, la taille moyenne des filles est de 1.68 m et la taille moyenne des garçons est de 1.76 m, de combien le nombre de filles dépasse-t-il le nombre de garçons dans ce gymnase ?

5.14

En utilisant le tableau de distribution de l'exercice 5.9, page 160,

a) Calculer l'âge moyen de la population suisse en 1860 et en 2009 et représenter chaque moyenne par un triangle sous l'axe des âges des polygones de fréquences construits au point b) de l'exercice 5.9.

b) Calculer l'âge médian de la population suisse en 1860 et en 2009 et marquer chaque médiane par une barre verticale sur le graphique précédent.

c) Déterminer la classe modale de l'âge de la population suisse en 1860 et en 2009. Cette notion est-elle représentative dans le cas étudié ? Justifier la réponse

d) Pourquoi l'âge moyen et l'âge médian de l'année 1860 sont-ils différents ? Pourquoi l'âge moyen et l'âge médian de l'année 2009 sont-ils presque égaux ?

e) Que peut-on conclure en comparant les âges moyens et médians des années 1860 et 2009 ?

5.15

En utilisant le tableau de distribution de l'exercice 5.11, page 161,

a) Calculer le diamètre moyen des boulons et représenter la moyenne par un triangle sous l'axe horizontal de l'histogramme construit au point b) de l'exercice 5.11.

b) Estimer la valeur de la médiane à l'aide du polygone des fréquences cumulées construit au point b) de l'exercice 5.11. Calculer de diamètre médian et vérifier sa proximité avec la valeur estimée. Marquer cette valeur par une barre verticale sur l'histogramme.

c) Déterminer la classe modale. Cette notion est-elle représentative ici ? Justifier la réponse.

d) Que peut-on conclure en comparant la moyenne, la médiane et la classe modale sur la forme de la distribution des diamètres des boulons ?

5.16

Sur une route où la vitesse est limitée à 80 km/h, on a mesuré la vitesse de 50 véhicules.

Répartition de 50 véhicules selon leur vitesse

Vitesse [km/h]	$]65;70]$	$]70;75]$	$]75;80]$	$]80;85]$	$]85;90]$	$]90;95]$	$]95;100]$	Total
Effectif	2	7	15	20	2	3	1	50
Pourcentage	4%	14%	30%	40%	4%	6%	2%	100%

a) Représenter le polygone des fréquences cumulées, puis à partir de ce graphique, évaluer la médiane.

b) Etablir par calcul la valeur de la médiane.

5.17

Avec les données du tableau de l'exercice 5.9, représenter sur un même graphique les Box-Plot de l'âge de la population Suisse en 1860 et en 2009 et commenter.

5.18

La composition des ménages familiaux en Suisse a beaucoup évolué au cours du siècle dernier, comme le montre le tableau suivant.

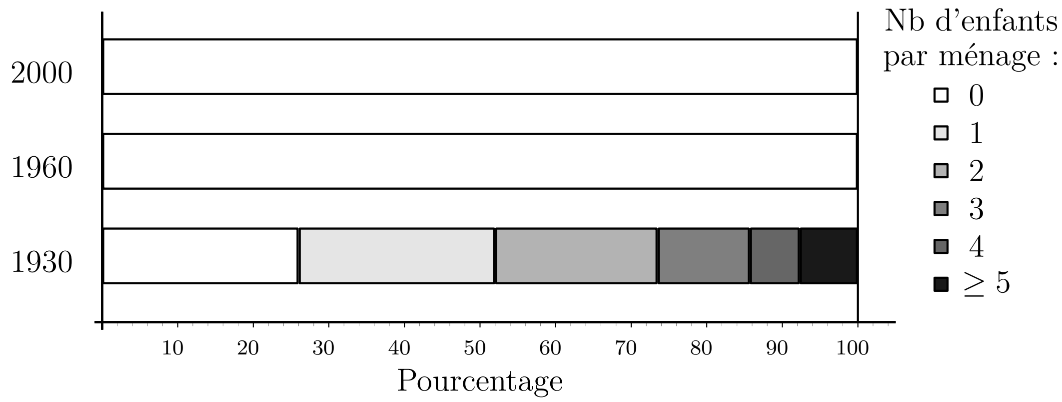
Composition des ménages familiaux, en milliers

	1930		1960		2000	
Personnes vivant dans un ménage familial	**3645.7**		**4650.1**		**5733.4**	
en % de la population totale		89.6		85.6		82.0
Nombre de ménages familiaux	**846.4**	**100.0**	**1243.7**	**100.0**	**1931.7**	**100.0**
Personne seule avec père ou/et mère	31.6	3.7	13.8	1.1	22.1	1.1
Couple seul	188.6	22.3	383.5	30.8	850.0	44.0
Ménages familiaux avec						
1 enfant	220.1	26.0	338.3	27.2	430.7	22.3
2 enfants	181.8	21.5	269.3	21.7	444.1	23.0
3 enfants	103.4	12.2	137.5	11.1	143.4	7.4
4 enfants	55.9	6.6	58.7	4.7	33.0	1.7
5 enfants ou plus	65.0	7.7	42.6	3.4	8.5	0.4
Total des ménages avec enfants	626.3	74.0	846.5	68.1	1059.6	54.9

Répondre aux questions ci-dessous en considérant que les ménages constitués d'une personne seule vivant avec son père ou/et sa mère constitue un ménage SANS enfant mineurs.

a) Compléter le graphique suivant permettant de visualiser l'évolution du nombre d'enfants mineurs des ménages en Suisse au cours du siècle dernier.

Répartition des ménages familiaux selon le nombre d'enfants qui le compose.



b) Compléter le texte suivant : « En 1930, seul .... (....%) des ménages familiaux était sans enfant contre .... (....%) en 2000. Les familles nombreuses comptant trois enfants ou plus sont devenues rares aujourd'hui : leur part dans les ménages familiaux s'est réduite, passant de ....% en 1930 à ....% en 2000. »

5.19

a) Une série A représente l'âge des cinq membres d'une famille et une série B, l'âge des étudiants d'une classe de gymnase. Laquelle des deux séries aura le plus grand écart-type ?

b) Un professeur de mathématique fait passer un test dans deux classes. Les deux groupes obtiennent la même moyenne, mais l'écart-type de la première classe est plus grand que celui de la deuxième. Dans quelle classe peut-on dire que les étudiants sont à peu près tous du même niveau en mathématique ?

c) Dans une région aride du globe, on enregistre les précipitations quotidiennes, en mm, durant 60 jours consécutifs. La moyenne des 60 données est de 0. Que vaut l'écart-type ?

d) Dans une classe de première année de gymnase, la moyenne d'âge des élèves est de 16.16 ans, avec un écart-type de 0.76 an. Si les élèves de la classe restent les mêmes, que vaudront la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type s en troisième année ?

e) Vrai ou faux ? Toutes les données d'une distribution dont la moyenne est 70 et l'écart-type 10 sont comprises entre 60 et 80.

5.20

Un maître rend un test dans une classe de 22 élèves en disant : « La moyenne de la classe est de 4.20 avec un écart-type de 0.83 ». Donner une interprétation de ces informations.

5.21

Au laboratoire de physique, une série de mesures de l'accélération de la pesanteur terrestre a donné les résultats suivants : 9.95 9.85 10.13 9.69 9.47 9.98 9.87 9.46 10.00.
Calculer la moyenne et l'écart-type de ces résultats et interpréter.

5.22

En reprenant les données du tableau de distribution de l'exercice 5.16, page 162,

a) Calculer une approximation de la vitesse moyenne et de l'écart-type et interpréter.

b) Les données sont-elles homogènes ?

5.23

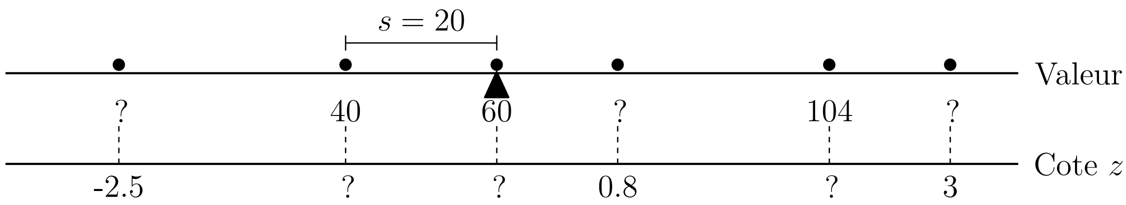
Deux enseignants, l'un travaillant en Suisse où les tests sont notés de 1 à 6 et l'autre travaillant en France où les tests sont notés de 0 à 20, discutent de leur classe.
L'enseignant suisse constate que sa classe a une moyenne de 4.1 avec un écart type de 1.2.
L'enseignant français constate que sa classe a une moyenne de 12.5 avec un écart type de 5.3.

a) Si x est une note attribuée dans le système français et y une note attribuée dans le système suisse, déterminer la relation entre x et y qui permet de transposer les notes d'un système à l'autre.

b) Si on compare les moyennes des ces deux classes, laquelle est la meilleure ?

5.24

À l'aide de l'information donnée pour chacun des points du pictogramme ci-dessous, déterminer, selon les cas, la valeur ou la cote z de chaque point du graphique.



5.25

On a relevé les âges de 20 personnes se présentant à l'examen théorique du permis de conduire :

18	19	19	23	36	21	57	23	22	19
18	18	20	21	19	26	32	19	21	20

a) Donner le type de la variable.

b) Calculer la moyenne, la médiane et le mode de cette série statistique. Quelle est le paramètre de position le plus représentatif ?

c) Quel est le pourcentage des personnes âgées de 25 ans ou moins se présentant à l'examen ?

d) Quelle est la cote z du candidat le plus âgé ? Interpréter.

e) Quel âge aurait un candidat avec une cote z égale à -1 ? un tel cas est-il possible ? Justifier la réponse.

5.26

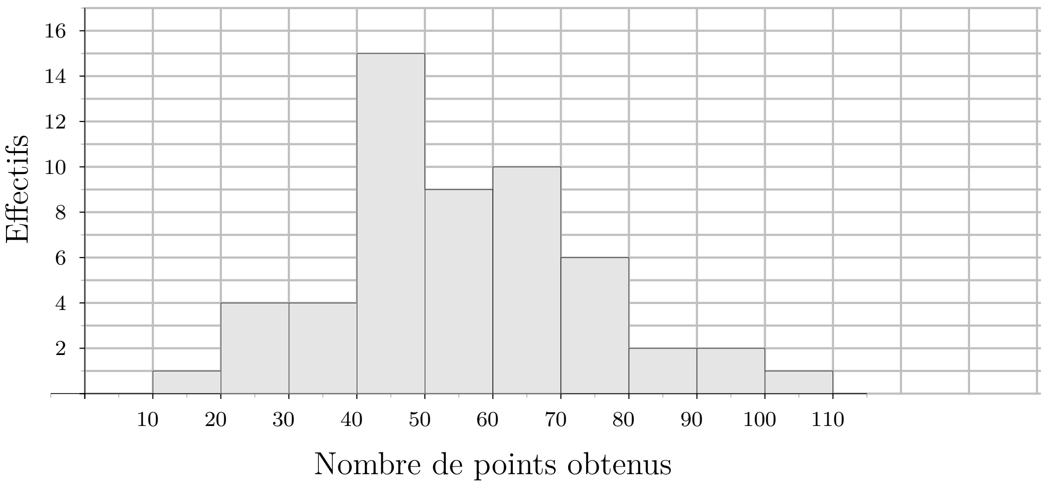
On veut décerner un prix du meilleur vendeur pour le financement du camp de ski d'une école. Trois concurrents sont en lice :

- Ali a vendu 85 tablettes de chocolat, alors que la moyenne de vente est de 52 tablettes par élève avec un écart-type de 13 tablettes,
- Béa a vendu 25 arrangement floraux alors que la moyenne de vente est de 12 arrangements floraux avec un écart-type de 6,
- Cloé a vendu 75 abonnements au Journal de l'école, alors que la moyenne de vente est de 47 abonnements avec un écart-type de 10.

Qui devrait recevoir le prix du meilleur vendeur ? Justifier ce choix.

5.27

Le nombre de points obtenus par les écoles de Suisse au concours de Mathématiques sans Frontières est représenté dans l'histogramme suivant :



a) Nommer précisément la variable étudiée et donner son type.

b) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de ces résultats et interpréter ces mesures. Marquer ces résultats sur le graphique de façon appropriée.

c) Quelle est la cote z d'une école ayant obtenu 110 points ?
Quelle est le nombre de points obtenus par une école qui présente une cote z égale à -2 ?

d) Les données sont-elles homogènes ? Justifier la réponse.

5.28

Le nombre d'heures de fonctionnement de 50 piles à combustible a été mesuré.

15	238	164	222	764	501	2	43	140	104
492	158	85	311	432	130	308	954	489	491
335	60	209	104	286	229	22	347	326	332
20	225	89	125	61	34	3	287	125	318
91	305	192	491	209	168	869	183	541	552

a) Regrouper ces données dans un tableau de distribution en formant des classes d'amplitude égale à 100 heures, avec une dernière classe ouverte « $\geq$ 600 » et représenter le polygone des fréquences correspondant.

b) A l'aide du tableau de distribution, déterminer une approximation de la moyenne et de l'écart-type. Représenter sur le graphique la moyenne par un triangle et l'écart-type par un intervalle et interpréter.

c) Calculer la cote z des deux valeurs extrêmes. Interpréter et critiquer l'interprétation.

d) Représenter le polygone des fréquences cumulées.

e) La compagnie qui fabrique ces piles garantit leur durée de vie. Ainsi, si une pile achetée dure moins de a heures, la compagnie s'engage à la remplacer gratuitement. D'après cet échantillon, quelle doit être la valeur de a si le fabricant ne veut pas remplacer plus de 3% des piles vendues ?

5.8 Réponses

5.1

a) 719 b) 63 c) 184

5.2

a) 55 b) 54 c) 40 d) $\frac{147}{10}$

5.3

a) $n+1$ b) $2n^2+2n$ c) -1 d) $2n+1$

5.4

a) $\sum_{i=1}^{124} 2i$ b) $\sum_{i=100}^{154} 10i$ c) $\sum_{k=1}^{15} k^2$ d) $\sum_{i=0}^{10} 2^i$ e) $\sum_{i=0}^{10} (2^i+1)$ f) $\sum_{i=0}^{4} 4 \cdot 3^i$

5.5

Situation 1.

a) Population : *tous les habitants de la ville de Lausanne.*

b) Echantillon : *les 500 habitants choisis parmi la population totale.*

c) Variable étudiée : *la chaîne de télévision préférée d'une personne.*

d) Ensemble des catégories : *les noms des chaînes que peuvent recevoir les habitants de la ville de Lausanne, pour autant qu'on les retiennent pour le sondage.*

e) Type de variable : *qualitative.*

Situation 2.

a) Population : *les années comprises entre 2000 et 2010.*

b) Echantillon : *toute la population est étudiée ici, il n'y a pas d'échantillon.*

c) Variable étudiée : *le taux de chômage.*

d) Ensemble des catégories : *tous les pourcentages compris entre 0% et 100%.*

e) Type de variable : *quantitative continue.*

Situation 3.

a) Population : *les ménages de la ville de Genève.*

b) Echantillon : *les 380 ménages sélectionnés.*

c) Variable étudiée : *le nombre d'enfants par ménage.*

d) Ensemble des catégories : *l'ensemble des nombres entiers inférieurs à* 20*, en tous cas !*

e) Type de variable : *quantitative discrète.*

Situation 4.

a) Population : *la population suisse.*

b) Echantillon : *la quasi-totalité de la population suisse.*

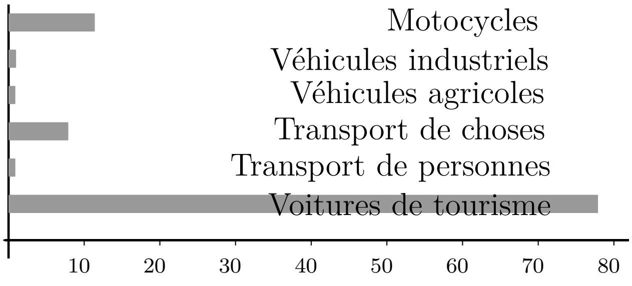
c) Variable étudiée : *la première langue d'une personne.*

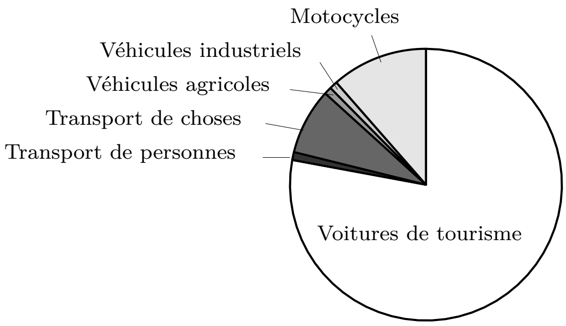
d) Liste des catégories : « l'allemand », « le français », « l'italien », « le romanche », « autre langue ».

e) Type de variable : qualitative.

5.6

Catégorie	Nombre	Pourcentage	Angle
Voitures de tourisme	327'955	77.9%	280.5°
Transport de personnes	3'950	0.9%	3.4°
Transport de choses	33'119	7.9%	28.3°
Véhicules agricoles	3'714	0.9%	3.2°
Véhicules industriels	4'006	1.0%	3.4°
Motocycles	48'133	11.4%	41.2°
Total des véhicules	420'875	100%	360°





Les deux représentations graphiques conviennent. On atteint toutefois la limite de visibilité des petites parts sur le diagramme circulaire.

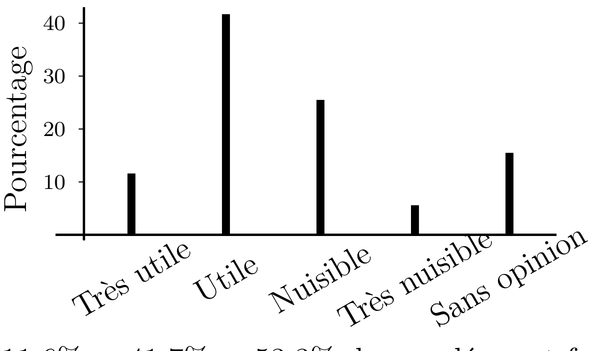
5.7

a) Population étudiée : les citoyens suisses, variable : opinion sur les accords bilatéraux,
Si on excepte la catégorie "sans opinion", variable qualitative ordinale ; sinon variable qualitative nominale.

b)

Utilité	**Effectifs**	**Pourcentage**
Très utiles	95	11.6%
Utiles	342	41.7%
Nuisibles	210	25.5%
Très nuisibles	46	5.6%
Sans opinion	127	15.5%
Total	820	99.9%

c)



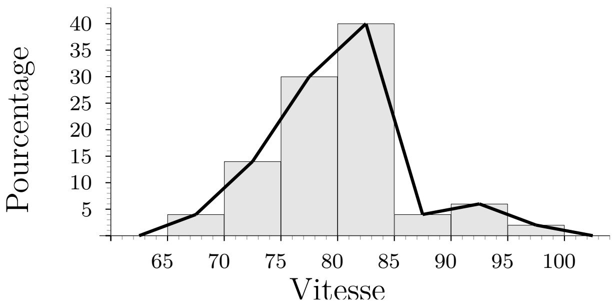
d) 11.6% + 41.7% = 53.3% des sondés sont favorables aux accords bilatéraux.

5.8

a) Répartition de 50 véhicules selon leur vitesse.

Vitesse [km/h]	Effectif	Pourcentage
$]65;70]$	2	4%
$]70;75]$	7	14%
$]75;80]$	15	30%
$]80;85]$	20	40%
$]85;90]$	2	4%
$]90;95]$	3	6%
$]95;100]$	1	2%
Total	50	100%

b)

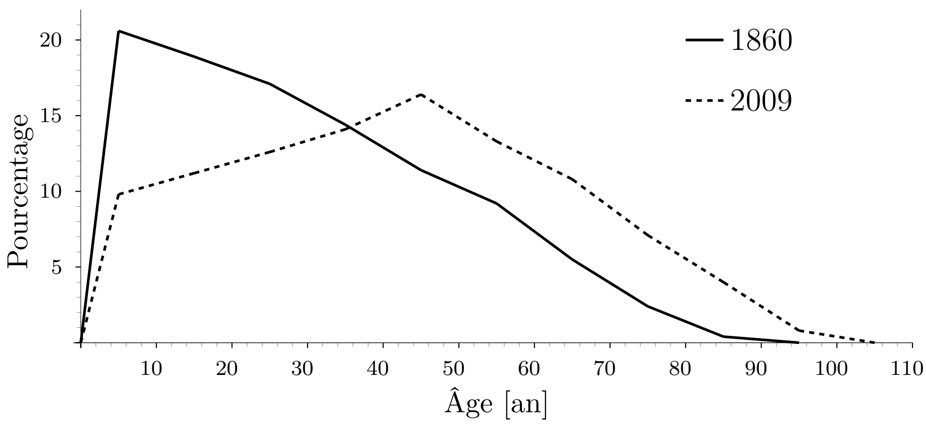


c) Une petite moitié des véhicules respectent la limitation de vitesse de 80 km/h et 40% roulent entre 80 et 85 km/h. En tenant compte d'une marge de tolérance de 5 km/h, 12% des véhicules sont amendables.

5.9

a) Le plus approprié est de représenter sur un même graphique le polygone des fréquences de chacune des deux années. Deux histogrammes superposés produiraient un graphique illisible. On utilise les fréquences relatives car les deux distributions n'ont pas le même effectif total.

b) **Répartition de la population suisse en 1860 et 2009 selon l'âge.**

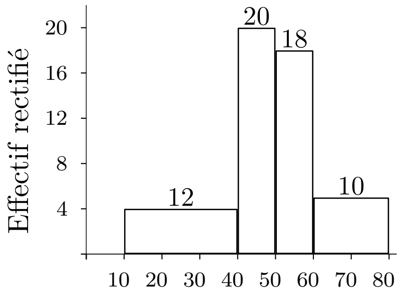


c) « La population suisse a plus que triplé entre 1860 et 2009 en passant de 2,5 millions à presque 7,8 millions d'habitants. En 1860, la population était très jeune : l'aire sous le polygone est plus grande avant 30 ans qu'après. A cette époque, seulement 3% des habitants avaient plus de 70 ans, contre 12% actuellement, soit une proportion quatre fois plus élevée. En 1860, le groupe des moins de 20 ans représentait près de 40% de la population contre 21% aujourd'hui, soit une proportion réduite de moitié. En 1860, la classe la plus représentée est celle des 0 à 10 ans, avec 20.6% des habitants, alors qu'en 2009, c'est la classe des 40 à 50 ans avec 16.4% des habitants. »

5.10

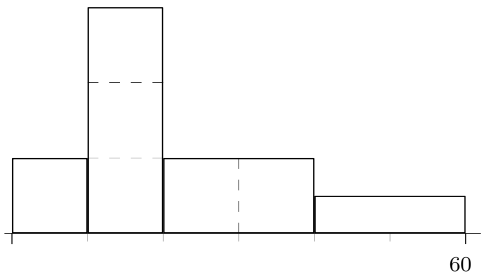
a)

Amplitude	Classe	Effectif	Effectif rectifié
30	[10 ; 40 [	12	4
10	[40 ; 50 [	20	20
10	[50 ; 60 [	18	18
20	[60 ; 80 [	10	5
	Total	60	



b)

	Pourcentage
[0; 10[	14.3% (1/7)
[10; 20[	42.9% (3/7)
[20; 40[	28.6% (2/7)
[40; 60[	14.3% (1/7)
Total	100%

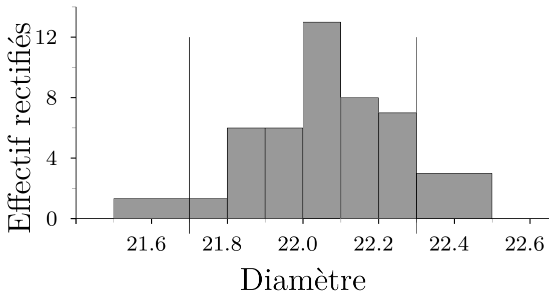


c) $\dfrac{\text{Aire de la portion comprise entre les abscisses 50 et 60}}{\text{Aire totale du polygone}} = \dfrac{2}{8} = 25\%.$

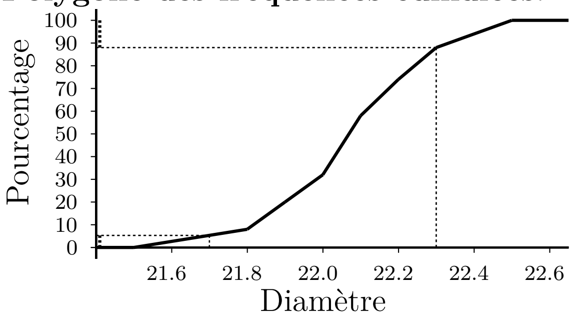
5.11

a) Population étudiée : Tous les boulons de la production, variable : diamètre des boulons, variable quantitative continue.

b) **Répartition de 50 boulons selon leur diamètre**



Polygone des fréquences cumulées.



c) $\dfrac{4}{50} \cdot \dfrac{2}{3} = 5.3\%$ des boulons ont un diamètre plis petit que 21.7 mm et $\dfrac{6}{50} = 12\%$ ont un diamètre plus grand que 22.3 mm.

Ainsi, 17.3% des boulons ont un diamètre qui s'écarte de plus de 0.3 mm de la valeur nominale.

5.12

5.6

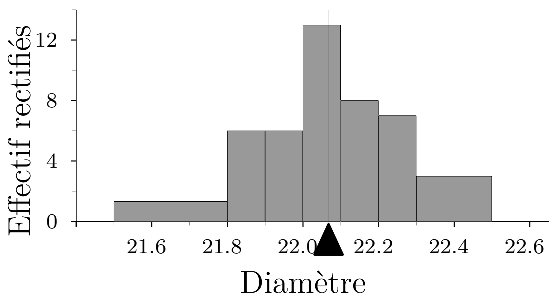
5.13

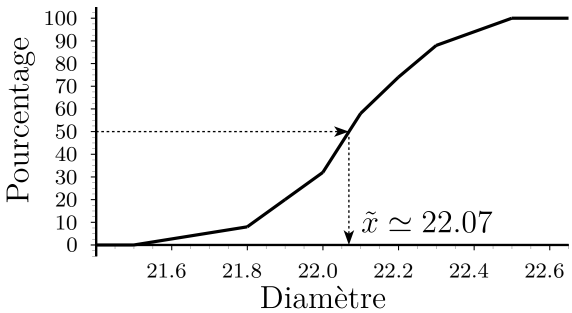
Le nombre de filles dépasse le nombre de garçons de 500.

5.14

a) $\bar{x}_{1860} = 29.1$ ans, $\bar{x}_{2009} = 41.1$ ans b) $\tilde{x}_{1860} = 26.1$ ans, $\tilde{x}_{2009} = 41.4$ ans
c) 0 à 10 ans pour 1860 et 40 à 50 ans pour 2009. Ces classes modales sont peu significatives car leurs effectifs ne sont pas beaucoup plus élevés que ceux des autres grandes classes.
d) En 1860, l'âge moyen est plus élevé que l'âge médian, car les quelques personnes très âgées tirent la moyenne vers le haut. En 2009, les âges moyen et médian sont identiques, car la répartition de la population autour de ces mesures est symétrique. e) La population est plus vieille en 2009 qu'en 1860.

5.15

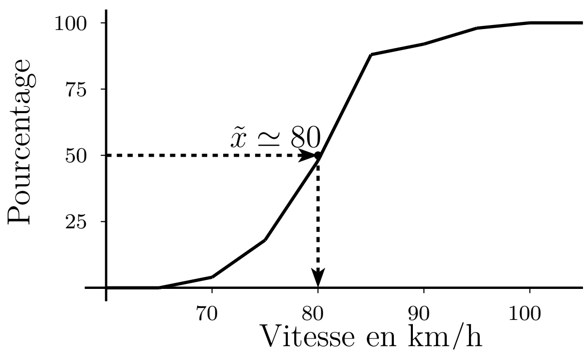




a) $\bar{x} = 22.068$ mm b) $\tilde{x} = 22.069$ mm c) La classe modale $[22.0\,;\,22.1[$ est significative car son effectif est nettement plus élevé que ceux des autres classes. d) La classe modale contient la moyenne et la médiane qui sont très proches. La distribution est de type normale, en forme de cloche.

5.16

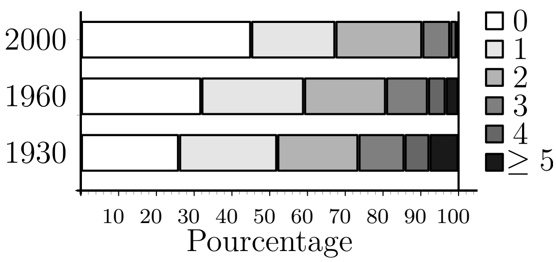
a) Polygone des fréquences cumulées.



b) $\tilde{x} = 80.25$

5.18

a)



b) « En 1930, seul un quart (26%) des ménages familiaux était sans enfant contre un peu moins de la moitié (45,1%) en 2000. les familles nombreuses comptant trois enfants ou plus sont devenues rares aujourd'hui : leur part dans les ménages familiaux s'est réduite, passant de 26,5% en 1930 à 9,6% en 2000. »

5.19

a) $s_A > s_B$ b) Dans la deuxième classe c) 0 d) $\bar{x} = 18.16$ et $s = 0.76$
e) Faux. L'interprétation correcte est « Une pluralité des données sont comprises entre 60 et 80. »

5.20

Une pluralité de notes sont comprises entre 3.37 et et 5.03, c'est-à-dire entre 3.5 et 5.0 si les notes sont arrondies au demi-point.

5.21

$\bar{x} = 9.822$ et $s = 0.222$.
Une pluralité de mesures donne une accélération comprise entre 9.600 et 10.044 m/s^2.

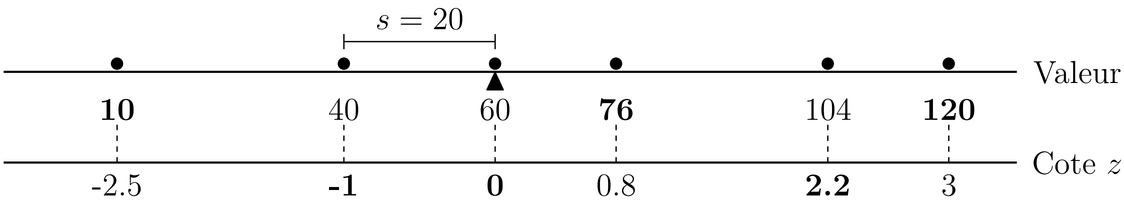
5.22

a) $\bar{x} = 80.1$ $s = 6.0$. Une pluralité de véhicules roulent entre 74.1 km/h et 86.1 km/h.
b) coefficient de variation $= \dfrac{6.0}{80.1} = 0.075 = 7.5\% < 15\%$. Les données sont homogènes.

5.23

a) $y = \dfrac{x}{4} + 1$ et $x = 4 \cdot (y - 1)$ b) La classe française.

5.24



5.25

a) Variable quantitative continue.
b) $\bar{x} = 23.55$, $\tilde{x} = 20.5$ et le mode vaut 19. La médiane est le paramètre de position le plus représentatif car quelques valeurs très élevées tirent la moyenne vers le haut et le mode ne présente pas une fréquence suffisante par rapport aux valeurs qui l'entourent.
c) 80%.
d) $s = 8.93$, $z_{max} = \dfrac{57 - 23.55}{8.93} = 3.75$. Cette situation est exceptionnelle.
e) $x = \bar{x} - s = 23.55 - 8.93 = 14.62$.
Le candidat serait âgé de 14 ou 15 ans, ce qui n'est pas possible légalement.

5.26

cote z d'Ali $= \dfrac{85 - 52}{13} = 2.5$, cote z de Béa $= \dfrac{25 - 12}{6} = 2.2$, cote z de Cloé $= \dfrac{75 - 47}{10} = 2.8$.
Cloé devrait recevoir le prix.

5.27

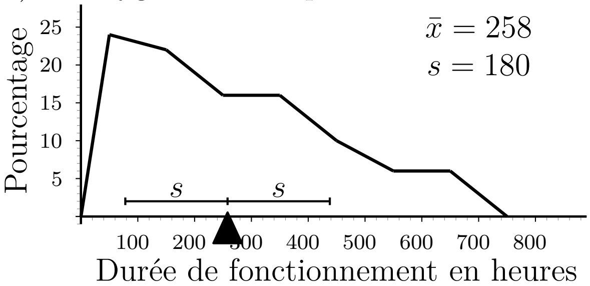
a) Le nombre de points obtenus est une variable quantitative discrète.
b) $\bar{x} = 55.37$; $\sigma = 18.85$. Une pluralité d'écoles ont obtenus entre 37 et 74 points.
c) $z_{110} = 2.9$ et $x_{-2} \simeq 18$ points. d) $CV = 34\% > 15\%$. Les résultats ne sont pas du tout homogènes.

5.28

a) Répartition de 50 piles à combustible selon leur durée de fonctionnement.

Durée [h]	Effectif	Pourcentage
$[0; 100[$	12	24%
$[100; 200[$	11	22%
$[200; 300[$	8	16%
$[300; 400[$	8	16%
$[400; 500[$	5	10%
$[500; 600[$	3	6%
≥ 600	3	6%
Total	50	100%

b) Polygone des fréquences.

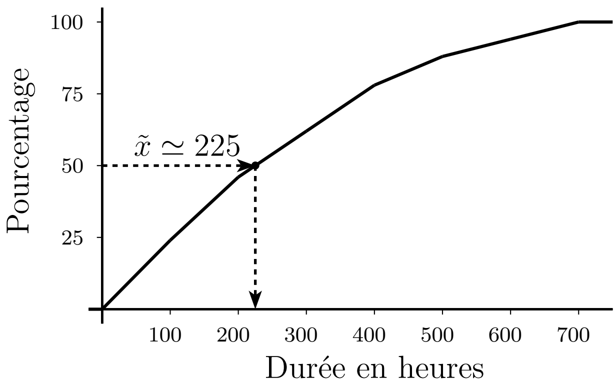


Une pluralité de piles ont une durée de fonctionnement comprise entre 78 et 438 heures

c) $z_{min} = \dfrac{2 - 258}{180} = -1.42$ et $z_{max} = \dfrac{954 - 258}{180} = 3.87$.

D'après les cotes z, une durée de fonctionnement de 954 heures est exceptionnelle alors qu'une durée de fonctionnement de 2 heures ne constitue pas une cas particulièrement rare. Cette dernière interprétation n'est toutefois pas valide pour ces données dont la plus petite cote z possible est $\dfrac{0 - 258}{180} = -1.4\bar{3}$.

d) Polygone des fréquences cumulées.



e) 3% des piles de l'échantillon ont duré moins de $a = \dfrac{3\%}{24\%} \cdot 100 = 12.5$ heures.
Ainsi, les piles ayant duré moins de 12.5 heures devraient être remplacées gratuitement.

Bibliographie

[1] Monographie de la commission romande de mathématique 23 *: Fundamentum de mathématique : Géométrie vectorielle et analytique plane,* Editions du Tricorne, 1992.

[2] Monographie de la commission romande de mathématique 24 *: Fundamentum de mathématique : Géométrie vectorielle et analytique de l'espace,* Editions du Tricorne, 1992.

[3] Hubert Bovet, *: Statistiques, cours et exercices*, Editions Polymath, 1998

[4] Hubert Bovet, *: Géométrie, cours et exercices*, Editions Polymath, 1998

[5] Carmen Mermoud, *: Statistiques descriptives*, Gymnase de Burier, 2015