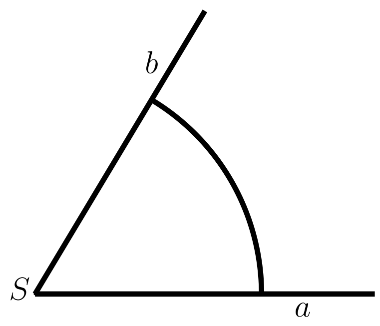
Chapitre 3

Angles et trigonométrie du triangle rectangle

3.1 Angles

Deux demi-droites Sa et Sb qui ont même origine S définissent un angle. Le point S est le **sommet** de l'angle ; les demi-droites Sa et Sb sont les **côtés**.



3.1.1 Mesures d'un angle

Mesure en degrés

- Un tour mesure 360 degrés (noté 360°).
- Un angle de $k°$ s'obtient en considérant k fois $\dfrac{1}{360}$ de tour.

Degrés sexagésimaux

On divise un degré en 60 parties égales, appelées **minutes** (notées $'$) et chaque minute en 60 parties égales, appelées **secondes** (notées $''$) :

$$1^\circ = 60' = 3600'' \text{ et } 1' = 60''$$

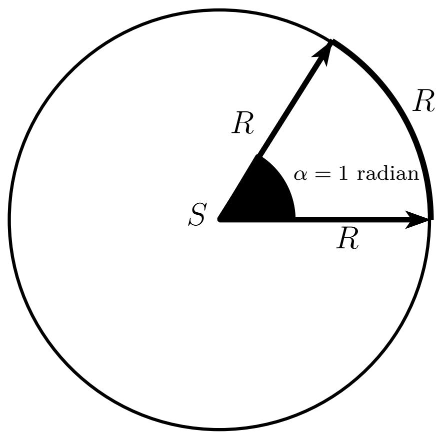
Exemple 3.1.

a) Traduire en degrés sexagésimaux un angle de $62.444°$.

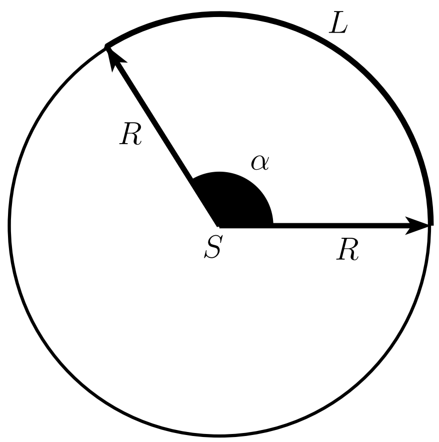
b) Traduire en degrés décimaux un angle de $56°45'36''$.

Mesure en radians

Un angle α qui découpe sur un cercle de rayon R centré en son sommet S un arc de longueur R a une mesure de 1 radian.



La mesure en **radians** d'un angle α est le rapport $\frac{L}{R}$ de la longueur L de l'arc de cercle découpé par l'angle α sur un cercle de rayon R centré au sommet de l'angle.



Changement d'unités

On utilise une règle de trois !

Degrés	**Radians**
360	2π
180	π
d	$r = d \cdot \dfrac{\pi}{180}$
$d = r \cdot \dfrac{180}{\pi}$	r

Exemple 3.2.

a) Quelle est la mesure en radians d'un angle de $50°$?

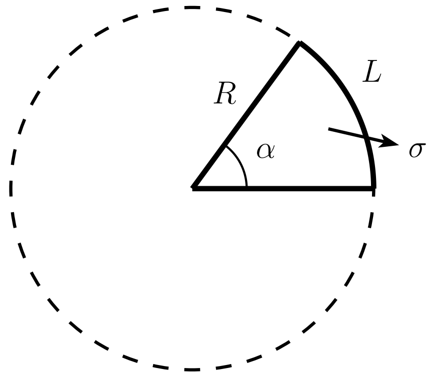
b) Quelle est la mesure en radians d'un angle de $135.4°$?

c) Quelle est la mesure en degrés d'un angle de 1 radian ?

d) Quelle est la mesure en degrés d'un angle de $\dfrac{5\pi}{4}$ radians ?

3.1.2 Longueur d'un arc. Aire d'un secteur circulaire

Longueur de l'arc L :



En degrés : $L = 2\pi R \cdot \dfrac{\alpha_{deg}}{360} = \pi R \cdot \dfrac{\alpha_{deg}}{180}$

En radians : $L = R \cdot \alpha_{rad}$

Aire du secteur circulaire σ :

En degrés : $\sigma = \pi R^2 \cdot \dfrac{\alpha_{deg}}{360}$

En radians : $\sigma = \dfrac{1}{2} R^2 \cdot \alpha_{rad}$

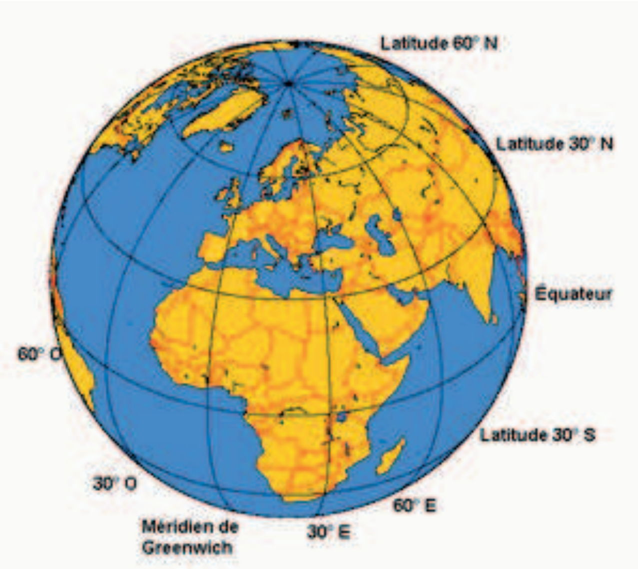
Exemple 3.3.

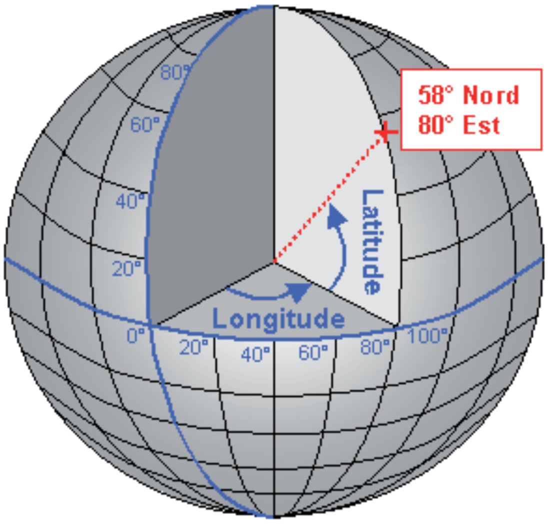
a) Quelle est la longueur de l'arc découpé par un angle $\alpha = 134°$ sur un cercle de 8 cm de rayon ? Quelle est l'aire du secteur circulaire correspondant ?

b) Une étiquette de 10 cm de largeur est collée sur une bouteille de 7,2 cm de diamètre. Si le collage de l'étiquette se fait par rotation de la bouteille autour de son axe, quel est l'angle de rotation lors du collage ?

3.1.3 Coordonnées terrestres

Latitudes. Longitudes





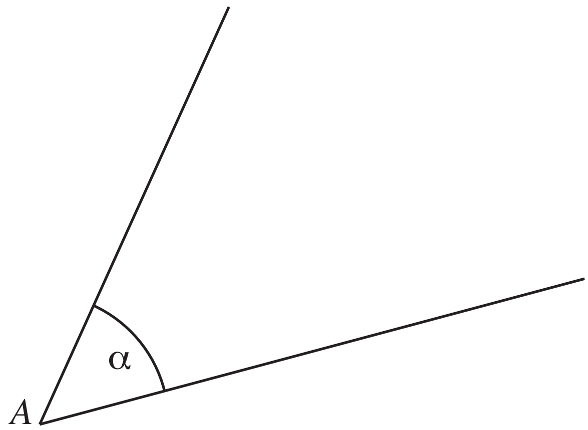
Exemple 3.4.

La ville de Montreux se trouve à $46°26'$ de latitude Nord et $6°55'$ de longitude est.

Calculer la distance minimale entre la ville de Montreux et l'équateur en considérant que le rayon terrestre mesure 6370 km.

3.2 Trigonométrie du triangle rectangle

Un **angle aigu** est un angle dont la mesure est comprise entre 0° et 90°.

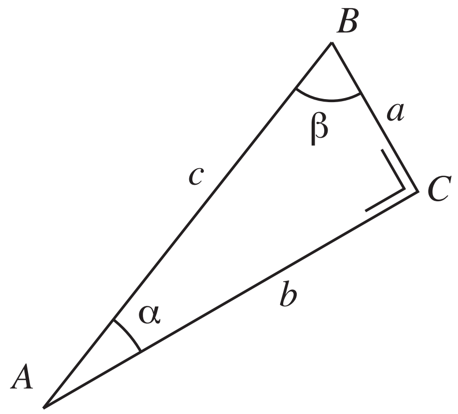


Relation trigonométrique dans le triangle rectangle

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} =$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} =$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} =$$



Remarque 1 On désigne les sommets d'un triangle avec des lettres majuscules. Les lettres minuscules correspondant à chaque sommet désignent les côtés opposés à chacun des sommets. Enfin, la lettre grecque minuscule correspondant à la lettre du sommet désigne l'angle du triangle correspondant au sommet.

Exemple 3.5.

Une échelle mesurant 3 mètres de long est appuyée contre un mur vertical. Elle forme avec le sol un angle de 72°.

a) A quelle hauteur l'échelle repose-t-elle contre le mur (arrondir la réponse au cm près) ?

b) On recule le pied de l'échelle de 20 cm. Quel sera le nouvel angle formé par l'échelle avec le sol (arrondir la réponse à 0.1° près) ?

3.3 Exercices

3.1

Convertir en degrés les angles donnés par leur mesure en radians

a) $\pi/6$
b) $2\,\pi/3$
c) $7\pi/10$
d) $5\,\pi/6$
e) 1
f) 0.7

3.2

Convertir en radians les angles donnés par leur mesure en degrés

a) $45°$
b) $60°$
c) $75°$
d) $120°$
e) $22.7°$
f) $152.5°$

3.3

Calculer, à 1 mm près, le rayon d'un cercle sur lequel

a) un arc de $1°$ mesure 3 mm.
b) un arc de 0.03 rad mesure 2 mm.

3.4

Calculer, à 1 mm près, la longueur d'un arc

a) de $32°$ sur un cercle de rayon 15 cm.
b) de 2 rad sur un cercle de rayon 7cm.

Pour les exercices qui suivent, prendre, si nécessaire, un rayon terrestre de 6370 km.

3.5

a) Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $\frac{1}{60}$ degré (ou 1 minute d'arc). Quelle est leur distance (elle définit le mille nautique) ?
b) Peut-on poser la même question pour deux points situés sur un même parallèle dont les longitudes diffèrent ?

3.6

Bulle et Porrentruy se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont $46°37'$N et $47°25'$N. Calculer la distance «à vol d'oiseau » entre ces deux villes.

3.7

Sion et Delémont se trouvent sur le même méridien terrestre. Leur distance « à vol d'oiseau » est de 123 km. Sachant que la latitude de Sion est de $46°14'$N, calculer la latitude de Delémont (qui se situe au nord de Sion !).

3.8

Dunkerque et Barcelone se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont $49°45'$N et $40°15'$N. Calculer la distance «à vol d'oiseau » entre ces deux villes.
La mesure de la distance entre Dunkerque et Barcelone s'est faite par triangulation entre 1792 et 1798. Elle a servi de base à la première définition du mètre comme la dix millionième partie du quart de méridien terrestre.

3.9

Deux points A et B de la surface terrestre sont situés sur le même méridien et distants de 800 km. Lorsque le Soleil est à la verticale de A, les rayons du Soleil forment avec la verticale, en B, un angle de 7.2°
En déduire la circonférence et le rayon terrestres.
Cette méthode a été imaginée par Eratosthène (284-195 av. J.-C.) après avoir appris que, un certain jour de l'année à midi, le Soleil se réfléchit verticalement dans un puits profond près de Syène (aujourd'hui Assouan) qui correspondait au point A. Le point B était Alexandrie, située à 800 km au nord de Syène. Pour déterminer l'angle à midi, on mesurait l'ombre d'un pilier vertical.

3.10

Le diamètre d'un cercle mesure 48 cm. Trouver la longueur de l'arc et la surface du secteur circulaire défini par un angle au centre de 20°.

3.11

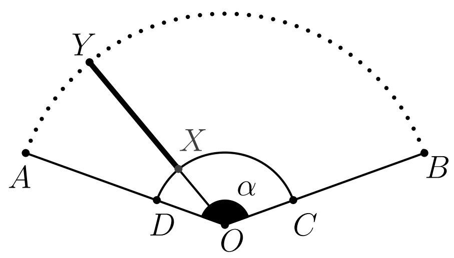
La terre effectue une rotation complète après 23 h 56 min 4 s. Calculer de combien de degrés la terre tourne en une seconde.

3.12

Un pneu de voiture mesure 75 cm de diamètre. A quelle vitesse angulaire en tours/minute la roue tourne-t-elle sur son axe si la voiture roule à 72 km/h ?

3.13

Un essuie-glace mesure 40 cm de long de son point de rotation O à son extrémité Y et balaie sur une longueur de 30 cm, entre les points X et Y.



On suppose que l'angle d'oscillation α mesure 140°
.

a) Calculer la longueur en cm de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru par l'extrémité Y du balai d'essuie-glace durant une oscillation de gauche à droite.

b) Calculer l'aire en cm^2 de la surface $ABCD$ balayée par l'essuie-glace XY .

3.14

Un triangle rectangle ABC est rectangle en A. Résoudre ce triangle connaissant :

a) $\gamma = 32°$ et $BC = 10$.

b) $AB = 10$ et $\gamma = 27°$.

c) $AC = 6$ et $AB = 10$.

3.15

Dans un triangle ABC rectangle en B, on donne $\gamma = 27°$ et $AB = 40$ cm. Calculer les longueurs BC, CH et HA où H est le pied de la hauteur sur AC issue de B.

3.16

Quelle est la hauteur d'un clocher qui a une ombre de 36 m lorsque le soleil est élevé de 37.5° au-dessus de l'horizon ?

3.17

Une route en ligne droite fait un angle de 2.3° avec sa projection horizontale. Quel chemin faut-il parcourir pour s'élever de 109.20 m au-dessus du niveau du point de départ ?

3.18

La voûte d'un tunnel est un arc de cercle d'angle au centre 220°. Calculer le rayon r de cet arc de cercle pour que la largeur de la route soit de 12 m, ainsi que la hauteur maximum de la voûte au-dessus du sol.

3.19

Déterminer le périmètre et l'aire du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 6 cm.

3.20

Quel est le rayon d'un cercle dans lequel une corde de 18.40 cm sous-tend un arc de 48° ?

3.21

De mon balcon situé à 9 m au-dessus du sol, j'observe l'immeuble d'en face. Pour voir le bas de l'immeuble, je dois baisser les yeux d'un angle de 20°, alors que pour en voir le sommet, je dois lever les yeux d'un angle de 10°. Quelle est la hauteur de l'immeuble d'en face ?

3.22

Natacha se trouve à 9 m d'un peuplier qu'elle aperçoit sous un angle de 58° (on néglige la hauteur des yeux par rapport au sol). Sous quel angle le verra-t-elle si elle recule de 30 m ?

3.23

Couché par terre à Ouchy, j'observe le jet d'eau de Genève. J'en vois une portion de 24 m de haut. Sachant que la distance d'Ouchy au pied du jet d'eau est de 50 km, mesurée à la surface du lac et que le rayon de la terre est de $6'350$ km, quelle est la hauteur du jet d'eau ?

3.24

Considérons un cube $ABCDEFGH$ de longueur d'arête égale à 6 cm. Soit J le milieu de FG et I le milieu de BC.

a) Calculer la mesure des angles $\widehat{JAI}$, $\widehat{JAB}$ et $\widehat{JAD}$,

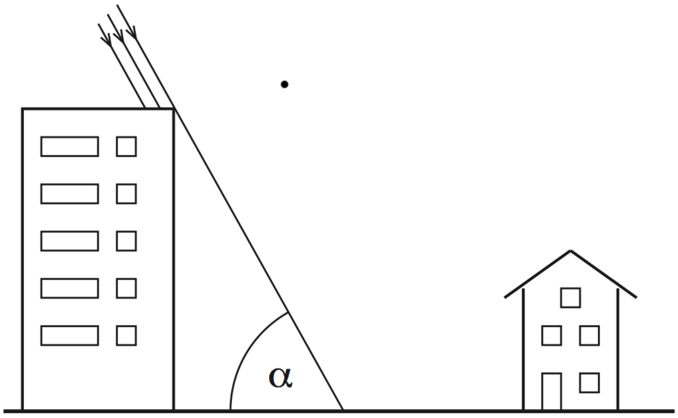
b) Calculer la longueur d'une des diagonales du cube.

3.25

L'angle d'élévation du sommet d'une tour verticale est de 43° à 72 m de la tour, l'oeil de l'observateur étant à 1.10 m au dessus du sol. Quelle est la hauteur de cette tour ?

3.26

Un propriétaire apprend que l'on va construire un immeuble de 20 m de haut à 40 m de sa maison (distance entre les deux murs les plus proches de l'immeuble et de la maison) ; on note α l'angle que forment les rayons du soleil avec le sol.



a) On suppose que $\alpha = 72°$; calculer la longueur (au cm près) de l'ombre de l'immeuble et vérifier que cette ombre ne touche pas la maison.

b) On suppose que $\alpha = 22°$; montrer par calculs que l'ombre de l'immeuble touche la façade la plus proche de la maison et calculer la hauteur maximale atteinte par l'ombre sur cette façade.

3.27

L'angle d'élévation du sommet d'une tour verticale dont le pied est inaccessible est 24° ; on s'avance de 32 m vers la tour sur une horizontale, et l'angle d'élévation du sommet est alors égal à 40°. On sait encore que l'oeil de l'observateur est élevé de 1.5 m. Quelle est la hauteur de la tour ?

3.28

Une personne placée au bord d'une rivière voit sous un angle de 60° un arbre planté sur la rive opposée ; lorsqu'elle s'éloigne de 40 m, cet angle n'est plus que 20°. Quelle est la hauteur de l'arbre et la largeur de la rivière ?

3.4 Réponses

3.1

a) $30°$
b) $120°$
c) $126°$
d) $150°$
e) $57.3°$
f) $40.1°$

3.2

a) $\frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{5\pi}{12}$
d) $\frac{2\pi}{3}$
e) 0.40
f) 2.66

3.3

a) 172 mm
b) 67 mm

3.4

a) 84 mm
b) 140 mm

3.5

a) 1853 m
b) Non

3.6

88.94 km

3.7

$47°20'$N

3.8

1056 km

3.9

Circonférence : 40000km ; rayon : 6370 km

3.10

$L \simeq 8.38$ cm et $A \simeq 100.53$ cm^2.

3.11

En une seconde, la Terre tourne de 0.00417 degrés.

3.12

509.30 tours/minutes.

3.13

a) 97,7 cm
b) 1832,60 cm^2

3.14

a) $\beta = 58°$, $AC \simeq 8.48$, $AB \simeq 5.30$;
b) $\beta = 63°$, $BC \simeq 22.03$, $AC \simeq 19.63$;
c) $\beta \simeq 30.96°$, $\gamma \simeq 59.04$, $BC \simeq 11.66$.

3.15

$BC \simeq 78.50$ cm, $CH \simeq 69.95$ cm, $HA \simeq 18.16$ cm.

3.16

Le clocher mesure ~ 27.62 m.

3.17

Il faut parcourir $2'721.03$ m.

3.18

Le rayon mesure ~ 6.39 m et la hauteur de la voûte est de ~ 8.57 m.

3.19

Le périmètre mesure 35.27 cm et l'aire est de 85.6 cm^2.

3.20

Le rayon est de ~ 22.62 cm.

3.21

La hauteur du bâtiment est de ~ 13.36 m.

3.22

Elle le voit sous un angle de $\sim 20.27°$.

3.23

La hauteur du jet d'eau est ~ 221 m.

3.24

a) $\widehat{JAI} \simeq 41.81°$, $\widehat{JAB} \simeq 48.19°$, $\widehat{JAD} \simeq 70.53°$; b) ~ 10.39 cm.

3.25

La hauteur de la tour est d'environ 68.24 m.

3.26

a) 6.50 m (< 40 m) ; b) 3.84 m

3.27

La hauteur de la tour est d'environ 31.9 m.

3.28

L'arbre mesure environ 18.4 m de haut et la rivière 10.6 m de large.

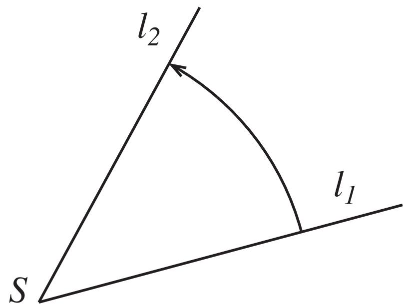
Chapitre 4

Trigonométrie du triangle quelconque

4.1 Angle orienté

Un **angle orienté** possède
- un **sommet** S
- un **côté initial** l_1
- un **côté final** l_2.

La flèche indique l'**orientation de l'angle**.



Un angle orienté est vu comme une **rotation de centre *S* qui envoie** l_1 **sur** l_2.

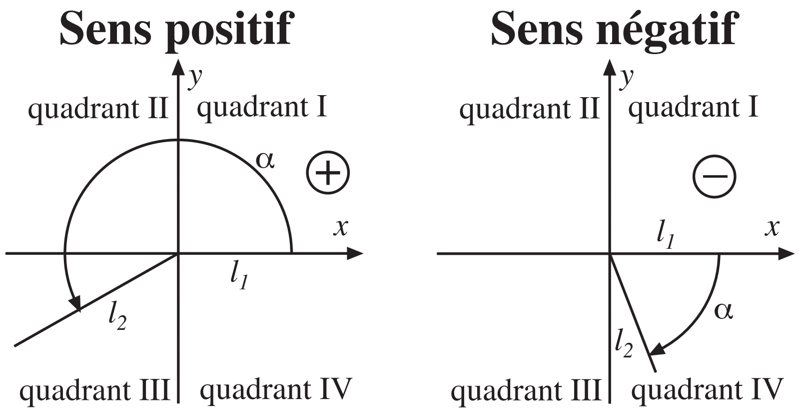
- Si l'on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, l'angle est dit **positif**.
- Si l'on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, l'angle est dit **négatif**

Angle orienté de mesure quelconque

Soit α un nombre réel. On définit un angle orienté de mesure α (degrés ou radians) en le positionnant comme suit dans un système d'axes orthonormés Oxy :

- On place le sommet à l'origine O.
- On fait coïncider le côté initial l_1 avec la partie positive de l'axe Ox.
- On fait tourner la partie positive de l'axe Ox autour de l'origine O d'un angle α ce qui nous donne la position l_2.
  - Si $\alpha > 0$, on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (angle positif).
  - Si $\alpha < 0$, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (angle négatif).

Quadrants et orientation d'un angle



Exemple 4.1.

Déterminer la mesure des angles ayant même côté final que l'angle α de mesure 135°.

4.2 Les fonctions trigonométriques

Le cercle trigonométrique

Dans un système d'axes Oxy, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre $O(0;0)$ origine du repère et de rayon $r = 1$.

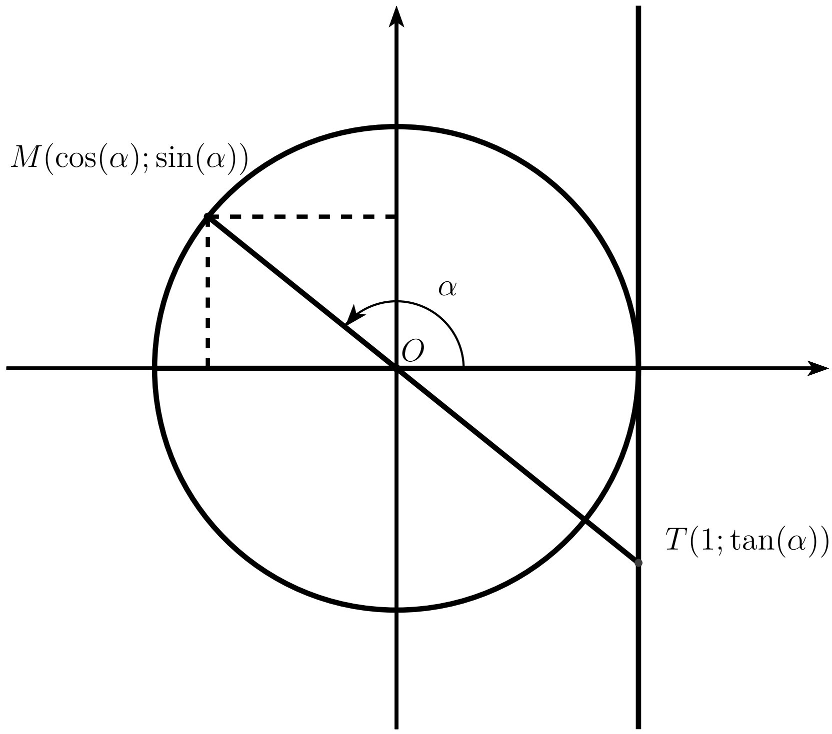
Soit α un nombre réel. On considère le point M d'intersection du côté final de l'angle orienté de mesure α avec le cercle trigonométrique, ainsi que le point T intersection du prolongement de celui-ci avec la droite verticale $x = 1$.

Fonctions trigonométriques

$\cos(\alpha)$:
1ère coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

$\sin(\alpha)$:
2e coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

$\tan(\alpha)$:
2e coordonnée du point T situé sur la droite $x = 1$.



Remarque 4.1.

a) Lorsque α est compris entre 0°et 90°, on retrouve les rapports trigonométriques définis dans le triangle rectangle.

b) Si aucune mesure n'est précisée, les fonctions trigonométriques sont données en **radians**.

c) $\sin(\alpha) \in [-1;1]$, $\quad \cos(\alpha) \in [-1;1]$ $\quad$ et $\quad \tan(\alpha) \in]-\infty;+\infty[$.

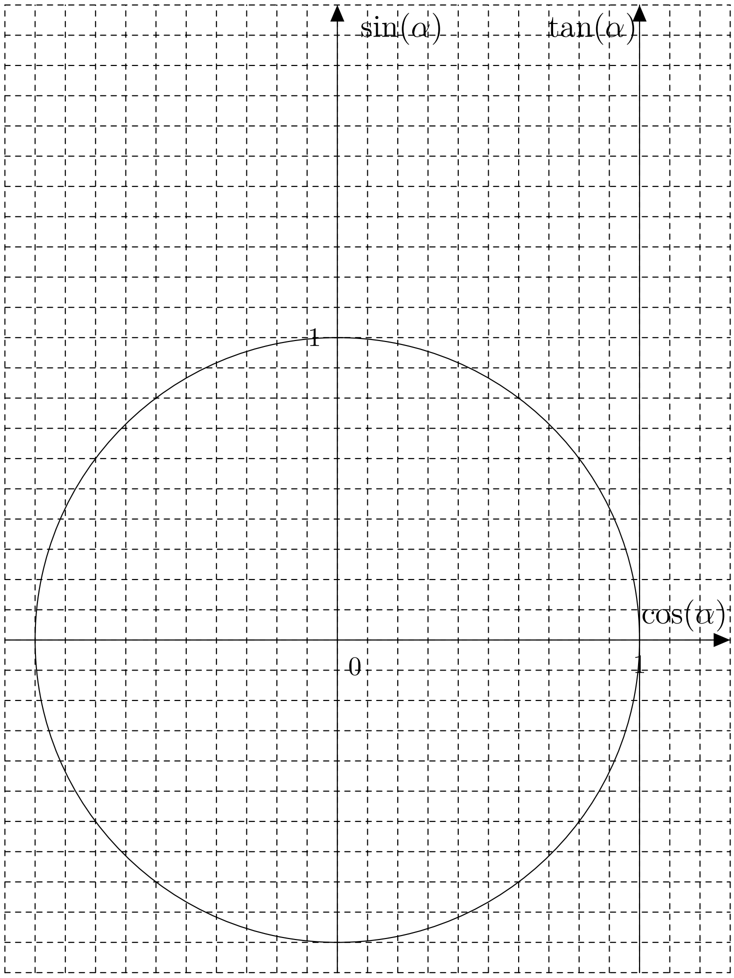
d) Les fonctions trigonométriques sont périodiques :

En radians : $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$, $\quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$, $\quad \tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

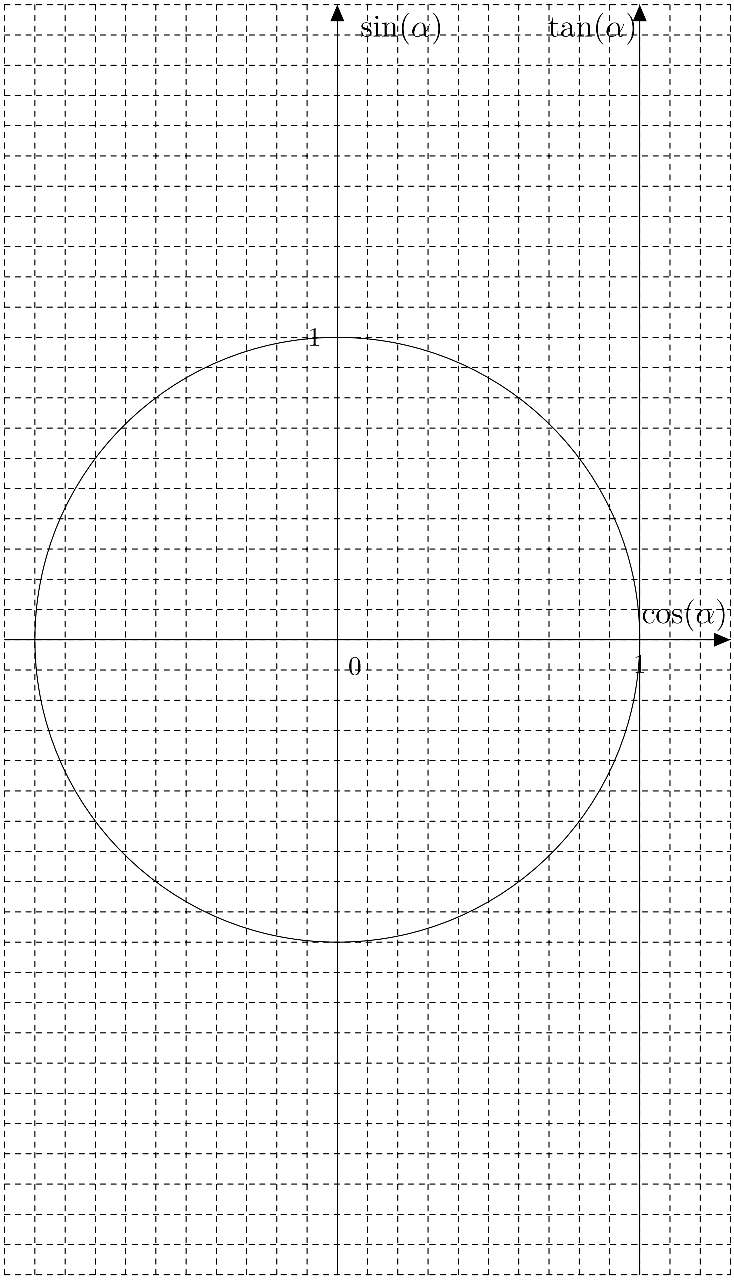
En degrés : $\sin(\alpha + 360) = \sin(\alpha)$, $\quad \cos(\alpha + 360) = \cos(\alpha)$, $\quad \tan(\alpha + 180) = \tan(\alpha)$

Exemple 4.2.

a) Placer les angles 145°, 240° sur le cercle. En déduire une valeur approchée de leur sinus, cosinus et tangente.



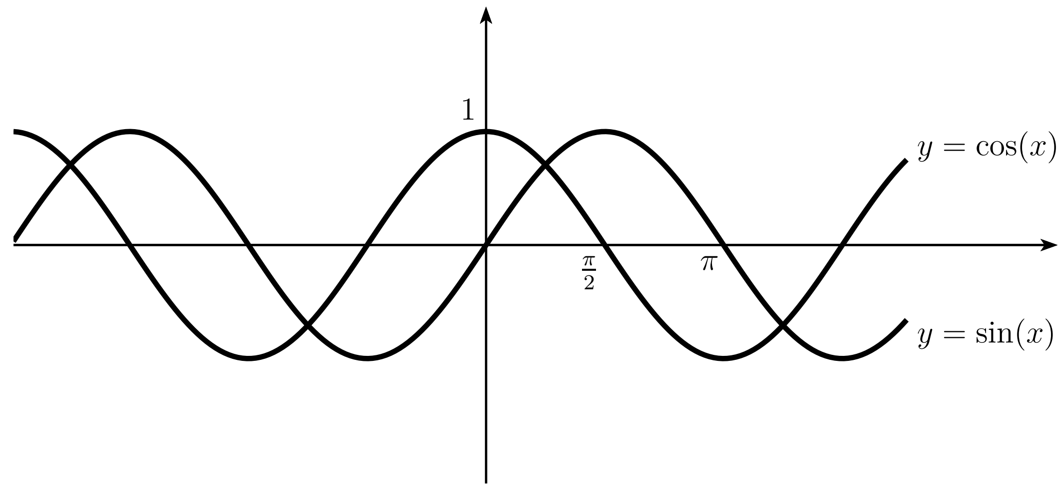
b) Placer les angles 130° et $-150°$ sur le cercle. En déduire une valeur approchée de leur sinus, cosinus et tangente.



c) Exprimer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\alpha = -150°$ à l'aide des rapports trigonométriques du triangle rectangle.

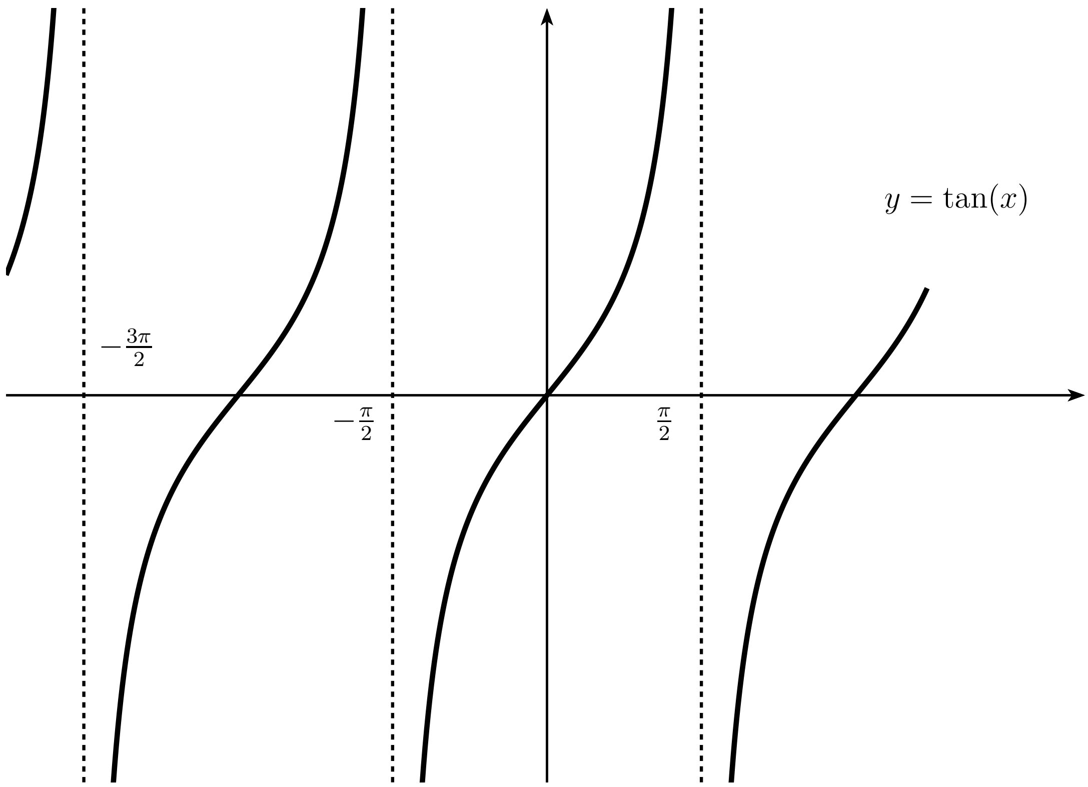
Graphes des fonctions trigonométriques

Graphes des fonctions sinus et cosinus (en radians)



$$\begin{array}{rccl} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;1] \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \cos : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;1] \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

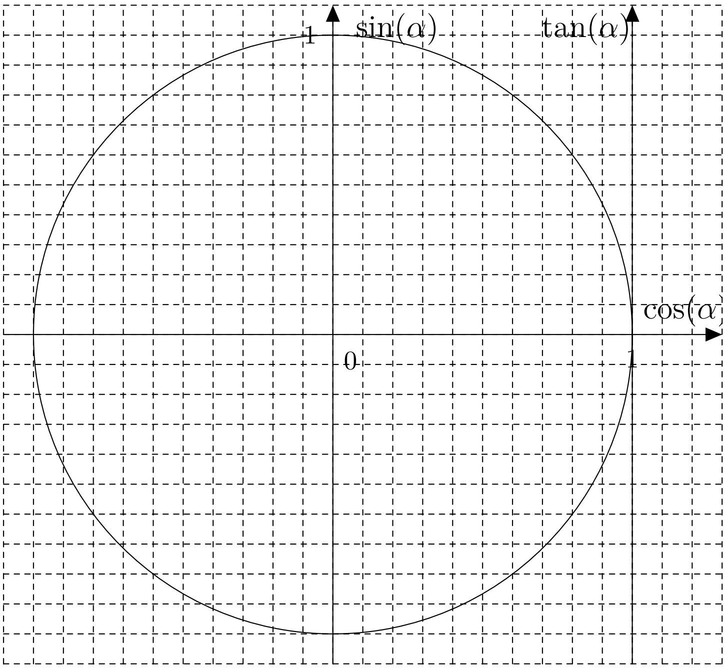
Graphe de la fonction tangente (en radians)



$$\begin{array}{rccl} \tan : & \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

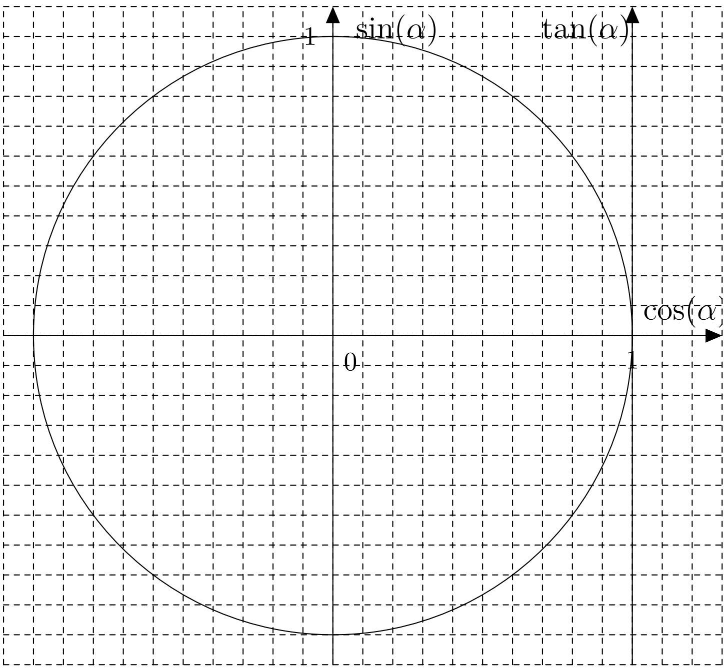
Exemple 4.3.

a) Pour quels angles entre 0 ° et 360 ° a-t-on $\sin(x) = 0.4$?



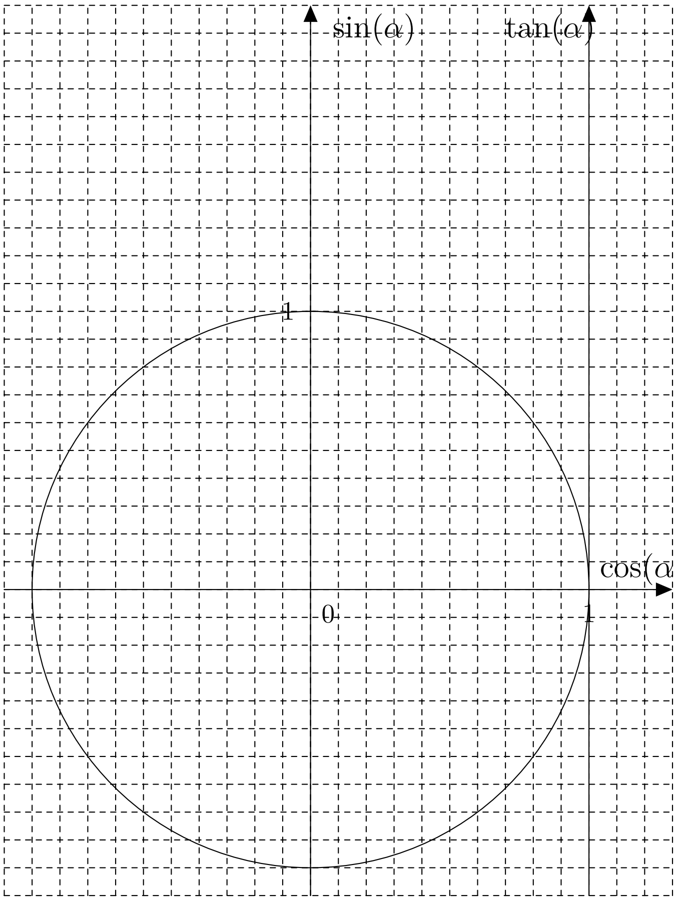
Règle :

b) Pour quels angles entre 0 ° et 360 ° a-t-on $\cos(x) = -0.4$?



Règle :

c) Pour quels angles entre 0 ° et 360 ° a-t-on $\tan(t) = 1.5$?



Règle :

Propriétés fondamentales

a) A l'aide du théorème de Pythagore, on obtient :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

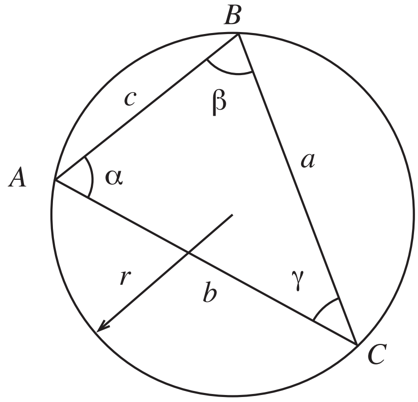
b) A l'aide du théorème de Thalès, on obtient :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

4.3 Trigonométrie du triangle quelconque

Soit ABC un triangle quelconque.
Notons

- a, b et c les longueurs des côtés du triangle,
- α, β et γ les angles intérieurs du triangles,
- r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.



Théorème 4.1 (*Théorème du cosinus*)

Il généralise le théorème de Pythagore au triangle quelconque :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Théorème 4.2 (*Théorème du sinus*)

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$

Théorème 4.3 (*Théorème de l'aire*)

Si $\sigma(ABC)$ représente l'aire du triangle ABC :

$$\sigma(ABC) = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta)$$

Exemple 4.4.

Pour déterminer la distance entre deux points A et B séparés par un obstacle, on choisit un point C depuis lequel on voit les points A et B.

On mesure ensuite les distances $AC = 100$ m et $BC = 800$ m ainsi que la mesure de l'angle $\gamma = \angle(ACB) = 100°$.

Calculer la distance AB.

Relations trigonométriques inverses cos^{-1} et sin^{-1}

Les intervalles où se trouve l'angle donné par $\cos^{-1}$ et $\sin^{-1}$ sont les suivants :

Equation	**Valeur de *k***	**Solution de la calculatrice**
$\sin(\alpha) = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\alpha = \sin^{-1}(k)$ avec $-90° \leq \alpha \leq 90°$
$\cos(\alpha) = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\alpha = \cos^{-1}(k)$ avec $0 \leq \alpha \leq 180°$

Relations trigonométriques cos^{-1} et sin^{-1} dans un triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, si l'on connaît le cosinus $c = \cos(\alpha)$ ou le sinus $s = \sin(\alpha)$ de l'angle α, il n'existe qu'un seul angle possible donné par $\alpha = \cos^{-1}(c)$ ou par $\alpha = \sin^{-1}(s)$.

Exemple 4.5.

Calculer la mesure des angles et la longueur des côtés d'un triangle ABC rectangle en C connaissant $a = 5$ et $c = 13$.

Relations trigonométriques cos^{-1} et sin^{-1} dans un triangle quelconque

a) Dans un triangle quelconque, si l'on connaît le cosinus $c = \cos(\alpha)$ de l'angle α, il n'existe qu'un seul angle possible donné par $\alpha = \cos^{-1}(c)$

b) Dans un triangle quelconque, si l'on connaît le sinus $s = \sin(\alpha)$ de l'angle α, il existe en général deux angles possibles donnés par $\alpha = \sin^{-1}(s)$ et $\alpha = 180° - \sin^{-1}(s)$

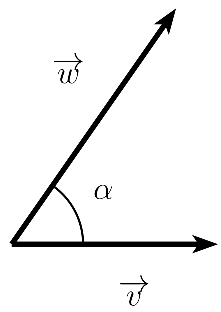
Exemple 4.6.

Calculer la mesure des angles et la longueur des côtés d'un triangle ABC connaissant $b = 20$, $c = 12$ et $\alpha = 10°$

4.4 Expression trigonométrique du produit scalaire

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \, \cos(\alpha)$$

où α est l'angle formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (angle, compris entre 0° et 180°, formé par les vecteurs placés à la même origine).



Exemple 4.7.

a) Calculer l'angle entre les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Calculer la mesure de l'angle α du triangle ABC de sommets

$$A(1;2), B(5;-7) \text{ et } C(6;5)$$

4.5 Exercices

4.1

a) Exprimer les fonctions trigonométriques des angles 135°, 320° et −160° à l'aide des rapports trigonométriques du triangle rectangle.

b) Donner les expressions suivantes en fonction de t uniquement :

1) $\cos(270° + t)$
2) $\sin(-t - 270°)$
3) $\sin(t - 270°)$
4) $\cos(t - 270°)$
5) $\cos(-\frac{19\,\pi}{2} - t)$

4.2

Résoudre dans $[0; 360°[$ les équations suivantes.

a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

b) $\sin(t) = 0.829$

c) $\cos(t) = -1.43$

d) $\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.3

Est-il possible de **construire** un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse mesure 7.5 cm et dont l'un des côtés adjacent à l'angle droit mesure 3.9 cm ?

4.4

Construire les triangles ABC dont on connaît $a = 6$ cm, $b = 5$ cm et $\beta = 45°$.

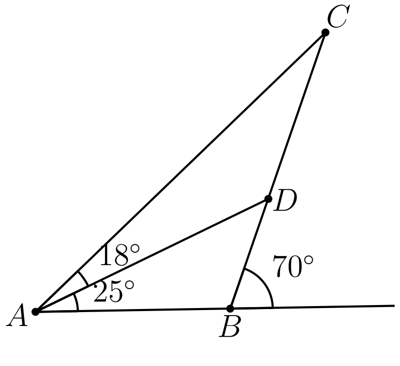
4.5

Après avoir construit chaque triangle donné par les éléments ci-dessous, le résoudre :

a) $a = 8$, $b = 11$ et $\beta = 14°$ b) $b = 11$, $c = 9$ et $\gamma = 22°$ c) $a = 11$, $c = 12$ et $\alpha = 154°$

4.6

Calculer la longueur des segments BC, BD, AD et AB, sachant que la longueur du segment AC vaut 88 cm.



4.7

Un triangle ABC est donné par $a = 26.4$, $b = 16.2$ et $c = 20.7$. Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle.

4.8

D'un quadrilatère convexe $ABCD$, on donne l'angle en A : 110°, ainsi que les longueurs des quatres côtés : $AB = 3$, $BC = 6$, $CD = 6$ et $DA = 5$. Calculer l'aire et les angles du quadrilatère.

4.9

Sur la diagonale AC d'un rectangle $ABCD$, on considère un point O tel que $\widehat{BOC} = 57°$. Sachant que $AB = 36$ et $AO = 24$, calculer BC.

4.10

Dans le parallélogramme $ABCD$, on connaît $\overline{AB} = 30$, $\overline{BC} = 20$ et on sait que l'angle en B vaut 60°. Calculer la longueur des diagonales de ce parallélogramme ainsi que l'angle déterminé par celles-ci. Trouver enfin l'aire du quadrilatère $ABCD$.

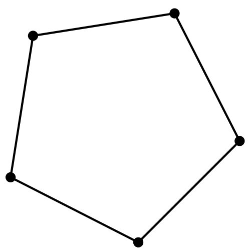
4.11

Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux points A et B distants de d mètres. On mesure les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ ainsi que l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A. Quelle est l'altitude de C si celle de A vaut h ?

Application numérique : $d = 400$ m, $h = 1'000$ m, $\widehat{BAC} = 35°$, $\widehat{ABC} = 110°$ et $\theta = 20°$.

4.12

Le Pentagone est le plus grand bâtiment administratif au monde, si l'on considère la surface occupée. La base du bâtiment a la forme d'un pentagone régulier, dont chaque côté mesure 276 m.
Déterminer l'aire de la base du bâtiment.



4.13

Un hélicoptère est en vol stationnaire 600 m au-dessus du sommet C d'une montagne qui culmine à 1'560 m d'altitude. Du sommet C et de l'hélicoptère, on peut voir le sommet S d'un deuxième pic plus élevé. Depuis l'hélicoptère, le sommet S est vu sous un angle de dépression (angle vertical entre le rayon visuel descendant et l'horizontale) de 43° ; depuis le petit sommet C, on voit le sommet S sous un angle d'élévation (angle vertical entre le rayon visuel montant et l'horizontale) de 18°.
Calculer la distance entre les deux sommets, ainsi que l'altitude du sommet S.

4.14

Pour calculer la distance séparant deux points A et B situés sur les rives opposées d'un fleuve, un géomètre choisit un point C situé sur la même rive à 240 m du point A. Il détermine alors que les angles $\angle BAC$ et $\angle ACB$ mesurent respectivement $63°24'$ et $54°6'$. Calculer la distance entre les points A et B (au cm près).

4.15

Pour un observateur, la direction de visée du sommet d'un pylône fait un angle de 53.6° avec l'horizontale ; en reculant de 7 m sur le sol horizontal dans le plan de visée, l'angle d'élévation n'est plus que 32°.
Quelle est la hauteur du pylône sachant que l'œil de l'observateur est à 1,7 m du sol ?

4.16

Une tour de 50 m de haut est située sur le flanc d'une colline. Depuis le pied de la tour, on descend de 220 m le long du flanc de la colline et on mesure l'angle vertical θ sous lequel on voit la tour, soit $\theta = 12.5°$.
Calculer l'angle d'inclinaison du flanc de la colline relativement à l'horizontale.

4.17

A l'origine la Tour de Pise était perpendiculaire à la surface du sol et mesurait 54 m de hauteur. Comme elle s'enfonce dans le sol (en pivotant relativement au centre de sa base que l'on suppose fixe), elle penche maintenant d'un angle θ relativement à la verticale. Lorsque le centre du haut de la tour est observé à partir d'un point du sol (plat) distant de 45 m du centre de sa base (dans le plan vertical contenant la tour penchée, du côté où penche celle-ci), l'angle d'élévation est de 53.3°.
Calculer l'angle θ, ainsi que la distance séparant la position actuelle du centre du haut de la tour à sa position lors de l'édification de la tour.

4.18

On donne les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Calculer la mesure des angles $\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d})$, $\sphericalangle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, $\sphericalangle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})$ et $\sphericalangle(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$.

4.19

On donne un triangle ABC par ses sommets $A(-2;-3)$, $B(0;4)$ et $C(7;5)$.
Calculer la mesure des angles intérieurs du triangle ABC.

4.20

On donne les droites $a = AB$ et $b = CD$ par les points $A(1;5)$, $B(7;3)$, $C(2;1)$ et $D(-3;1)$.
Calculer l'angle aigu formé par les droites a et b.

4.21

On donne le quadrilatère $ABCD$ de sommets $A(-4;0)$, $B(0;5)$, $C(7;1)$ et $D(1;-2)$.
Calculer les angles intérieurs du quadrilatère et calculer son aire.

4.6 Réponses

4.1

a) $\sin(135°) = \sin(45°), \cos(135°) = -\cos(45°), \tan(135°) = -\tan(45°)$
$\sin(320°) = -\sin(40°), \cos(320°) = \cos(40°), \tan(320°) = -\tan(40°)$
$\sin(-160°) = -\sin(20°), \cos(-160°) = -\cos(20°), \tan(-160°) = \tan(20°)$

b) 1) $\cos(270° + t) = \sin(t)$
2) $\sin(-t - 270°) = \cos(t)$
3) $\sin(t - 270°) = \cos(t)$
4) $\cos(t - 270°) = -\sin(t)$
5) $\cos(-\frac{19\,\pi}{2} - t) = \sin(t)$

4.2

a) $S = \{120°; 240°\}$

b) $S = \{56°; 124°\}$

c) Pas de solution.

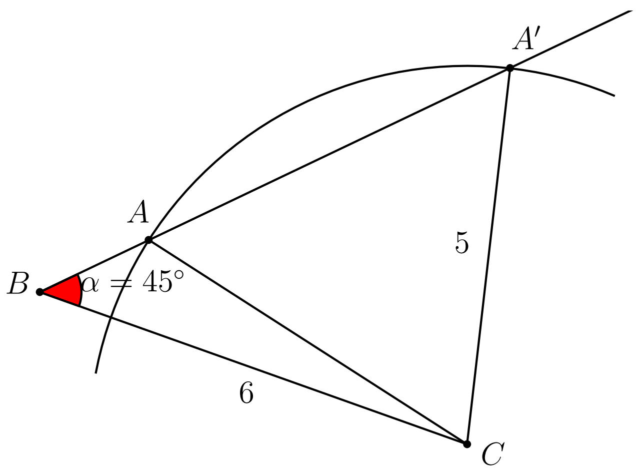
d) $S = \{240°; 300°\}$

4.3

C'est possible.

4.4

Deux triangles sont possibles:



4.5

a) $c = 18.6$, $\alpha = 10.1°$, $\gamma = 155.9°$; b) $a = 18.2/2.2$, $\alpha = 130.8°/5.3°$, $\beta = 27.3°/152.8°$; c) impossible.

4.6

$BC \simeq 63.8$ cm ; $BD \simeq 25.4$ cm ; $AD \simeq 56.5$ cm ; $AB \simeq 42.51$ cm.

4.7

Le rayon mesure 13.2.

4.8

Aire= 23.7 ; $\beta = 101.3°$; $\gamma = 67.3°$; $\delta = 81.4°$.

4.9

$BC = 15,3$

4.10

Les diagonales mesurent environ 26.46 et 43.59 unités. L'aire du parallélogramme vaut environ 519.6 unités carrées. Les angles mesurent 64.29° et 115.71°.

4.11

L'altitude du sommet C est 1224.13 m.

4.12

La surface du pentagone vaut environ 131 059 m^2.

4.13

Distance de C à S : 502 m ; altitude : 1715 m.

4.14

Distance AB : 219.17 m

4.15

Hauteur du pylône : 9.81 m

4.16

5.3°

4.17

$\theta = 5.2°$; 4.92 m

4.18

18.4° ; 90° ; 101.3° ; 71.6° ; 29.7°

4.19

$\alpha = 32.4°$; $\beta = 114.1°$; $\gamma = 33.5°$

4.20

18.4°

4.21

$\alpha = 73.1°$; $\beta = 98.9°$; $\gamma = 56.3°$; $\delta = 131.6°$

Aire : 39 [u^2]