Chapitre 2

Géométrie métrique

2.1 Base orthonormée, repère orthonormé

Dans le plan,

- une **base** $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est **orthonormée** si $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ et $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 1$.
- le **repère** $R = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est **orthonormé** si la base associée $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est orthonormée.

Une base orthonormée du plan est parfois notée $B = (\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ et le repère orthonormé se note $R = (O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$.

Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

$$\|\overrightarrow{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Remarque 1

a) Les affirmations ci-dessus sont fausses si la base n'est pas orthonormée !

b) Pour calculer la distance entre deux points A et B du plan, on calcule $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exemple 2.1.

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(-1; -9), B(-10; 3)$ et $C(6; 15)$. Prouver que le triangle ABC est rectangle.

2.2 Produit scalaire

Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont dits **orthogonaux** si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite.

a) $\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{w}$ est nul (ou les deux vecteurs sont nuls)

b) $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ont des directions perpendiculaires.

Propriétés de vecteurs orthogonaux

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \iff \|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2$$

Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire se définit relativement à une **base orthonormée** :

$$\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 \in \mathbb{R}$$

Propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire jouit des propriétés suivantes :

a) $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{v}$

b) $\overrightarrow{v} \bullet (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{t}) = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{t}$

c) $\overrightarrow{v} \bullet (k\overrightarrow{w}) = (k\overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w} = k(\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})$

d) $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{w}\|^2)$

e) La valeur du produit scalaire est indépendante de la base orthonormée choisie !

Théorème 2.1 (*Condition d'orthogonalité*)

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \iff \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0$$

Exemple 2.2.

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(-1;-9)$, $B(-10;3)$ et $C(6;15)$.

Prouver que le triangle ABC est rectangle en utilisant le produit scalaire.

Vecteurs orthogonaux à un vecteur donné du plan

Relativement à une base orthonormée du plan, si $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, on a

a) $\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ sont les deux seuls vecteurs orthogonaux et de même norme que $\overrightarrow{v}$.

b) $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{n} = k \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

c) Dans le plan, il existe une **unique direction perpendiculaire** à un vecteur donné.

Exemple 2.3.

Un triangle ABC rectangle en A est connu par ses sommets $A(3; -1)$ et $B(7; -4)$.

Calculer les coordonnées du sommet C sachant que son aire vaut 10 [u^2].

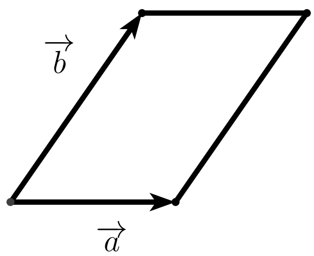
2.3 Déterminant d'un couple de vecteurs du plan

Le déterminant du couple $\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)$, où $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, est le **nombre réel**

$$\det\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)=\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

Propriétés du déterminant de deux vecteurs du plan

On pose $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.



a) **L'aire d'un parallélogramme** construit sur les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est donnée par

$$\sigma\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)=\left|\det\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)\right|=\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|=|a_1b_2-a_2b_1|$$

b) **2ème critère de colinéarité dans le plan**

$$\overrightarrow{a}\text{ et }\overrightarrow{b}\text{ colinéaires}\iff\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=0$$

Exemple 2.4.

a) Calculer $\det\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)$ où $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) Calculer l'aire du triangle de sommets $A(-1;4), B(2;5)$ et $C(5;-3)$.

2.4 Exercices

2.1

a) Calculer la norme des vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

b) Vérifier que le vecteur suivant est unitaire (de norme 1) : $\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

c) On donne les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\| + \|\overrightarrow{c}\|; \|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\|; \| - 2\overrightarrow{a}\| + 2\|\overrightarrow{a}\|; \|\overrightarrow{a}\|\overrightarrow{c}; \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a}; \left\|\frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a}\right\|$$

d) On donne $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre k sachant que la norme de $\overrightarrow{d}$ vaut 10.

e) On donne $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre m tel que

$$\|\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v}\| = \sqrt{82}$$

xx

2.2

Calculer en valeur approchée le périmètre du triangle ABC avec $A(2;1), B(4;3)$ et $C(2;6)$.

2.3

Soit $A(7;1)$, $B(5;5)$, $C(5;-3)$ et $I(2;1)$.
Prouver que les points A, B et C sont situés sur le même cercle centré en I.

2.4

Déterminer k pour que $P(2;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB, si $A(5;3)$ et $B(-2;k)$.

2.5

On donne $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Evaluer les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

a) $\overrightarrow{a} \bullet \left(7\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$

b) $\left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{b}$

c) $\left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{d}\right)$

d) $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}\right)$

e) $\|\overrightarrow{d}\|\left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{d}\right)$

f) $\overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}\right)$

2.6

Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

2.7

On donne les points $A(-2; 4)$, $B(1; -2)$ et $C(k; k), k \in \mathbb{R}$.
Déterminer k pour que le triangle ABC soit rectangle

a) en A ; b) en B ; c) en C ;

Représenter ensuite les solutions sur une figure à l'échelle.

2.8

On donne les points $A(-2; -1)$, $B(7; 0)$ et $C(1; 5)$.
Déterminer les coordonnés du sommet D du parallélogramme $ABCD$ et calculer son aire.

2.9

Etablir que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire si $A(6; 4)$, $B(12; -2)$ et $C(17; 9)$.

2.10

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze rectangle non rectangle, puis calculer son aire, si $A(7; 5), B(8; 7), C(12; 5)$ et $D(13; 2)$.

2.11

Relativement à un repère orthonormé on considère les points $A(3; -4)$ et $C(5; 2)$.

Sachant que A et C sont les sommets non consécutifs d'un carré $ABCD$, déterminer les coordonnées de B et D.

2.12

Relativement à un repère orthonormé on considère les points $A(0; 2)$, $B(6; 6)$, $C(8; 3)$ et $D(2; -1)$

a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Démontrer.
b) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

2.13

Relativement à un repère orthonormé on considère les points $A(-3; -2)$, $B(3; 0)$, $C(5; 6)$ et $D(-1; 4)$

a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Démontrer.
b) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

2.14

Relativement à un repère orthonormé, on considère les points $A(-1;2)$ et $B(7;8)$.

Calculer les coordonnées du point P situé sur le segment AB et situé à une distance de 7 unités du point A.

2.15

Soit $A(-7;-3)$, $B(1;3)$ et $C(-1;4)$.
Calculer la longueur de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

2.5 Réponses

2.1

a) $5\,;\ \sqrt{73}\,;\ \sqrt{6.5}\,;\ 1.$

c) $24\,;\ \sqrt{82}\,;\ 20\,;\ \begin{pmatrix}-30\\0\end{pmatrix}\,;\ \begin{pmatrix}0.6\\0.8\end{pmatrix}\,;\ 1$

d) $k=-5$ ou $k=7$

e) $m=-2.3$ ou $m=1.5$

2.2

$\sqrt{8}+\sqrt{13}+5\simeq 11.43$

2.3

$\|\overrightarrow{IB}\|=\|\overrightarrow{IA}\|=\|\overrightarrow{IC}\|=5$

2.4

$k=-4$ ou $k=2$

2.5

a) 102

b) $\begin{pmatrix}55\\-11\end{pmatrix}$

c) 14

d) 50

e) 36

f) Pas défini.

2.6

a) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont perpendiculaires.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont perpendiculaires.

d) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

2.7

a) $k=10$

b) $k=-5$

c) $k=-2$ ou $k=2.5$

2.8 $D(-8;4)$; son aire vaut 51 [u^2].

2.9

Le triangle est isocèle car $\|\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{BC}\|$. Son aire vaut 48 [u^2].

2.10

Son aire vaut 12.5 [u^2].

2.11

$B(7;-2)$, $D(1;0)$ ou l'inverse

2.12

$ABCD$ est un rectangle d'aire 26 [u^2]

2.13

$ABCD$ est un losange d'aire 32 [u^2]

2.14

$P(4.6;6.2)$

2.15

$h=2$