Chapitre 4

Fonctions (2ème partie)

4.1 Tableau du signe d'une fonction réelle

Soit f une fonction réelle.

Dans le **tableau du signe** d'une fonction f, on résume :

- les indéfinitions (notées $||$)
- les zéros (notés 0)
- les intervalles pour lesquels la fonction f est positive (notés $+$) et ceux pour lesquels la fonction f est négative (notés $-$)

Par exemple le tableau des signes

x		-3		2	
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

indique que la fonction f admet

- un zéro en $x = 2$
- une indéfinition en $x = -3$
- le signe $+$ si $x \in]-3; 2[$: la courbe $y = f(x)$ est donc au-dessus de l'axe Ox pour $x \in]-3; 2[$
- le signe $-$ si $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$: la courbe $y = f(x)$ est donc au-dessous de l'axe Ox pour $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$

Exemple 4.1.
Représenter un exemple de graphe d'une fonction f dont le tableau des signes est le suivant :

x		-3		-1		2		3	
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$

4.2 Multiplicité d'un zéro d'un polynôme

Rappelons le théorème vu lors de la présentation de la division euclidienne de polynômes :

$x = a$ est zéro du polynôme $P(x) \iff$ il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$

Il peut arriver que $x = a$ soit encore une zéro du polynôme $Q(x)$, et dans ce cas, il existe un polynôme $R(x)$ tel que $P(x) = (x-a)^m \cdot R(x)$ avec $m \geq 2$.

Le plus grand m pour lequel c'est possible est appelé la **multiplicité** de $x = a$ comme zéro de $P(x)$.

Exemple 4.2.

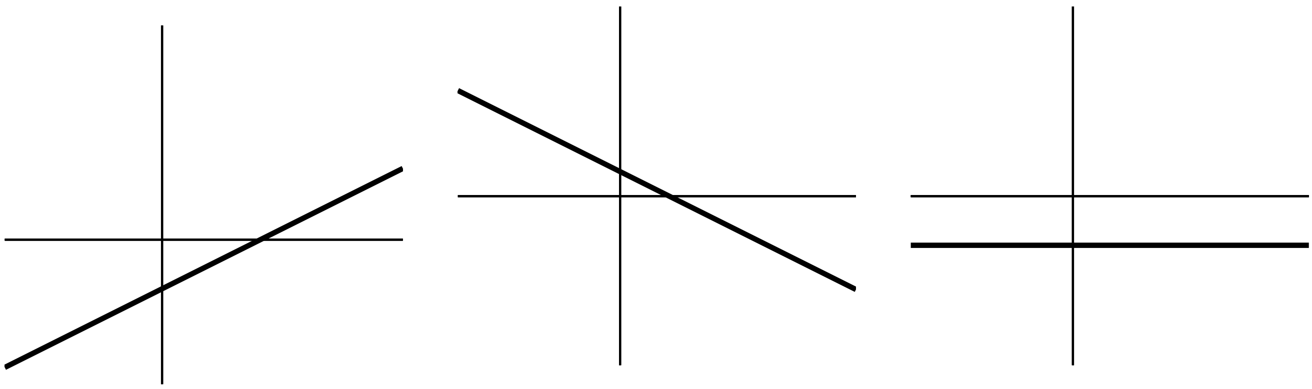
Vérifier que $x = -2$ est un zéro du polynôme $P(x) = x^5 + 4x^4 - 16x^2 - 16x$ et déterminer sa multiplicité.

Exemple 4.3.

Déterminer le polynôme $R(x)$ qui possède les trois zéros suivants : $x = -1$ qui est double, $x = 0$ qui est de multiplicité 4 et $x = 2$ qui est simple. On sait de plus que $R(1) = 8$.

4.3 Signe d'une fonction affine

Soit $f(x) = mx + h$ une fonction affine.



Exemple 4.4.

Etudier le signe des fonctions affines suivantes :

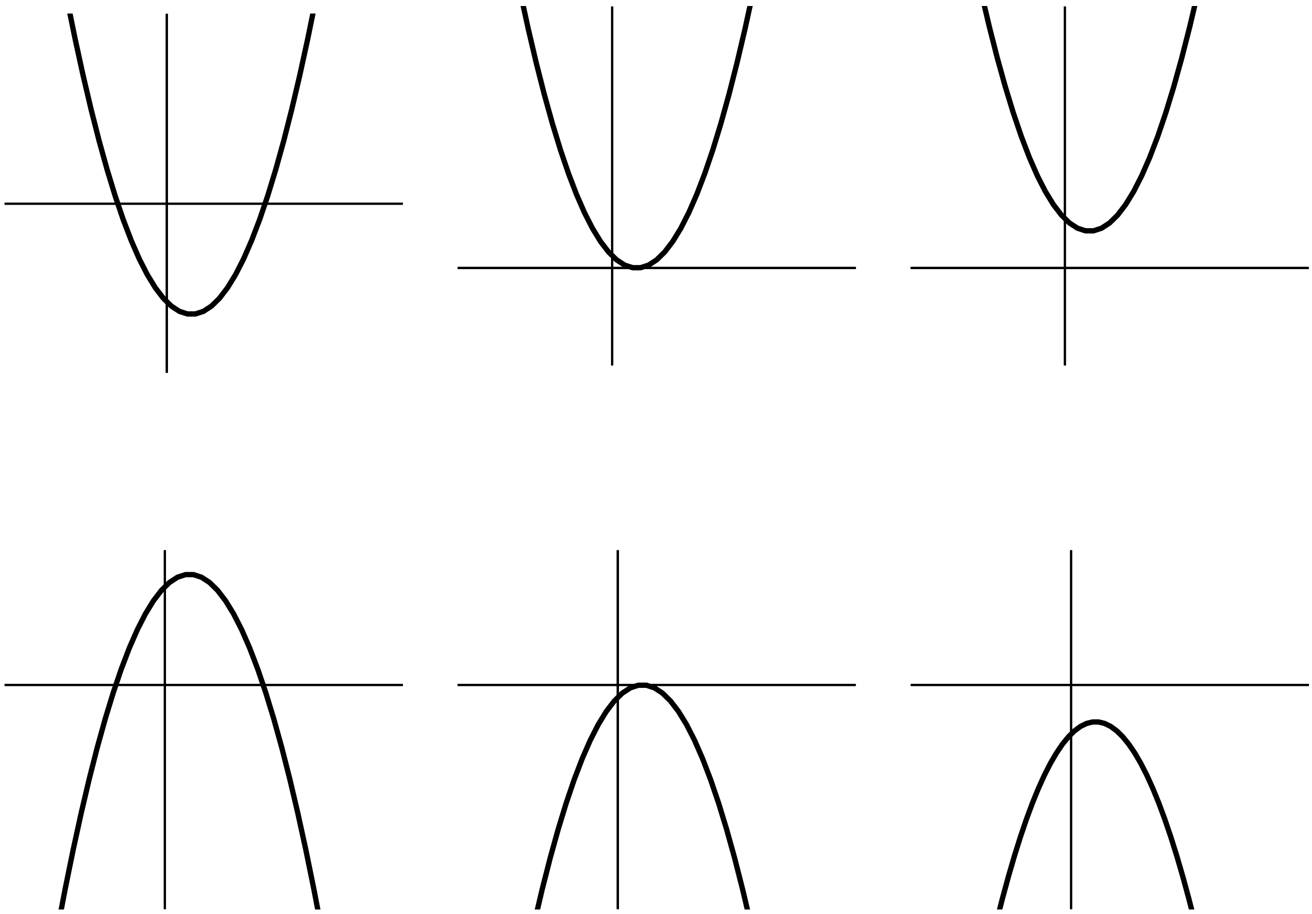
a) $f(x) = 3x + 3$

b) $g(x) = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{5}$

c) $h(x) = -3$

4.4 Signe d'une fonction quadratique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction quadratique et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.



Exemple 4.5.

Etudier le signe des fonctions quadratiques suivantes :

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

b) $g(x) = 5x^2 - 5x + 7$

4.5 Signe d'une fonction polynomiale

L'étude du signe d'une fonction polynomiale peut s'effectuer de la manière suivante :

- on factorise la fonction polynomiale comme produit de facteurs du premier et du deuxième degré,
- on étudie séparément le signe de chacun des facteurs,
- on applique la règle des signes sur chaque intervalle.

Remarque 4.1.

On peut établir le tableau du signe en tenant compte des multiplicités des zéros : il n'y a pas de changement de signe si la multiplicité est paire et un changement de signe si elle est impaire.

Exemple 4.6.

a) Etablir le tableau du signe de la fonction f définie par $f(x) = (3-x)(x^2-5x+6)$.

b) Etablir le tableau du signe de la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

4.6 Signe d'une fonction rationnelle

L'étude du signe d'une fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ s'obtient en étudiant le signe de la fonction polynomiale p qui est au numérateur, ainsi que le signe de la fonction polynomiale q qui est au dénominateur. La règle des signes permet ensuite d'obtenir le signe de la fonction f.

Remarque 4.2.

Pour une fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, les indéfintions sont les solutions de l'équation $q(x) = 0$ et les zéros sont les solutions de l'équation $p(x) = 0$ qui sont définies.

Exemple 4.7.

a) Etablir le tableau du signe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-6x+9}$.

b) Etablir le tableau du signe de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x^5-3x^4-5x^3}{(3x-2)^2}$.

4.7 Inéquations

4.7.1 Inéquation du premier degré

Si a et b sont des nombres réels, on note

$$a \leq b \iff b - a \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad a < b \iff b - a \in \mathbb{R}_+^*$$

Remarque 4.3.

En inversant les deux membres et l'inégalité d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente (qui possède les mêmes solutions) :

$A \leq B \iff B \geq A$ et $A < B \iff B > A$.

Equivalence d'inéquations

On obtient une inéquation équivalente si :

- On ajoute ou soustrait une même expression aux deux membres de l'inéquation.
- On multiplie ou on divise les deux membres de l'inéquation par un **nombre positif non nul**.
  Si l'on multiplie ou divise les deux membres par un **nombre négatif non nul**, il faut **inverser l'inégalité** !

Exemple 4.8.

a) Résoudre l'inéquation $-4x + 3 < x - 7$

b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{8 - 3x - 10x^2}{5} \leq x - 5 - 2x^2$

4.7.2 Inéquation quadratique

Après avoir isolé 0 d'un côté de l'inégalité, on étudie le signe d'une fonction quadratique.

a) Résoudre l'inéquation $x^2 - 5x < 6$

b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{5x - x^2}{5} \leq x - 5$

c) Résoudre l'inéquation $-2x^2 + 6x - 5 > 0$

4.7.3 Inéquation polynomiale ou rationnelle

Le tableau du signe des fonctions polynomiales et rationnelles permet de résoudre les inéquations polynomiales et rationnelles.

Exemple 4.9.

a) Résoudre l'inéquation $x^3 + 6 \leq 7x$.

b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} \geq \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$.

4.8 Exercices

4.1

Établir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 2x + 4$

b) $f(x) = 4 - 2x$

c) $f(x) = -5x - 10$

d) $f(x) = -(7 - 2x) - 8$

4.2

Établir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = -5x^2 + 60x - 180$

b) $f(x) = -8x^2 + 48x - 82$

c) $f(x) = -4x^2 - 80x - 391$

d) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

4.3

Établir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (2 - x)(x + 3)(x - 4)$

b) $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)$

c) $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)^2$

d) $f(x) = -(2 - x)^2(x + 3)$

e) $f(x) = x^3 + 2\,x^2 - x - 2$

f) $f(x) = (x^3 - x^2 + x) \cdot (2 - x)$

4.4

Etablir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{x - 6}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 6}{(x + 3)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \dfrac{3}{(x - 1)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + x - 6}$

4.5

Donner le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{-2\,x + 1}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{2x(2x - 3)^2}{(x - 1)^3}$

c) $f(x) = 5 - \dfrac{125}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^3}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{(x - 11)^3}{-x^2 - 10x - 25}$

f) $f(x) = \dfrac{-6x^2 + 12x - 6}{(x^2 - 2x)^2}$

4.6

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $2\,x + 5 \geq 1$

b) $5 - 2\,x \geq 1$

c) $-4\,a - 5 < a + 5$

d) $-\,(7 - 2\,x) - 8 > 0$

e) $1 - 3\,x \leq \frac{1}{3}\,x + 2$

f) $3\,(1 - x) > \frac{2}{5}\,x$

4.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation proposée dans chacun des exercices ci-dessous.

a) $-3x^2 - 42x - 147 \geq 0$

b) $-4x^2 + 24x - 42 < 0$

c) $-3x^2 + 8x + 3 < 0$

d) $x^2 + 10x + 25 > 0$

e) $4x^2 > 0$

f) $-x^2 - 6x - 9 \geq 0$

g) $-x^2 + 14x - 48 > 0$

h) $-5x^2 + 30x - 40 > 0$

i) $-5x^2 - 20x - 20 > 0$

j) $-3x^2 + 42x - 147 \geq 0$

4.8

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x^3 - 4\,x^2 + x + 6 > 0$

b) $x^5 - 5\,x^3 + 4\,x \leq 0$

c) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$

d) $(x - 2) \cdot (x^2 + 6\,x - 1) > (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 1)$

4.9

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x} > 0$

b) $\dfrac{x\,(2\,x - 3)^2}{x^2 - 4} < 0$

c) $\dfrac{4\,x^2 + 4\,x + 1}{x^2 - 1} > 3$

d) $\dfrac{2}{x^2} \geq 1 - x$

e) $\dfrac{x - 3}{x^2 - 3\,x + 2} > 0$

f) $\dfrac{3\,x^2 - 7\,x - 20}{x^2 + 4\,x - 12} \leq 0$

g) $\dfrac{x + 1}{x - 1} \leq \dfrac{x - 1}{x + 1}$

h) $\dfrac{13}{2\,x + 1} \geq 9 - \dfrac{38}{4 - x}$

i) $\dfrac{x - 3}{-x^2 + x - 2} > 0$

j) $\dfrac{1}{x} \geq x$

k) $\dfrac{13}{2 - x} \leq 7 - \dfrac{4}{3\,x + 1}$

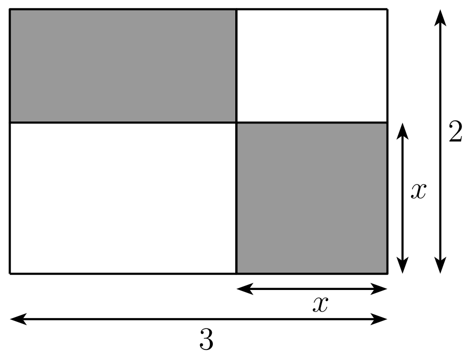
l) $\dfrac{x}{3\,x - 4} \geq \dfrac{1}{4}$

m) $\dfrac{1}{x + 1} \leq \dfrac{x}{(x - 2)(x + 3)}$

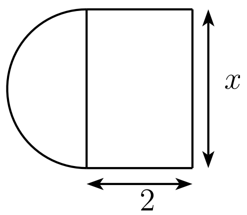
n) $\dfrac{6}{4 - x} - \dfrac{1}{1 - x} \leq 1$

4.10

Pour quelle valeur de x le carré grisé a-il une aire supérieure à celle du rectangle grisé ?



4.11



Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle est-elle plus grande que celle du demi-disque ?

4.12

Les bergers allemands peuvent faire des sauts leur permettant de franchir des murs de plus de 3 mètres de hauteur. Supposons que la hauteur h (en m) au-dessus du sol du berger allemand t secondes après le début de son saut est donnée par

$$h(t) = -5t^2 + 8t$$

a) Calculer la hauteur maximale sautée par le berger allemand.

b) Calculer l'intervalle de temps (en s) pendant lequel le chien est à 2.75 m et plus au-dessus du sol.

4.13

Pour une petite voiture d'une marque donnée, le rayon d'action M (nombre de kilomètres parcourus) avec 4 litres d'essence est lié à sa vitesse v (en km/h) par la formule

$$M(v) = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v \qquad \text{pour } 0 < v < 60$$

a) Calculer le rayon d'action maximal de la voiture.

b) Pour quel intervalle de vitesses (en km/h) le rayon d'action de la voiture est-il supérieur ou égal à 45 km ?

4.14

Pour une population particulière de saumons, la relation entre le nombre S de poissons qui fraient et le nombre R de poissons qui naissent de la fraie et qui survivent jusqu'à l'âge adulte est donnée par la formule

$$R(S) = \frac{4500S}{S + 500}$$

a) Esquisser le graphe de la fonction qui associe au nombre de poissons qui fraient S le nombre de jeunes poissons qui survivent R pour $S \leq 6'000$.

b) Pour quel intervalle de populations S a-t-on $R > S$? Faire ressortir le résultat sur le graphique du point a).

4.9 Réponses

4.1

a)

x		-2	
$f(x)$	$-$	0	$+$

b)

x		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$

c)

x		-2	
$f(x)$	$+$	0	$-$

d)

x		$\frac{15}{2}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

4.2

a)

x		6	
$f(x)$	$-$	0	$-$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

c)

x		$-\frac{23}{2}$		$-\frac{17}{2}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

d)

x		-3		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4.3

a)

x		-3		2		4	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

b)

x		-3		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

c)

x		-3		2	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$

d)

x		-3		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

e)

x		-2		-1		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

f)

x		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

4.4

a)

x		-3		6	
$f(x)$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

b)

x		-3		6	
$f(x)$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

c)

x		-2		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

d)

x		-2		2		3	
$f(x)$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$+$

e)

x		1	
$f(x)$	$+$	$\|$	$+$

f)

x		-3		2		5	
$f(x)$	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

4.5

a)

x		-3		0.5	
$f(x)$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$

b)

x		0		1		1.5	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$

c)

x		-5		0		5	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

d)

x		-1		0		6	
$f(x)$	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	0	$-$

e)

x		-5		11	
$f(x)$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$

f)

x		0		1		2	
$f(x)$	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	$\|$	$-$

4.6

a) $S = [-2; +\infty[$

b) $S =]-\infty; 2]$

c) $S =]-2; +\infty[$

d) $S =]\frac{15}{2}; +\infty[$

e) $S = [-\frac{3}{10}; +\infty[$

f) $S =]-\infty; \frac{15}{17}[$

4.7

a) $S = \{-7\}$

b) $S = \mathbb{R}$

c) $S = \Big]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]3; +\infty\Big[$

d) $S =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$

e) $S =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

f) $S = \{-3\}$

g) $S =]6; 8[$

h) $S =]2; 4[$

i) $S = \varnothing$

j) $S = \{7\}$

4.8

a) $S =]-1 \; ; \; 2[\cup] \; 3 \; ; \; +\infty[$

b) $S =]-\infty \; ; \; -2] \cup [\; -1 \; ; \; 0] \cup [\; 1 \; ; \; 2]$

c) $S =]-\infty \; ; \; -1] \cup \{1\}$

d) $S =]-3 \; ; \; 1[\cup] \; 1 \; ; \; 2[$

4.9

a) $S =]-\infty; -2[\cup]0; 1[\cup]2; +\infty[$

b) $S =]-\infty; -2[\cup]0; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; 2[$

c) $S =]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]1; +\infty[$

d) $S = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$

e) $S =]1; 2[\cup]3; +\infty[$

f) $S =]-6; -\frac{5}{3}] \cup]2; 4]$

g) $S =]-\infty; -1[\cup [0; 1[$

h) $S =]-\frac{1}{2}; 4[$

i) $S =]-\infty; 3[$

j) $S =]-\infty; -1] \cup]0; 1]$

k) $S =]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]2; +\infty[$

l) $S =]-\infty; -4] \cup]\frac{4}{3}; +\infty[$

m) $S =]-3; -1[\cup]2; +\infty[$

n) $S =]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$

4.10

$\frac{6}{5} < x \leq 2$

4.11

$0 < x < \frac{16}{\pi}$

4.12

a) 3.2 m ; 2) $[0.5; 1.1]$

4.13

a) 46.875 km ; b) $[30; 45]$

4.14

b) $]0; 4'000[$