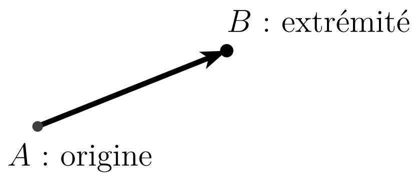
Chapitre 1

Géométrie vectorielle et affine

1.1 Vecteurs du plan et de l'espace

Une **flèche** est un couple de points du plan ou de l'espace.

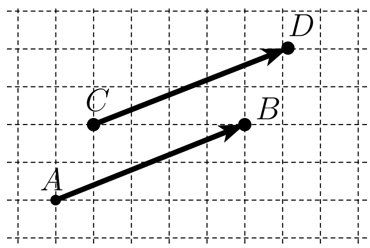
Par exemple, la flèche $(A; B)$ représentée ci-contre est d'origine A et d'extrémité B.



Deux flèches sont dites **équipollentes** s'il existe une translation permettant de passer de l'une des flèches à l'autre flèche.

Autrement dit, deux flèches sont équipollentes si elles ont **même direction**, **même sens** et **même longueur**.

Les flèches $(A; B)$ et $(C; D)$ représentées ci-contre sont équipollentes.



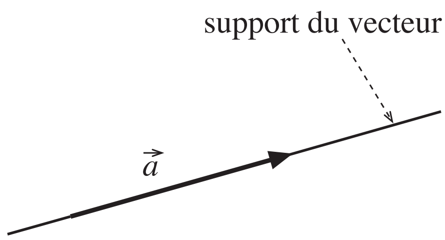
Vecteur (idée...)

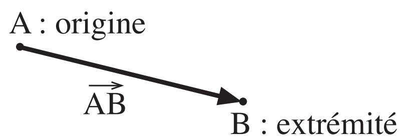
Toutes les flèches équipollentes représentent le même **vecteur**.

Ainsi un **vecteur** est caractérisé par :

- sa direction
- son sens
- sa longueur

Un vecteur se note $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$...
L'ensemble des vecteurs du plan se note V_2.
L'ensemble des vecteurs de l'espace se note V_3.

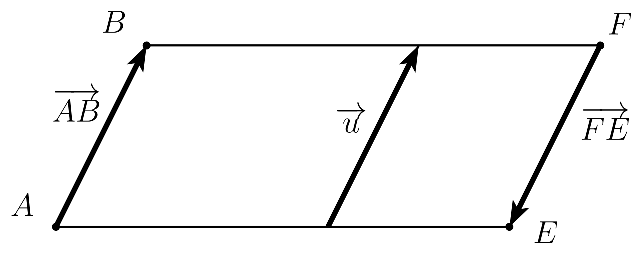




1.1.1 Vecteurs opposés

Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont dits opposés s'ils ont même direction, même longueur, mais sont de sens contraires ; on note $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$$
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{FE}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$$



1.1.2 Vecteur nul

Le **vecteur nul** noté $\overrightarrow{0}$ est le vecteur $\overrightarrow{AA}$ où A est un point quelconque du plan ou de l'espace.

Le vecteur nul n'a pas de direction déterminée.

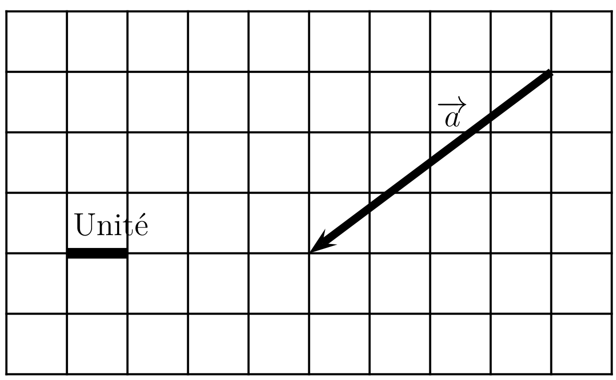
1.1.3 Norme d'un vecteur

La **norme** du vecteur $\overrightarrow{v}$ notée $\|\overrightarrow{v}\|$ est la **longueur** de l'une des flèches qui représente le vecteur $\overrightarrow{v}$.

La norme d'un vecteur est donc un **nombre** réel positif (ou nul).

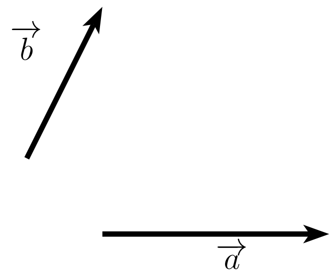
Exemple 1.1.

Dans la représentation ci-contre, on considère 1 carré comme unité.
Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{a}$ représenté.



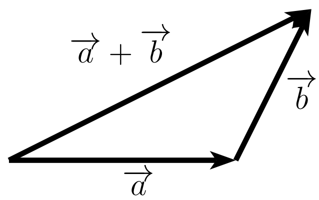
1.2 Addition de vecteurs

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$



Méthode du triangle

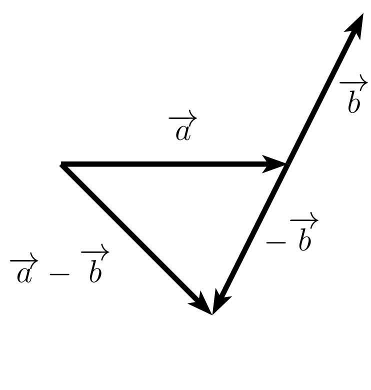
On place l'origine de la flèche qui représente le vecteur $\overrightarrow{b}$ à l'extrémité de la flèche qui représente le vecteur $\overrightarrow{a}$.



1.3 Soustraction de vecteurs

La soustraction du vecteur $\overrightarrow{b}$ au vecteur $\overrightarrow{a}$ est définie par :

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$$

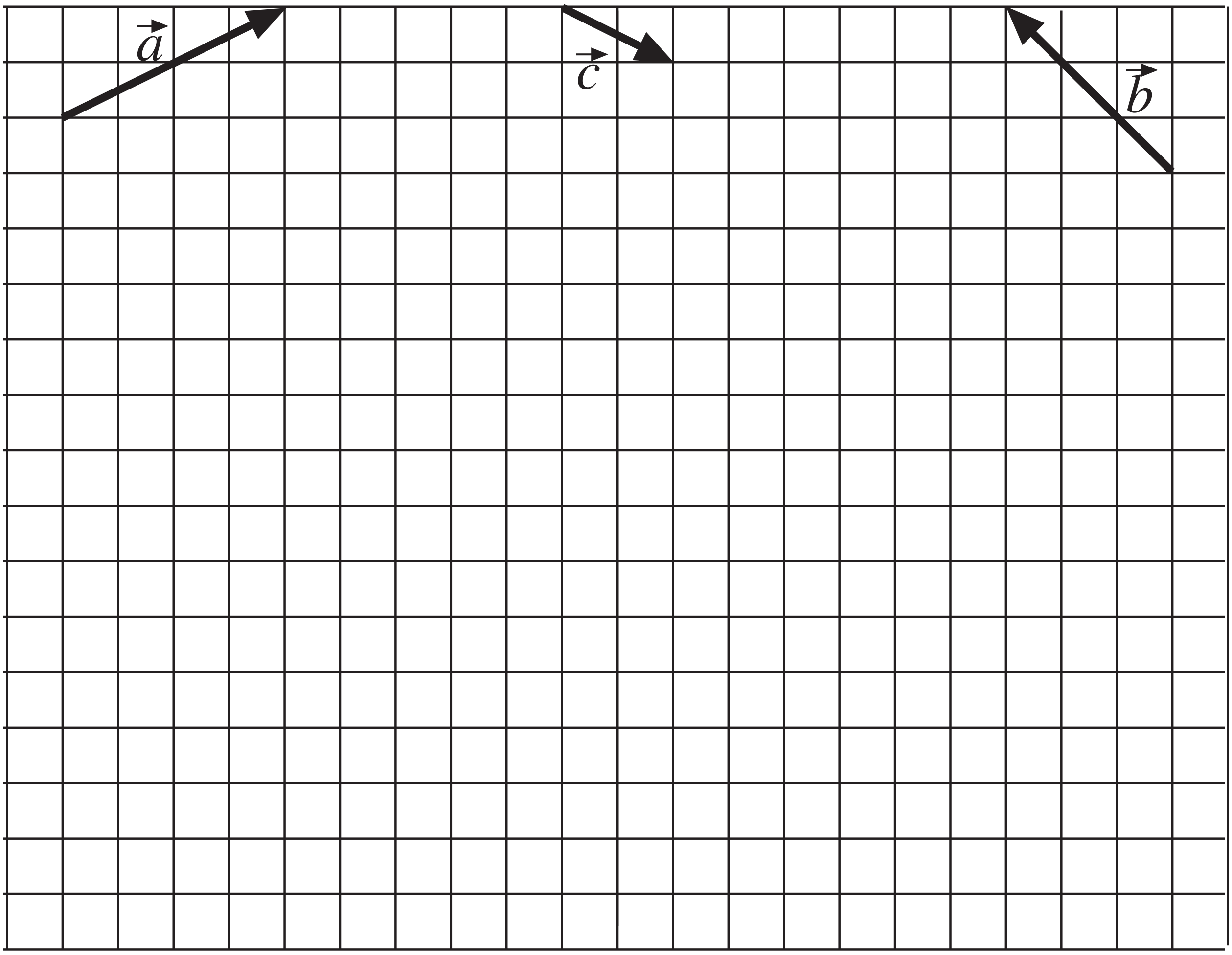


Exemple 1.2.

Constuire sur le dessin ci-dessous :

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}+\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}-\overrightarrow{a},\ \left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c} \text{ et } \overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)$$

Que constate-t-on ?



Propriétés de l'addition et de la soustraction de vecteurs

Si $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ sont trois vecteurs du plan ou de l'espace, on a :

a) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$ (l'addition est **commutative**)

b) $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)$ (l'addition est **associative**)

c) Si $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$ alors $-\overrightarrow{a}=\overrightarrow{BA}$

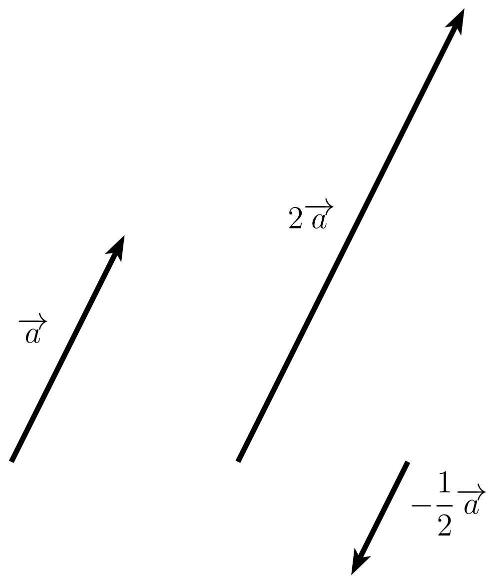
d) La règle des signes est valable : $\overrightarrow{a}-(-\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$

1.4 Produit d'un vecteur par un scalaire

Un **scalaire** est un nombre réel.

Le **produit** $k \cdot \overrightarrow{a}$ est le vecteur

- de même direction que $\overrightarrow{a}$ si $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$
- de norme $\|k \cdot \overrightarrow{a}\| = |k| \cdot \|\overrightarrow{a}\|$
- qui a même sens que $\overrightarrow{a}$ si $k > 0$ et qui est de sens contraire si $k < 0$
- qui est le vecteur $\overrightarrow{0}$ si $k = 0$.



Exemple 1.3.

Soient les points A, B, C et D de la droite graduée suivante :

Compléter afin d'obtenir des égalités :

$\overrightarrow{AB} =$ ....$\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DC} =$ ....$\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AC} =$ ....$\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{DB} =$ ....$\overrightarrow{AB}$

1.5 Combinaisons linéaires de vecteurs

- $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ s'il existe $k, m \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b}$.
- $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$, s'il existe $k, m, n \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}$.

Remarque 1.1.

On peut simplifier une combinaison linéaire de vecteurs en suivant des règles identiques à celles du calcul littéral.

Exemple 1.4.

Simplifier les combinaisons linéaires suivantes :

a) $\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) - (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$

b) $\overrightarrow{w} = 5(3\overrightarrow{a} - 6\overrightarrow{b}) - 3(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$

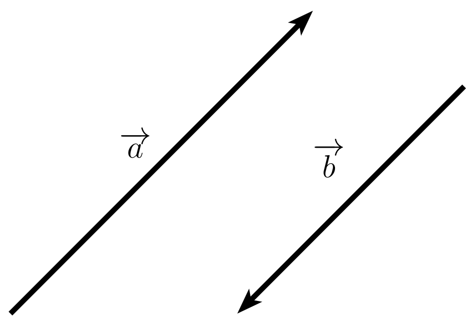
1.6 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont dits **colinéaires** si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

a) $\overrightarrow{a}$ ou $\overrightarrow{b}$ est nul (ou les deux sont nuls)

b) $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ont même direction.

Cette définition est valable dans le plan et dans l'espace.



Théorème 1.1 (*1^er^ critère de colinéarité*)

$\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ colinéaires $\iff$ $\exists k \in \mathbb{R}$ avec $\overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}$ ou $\overrightarrow{b} = k \cdot \overrightarrow{a}$

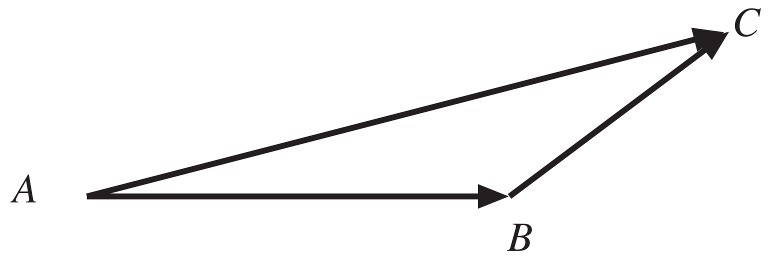
Remarque 1.2.

a) Le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs.

b) Le 1^{er} critère de colinéarité est valable autant dans le plan que dans l'espace.

1.7 Règle de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$



Michel Chasles 1793-1880, mathématicien français...

Utilisation de la règle de Chasles

Elle permet de simplifier des expressions vectorielles.

Exemple 1.5.

a) Soient A, B et C trois points quelconques du plan ou de l'espace. Simplifier

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$$

b) Soient O, A et B trois points quelconques du plan ou de l'espace, ainsi que le point C situé au quart du segment AB depuis A.
Exprimer $\overrightarrow{OC}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

A partir du prochain paragraphe, seule la géométrie plane sera traitée.

1.8 Bases et composantes des vecteurs du plan

Tout couple $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ de vecteurs non colinéaires du plan V_2 forme une **base des vecteurs du plan**.

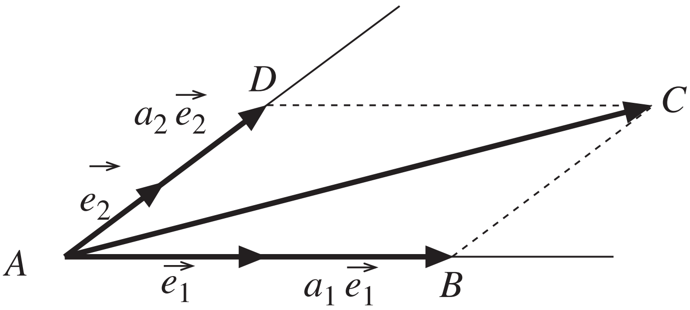
Remarque 1.3.

Il s'agit de distinguer la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ de la base $(\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_1})$.

Composantes d'un vecteur relativement à une base

Les composantes de $\overrightarrow{a}$ relativement à la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ sont les deux nombres réels a_1 et a_2 tels que $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$.

On note $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

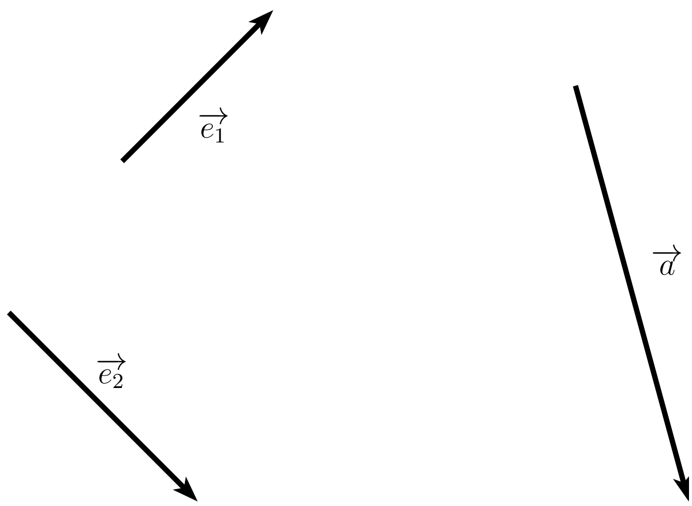


Remarque 1.4.

- a_1 est la **première composante** de $\overrightarrow{a}$
- a_2 est la **deuxième composante** de $\overrightarrow{a}$

Exemple 1.6.

Déterminer graphiquement les composantes du vecteur $\overrightarrow{a}$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.



Calculs avec des composantes

a) Les composantes sont uniques

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

b) Addition des vecteurs = Addition des composantes

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

c) Produit d'un vecteur par un scalaire = Produit des composantes par le scalaire

$$k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.7.

Relativement à une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

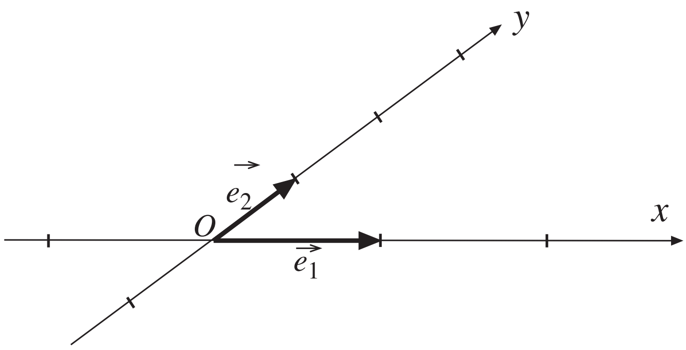
a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$ dans la base $\mathcal{B}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

1.9 Repère et coordonnées du plan

Un repère $\mathcal{R}$ du plan est un systèmes d'axes gradués Oxy.

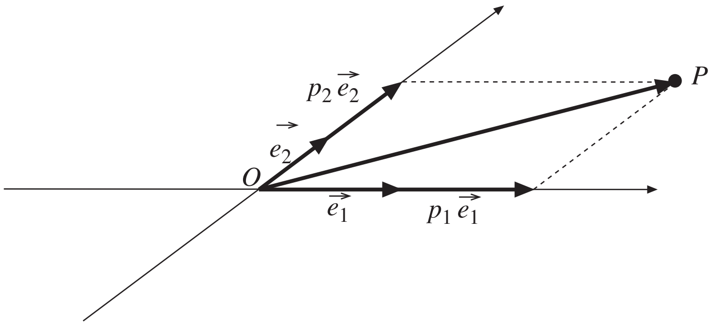
$\mathcal{R}$ est défini par un point O et une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ de vecteurs du plan.



- O est **l'origine** du repère
- $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est la **base associée**
- On note $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

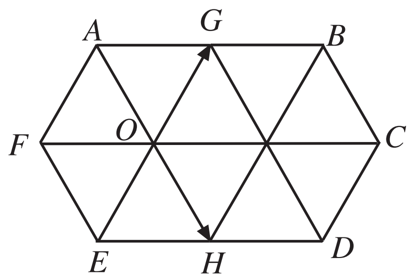
1.9.1 Coordonnées d'un point du plan

$$P(p_1; p_2) \iff \overrightarrow{OP} = p_1\overrightarrow{e_1} + p_2\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$



- p_1 : $1^{\text{ère}}$ coordonnée ou **abscisse** de P
- p_2 : 2^{e} coordonnée ou **ordonnée** de P.

Exemple 1.8.
Soit l'hexagone $ABCDEF$ formé de dix triangles équilatéraux juxtaposés comme le représente la figure ci-dessous, ainsi que le repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ avec $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OH}$. Calculer les coordonnées des points F et D.



1.9.2 Calcul des composantes d'un vecteur

Soient $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$ deux points exprimés dans un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

Par la **règle de Chasles**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.9.
Relativement à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, on considère les points :

$$A(5; 5), B(7; -1) \text{ et } C(-2; -3)$$

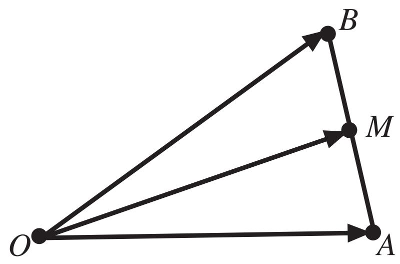
a) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b) Calculer les coordonnés du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.10 Milieu d'un segment

Soit M le milieu d'un segment AB.

a) **Méthode vectorielle** :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$



b) **Méthode analytique** :
Relativement à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, si

$$A(a_1; a_2) \text{ et } B(b_1; b_2)$$

on a

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

Exemple 1.10.

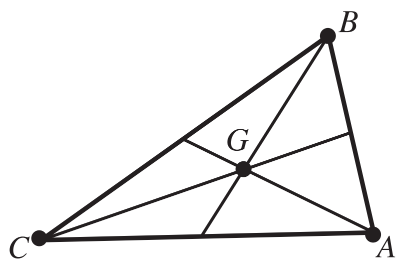
Dans le plan muni d'un repère, calculer les coordonnées du milieu M du segment AB d'extrémités $A(3; -5)$ et $B(-1; 11)$.

1.11 Centre de gravité d'un triangle

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC.

a) **Méthode vectorielle** :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$



b) **Méthode analytique** :
Relativement à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, si

$$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2) \text{ et } C(c_1; c_2)$$

on a

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

Exemple 1.11.

Dans le plan muni d'un repère, calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC de sommets $A(3; -5), B(-1; 11)$ et $C(-5; 3)$.

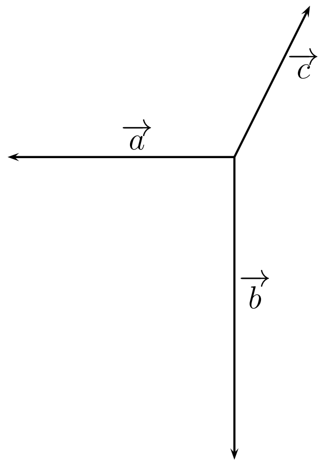
1.12 Exercices

1.1

Représenter un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O. Donner le nombre de vecteurs différents que l'on peut définir à l'aide des lettres de cette figure, ainsi qu'un représentant de chaque vecteur.

1.2

a) Construire la somme des trois vecteurs ci-dessous :

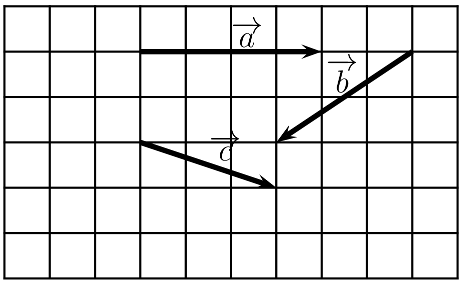


b) Tracer trois vecteurs non nuls et n'ayant pas la même direction mais dont la somme soit le vecteur nul.

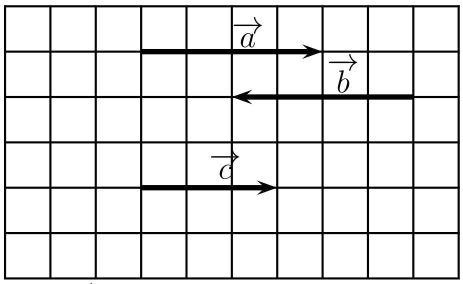
1.3

Dans les deux cas suivants, construire le vecteur demandé.

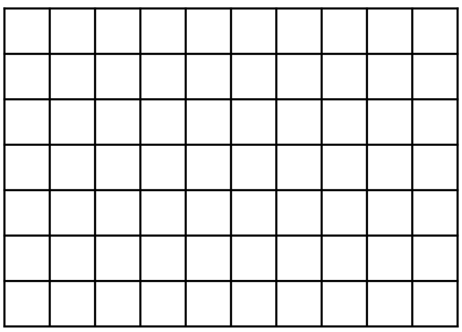
Cas 1

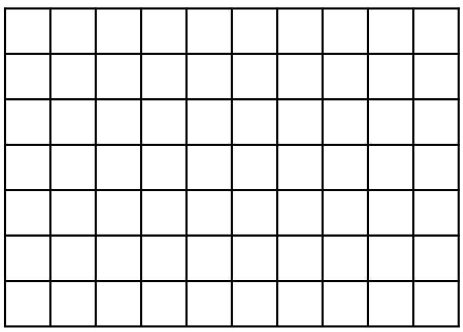


Cas 2



Le vecteur $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}$





Le vecteur $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}$

Le vecteur $\overrightarrow{a} - \left(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\right)$

Le vecteur $\overrightarrow{x}$ tel que $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$

1.4

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Exprimer plus simplement les vecteurs qui suivent. Utiliser le point O lorsque c'est nécessaire.

a) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$

c) $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}$

d) $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}$

e) $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}$

f) $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD}$

1.5

On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté ci-dessous. Simplifier au maximum les expressions vectorielles suivantes :

a) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

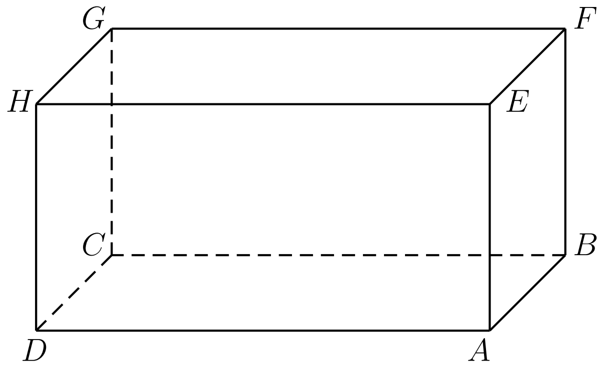
b) $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

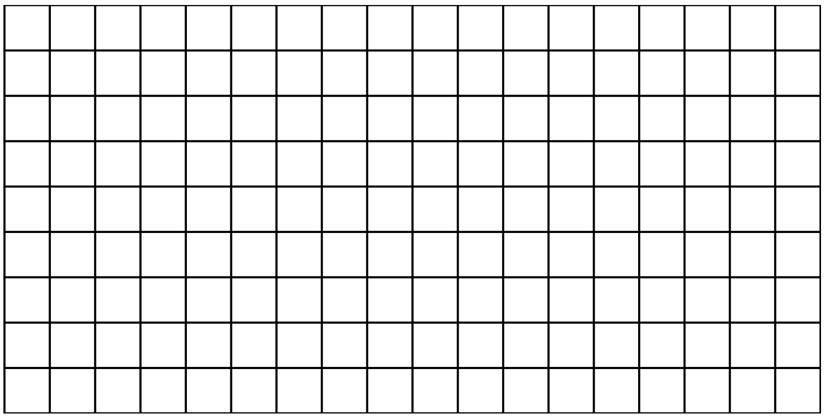
f) $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$



1.6

Reprendre les vecteurs de l'exercice 1.3 et représenter dans les deux cas le vecteur

$$\frac{5}{2}\,\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b} - 2\,\overrightarrow{c}$$



1.7

Exprimer $\overrightarrow{v}$ en fonction de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ si

$$3\,(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{v}) - 6\,\overrightarrow{b} = -7\left(\frac{15}{7}\overrightarrow{v} - 3\,\overrightarrow{b}\right) + 12\overrightarrow{a}.$$

1.8

Représenter trois points A, B et P pour lesquels :

a) $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{BP}$

d) $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{BP}$

e) $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{-4}\overrightarrow{PB}$

g) $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$

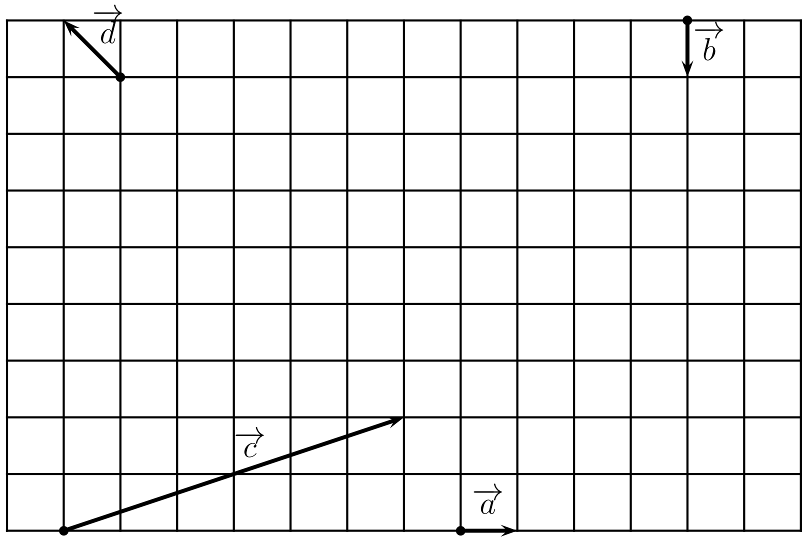
1.9

Par rapport aux vecteurs de la figure :

a) Exprimer $\overrightarrow{c}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{d}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

c) Exprimer $\overrightarrow{x} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{c} - 5\,\overrightarrow{d}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.



1.10

Soit $ABCDEFGH$ un cube pour lequel on pose $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AE}$. Soit M le milieu du côté FG, N celui de HG et P le centre de la face $ABCD$. Faire une figure d'étude puis exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$: $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{NP}$, et $\overrightarrow{PM}$.

1.11

Soit une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{SC}$. Réaliser une bonne figure d'étude. Exprimer chacun des vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$: $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

1.12

Soit $ABCD$ un parallélogramme pour lequel on pose $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Soit M le milieu de BC et P le point tel que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{DM}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

1.13

Soit A, B, C, D et E des points quelconques. Sans utiliser de dessin, simplifier le plus possible les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$

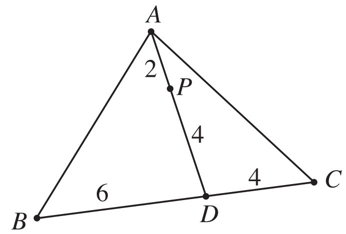
c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

1.14

Dans la figure ci-contre, les nombres représentent les longueurs des segments concernés.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

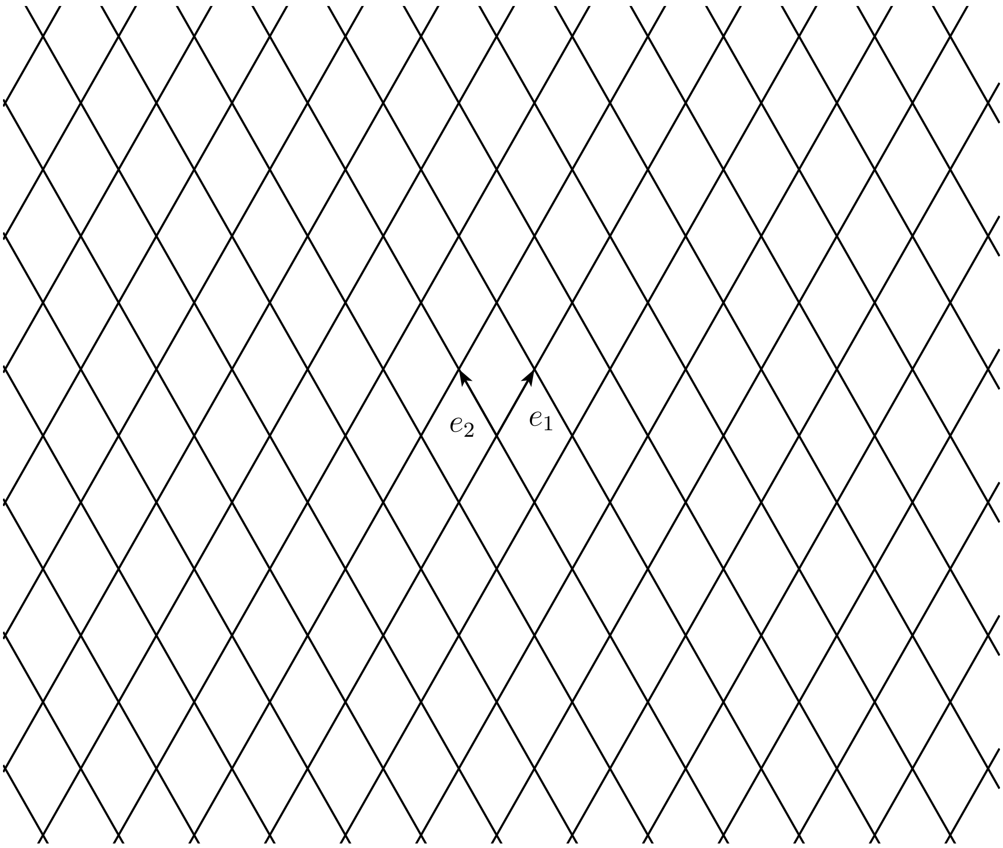


1.15

Démontrer que l'égalité suivante est toujours vraie : $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AB}$.

1.16

On considère la figure suivante



a) Représenter les vecteurs suivants, dont les composantes sont données relativement à la base $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$:

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$$

b) Représenter les vecteurs $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ et $3\,\overrightarrow{b} + 2\,\overrightarrow{c}$ et donner leurs composantes dans $\mathfrak{B}$.

1.17

Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $3\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$

b) $\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$

c) $-5\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} - 8\overrightarrow{c}$

1.18

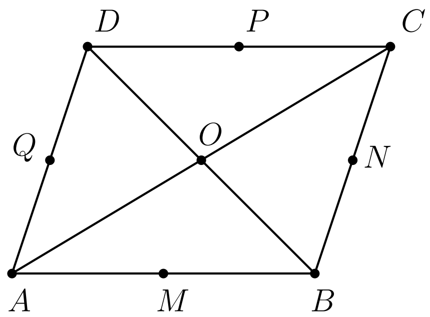
Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Calculer les nombres k et m tels que $k\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$.

1.19

Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.



a) Donner, dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$

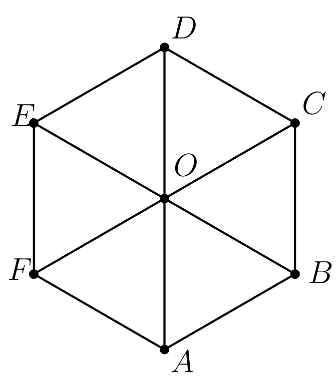
b) Mêmes questions, mais relativement à la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AM}\right)$

1.20

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Donner les composantes des vecteurs
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$

a) dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{ED}\right)$

b) dans la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OC}\right)$



1.21

Soit $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = \left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$: $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner les composantes de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

b) Donner les composantes de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

1.22

Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on considère les vecteurs :

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

1.23

Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\overrightarrow{x}$ colinéaire à $\overrightarrow{a}$ tels quel $\overrightarrow{x} + \lambda\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$

1.24

On donne les points $A(5;2)$, $B(8;0)$, $C(-2;-4)$ et $D(4;-6)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

e) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

f) $4\overrightarrow{CD} - 3\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}\right)$

1.25

Dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$, on donne les points $A(-1;4)$, $B(2;5)$, $C(3;3)$ et $D(-2;2)$.

a) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{AB}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

1.26

On donne les points $A(1;1)$, $B(10;5)$ et $C(4;12)$.
Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme

b) $ABDC$ soit un parallélogramme

1.27

Soit les points $A(-4;2)$, $B(1;3)$ et $C(2;5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

1.28

On considère les points $A(2;-1)$ et $B(0;3)$.

a) Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit l'origine O du repère.

b) Déterminer ensuite le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.29

Les points $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ et $P(-2;2)$ sont les milieux des côtés d'un triangle dont on demande de calculer les sommets.

1.30

On donne les points $A(3;2)$, $B(-5;6)$ et $C(-2;-3)$.
Trouver les coordonnées du point K situé au quart de AB depuis A, et du point M situé aux deux tiers de BC depuis B.

1.31

Calculer les coordonnées des points qui divisent le segment $[AB]$ en cinq parties égales, si $A(2;3)$ et $B(3;8)$.

1.32

a) Les points $A(-4;5), B(2;-3)$ et $C(23;-30)$ sont-ils alignés ?

b) Déterminer la valeur de la constante k pour laquelle les points A, B et C donnés ci-dessous sont alignés.

$$A(1;2), \quad B(-3;3) \quad \text{et} \quad C(k;1)$$

1.33

On donne $A(7;-3)$ et $B(23;-6)$.
Déterminer les coordonnées du point C de l'axe Ox qui est aligné avec A et B.

1.13 Réponses

1.1 19 vecteurs :
$\overrightarrow{OO}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FC}$.

1.4
a) $\overrightarrow{FE}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{DB}$ e) $\overrightarrow{AD}$ f) $\overrightarrow{FC}$

1.5
a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{HA}$ d) $\overrightarrow{EA}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{AE}$

1.7 $\vec{v} = \vec{a} + 3\,\vec{b}$

1.9 a) $\vec{c} = 6\vec{a} - 2\,\vec{b}$ b) $\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b}$ c) $\vec{x} = 2\,\vec{a} + 6\,\vec{b}$

1.10
a) $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$ d) $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ g) $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$
b) $\overrightarrow{EM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ e) $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
c) $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ f) $\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$

1.11
a) $\overrightarrow{SD} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ c) $\overrightarrow{BD} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$ e) $\overrightarrow{BC} = -\vec{v} + \vec{w}$
b) $\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{w}$ d) $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + \vec{v}$ f) $\overrightarrow{AD} = -\vec{v} + \vec{w}$

1.12
a) $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ b) $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$ c) $\overrightarrow{DM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

1.13
a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{DC}$ d) $\overrightarrow{DA}$ e) $\vec{0}$

1.14 $\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{15}\vec{AB} + \dfrac{1}{5}\vec{AC}$

1.16 b) $\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $3\,\vec{b} + 2\,\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

1.17

a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$

1.18 $k = 3, m = 2$

1.19
a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.20

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.21

a) $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$

b) $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$ $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$

1.22 $\vec{a} = \dfrac{1}{2}\,\vec{d} = 9\,\vec{h}$; $\vec{b} = -\dfrac{3}{2}\,\vec{\imath}$; $\vec{c} = -2\,\vec{g}$; $\vec{f}$; $\vec{e}$ colinéaire à tous les vecteurs.

1.23 $\lambda = \dfrac{35}{29}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{105}{29} \\ \frac{-30}{29} \end{pmatrix}$

1.24

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 33 \\ -14 \end{pmatrix}$

1.25 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{AC} - \dfrac{7}{9}\overrightarrow{AD}$

1.26

a) $(-5;8)$
b) $(13;16)$

1.27 $M_{AB}(-\frac{3}{2};\frac{5}{2})$, $M_{AC}(-1;\frac{7}{2})$, $M_{BC}(\frac{3}{2};4)$, $G(-\frac{1}{3};\frac{10}{3})$

1.28
a) $C(-2;-2)$
b) $D(0;-6)$

1.29 $A(-5;7)$, $B(1;-3)$, $C(3;1)$

1.30 $K(1;3)$, $M(-3;0)$

1.31 $(2.2;4)$ $(2.4;5)$ $(2.6;6)$ $(2.8;7)$

1.32

a) non alignés.
b) $k=5$

1.33 $C(-9;0)$