Chapitre 3

Fonctions ($1^{\text{ère}}$ partie)

3.1 Ensembles et intervalles

3.1.1 Ensembles

Une collection d'objets est un **ensemble** si l'on peut dire avec certitude si un objet donné appartient ou non à l'ensemble.

Si l'élément x appartient à l'ensemble E, on écrit $x \in E$.

Si l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E, on écrit $x \notin E$.

Si tous les éléments d'un ensemble A appartiennent à l'ensemble B, on dit que A est un sous-ensemble de B. On note $A \subset B$ et on lit « A inclus dans B ».

L'ensemble vide se note $\emptyset$ ou $\{\,\}$.

Un ensemble est toujours un sous-ensemble de lui-même ($A \subset A$).

Ensembles de nombres

- Ensemble des **entiers naturels** :

  $\mathbb{N} =$

- Ensemble des **entiers (relatifs)** :

  $\mathbb{Z} =$

- Ensemble des **nombres rationnels** :

  $\mathbb{Q} =$

- Ensemble des **nombres réels** :

  $\mathbb{R} =$

Exemple 3.1.

a) $\sqrt{-1}$ et $\dfrac{1}{0}$ ne sont pas des nombres réels.

b) En ajoutant une étoile à un ensemble de nombres, on ne considère que les nombres non nuls de cet ensemble. Par exemple :

$\mathbb{N}^* =$

Définition d'un ensemble

On peut définir un ensemble en **énumérant** ses éléments ou en **donnant une condition d'appartenance**.

Exemple 3.2.
Enumérer l'ensemble suivant : $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 5n, n \in \mathbb{N}^*\}$

Opérations sur les ensembles

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

L'**intersection** de A et B est le sous-ensemble de E des éléments qui appartiennent à A et à B.
On note $A \cap B$ et on lit A *inter* B.

L'**union** de A et B est le sous-ensemble de E des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux).
On note $A \cup B$ et on lit A *union* B.

La **différence** entre A et B est le sous-ensemble de E des éléments qui appartiennent à A, mais pas à B.
On note $A \setminus B$ ou $A - B$ et on lit A *moins* B.

Exemple 3.3.

On donne $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{c; d; e; f\}$. Enumérer $A \cap B$, $A \cup B$ et $A - B$.

3.1.2 Intervalles

Si a et b sont deux nombres réels avec $a < b$, on note :

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- $]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Remarque 3.1.

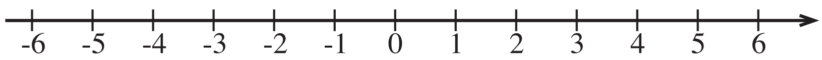
a) On a $]a; b[= [a; b] - \{a; b\}$ et $]a; b] = [a; b] - \{a\}$.

b) **Attention** : $[-1; 5[\neq \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, mais $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4\} = [-1; 5[\cap \mathbb{Z}$.

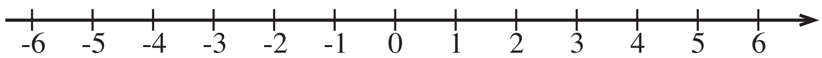
Exemple 3.4.

Représenter graphiquement les ensembles suivants :

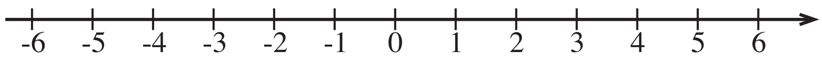
a) $A = [-2; 5]$



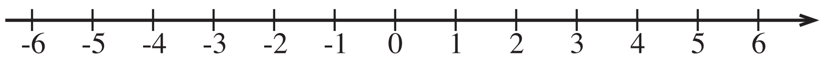
b) $B =]-1; 3[$



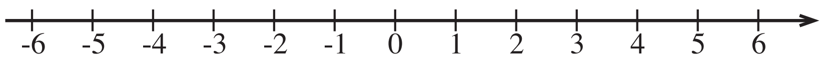
c) $C = [-2; +\infty[$



d) $D =]-3; 1] \cup]2; 4[$



e) $E =]-3; 4] \cap]0; 6[$



3.2 Fonctions

Une **fonction** (ou application) d'un ensemble D vers un ensemble A est une **correspondance** qui associe à **chaque élément de $\boldsymbol{D}$ un et un seul élément de $\boldsymbol{A}$**.

La fonction f de D vers A se note :

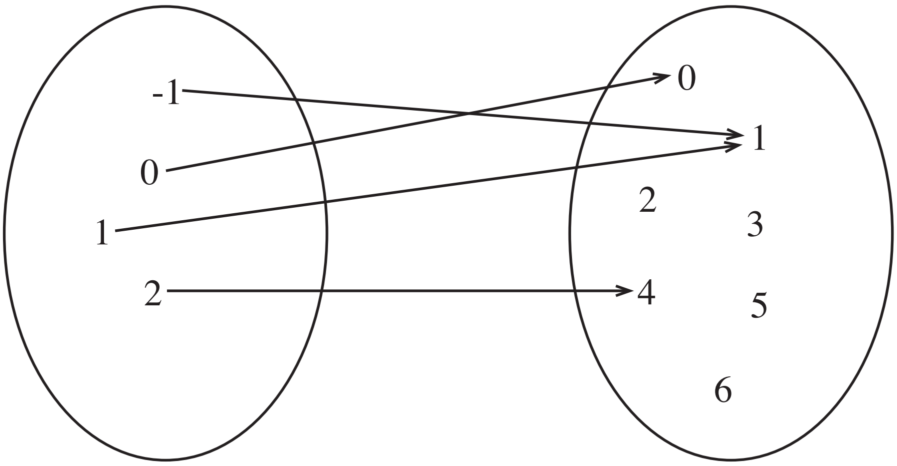
$$\begin{array}{rcrcl} f & : & D & \longrightarrow & A \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- D est appelé **l'ensemble de départ** de f et A l'**ensemble d'arrivée** de f.
- L'élément $f(x)$, unique correspondant de x par f, est appelé l'image de x par f.
- Une formule permettant de calculer les images $f(x)$ est appelée l'**expression fonctionnelle** de f.

Une fonction est dite réelle si D et A sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.5.

Soit la fonction f dont le diagramme sagittal est le suivant :



a) Enumérer les ensembles de départ et d'arrivée.

b) Déterminer $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ et $B = \{x \in D \mid f(x) = 1\}$.

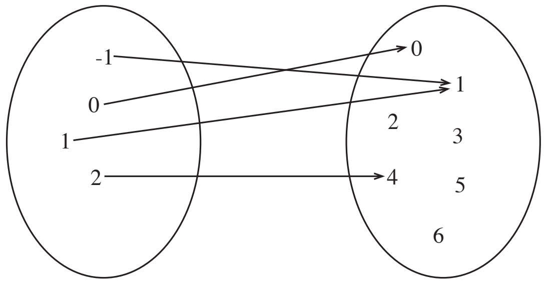
c) Trouver l'expression fonctionnelle de f.

3.2.1 Graphe d'une fonction

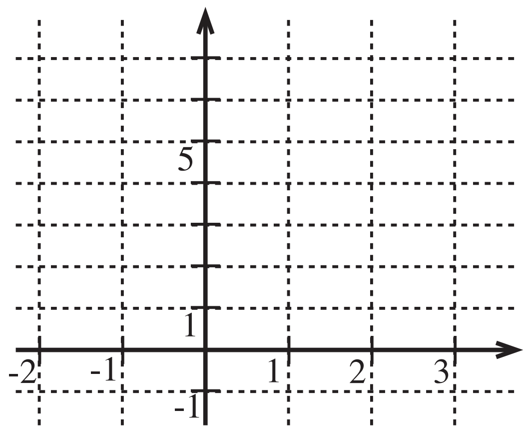
Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble des couples $(x; f(x))$ où $x \in D$. En général, on représente le graphe d'une fonction dans le plan muni d'un système d'axes Oxy. La représentation graphique de f est également appelée **graphe** de f.

Exemple 3.6.

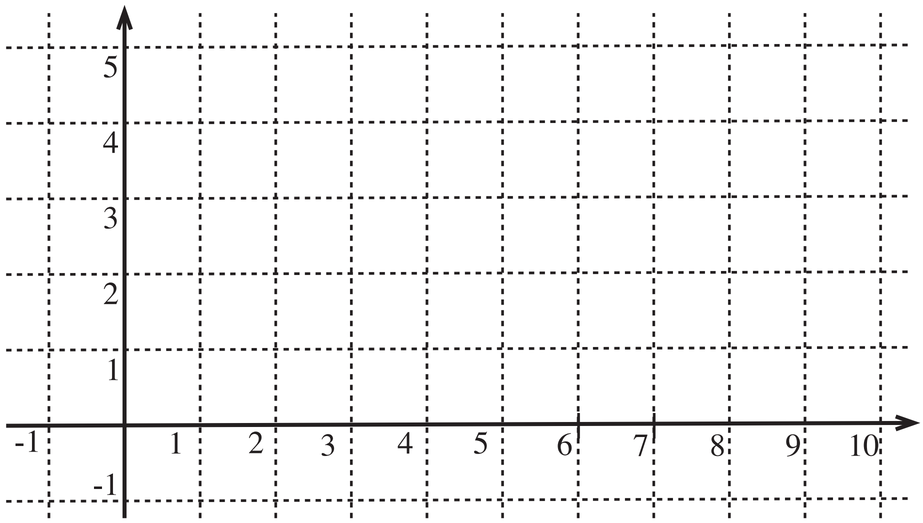
a) Soit la fonction f donnée par :



Donner le graphe G de f et représenter cette fonction ci-dessous :



b) Soit la fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$.
Représenter graphiquement cette fonction.



3.2.2 Equation cartésienne du graphe

Les points du graphe de f sont les solutions de l'équation $y = f(x)$, appelée **équation cartésienne** du graphe de f.

Par exemple, reprenons la fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ (exemple 3.6, point b).

Le graphe de g est d'équation $y = \sqrt{x}$.

Remarque 3.2.

Une courbe donnée par son équation cartésienne en x et y peut être le graphe d'une fonction, mais ce n'est pas toujours le cas !

Exemple 3.7.

a) La courbe d'équation $3x - 4y - 6 = 0$ est-elle le graphe d'une fonction ?

b) La courbe d'équation $x^2 + y^2 = 25$ est-elle le graphe d'une fonction ?

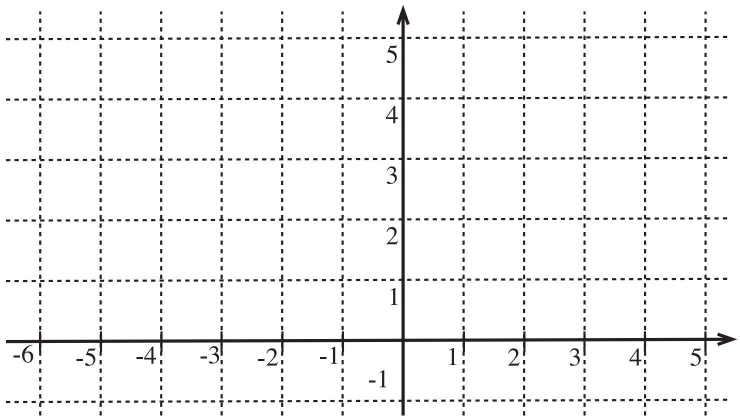
3.2.3 Fonction donnée par son expression fonctionnelle

Si pour une **fonction réelle** f, la relation fonctionnelle $f(x)$ est donnée sans préciser les ensembles de départ et d'arrivée, on choisit :

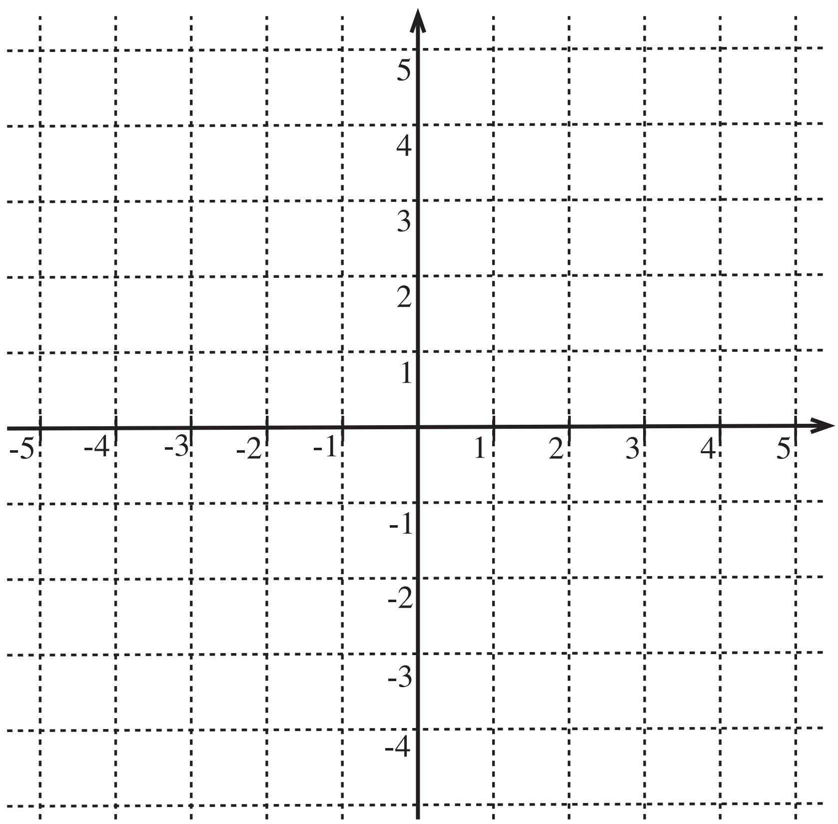
- $A = \mathbb{R}$ comme ensemble d'arrivée
- Le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ possible comme ensemble de départ.

D est alors appelé **ensemble de définition** de la fonction f et est noté $ED(f)$.

a) Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3-x}$. Donner son ensemble de définition et la représenter graphiquement.



b) Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Donner son ensemble de définition et la représenter graphiquement.



3.2.4 Zéros et indéfinitions d'une fonction réelle

Soit f une fonction réelle.

- Un nombre réel $x = a$ est une **indéfinition** de f si $f(a)$ n'est pas défini.
- Un nombre réel $x = a$ est un **zéro** de f si $f(a) = 0$.

Pour une fonction f donnée uniquement par son expression fonctionnelle, on a donc

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{ \text{ indéfinitions } \}$$

Exemple 3.8.

a) Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x + 5}$$

b) Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x - 6}{\sqrt{8 - x}}$$

Remarque 3.3.

a) Les zéros de f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b) Les zéros de f sont les abscisses des points d'intersection du graphe de f avec l'axe Ox.

c) Si $x = a$ est une indéfinition de f, le graphe de f ne coupe pas la droite verticale $x = a$.

3.3 Fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction du type $f(x) = mx + h$ où $m, h \in \mathbb{R}$

Propriétés d'une fonction affine

- Le graphe d'une fonction affine est une **droite**.
- m est la **pente** du graphe de f :
  si $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ sont deux points du graphe de f, alors $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- h est l'**ordonnée à l'origine** de f :
  $H(0; h)$ est l'intersection du graphe de f avec l'axe Oy.
- A toute droite **non verticale** est associée une fonction affine.

Exemple 3.9.

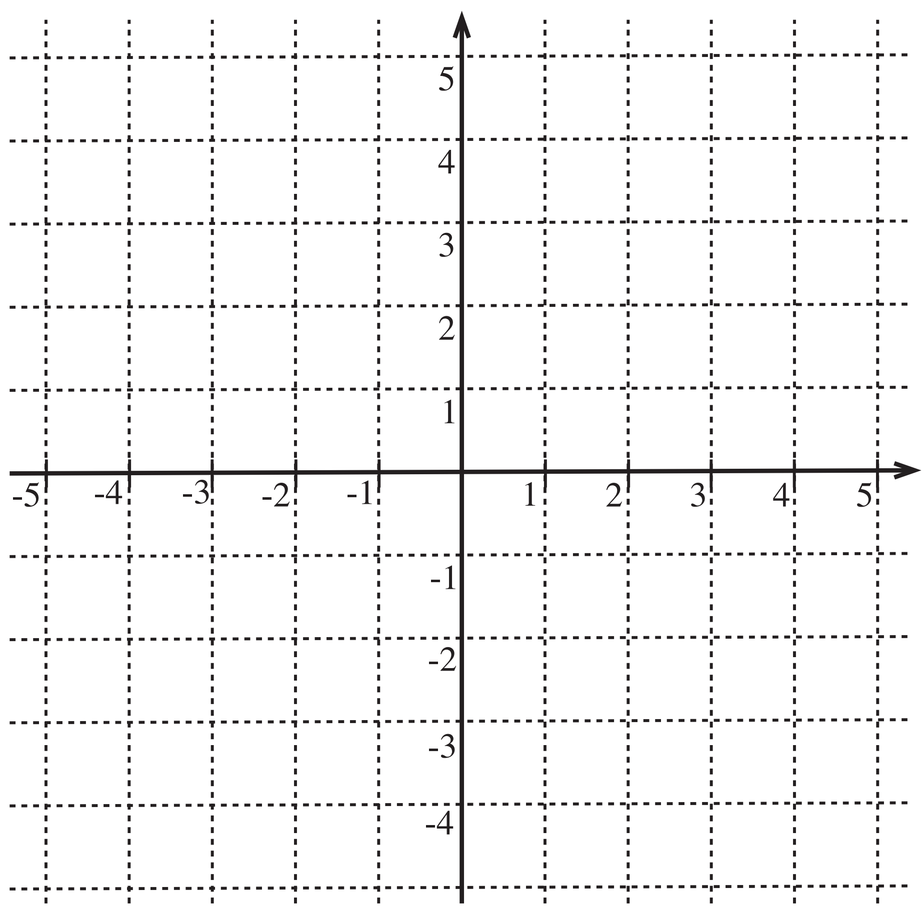
Soient les fonctions affines f et g définies par :

- $f(x) = -2x + 3$
- $g(-5) = -5$ et $g(1) = -1$.

a) Représenter graphiquement f et g.

b) Déterminer l'expression fonctionnelle de g.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection des graphes de f et g.



3.4 Fonctions quadratiques

Une **fonction quadratique** est une fonction du type

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$

Propriétés d'une fonction quadratique

- Le graphe d'une fonction quadratique est une **parabole**.
- Cette parabole est

  Convexe (ouverte vers le haut) si $a > 0$ **Concave** (ouverte vers le bas) si $a < 0$

- Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de f. Rappelons que la fonction f possède les zéros suivants :

  a) $\Delta < 0$: aucun zéro

  b) $\Delta = 0$: un seule zéro (double) $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$

  c) $\Delta > 0$: deux zéros $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Le graphe d'une parabole admettant un zéro double x_1 a pour équation cartésienne

$$y = a(x - x_1)^2$$

- Le graphe d'une parabole admettant deux zéros distincts x_1 et x_2 a pour équation cartésienne

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Le **sommet** de la parabole est donné par $S(p; q)$ avec $p = -\dfrac{b}{2a}$ et $q = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{-\Delta}{4a}$.
- Le graphe d'une parabole de sommet $S(p; q)$ admet pour équation cartésienne

$$y = a(x - p)^2 + q \quad \text{ou} \quad y - q = a(x - p)^2$$

- c est l'**ordonnée à l'origine** de f : $(0; c)$ est l'intersection du graphe de f avec Oy, deuxième axe de coordonnées.

Exemple 3.10.

a) Déterminer les zéros et le sommet de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

b) Déterminer la fonction quadratique g de sommet $S(3; 4)$ et dont 1 est un zéro.

c) Déterminer la fonction quadratique h possédant les zéros -1 et 3, passant par $A(0; -9)$.

3.5 Exercices

3.1

Soit A la partie de $\mathbb{N}$ définie par $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Donner en notation énumérative les parties suivantes de A :

a) $B = \{x \in A \mid x \text{ est un multiple de } 3\}$.

b) $C = \{x \in A \mid x \text{ est un diviseur de } 24\}$.

c) $B \cap C$, $B - C$, $(A - B) \cap (A - C)$.

3.2

Expliciter les ensembles suivants :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } y \in \mathbb{N} \text{ avec } (x^2 = y^2)\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| = 2\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = x\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 3| \leq 2\}$

3.3

Soit l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Trouver quatre sous-ensembles A, B, C et D de E tels que :

- $A \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$
- $C \cup B = \{4; 5; 7\}$
- $E \cap D = \{6; 8; 9; 10\}$

3.4

Déterminer la partie E de $\mathbb{N}$ qui satisfait aux conditions :

- $E \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $E \subset \{1; 3; 4; 6; 7; 8\}$
- $\{1; 3; 4; 6\} \subset E$

3.5

Trouver les parties A, B et C de $\mathbb{N}$ qui remplissent les conditions :

- $1 \in A$
- $\{2; 4\} \cap B = \emptyset$
- $3 \in A \cap B \cap C$
- $4 \in A \cap C$
- $(A \cap B) - C \neq \emptyset$
- $(B \cup C) - A \neq \emptyset$
- $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$

3.6

Déterminer les sous-ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ qui remplissent les conditions :

- $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $A \cap B = \emptyset$
- Pour tout $x \in A$, il existe $y \in B$ tel que $x - y = 1$ et pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $x - y = 1$.

3.7

Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leqslant x < 5\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 10\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2 \text{ et } x \leqslant 2\}$

f) $F = \mathbb{R}$

g) $G = \{2\}$

3.8

Trouver deux ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ tels que

a) $A \cup B = \{0\ ; 1\ ; 2\ ; 3\ ; 4\}$ et $A \cap B = \{\ \}$

b) $A \cup B = \{0\ ; 1\ ; 2\ ; 3\ ; 4\}$ et $A \cap B = \{2\ ; 3\ ; 4\}$

3.9

On donne trois intervalles I, J et K de $\mathbb{R}$.
Déterminer $I \cap J$, $I \cap K$, $I - (J \cup K)$, $(I - J) \cup (I - K)$ dans les cas suivants.

a) $I = [-3\ ;\ 4\,[$ $\quad J = [-2\ ;\ 0\,[$ $\quad K =]-5\ ;\ 3]$

b) $I =]-4\ ;\ 2]$ $\quad J = [-2\ ;\ 3]$ $\quad K =]-3\ ;\ 1\,[$

c) $I =]-5\ ;\ 3\,[$ $\quad J =]-1\ ;\ 5]$ $\quad K = [-3\ ;\ 4]$

3.10

Soit $D = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
On considère les fonctions suivantes de D dans $\mathbb{Q}$. Énumérer les éléments de $f(D)$.

a) $f : x \longmapsto 3\,x - 5$

b) $f : x \longmapsto x^2 - 3$

c) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+4} - 1$

d) $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$

3.11

Les correspondances suivantes sont-elles des fonctions ?
Justifier les réponses.

a) $\begin{array}{rccl} a: & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & 3\,x-2 \end{array}$

b) $\begin{array}{rccl} b: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & 5\,x-7 \end{array}$

c) $\begin{array}{rccl} c: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-3} \end{array}$

d) $\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$

e) $\begin{array}{rccl} e: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & 5\,x^2-5 \end{array}$

f) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & x^2-1 \end{array}$

g) $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

h) $\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$

i) $\begin{array}{rccl} i: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2-1} \end{array}$

j) $\begin{array}{rccl} j: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$

3.12

Déterminer l'ensemble de définition D et les zéros éventuels des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{5+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2+9}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2\,x}{x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2-7}{(x-3)(x+4)}$

h) $f(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{x-1}$

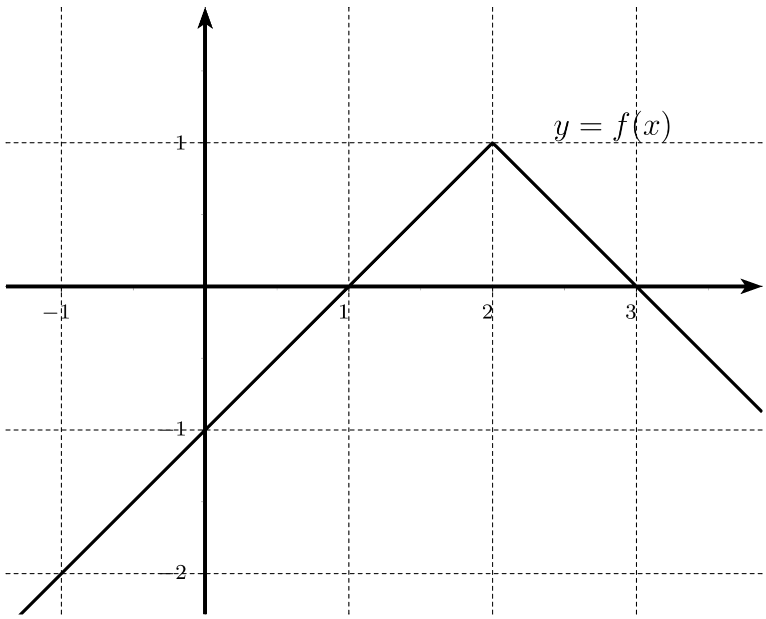
j) $f(x) = \dfrac{5\,x}{\sqrt{x+5}}$

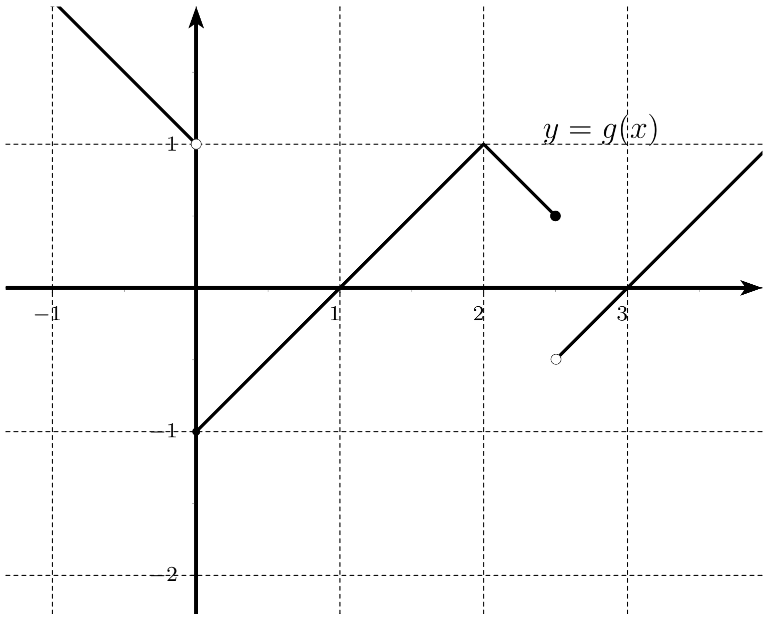
k) $f(x) = \sqrt{2-x}$

l) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{1-2\,x}}$

3.13

On donne les fonctions f et g par leur graphe.





a) Peut-on dire que g soit définie par l'expression mathématique suivante ?

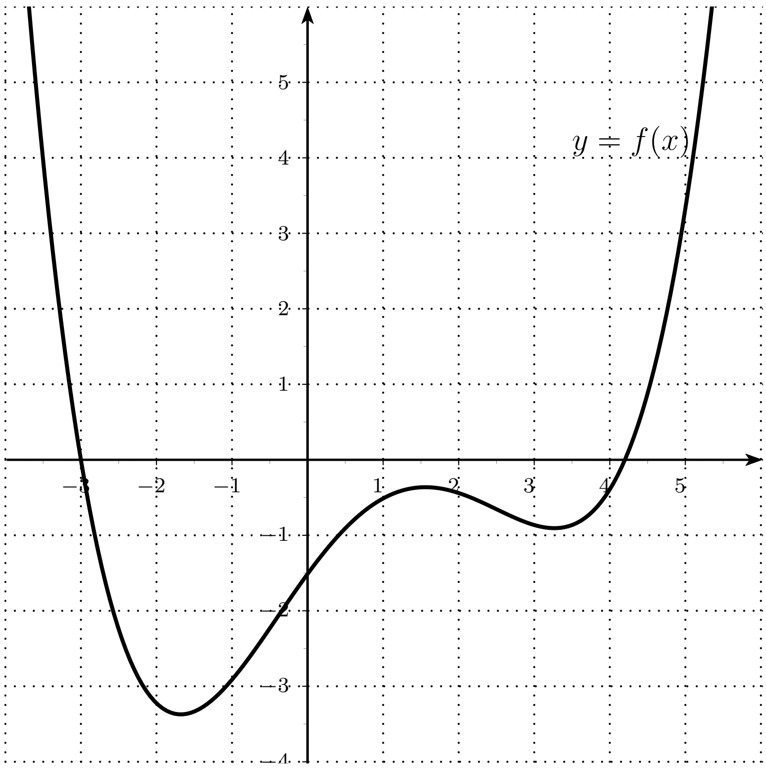
$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \in [0; 2.5] \\ -f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Esquisser le graphe de la fonction

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

3.14

La fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer en observant le graphe,

a) la valeur de $f(0)$;

b) la valeur de $f(-2)$;

c) les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$;

d) les valeurs de x sachant que $f(x) = 2$;

e) les valeurs de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution. Quelle est alors cette solution ?

f) les valeurs de x sachant que $f(x) = x$;

g) les valeurs de x sachant que $f(x) = -x$;

3.15

Représenter graphiquement les fonctions

$$f(x) = -2\,x + 6 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{2}\,x - 3$$

puis, en s'aidant du graphique, résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = g(x)$

c) $f(x) = x$

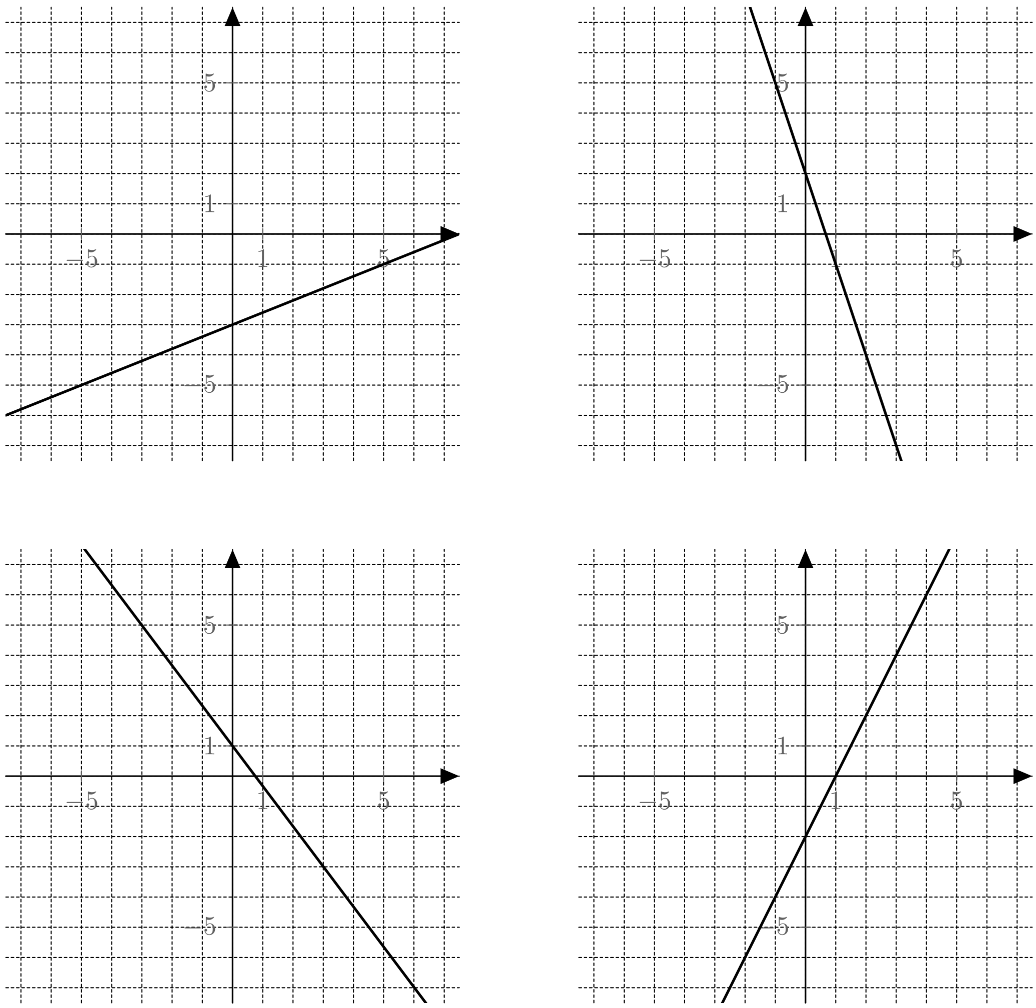
d) $f(x) < 0$

e) $f(x) > g(x)$

f) $f(x) \geq x$

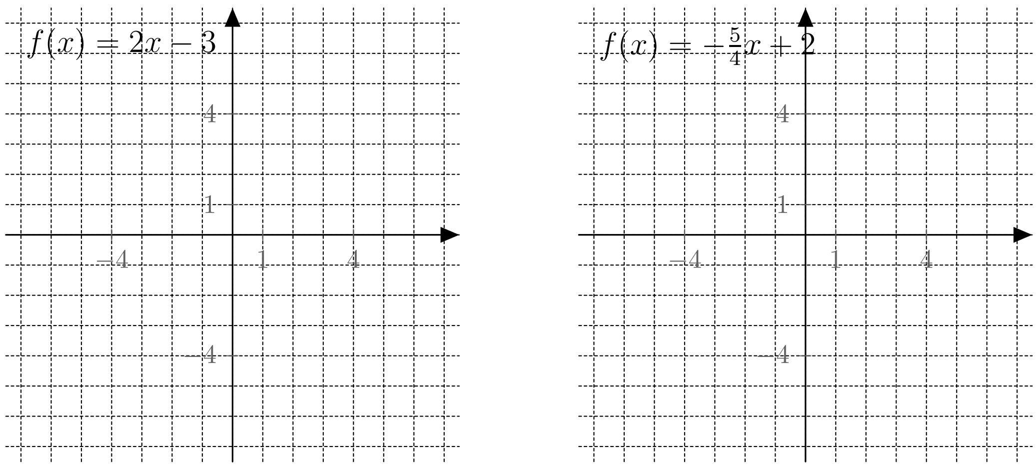
3.16

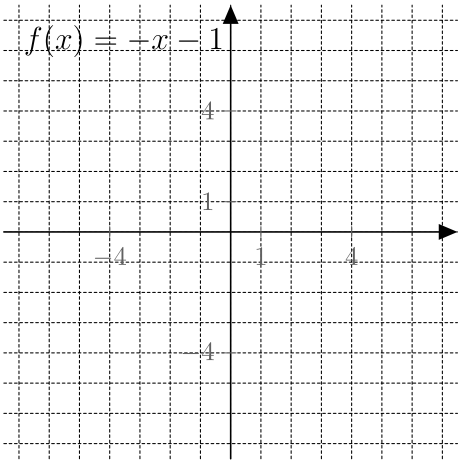
Déterminer les fonctions associées à chacune des droites suivantes.

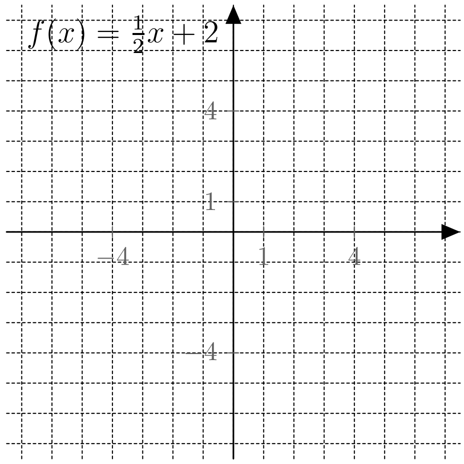


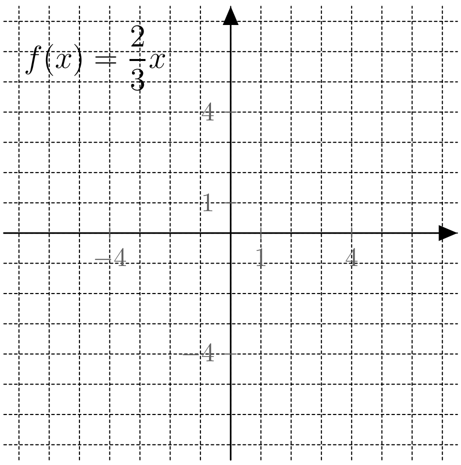
3.17

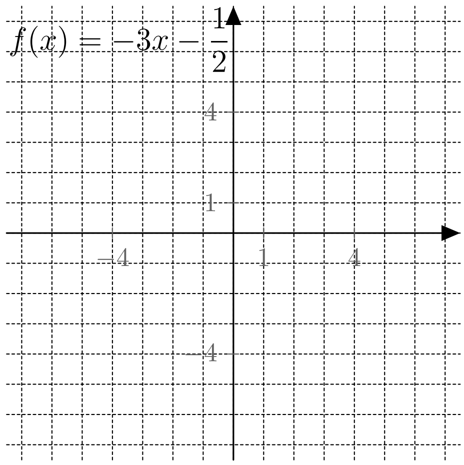
Dessiner les fonctions suivantes sans utiliser de tableau de valeurs.





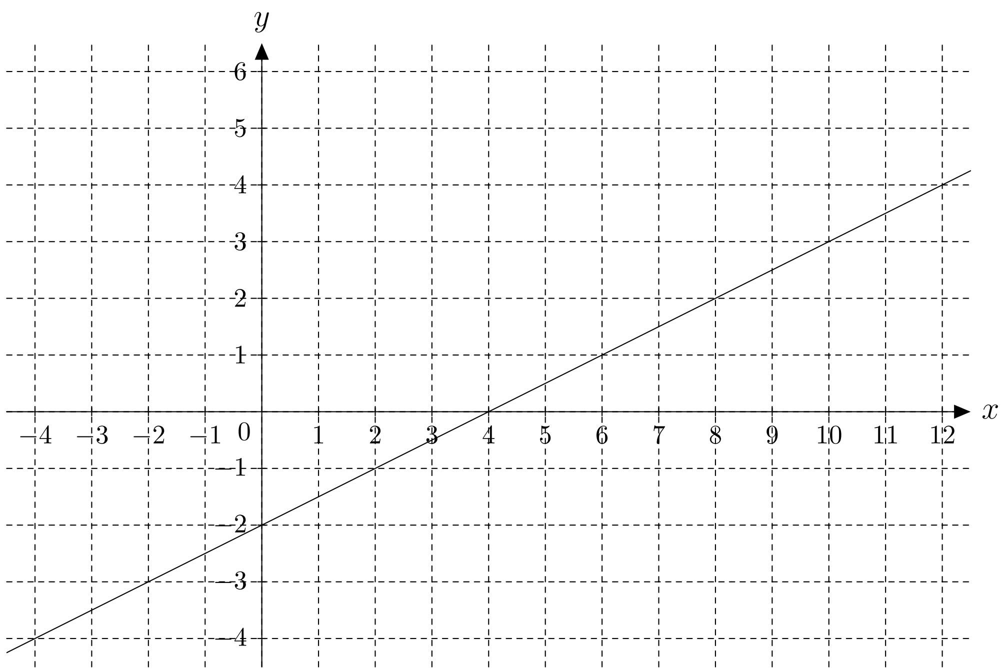






3.18

Soit f la fonction dont le graphe est donné ci-dessous.



Effectuer l'exercice sans calculer l'expression algébrique de f.

a) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

$(6;1)$	$(8;2)$	$(-2;1)$	$(-2;0)$
$(1;6)$	$(2;1)$	$(-2;-1)$	$(5;\frac{1}{3})$
$(2;8)$	$(2;-1)$	$(-2;-3)$	$(5;\frac{1}{2})$

b) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

$(10; .....)$	$(.....;0)$	$(.....;-\frac{11}{4})$
$(-1; .....)$	$(.....;4)$	$(.....;-4)$
$(0; .....)$	$(.....;\frac{5}{2})$	$(-4; .....)$

c) Donner les images.

$f(10)$	$f(0)$	$f(3)$	$f(\frac{3}{2})$
$f(-1)$	$f(-3)$	$f(7)$	$f(\frac{17}{2})$

d) Résoudre les équations.

$f(x)=0$	$f(x)=-3$	$f(x)=-\frac{15}{4}$
$f(x)=4$	$f(x)=\frac{3}{2}$	$f(x)=5$

3.19

Soit f la fonction donnée par $f(x)=8x+11$. *Effectuer l'exercice sans tracer le graphe de f.*

a) Calculer.

$f(2)$	$f(0)$	$f(\frac{1}{2})$	$f(2k)$
$f(-1)$	$f(-3)$	$f(-\frac{7}{3})$	$f(-3k+5)$

b) Résoudre les équations.

$f(x)=19$	$f(x)=5$	$f(x)=0$
$f(x)=-5$	$f(x)=-11$	$f(x)=\frac{59}{3}$

c) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

$(2;13)$	$(1;-3)$	$(-5;6)$	$(-11;0)$
$(2;27)$	$(-3;-11)$	$(-2;-5)$	$(-\frac{3}{5};\frac{31}{5})$
$(-1;3)$	$(1;19)$	$(0;0)$	$(\frac{47}{7};-\frac{12}{7})$

d) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

$(2; .....)$	$(\frac{3}{5}; .....)$	$(.....;\frac{31}{5})$
$(1; .....)$	$(0; .....)$	$(k; .....)$
$(-\frac{7}{2}; .....)$	$(.....;0)$	$(.....;k)$

3.20

a) Déterminer la fonction affine dont le graphe passe par les points $(-3; 19)$ et $(4; -2)$.

b) Déterminer la fonction affine f telle que $f(2) = 0$ et $f(5) = -12$.

c) Déterminer la fonction affine dont le graphe a une pente de $\frac{2}{3}$ et une ordonnée à l'origine de 1.

d) Déterminer la fonction affine dont le graphe a une pente de -2 et passe par le point $(3; -1)$.

e) Déterminer la fonction affine dont le graphe est une droite horizontale passant par $(6; 2)$.

f) Déterminer la fonction affine dont le graphe passe par l'origine et est parallèle au graphe de la fonction g donnée par $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

g) Déterminer la fonction affine dont le graphe passe par le point $(1; 3)$ et est parallèle au graphe de la fonction g donnée par $g(x) = 5x + 2$.

h) Déterminer la fonction affine dont le graphe passe par les points $(-2; -17)$ et $(2; 11)$.

i) Déterminer la fonction affine dont le graphe a une pente de $-\frac{5}{4}$ et passe par le point $(1; -1)$.

3.21

Dessiner les graphes des fonctions affines $f(x) = mx + h$ telles que :

a) $f(-1) = 2$, $m = -2$

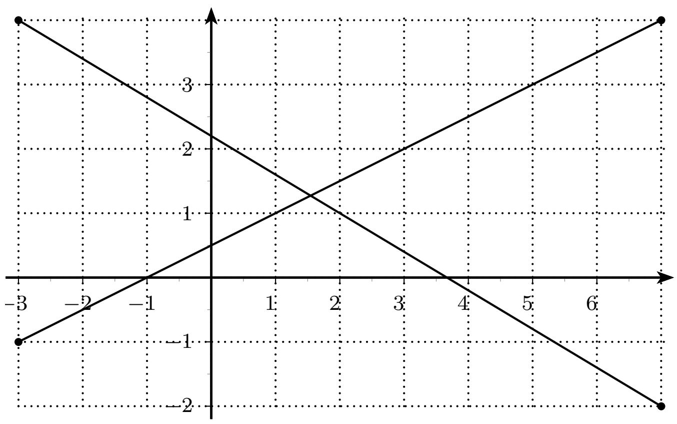
b) $f(0) = -1$, $m = \frac{3}{2}$

c) $f(2) = 0$, $m = -\frac{3}{5}$

d) $f(3) = 1$, $m = 1$

e) $f(4) = 5$, $m = 0$

3.22



a) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des deux droites dessinées ci-dessus.

b) Trouver la fonction f dont le graphe est la droite qui passe par l'origine et par I.

c) Trouver la fonction g dont le graphe est la droite parallèle au graphe de f et qui passe par le point $P(2; -1)$.

3.23

Le gérant d'une piste de karting propose deux options à ses clients

- Option 1 : le client paie 45 francs la séance
- Option 2 : Le client paie un forfait (somme indépendante du nombre de séances faites) annuel de 250 francs et 20 francs par séance.

a) Quelle est l'option la plus avantageuse pour un client faisant 8 séances de karting par année ? Justifier la réponse par calculs.

b) On désigne par x le nombre de séances que fait un client par année. Déterminer les fonctions f et g qui donnent les dépenses pour x séances par année si l'on choisit les options 1 et 2 respectivement.

c) En choisissant l'option 2, un client a payé en une année 630 francs. Calculer le nombre de séances de karting effectuées pendant l'année, ainsi que le prix qu'il aurait payé s'il avait choisi l'option 1.

d) A partir de combien de séances par année l'option 2 devient-elle meilleur marché que l'option 1 ?

e) Une option 3 comportant un forfait annuel et un prix par séance est nouvellement proposée. On sait que pour cette option, on paie 450 francs pour 10 séances et 750 francs pour 20 séances. Déterminer la fonction h qui donne la dépense en fonction du nombre x de séances faites pendant l'année si l'on choisit l'option 3.

3.24

Un père défie son fils au 100 mètres en lui laissant un peu d'avance. Les graphes indiquant la distance parcourue (en mètres) par les deux personnes en fonction du temps (en secondes) sont donnés ci-dessous.

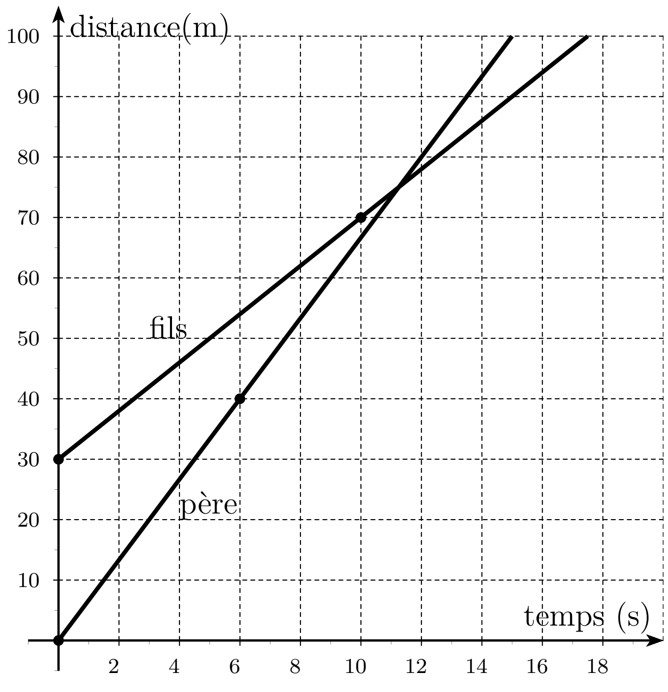
a) Combien de mètres d'avance le père a-t-il laissé à son fils ?

b) Qui a gagné ? Avec combien de secondes d'avance ?

c) Quelle distance les sépare lorsque le vainqueur franchit la ligne d'arrivée ?

d) Quelles sont les vitesses des deux coureurs ?

e) Les deux personnes ont-elles été côte-à-côte ? Si oui, à quelle distance de la ligne de départ du père ?



3.25

La résistance électrique d'un fil de cuivre s'exprime en Ohms (Ω). Elle est de 31 Ω à 8°C et de 27 Ω à -24°C. On suppose que la résistance dépend de la température suivant une fonction affine.

a) Exprimer la résistance R en fonction de la température T.

b) Quelle est la résistance de ce fil à 40°C ? et à 16°C ?

c) A quelle température la résistance est-elle de 36 Ω ? de 20 Ω ?

d) Exprimer la température T en fonction de la résistance R.

3.26

Vous vendez des lecteurs MP3. Les frais fixes totaux sur une année s'élèvent à $24'000$ francs et le prix de revient des lecteurs MP3 est de 95 francs par unité. Après une étude de marché, vous fixez le prix de vente à 125 francs par lecteur MP3.

a) Si vous produisez $1'000$ MP3 en une année, quelles seront les charges totales ?

b) Vous produisez x MP3 en une année ; exprimer les charges totales C en fonction de x.

c) Si vous vendez $1'000$ MP3 en une année, quel sera le chiffre d'affaires (revenu de la vente des MP3) ?

d) Vous vendez x MP3 en une année ; exprimer le chiffre d'affaires R en fonction de x.

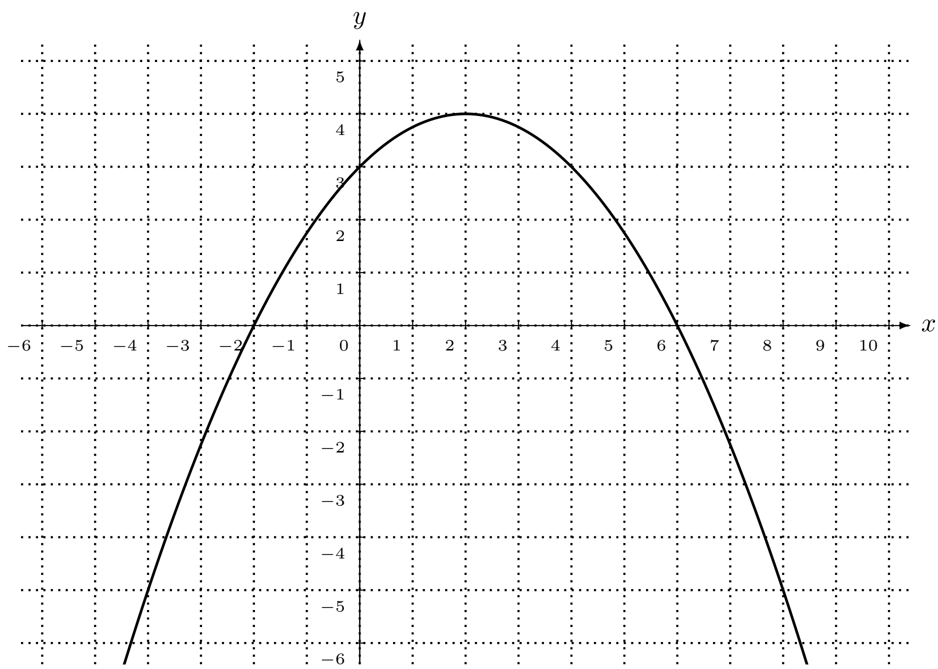
e) Représenter graphiquement les fonctions C et R pour $0 \leq x \leq 2'000$.

f) A quoi correspond l'intersection des droites qui représentent les fonctions C et R ?

g) On appelle **point mort** le nombre d'objets vendus pour lequel les charges sont égales au chiffre d'affaires et **seuil de rentabilité** le chiffre d'affaires qui couvre exactement les charges. Calculer le point mort et le seuil de rentabilité de la vente des MP3.

3.27

Soit f la fonction dont le graphe est donné ci-dessous.



a) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

$(4;3)$	$(-4;5)$	$(-2;0)$
$(3;4)$	$(-4;-5)$	$(0;-2)$

b) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

$(4;.....)$	$(0;.....)$	$(.....;4)$
$(-4;.....)$	$(.....;0)$	$(.....;5)$

c) Donner les images.

$f(4)$ $\quad f(-4)$ $\quad f(0)$ $\quad f(-2)$ $\quad f(8)$

d) Résoudre les équations.

$f(x)=-5$	$f(x)=0$	$f(x)=4$
$f(x)=5$	$f(x)=3$	$f(x)=7$

3.28

Soit f la fonction donnée par $f(x)=x^2+2x-15$.

a) Calculer.

$f(1)$	$f(\frac{1}{2})$	$f(-3k+5)$
$f(-3)$	$f(-\frac{7}{3})$	
$f(0)$	$f(2k)$	

b) Résoudre les équations.

$f(x)=20$	$f(x)=5$
$f(x)=-16$	$f(x)=-20$
$f(x)=0$	$f(x)=-4$

c) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

$(-12;1)$	$(-4;-7)$	$(\frac{1}{2};-\frac{55}{4})$
$(1;-12)$	$(-5;0)$	$(\frac{1}{2};\frac{18}{3})$
$(12;-1)$	$(0;0)$	$(-\frac{4}{3};-\frac{143}{9})$

d) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

$(1;.....)$	$(.....;-7)$
$(2;.....)$	$(.....;-16)$
$(\frac{1}{2},.....)$	$(.....;7)$
$(-11;.....)$	$(.....;-21)$
$(0;.....)$	$(k;.....)$
$(.....;0)$	$(.....;k)$

3.29

Dessiner les graphes des fonctions f suivantes

a) $f(x) = x^2 - 4\,x$

b) $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 2$

c) $f(x) = -x^2 + 4$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 - x + 4$

3.30

Dessiner les graphes des fonctions $f(x) = x^2 - x - 6$ et $g(x) = -x^2 + 2\,x - 2$, puis, en s'aidant du graphe, résoudre les équations et inéquations données ci-dessous.

a) $f(x) = 0$

b) $g(x) = 0$

c) $f(x) = g(x)$

d) $f(x) > 0$

e) $f(x) < 0$

f) $g(x) \geq 0$

g) $g(x) \leq 0$

h) $f(x) < g(x)$

i) $g(x) \leq -2$

3.31

Déterminer les points d'intersection des graphes de f et de g.

a) $f(x) = x^2 - 5\,x + 4$ et $g(x) = -4\,x + 10$

b) $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 2\,x^2 - 6$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 12x + 18$

3.32

Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole

a) de sommet $S(2;5)$ et dont le graphe passe par le point $A(4;-1)$;

b) qui passe par les points $A(-1;9), B(0;5)$ et $C(2;15)$.

c) qui coupe l'axe Ox en $x = -3$ et $x = 1$ et qui est tangente à la droite d'équation $y = 8$;

3.33

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + m\,x + 5$ est tangent à la droite d'équation $y = -4$.
Donner alors les coordonnées du (des) point(s) de contact.

3.34

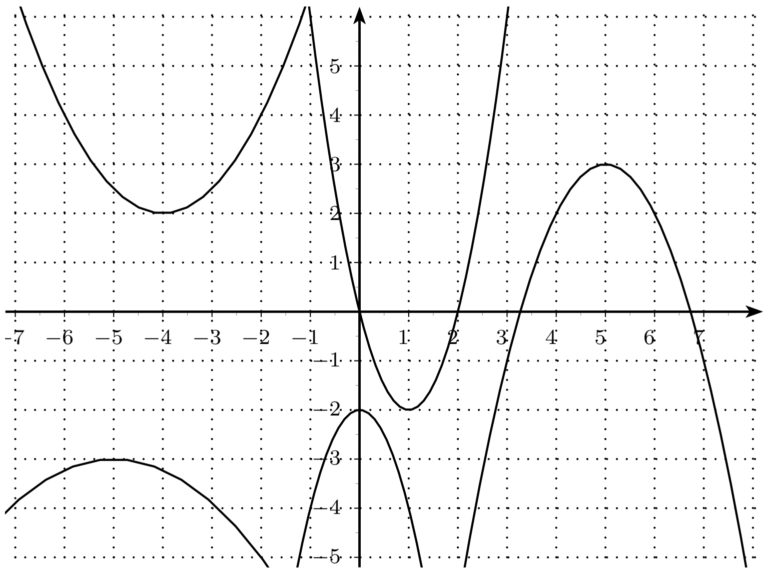
Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation

$$x^2 + m\,x + 3 = x$$

a-t-elle exactement une solution ?

3.35

Trouver l'expression fonctionnelle des 5 fonctions dont les graphes sont les paraboles ci-dessous.



3.36

La hauteur h (en m) au-dessus du sol d'un jouet fusée t secondes après son lancement est donnée par $h(t) = -16\,t^2 + 120\,t$.
Quand (à un centième de seconde près) la fusée sera-t-elle à 180 m du sol ?

3.37

Une balle de baseball est lancée verticalement avec une vitesse initiale de 64 m/s. Le nombre de mètres au-dessus du sol après t secondes est donné par $s(t) = -5\,t^2 + 64\,t$.

a) Quand la balle sera-t-elle à 59 m au-dessus du sol ?

b) Quand touchera-t-elle le sol ?

3.38

La distance qu'une voiture parcourt entre le moment où le conducteur décide de freiner et celui où la voiture s'arrête est appelée la distance de freinage. Pour une certaine voiture circulant à v km/h, la distance de freinage d (en m) est donnée par $d(v) = v + \dfrac{v^2}{20}$.

a) Calculer la distance de freinage quand v vaut 55 km/h.

b) Si un conducteur décide de freiner 120 m avant un signal stop, à quelle vitesse doit-il rouler pour s'arrêter au bon endroit ?

3.39

Un objet est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de v m/s ; après t secondes il est à une distance s donnée par la fonction $s(t) = v\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$.
Si $g = 9.8$ m/s^2 et si la vitesse initiale est de 120 m/s, trouver :

a) le temps que met l'objet pour s'élever à 60 m au-dessus du sol

b) la hauteur maximale atteinte par l'objet et le temps requis

3.6 Réponses

3.1

a) $B = \{0; 3; 6; 9\}$

b) $C = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$

c) $B \cap C = \{3; 6\}$, $B - C = \{0; 9\}$, $(A - B) \cap (A - C) = \{5; 7\}$

3.2

a) $A = \{-1; 0\}$

b) $B = \mathbb{Z}$

c) $C = \{-3; 1\}$

d) $D = \{-1; 0; 1\}$

e) $E = \{-5; -4; -3; -2; -1\}$

3.3 $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{5; 7\}$, $C = \{4\}$, $D = \{6; 8; 9; 10\}$.

3.4 $E = \{1; 3; 4; 6\}$

3.5 $A = \{1; 3; 4\}$, $B = \{1; 3\}$, $C = \{2; 3; 4\}$

3.6 $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 5\}$

3.7

a) $A = [-3\ ;\ 5]$

b) $B = [4\ ;\ 5[$

c) $C =]-\infty\ ;\ 1[$

d) $D = [10\ ;\ +\infty[$

e) $E = [-2\ ;\ 2]$

f) $F =]-\infty\ ;\ +\infty[$

g) La notation sous forme d'intervalle n'existe pas

3.8

a) $A = \{0\ ; 1\ ; 2\}$ et $B = \{3\ ; 4\}$ par exemple

b) $A = \{0\ ; 2\ ; 3\ ; 4\}$ et $B = \{1\ ; 2\ ; 3\ ; 4\}$ par exemple

3.9

a) $[-2; 0[$ $[-3; 3]$ $]3; 4[$ $[-3; -2[\cup[0; 4[$

b) $[-2; 2]$ $]-3; 1[$ $]-4; -3]$ $]-4; -2[\cup[1, 2]$

c) $]-1; 3[$ $[-3; 3[$ $]-5; -3[$ $]-5; -1]$

3.10

a) $f(D) = \{-11; -8; -5; -2; 1\}$

b) $f(D) = \{-3; -2; 1\}$

c) $f(D) = \{-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}\}$

d) $f(D) = \{-\frac{1}{5}; 0; 1; \frac{3}{5}\}$

3.11

a) oui
b) non
c) non
d) oui
e) non
f) non
g) oui
h) non
i) non
j) non

3.12

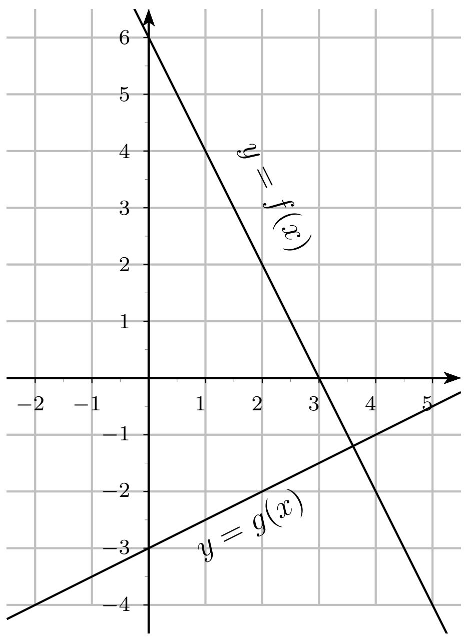
a) $D = \mathbb{R} - \{3\}$; zéro : -
b) $D = \mathbb{R} - \{3\}$; zéro : 0
c) $D = \mathbb{R} - \{-5\}$; zéros : $-1, 1$
d) $D = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$; zéros : $-1, 1$
e) $D = \mathbb{R}$; zéro : -2
f) $D = \mathbb{R} - \{-1; 0\}$; zéros : $1; -\dfrac{1}{2}$
g) $D = \mathbb{R} - \{-4; 3\}$; zéros : $\sqrt{7}; -\sqrt{7}$
h) $D = \mathbb{R} - \{-2\}$; zéro : -
i) $D = [1; +\infty[$; zéro : 1
j) $D =]-5; +\infty[$; zéro : 0
k) $D =]-\infty; 2]$; zéro : 2
l) $D = \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$; zéro : -

3.13 –

3.14

a) $f(0) = -1.5$
b) $f(-2) = -3.2$
c) $f(x) = 0 \iff x \in \{-3; 4.2\}$
d) $f(x) = 2 \iff x \in \{-3.3; 4.8\}$
e) si $a = -3.4$; $x = -1.7$
f) $f(x) = x \iff x \in \{-2.4; 5.3\}$
g) $f(x) = -x \iff x \in \{-3.5; 0.7\}$

3.15



a) $x = 3$
b) $x = 3.6$
c) $x = 2$
d) $x > 3$
e) $x < 3.6$
f) $x \leq 2$

3.16

a) $f(x) = \dfrac{2}{5}x - 3$ b) $f(x) = -3x + 2$ c) $f(x) = -\dfrac{4}{3}x + 1$ d) $f(x) = 2x - 2$

3.17

–

3.18

a) Oui.	Oui.	Non.	Non.
Non.	Non.	Non.	Non.
Non.	Oui.	Oui.	Oui.

b) $(10;3)$	$(4;0)$	$(-\frac{3}{2};-\frac{11}{4})$
$(-1;-\frac{5}{2})$	$(12;4)$	$(-4;-4)$
$(0;-2)$	$(9;\frac{5}{2})$	$(-4;-4)$

c) $f(10)=3$	$f(0)=-2$	$f(3)=-\frac{1}{2}$	$f(\frac{3}{2})=-\frac{5}{4}$
$f(-1)=-\frac{5}{2}$	$f(-3)=-\frac{7}{2}$	$f(7)=\frac{3}{2}$	$f(\frac{17}{2})=\frac{9}{4}$

d) $S=\{4\}$	$S=\{-2\}$	$S=\{-\frac{7}{2}\}$
$S=\{12\}$	$S=\{7\}$	$S=\{14\}$

3.19

a) $f(2)=27$	$f(-3)=-13$	$f(2k)=16k+11$
$f(-1)=3$	$f(\frac{1}{2})=15$	$f(-3k+5)=-24k+51$
$f(0)=11$	$f(-\frac{7}{3})=-\frac{23}{3}$	

b) $S=\{1\}$	$S=\{-\frac{3}{4}\}$	$S=\{-\frac{11}{8}\}$
$S=\{-2\}$	$S=\{-\frac{11}{4}\}$	$S=\{\frac{13}{12}\}$

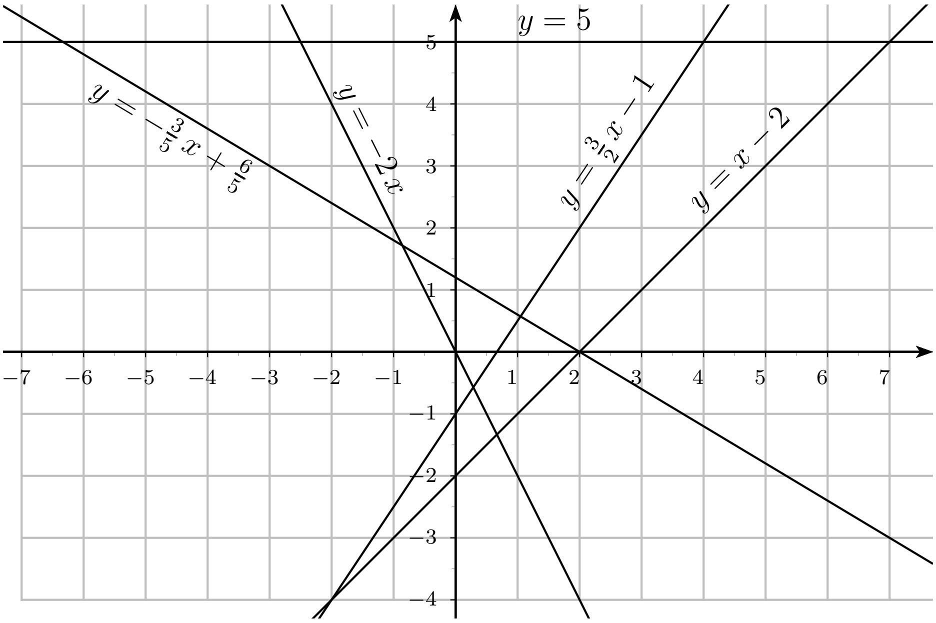
c) Non.	Non.	Non.	Non.
Oui.	Non.	Oui.	Oui.
Oui.	Oui.	Non.	Non.

d) $(2;27)$	$(\frac{3}{5};\frac{79}{5})$	$(-\frac{3}{5};\frac{31}{5})$
$(1;19)$	$(0;11)$	$(k;8k+11)$
$(-\frac{7}{2};-17)$	$(-\frac{11}{8};0)$	$(\frac{k-11}{8};k)$

3.20

a) $f(x)=-3x+10$	d) $f(x)=-2x+5$	g) $f(x)=5x-2$
b) $f(x)=-4x+8$	e) $f(x)=2$	h) $f(x)=7x-3$
c) $f(x)=\frac{2}{3}x+1$	f) $f(x)=\frac{3}{2}x$	i) $f(x)=-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$

3.21



3.22

a) $I\left(\frac{17}{11}; \frac{14}{11}\right)$ b) $f(x) = \frac{14}{17}\,x$ c) $f(x) = \frac{14}{17}\,x - \frac{45}{17}$

3.23

a) Option 1 ; économie : 50 francs
b) $f(x) = 45x$; $g(x) = 20x + 250$
c) 19 séances ; prix avec option 1 : 855 francs
d) A partir de 11 séances
e) $h(x) = 30x + 150$

3.24

a) 30 m ;
b) le père a gagné avec 2.5 s d'avance ;
c) 10 m ;
d) père : 6.67 m/s ; fils : 4 m/s ;
e) côte à côte après 11.25 s à 75 m de la ligne de départ du père.

3.25

a) $R = \dfrac{1}{8}T + 30$;
b) 35Ω à 40°C ; 32Ω à 16°C ;
c) 36Ω à 48°C ; 20Ω à −80°C ;
d) $T = 8R - 240$.

3.26

a) $119'000$ francs ;
b) $C(x) = 24'000 + 95x$;
c) $125'000$ francs ;
d) $R(x) = 125x$;
f) coûts = revenus ;
g) point mort : 800 MP3 ; seuil rentabilité : $100'000$ francs.

3.27

a) Oui. Non. Oui.
Non. Oui. Non.

b) $(4;3)$ $(0;3)$ $(2;4)$
$(-4;-5)$ $(-2;0)$ ou $(6;0)$ Impossible.

c) $f(4) = 3$ $f(-4) = -5$ $f(0) = 3$ $f(-2) = 0$ $f(8) = -5$

d) $S = \{-4;8\}$ $S = \{-2;6\}$ $S = \{2\}$
$S = \emptyset$ $S = \{0;4\}$ $S = \emptyset$

3.28

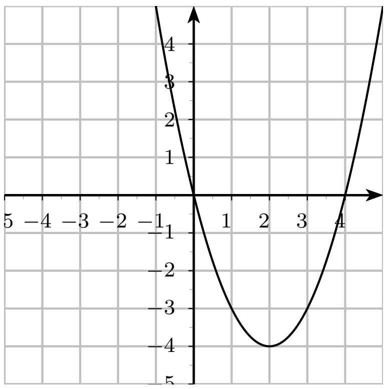
a) $f(1) = -12$ $f(\frac{1}{2}) = -\frac{55}{4}$ $f(-3k+5) = 9k^2 - 36k + 20$
$f(-3) = -12$ $f(-\frac{7}{3}) = -\frac{128}{9}$
$f(0) = -15$ $f(2k) = 4k^2 + 4k - 15$

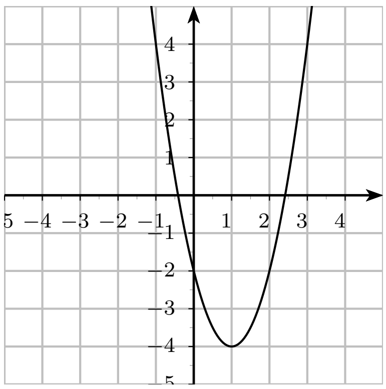
b) $S = \{-7;5\}$ $S = \{-1-\sqrt{21}; -1+\sqrt{21}\}$
$S = \{-1\}$ $S = \emptyset$
$S = \{-5;3\}$ $S = \{-1-2\sqrt{3}; -1+2\sqrt{3}\}$

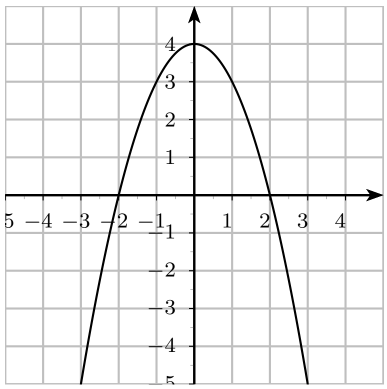
c) Non. Oui. Oui.
Oui. Oui. Non.
Non. Non. Oui.

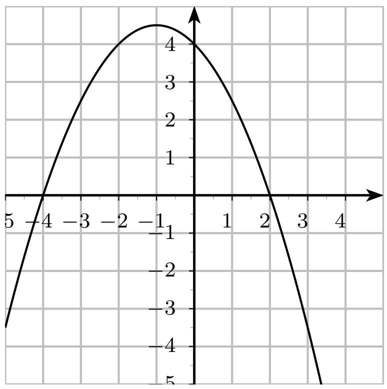
d) $(1;-12)$ $(-4;-7)$ ou $(2;-7)$
$(2;-7)$ $(-1;-16)$
$(\frac{1}{2}; -\frac{55}{4})$ $(-1-\sqrt{23};7)$ ou $(-1+\sqrt{23};7)$
$(-11;84)$ Impossible.
$(0;-15)$ $(k; k^2+2k-15)$
$(-5;0)$ ou $(3;0)$ $(-1 \pm \sqrt{16+k}, k)$ si $k \geq -16$

3.29

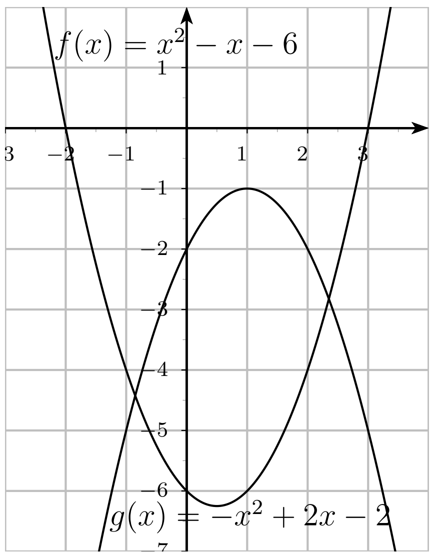
a) 

b) 

c) 

d) 

3.30



a) $S = \{-2; 3\}$

b) $S = \emptyset$

c) $S = \{-0.85; 2.35\}$

d) $S = \,]-\infty\ ;\ -2\,[\ \cup\ ]\ 3\ ;\ +\infty\,[$

e) $S = \,]-2\ ;\ 3\,[$

f) $S = \emptyset$

g) $S = \mathbb{R}$

h) $S = \ ]-0.85\ ;\ 2.35\,[$

i) $S = \,]-\infty\ ;\ 0\,]\ \cup\ [\ 2\ ;\ +\infty\,[$

3.31

a) $I(-2;18)$ et $J(3;-2)$ b) $I(-2;2)$ et $J(3;12)$ c) $I(3;9)$ et $J(5;33)$

3.32

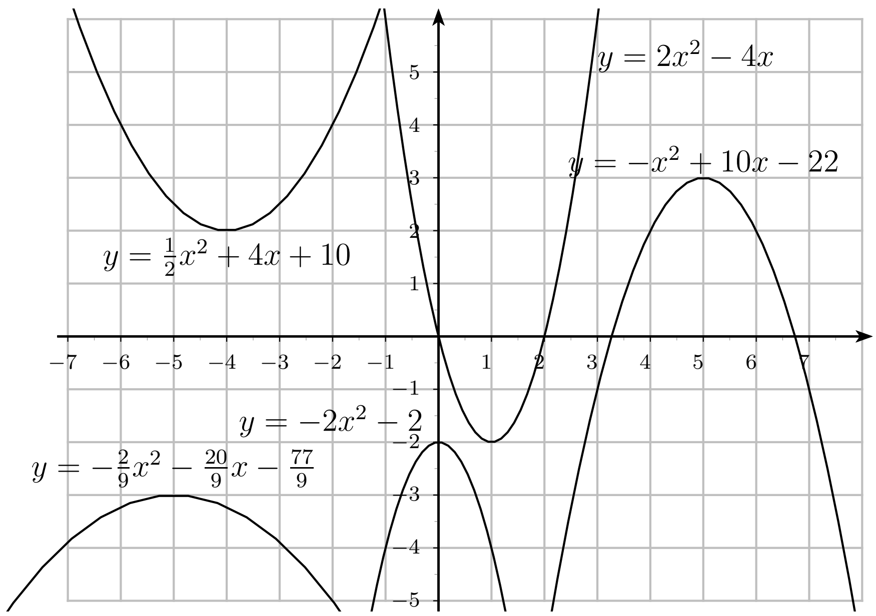
a) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 1$
b) $f(x) = 3x^2 - x + 5$
c) $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

3.33 $a_1 = 6$, point de contact $(-3;-4)$, $a_2 = -6$, point de contact $(3;-4)$

3.34

$m_1 = 1 + \sqrt{12}$, $m_2 = 1 - \sqrt{12}$

3.35



3.36

$t = \frac{15-3\sqrt{5}}{4} \cong 2.07s$ et $t = \frac{15+3\sqrt{5}}{4} \cong 5.43s$

3.37

a) Après 1 s et après 11.8 s ; b) Après 12.8 s

3.38

a) 206.25 m ; 40 km/h

3.39

a) $t = 0.51$ s
b) hauteur maximale : 734.69 m et le temps requis : 12.24 s