Chapitre 1

Algèbre (1ère partie)

1.1 Hiérarchie des opérations

Il est important de respecter les conventions sur la hiérarchie des opérations présentes.

On effectue dans l'ordre :

- les parenthèses
- les puissances et les racines
- la multiplication et la division
- l'addition et la soustraction.

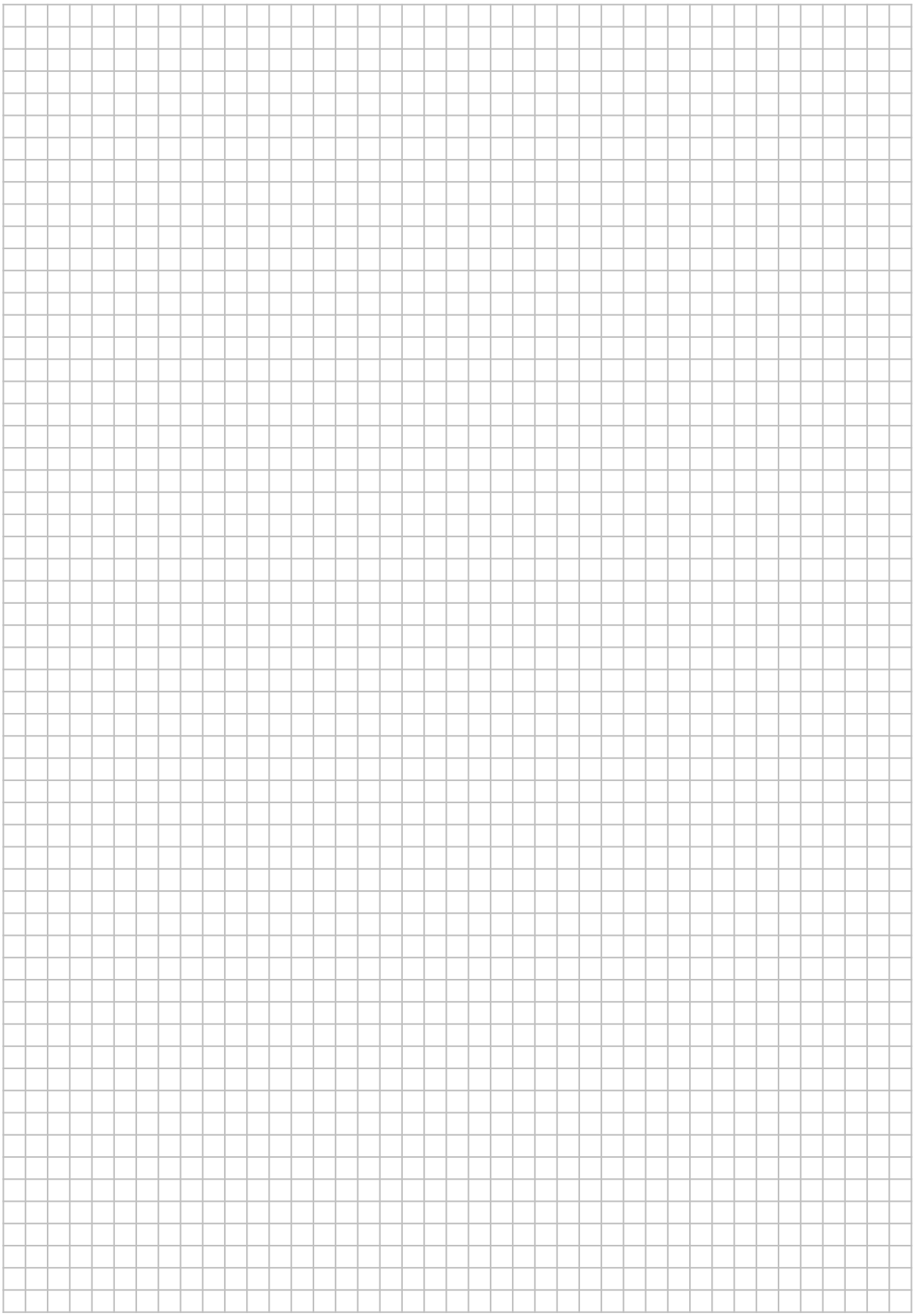
Exemple 1.1.

Calculer $a = 12 \div (4+2) - 3\left((5+4^2) - \sqrt{100 - 4 \cdot (3 \cdot 4 - 2^3)^2}\ \right)$

1.2 Quelques propriétés algébriques

Langage algébrique

- une **somme** est le résultat d'une addition de **termes**, un **produit** le résultat d'une multiplication de **facteurs**, une **différence** le résultat d'une soustraction et le **quotient** le résultat d'une division
- a^n est une **puissance** ; a est la **base** de la puissance et n son **exposant**
- **réduire** c'est diminuer le nombre de termes (on dit parfois aussi **simplifier**)
- si l'on remplace dans une expression algébrique les variables par des nombres particuliers, le résultat obtenu (pour autant qu'il ait un sens) est la **valeur numérique** de l'expression en ces nombres.



Exemple 1.2.

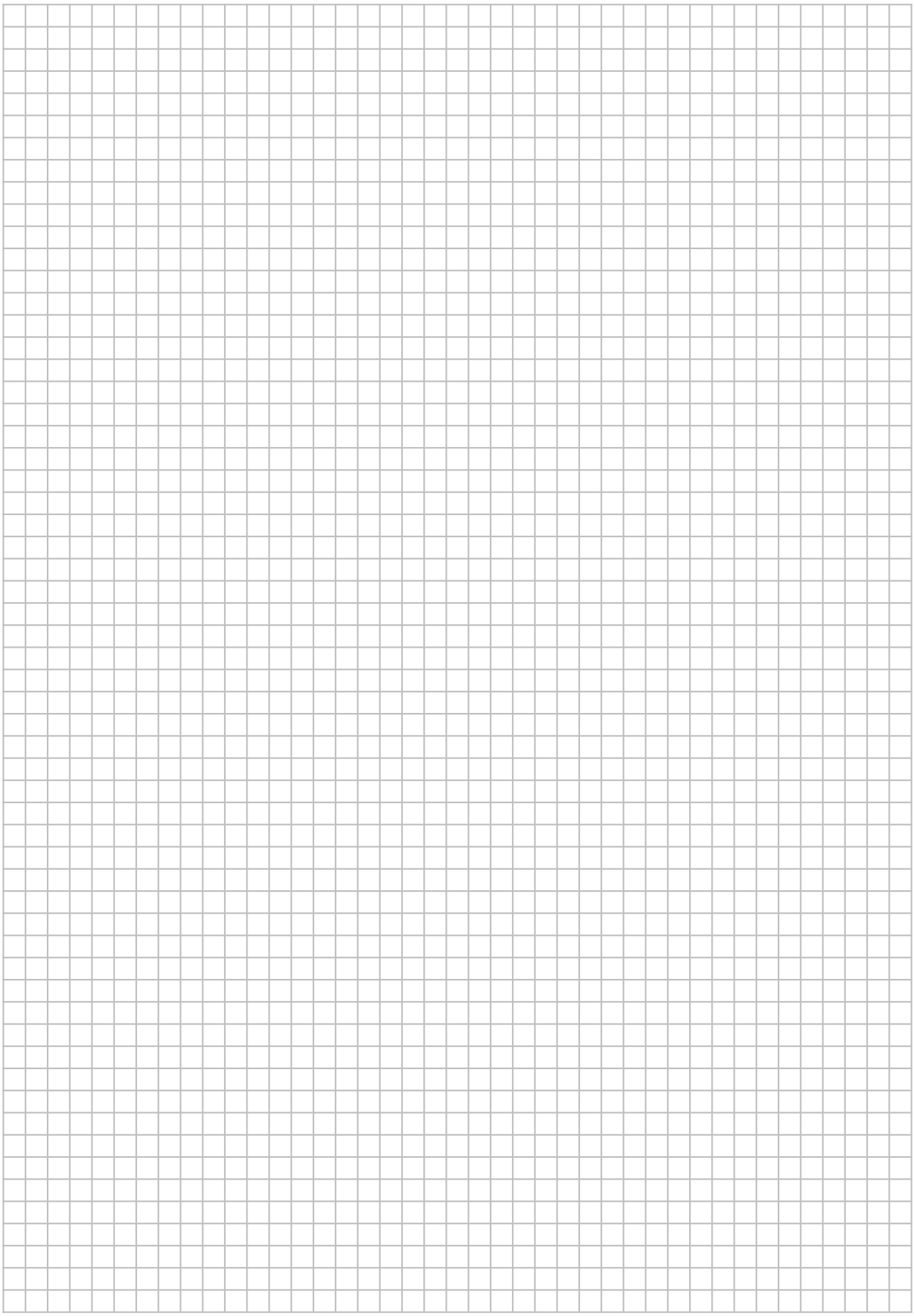
a) Calculer la valeur numérique en $x = 4$ de l'expression $A = x^3 - 5x + \dfrac{6}{\sqrt{x}}$.

b) Calculer la valeur numérique en $x = 1$ et $y = 9$ de l'expression $B = \dfrac{2xy + \dfrac{3}{x^2}}{\sqrt[3]{y-1}}$.

c) Calculer la valeur numérique en $x = -1$ de l'expression $C = \dfrac{x+2}{-x^2 - x}$.

Propriétés des opérations sur les nombres réels

- L'addition et la multiplication sont **commutatives** : $a + b = b + a$ et $ab = ba$
- L'addition et la multiplication sont **associatives** : $a+(b+c) = (a+b)+c$ et $(ab)c = a(bc)$
- $-a$ est **l'opposé** de a : $a + (-a) = 0$
- Si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a}$ est **l'inverse** de a : $a \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right) = 1$
- La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition :
  $a(b + c) = ab + ac$ et $(a + b)c = ac + bc$
- **Soustraire** c'est additionner l'opposé : $a - b = a + (-b)$
- **Diviser** c'est multiplier par l'inverse : $a \div b = a \cdot \dfrac{1}{b}$



Calcul algébrique

Le calcul algébrique respecte les propriétés des opérations sur les nombres réels énoncées ci-dessus.

Exemple 1.3.

Calculer la différence de $A = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ et $B = -4x^3 - 5x^2 + 5$

Compatibilité entre valeur numérique et réduction de polynômes.

La valeur numérique d'une expression algébrique n'est pas modifiée lors des opérations du calcul algébrique !

Exemple 1.4.

Calculer la valeur numérique de $A = (x-2)(x+6) - (x-3)(x-4)$ en $x = -2$ une première fois directement et une deuxième fois après réduction de A.

Utilisation des identités remarquables

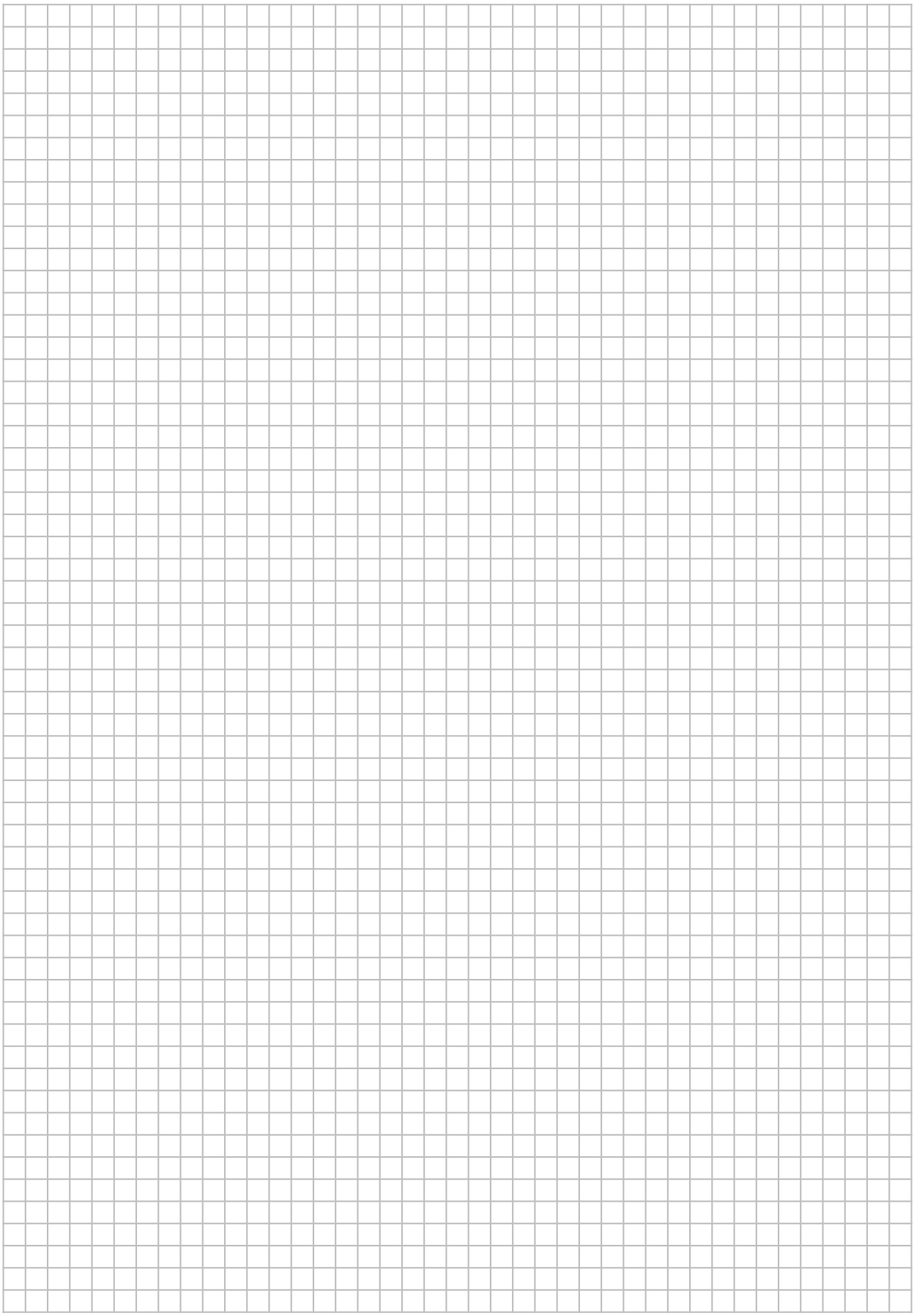
Lors du calcul algébrique, on utilise souvent **les produits remarquables**

1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
2) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
3) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
4) $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5) $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

Exemple 1.5.

a) Effectuer et réduire l'expression $A = 2(2x-3y)^2 - [5(3y^2+4x^2) - 3(2x+y)(2x-y)]$

b) Effectuer et réduire l'expression $B = (2x-1)^3 + 3(2x-1)^2 + 3(2x-1) + 1$



1.3 Factorisation

Factoriser = Mettre sous forme de produits

Méthodes de factorisation

- Mise en évidence
- Produits remarquables
- Trinôme du 2ème degré unitaire
- Trinôme du 2ème degré quelconque
- Groupements
- Division euclidienne (Horner)

Remarque 1.1.

La factorisation s'utilise essentiellement afin de simplifier des expressions algébriques et pour la résolution des équations.

Mise en évidence

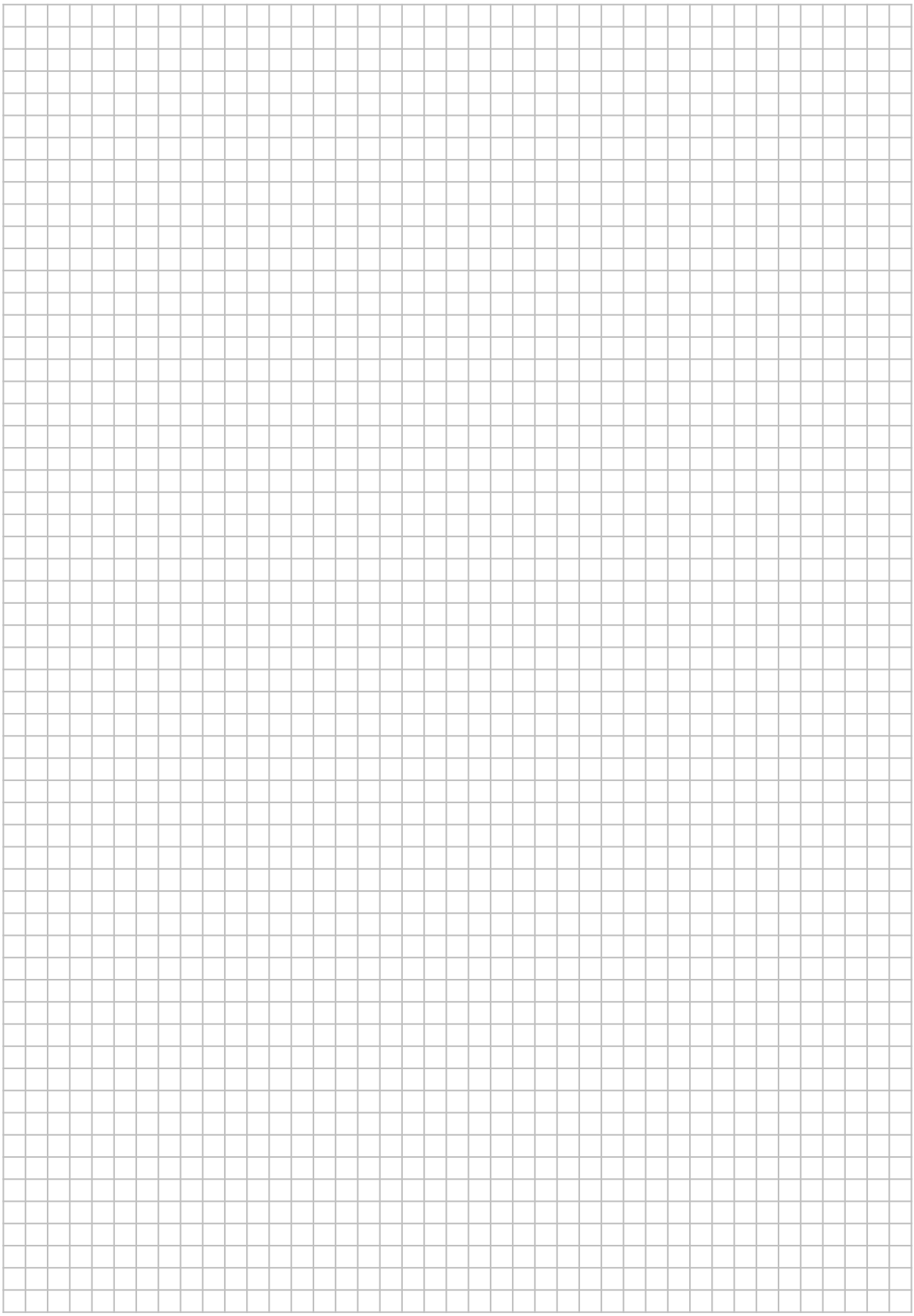
Exemple 1.6.

Factoriser par mise en évidence

a) $12x^2y^2 + 6x^2y - 2xy =$

b) $(x+y)^2 - 3x(x+y) =$

c) $(3x-1)(x-4) + (2x+3)(4-x) =$



Produits remarquables

Principales factorisations à l'aide des produits remarquables :

1) $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
2) $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
3) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
4) $A^2 + B^2$ est indécomposable
5) $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
6) $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
7) $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$
8) $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$

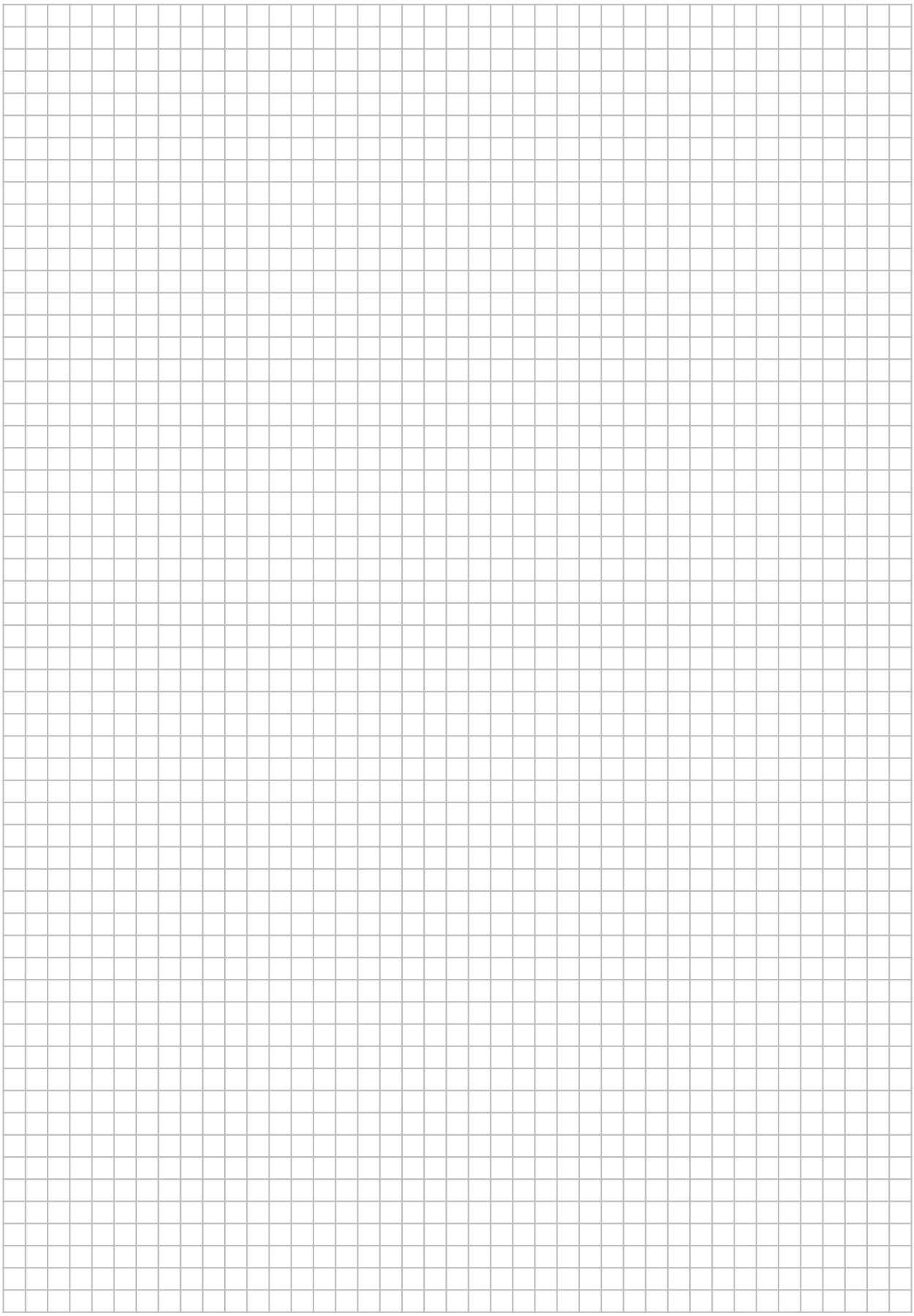
Exemple 1.7.

Factoriser à l'aide des produits remarquables.

a) $25a^2 + 30ab + 9b^2 =$

b) $-25x^2 + 121 =$

c) $27x^3 - 64 =$



Trinôme unitaire du deuxième degré

Un polynôme est **unitaire** si son coefficient de plus haute puissance est égal à 1.

Pour décomposer

$$x^2 + bx + c$$

il s'agit, si c'est possible, de trouver deux nombres α et β tels que

$$\begin{cases} b &= \alpha + \beta \\ c &= \alpha \cdot \beta \end{cases}$$

et ainsi

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta)$$

Exemple 1.8.

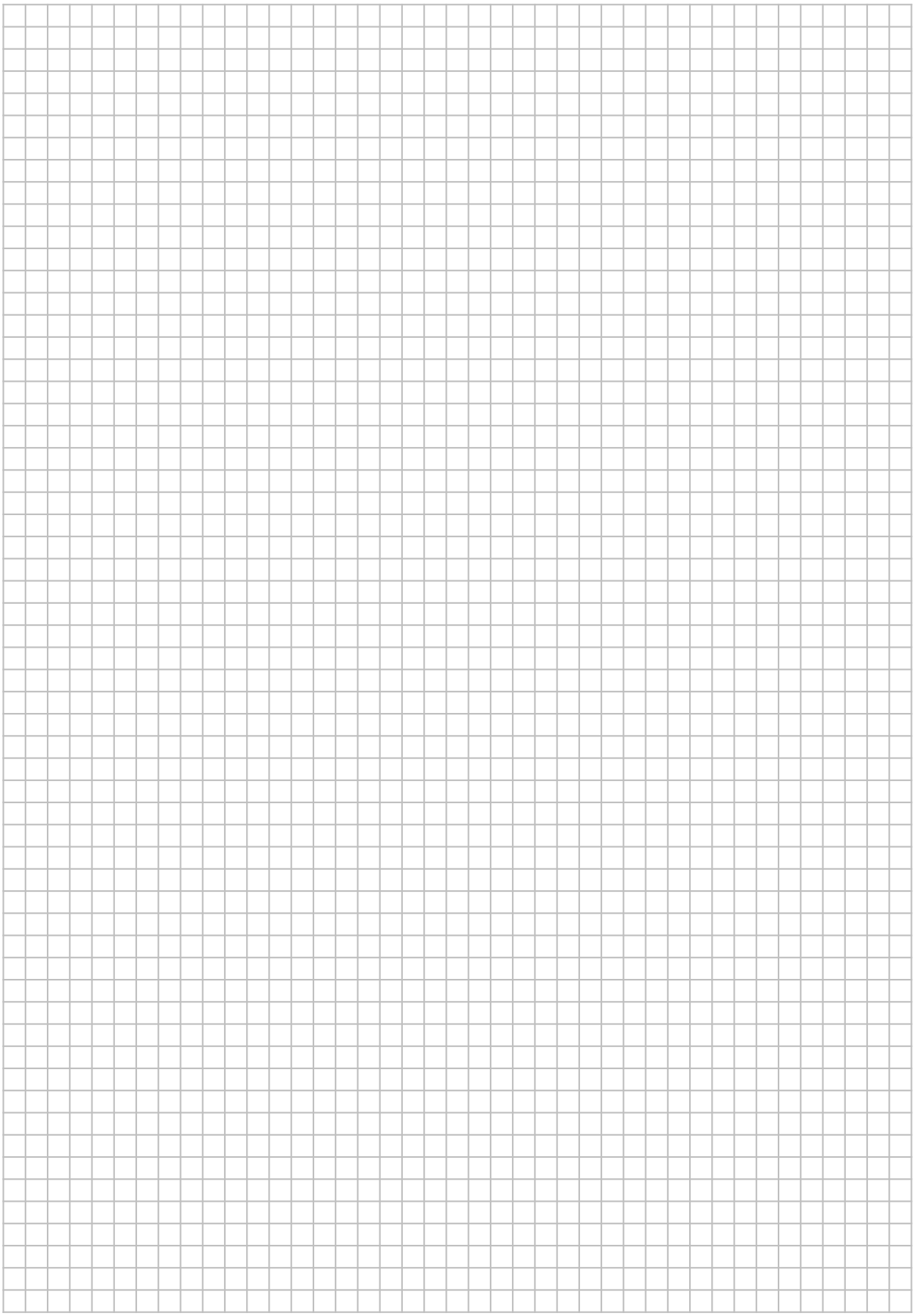
Factoriser les trinômes suivants :

1) $x^2 + 11x + 24 =$

2) $x^2 - 3x - 10 =$

3) $x^2 + 4x - 12 =$

4) $2x^2 - x - 1 =$



Trinôme du 2ème degré : méthode générale

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ se calculent de la manière suivante :

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

1) Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution
2) Si $\Delta = 0$ l'équation n'admet qu'une seule solution

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

3) Si $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Factorisation du polynôme $ax^2 + bx + c, a \neq 0$

1) Si $\Delta < 0$ le polynôme $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable
2) Si $\Delta = 0$ le polynôme $ax^2 + bx + c$ est factorisable

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \text{ où } x_1 = -\frac{b}{2a}$$

3) Si $\Delta > 0$ le polynôme $ax^2 + bx + c$ est factorisable

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{où } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

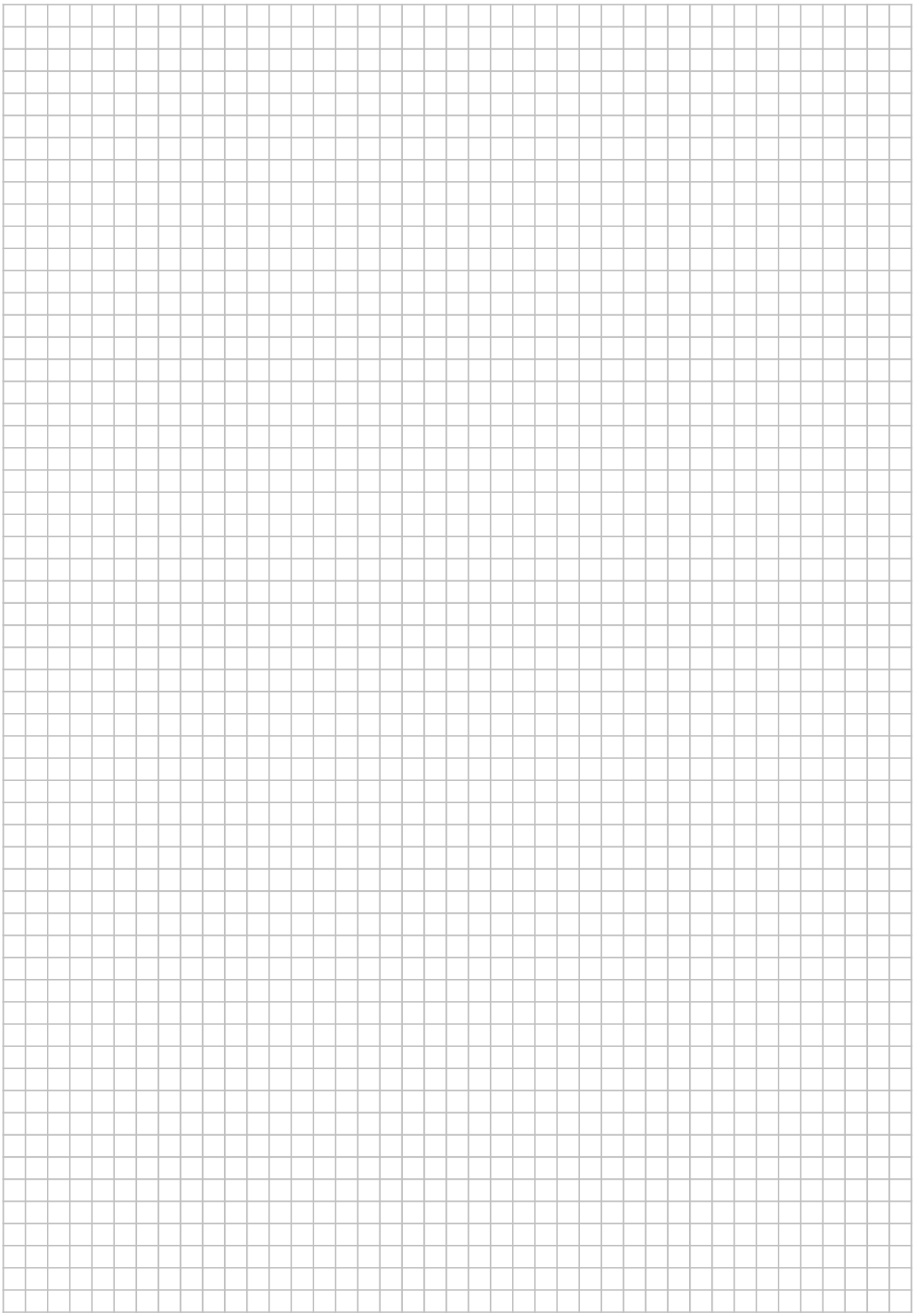
Exemple 1.9.

Factoriser, si possible, les trinômes suivants :

1) $x^2 - 3x - 10 =$

2) $6x^2 - 7x - 3 =$

3) $2x^2 - 3x + 3 =$



Groupements

La méthode des groupements ne s'applique que lorsque le nombre de termes est au moins égal à 4.

Méthode

1) Former plusieurs groupes de termes (en général deux groupes) de manière à mettre en évidence un même facteur dans chaque groupe
2) Mise en évidence globale du facteur commun.

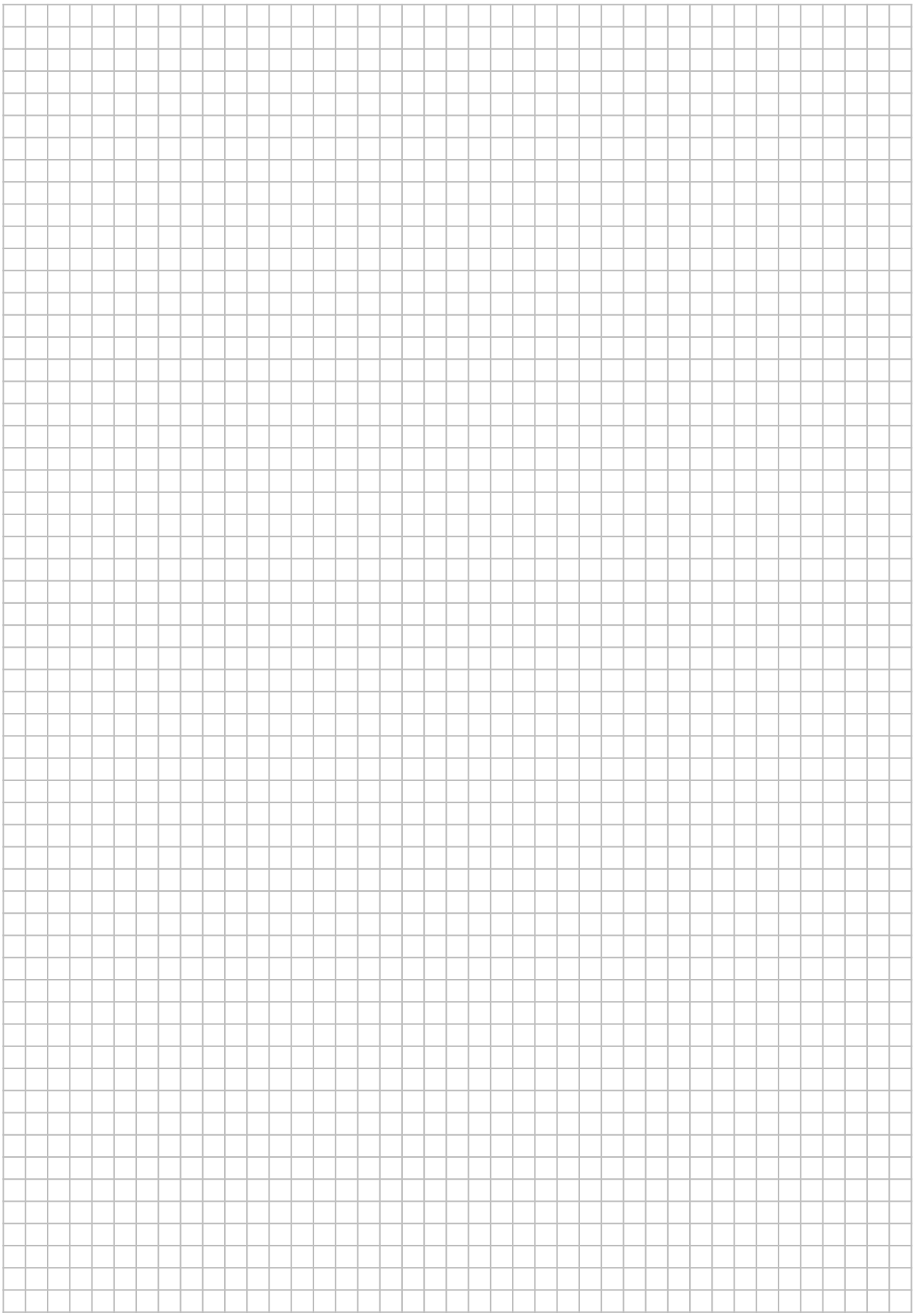
Exemple 1.10.

Factoriser à l'aide de la méthode des groupements.

1) $ax + bx - ay - by =$

2) $x^2 + xy - 3x - 3y =$

3) $x^2 + 6x + 9 - 4y^2 =$



Factorisation : méthode générale (sans division euclidienne)

Ordre de factorisation

1) Mise en évidence.
2) Produits remarquables.
3) Trinôme du deuxième degré (unitaire ou non)
4) Méthode des groupements.

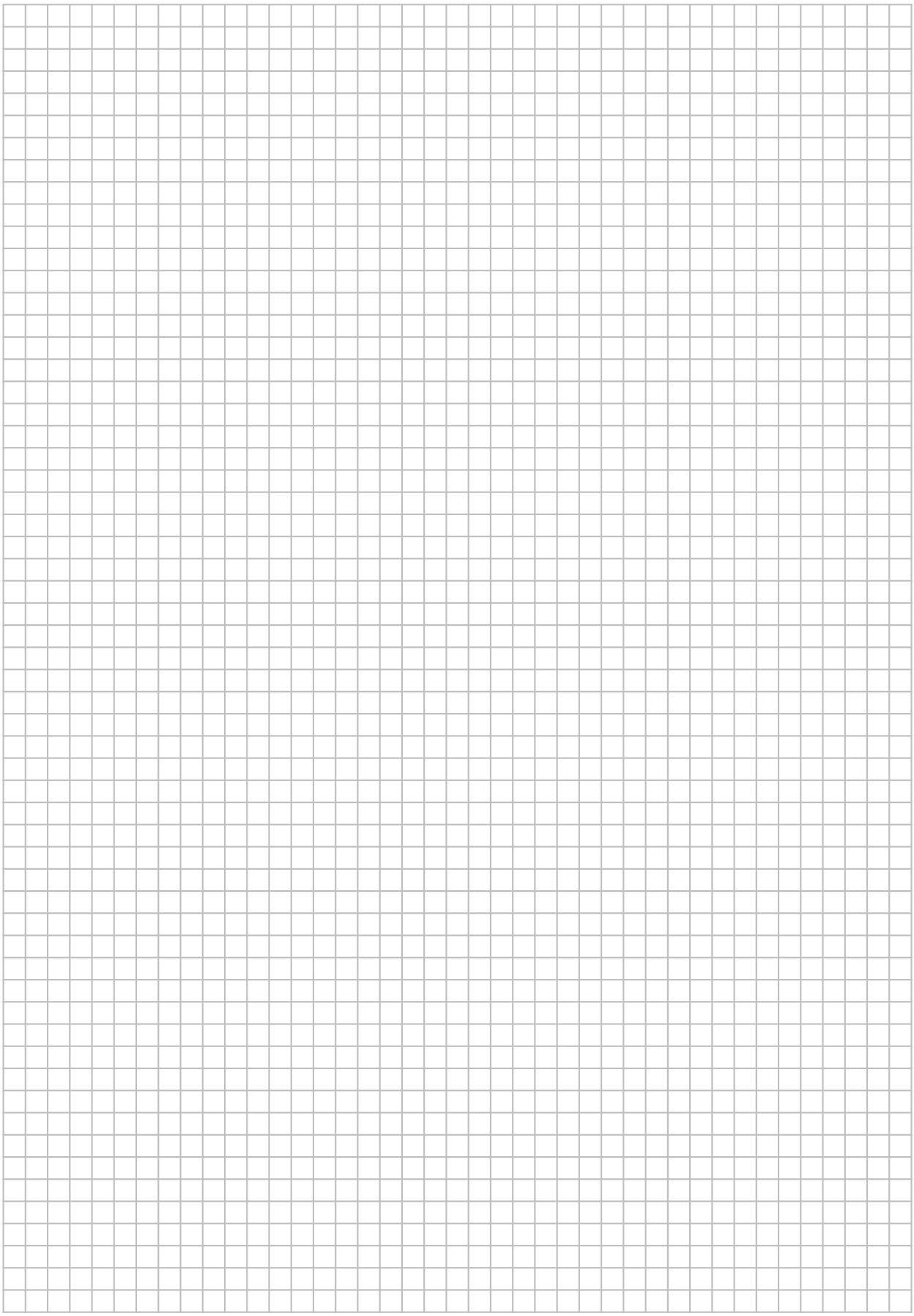
Exemple 1.11.

Factoriser au maximum :

1) $-x^2 - 2x + 15 =$

2) $2x^2y + 2x^2z + 4xy + 4xz =$

3) $3x^6 - 24x^4 + 48x^2 =$



1.4 Résolution d'équations

Equivalence d'équations

Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont exactement les mêmes solutions.

On utilise le signe $\iff$ pour relier deux équations équivalentes.

On obtient une équation E_2 équivalente à E_1 si :

- On ajoute ou on soustrait un même nombre ou **une même expression** algébrique définie aux deux membres de l'équation. C'est le **principe d'équivalence** appelé **principe d'addition**.
- On multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par un **nombre réel non nul**. C'est le **principe d'équivalence** appelé **principe de multiplication**.

Mettre les deux membres d'une équation au carré n'est pas un principe d'équivalence.

Par contre mettre les deux membres d'une équation au cube est un principe d'équivalence.

Résolution d'une équation par factorisation

Il existe un troisième principe d'équivalence, appelé **principe d'intégrité** qui stipule que si un produit de facteurs est nul, au moins l'un de ces facteurs est égal à zéro. Autrement dit :

$$A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_n(x) = 0 \qquad \iff \qquad \left[\begin{array}{rcl} A_1(x) & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ A_2(x) & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ & \vdots & \\ \text{ou} & & \\ A_n(x) & = & 0 \end{array} \right.$$

Exemple 1.12.

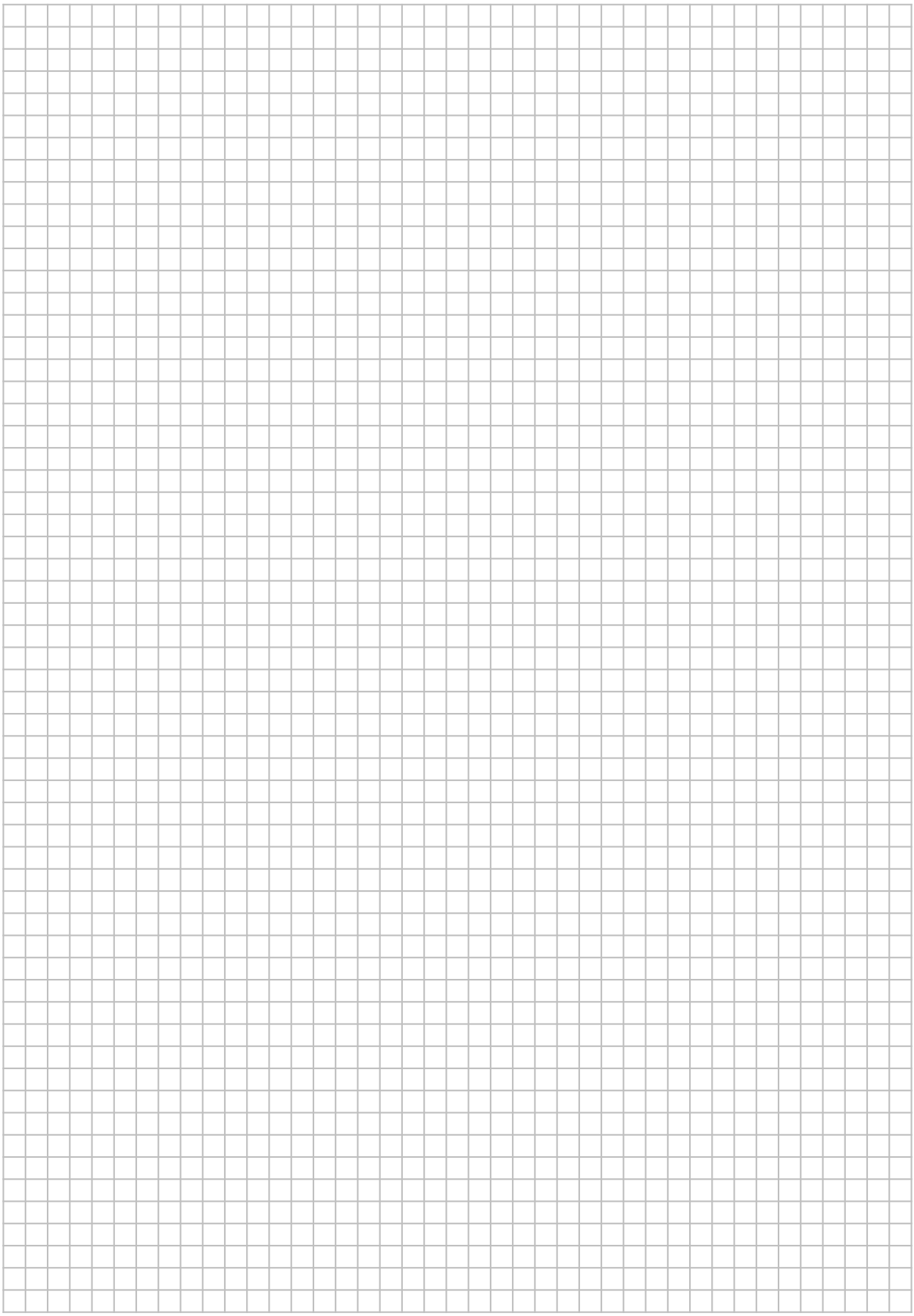
Résoudre les équations suivantes.

1) $(x-3)(x+2) = 0$

2) $(x-3) + (x+2) = 0$

3) $(x-3)(x+2) = 6$

4) $(x-1)^4(x^2-6x+8) = 0$



1.5 Division euclidienne

Division euclidienne d'entiers

En arithmétique, lorsqu'on étudie la division des nombres entiers avec reste, on voit des opérations du type suivant :

2	3	5	6		8	
1	6			2	9	4
	7	5				
	7	2				
		3	6			
		3	2			
			4			

Si l'on divise 2356 (c'est le **dividende**) par 8 (c'est le **diviseur**) on obtient le **quotient** $Q = 294$ et le **reste** $R = 4$. La division se termine lorsque le reste est inférieur au diviseur.
L'**égalité fondamentale** correspondante est la suivante : $2356 = 8 \cdot 294 + 4$

Degré d'un polynôme

Rappelons que le **degré d'un polynôme relativement à une lettre** est donné par la plus grande puissance de cette lettre dans le polynôme simplifié.

Le degré d'un polynôme constant non nul (formé d'un nombre uniquement) est égal à 0 alors que le degré du polynôme nul n'est pas défini.

Division euclidienne de polynômes

Par exemple la division du polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ (c'est le **dividende**) par le polynôme $S(x) = x^2 + 3x + 1$ (c'est le **diviseur**) se présente de la manière suivante :

x^4	$+$	$2x^3$			$-$	$5x$	$+$	1	$x^2 + 3x + 1$
x^4	$+$	$3x^3$	$+$	x^2					$x^2 - x + 2$
	$-$	x^3		$-x^2$	$-$	$5x$	$+$	1	
	$-$	x^3		$-3x^2$	$-$	x			
				$2x^2$	$-$	$4x$	$+$	1	
				$2x^2$	$+$	$6x$	$+$	2	
						$-10x$		-1	

Le **quotient** de la division est $Q(x) = x^2 - x + 2$ et le **reste** est $R(x) = -10x - 1$.

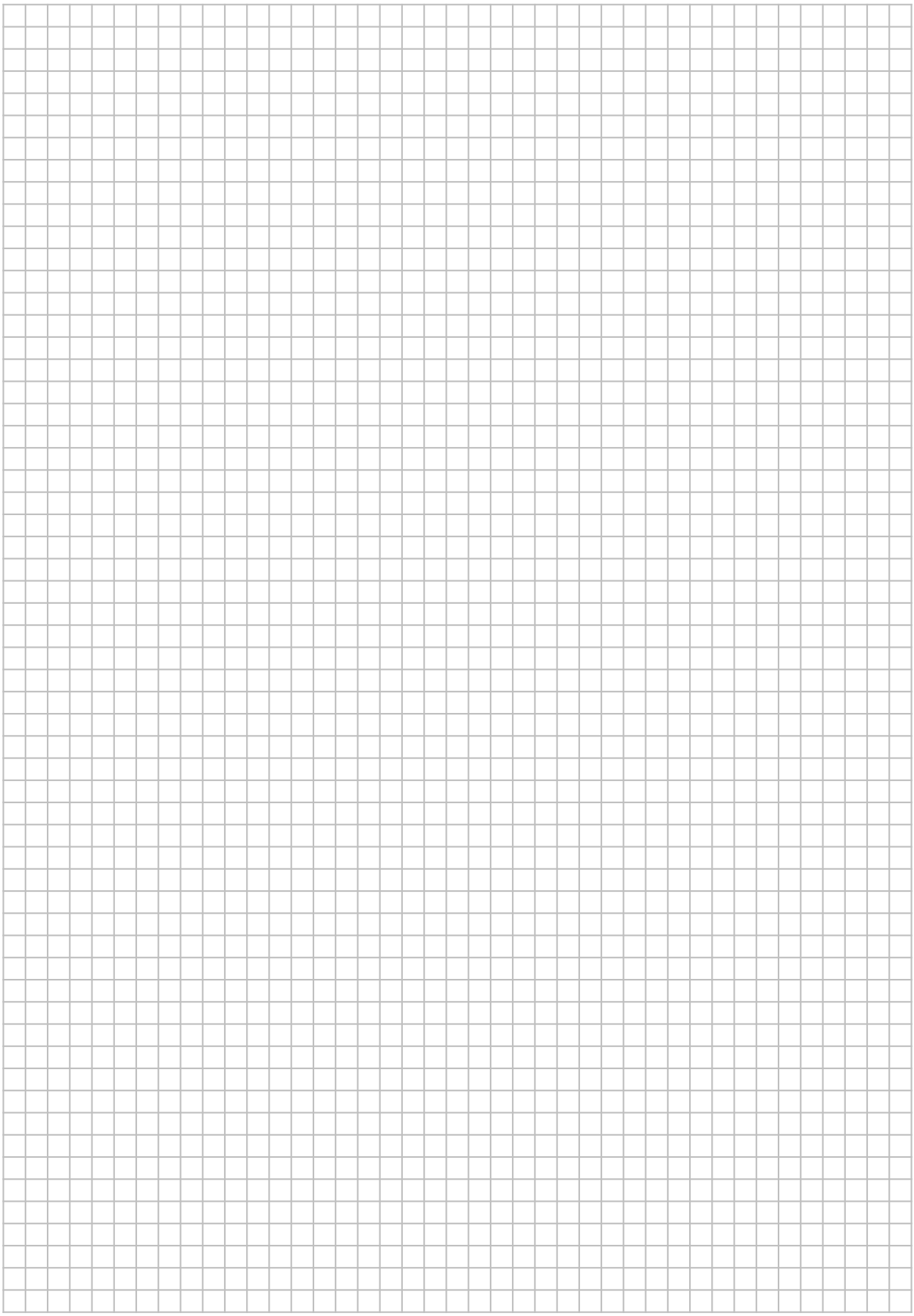
La division se termine lorsque le reste est nul ou lorsque le degré du reste est strictement inférieur au degré du diviseur.

L'**égalité fondamentale** correspondante est la suivante :

$$x^4 + 2x^3 - 5x + 1 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 2) - 10x - 1$$

Exemple 1.13.

Effectuer la division du polynôme $P(x) = 2\,x^4 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + 1$ par $S(x) = x - 2$.



Division par Horner

Le **schéma de Horner** permet de simplifier la présentation de la division euclidienne par un polynôme du type $x - a$.

Considérons, par exemple, la division de $P(x) = 2\,x^4 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + 1$ par $S(x) = x - 2$ considérée dans l'exemple 1.13.

On commence par disposer sur la 1ère ligne les coefficients du polynômes que l'on veut diviser ; attention, le nombre de coefficients à noter doit être égal à $\deg(P(x)) + 1$.

On place ensuite la valeur qui annule le diviseur au début de la 2ème ligne comme suit :

	2	−3	4	0	1
2					

On suit ensuite les étapes exposées ci-dessous :

	2	−3	4	0	1
2					
	2				

	2	−3	4	0	1
2			4	2	12
	2	1	6		

(·2)

	2	−3	4	0	1
2			4		
	2				

(·2)

	2	−3	4	0	1
2			4	2	12
	2	1	6	12	

(+)

	2	−3	4	0	1
2			4		
	2	1			

(+)

	2	−3	4	0	1
2			4	2	12	24
	2	1	6	12	

(·2)

	2	−3	4	0	1
2			4	2	
	2	1			

(·2)

	2	−3	4	0	1
2			4	2	12	24
	2	1	6	12	25

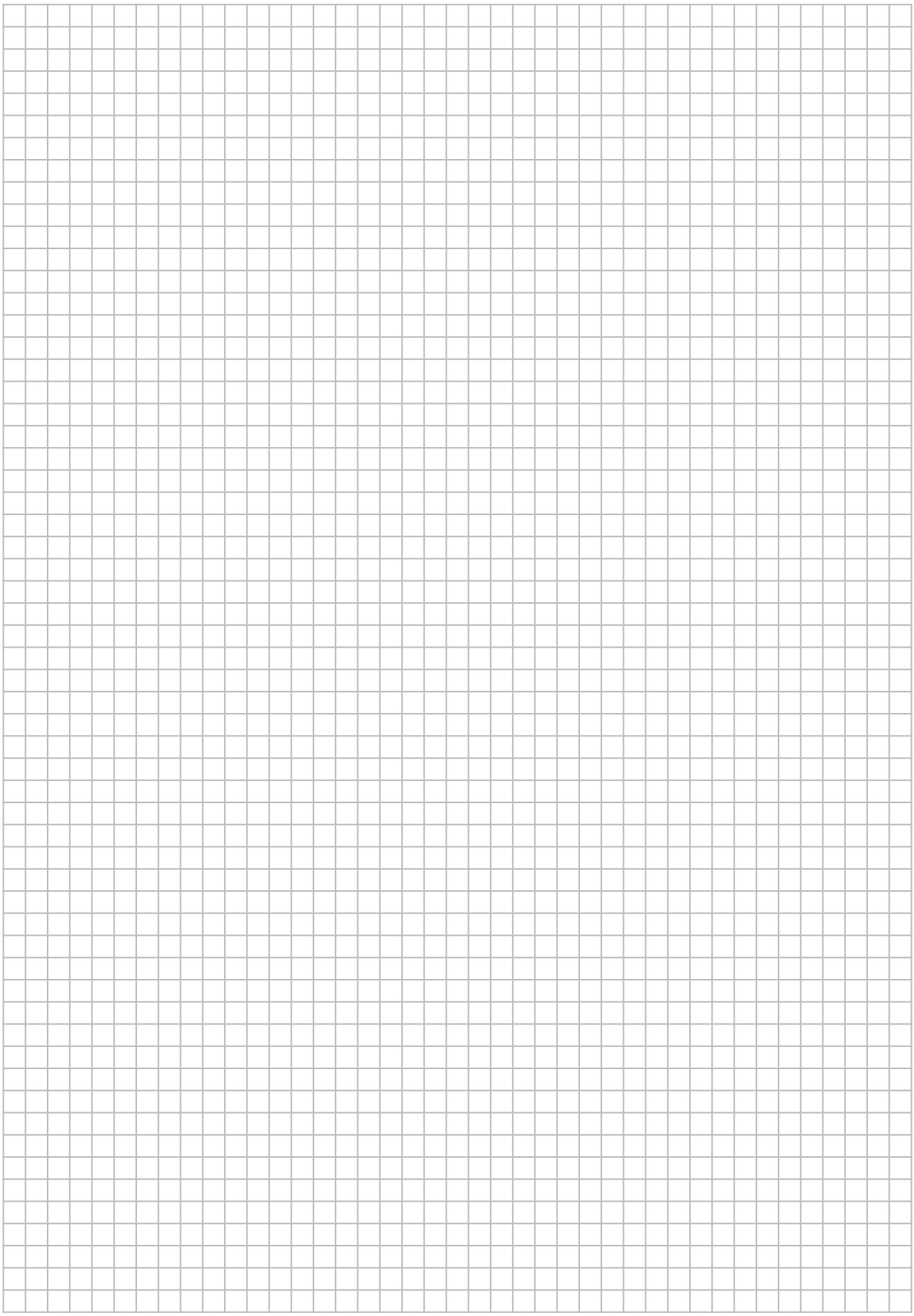
(+)

	2	−3	4	0	1
2			4	2	
	2	1	6		

(+)

Le dernier nombre obtenu est le reste de la division de $2\,x^4 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + 1$ par $x - 2$.
On peut alors écrire l'égalité fondamentale comme suit :

$$P(x) = 2\,x^4 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + 1 = (2\,x^3 + x^2 + 6\,x + 12) \cdot (x - 2) + 25$$



Exemple 1.14.

Effectuer la division par le schéma de Horner de $P(x) = 2x^4 - 18x^2 + 2x + 6$ par $S(x) = x + 3$.

Exemple 1.15.

Le shéma ci-dessous donne la division par Horner du polynôme $P(x)$ par $S(x)$.
Donner les polynômes $P(x), S(x), Q(x)$ et $R(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -8 & 0 & 10 & 5 \\ -1 & & -3 & 11 & -11 & 1 \\ \hline & 3 & -11 & 11 & -1 & 6 \end{array}$$

Calcul du reste de la division par $x - a$

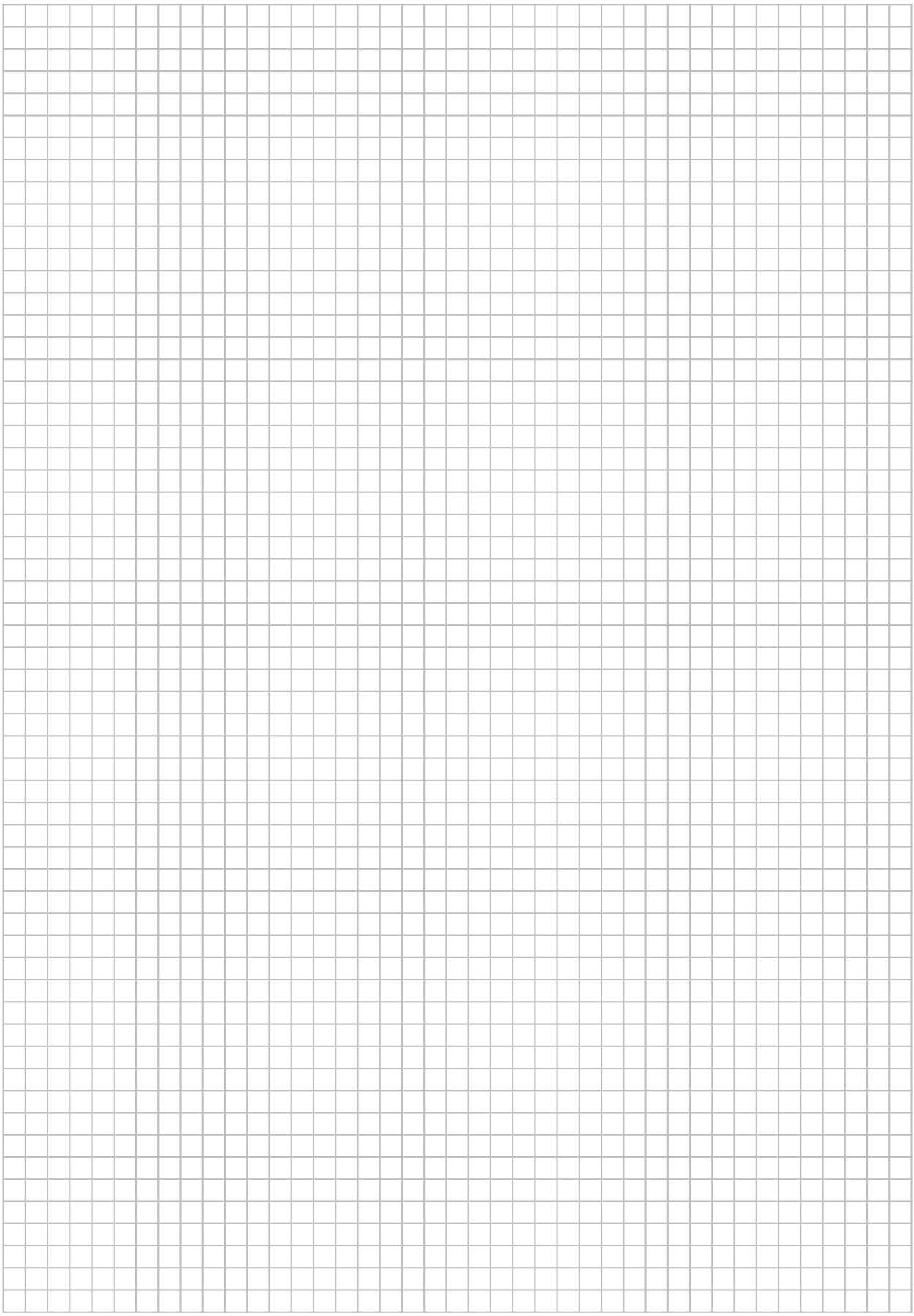
Le reste R de la division d'un polynôme $P(x)$ par $S(x) = x - a$ est un nombre réel qui est calculé comme suit

1) On cherche la valeur qui annule le diviseur : $x - a = 0 \iff x = a$
2) Le **reste** de la division est la **valeur numérique** $R = P(a)$ de P en $x = a$.

Exemple 1.16.

1) Calcul du reste de la division de $P(x) = 3x^4 - 8x^3 + 10x + 5$ par $S(x) = x - 2$.

2) Calcul du reste de la division de $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ par $S(x) = x + 1$.



1.6 Factorisation à l'aide de la division euclidienne

Une valeur $x = a$ est un **zéro** d'un polynôme $P(x)$ en x si le polynôme s'annule en $x = a$. Autrement dit : $x = a$ est un zéro de $P(x)$ si $x = a$ est solution de l'équation $P(x) = 0$.

Théorème fondamental

Soit $P(x)$ un polynôme en x.

1) Si $P(x)$ s'annule en $x = a$, alors $P(x)$ est divisible par $x - a$, autrement dit si $x = a$ est un zéro de $P(x)$, alors il existe un polynôme $Q(x)$ avec $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.
2) Si $P(x)$ est divisible par $x - a$, alors $P(x)$ s'annule en $x = a$, autrement dit si $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, alors $x = a$ est un zéro de $P(x)$.

Exemple 1.17.

Factoriser $P(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5$ sachant que $x = -5$ est un zéro de $P(x)$.

Critère de recherche d'un <u>zéro entier</u> d'un polynôme à coefficients entiers

Soit

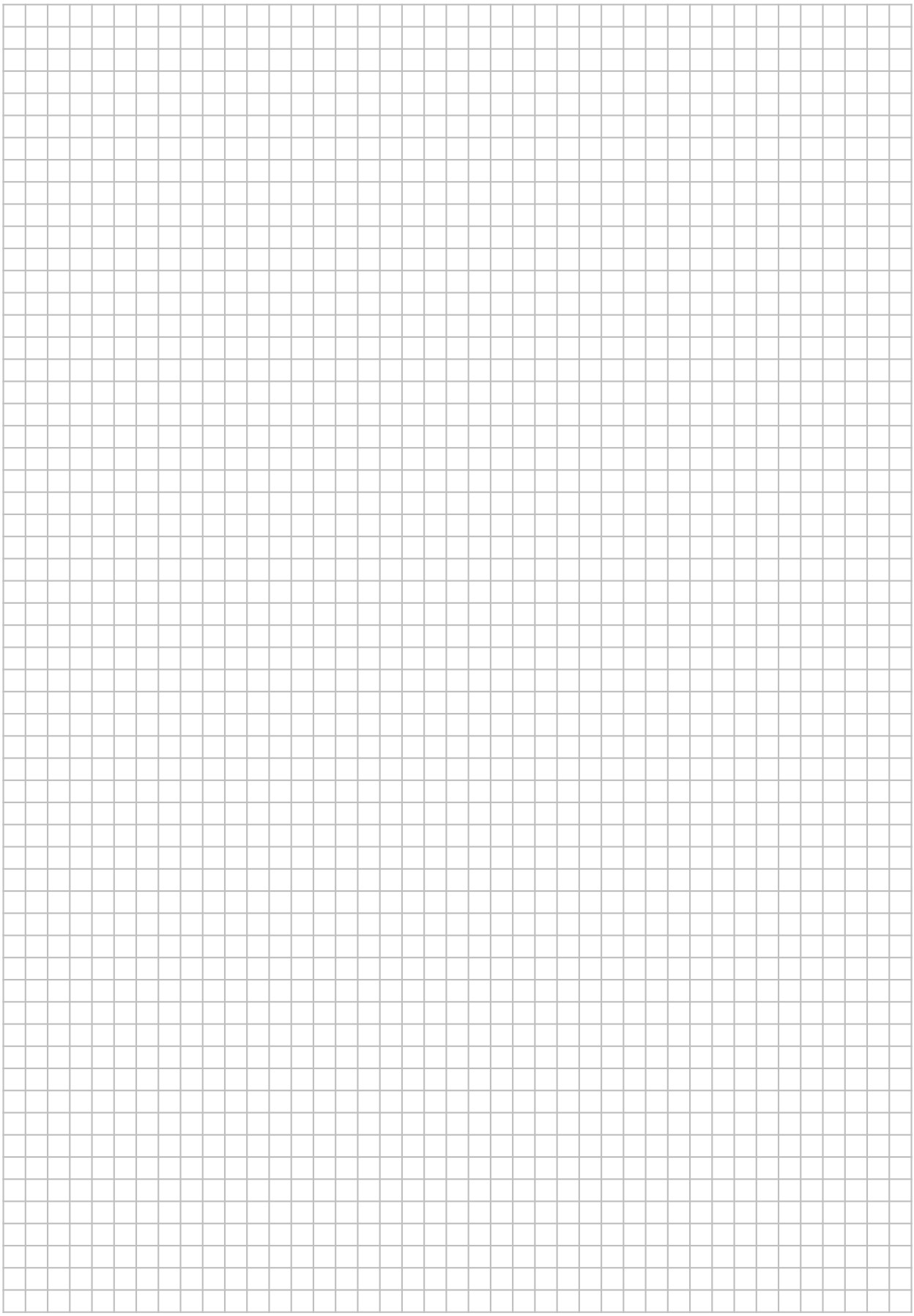
$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

un **polynôme à coefficients entiers** de terme constant a_0.

Si P possède un **zéro** $x = k$ **entier**, alors k est un **diviseur** de a_0.

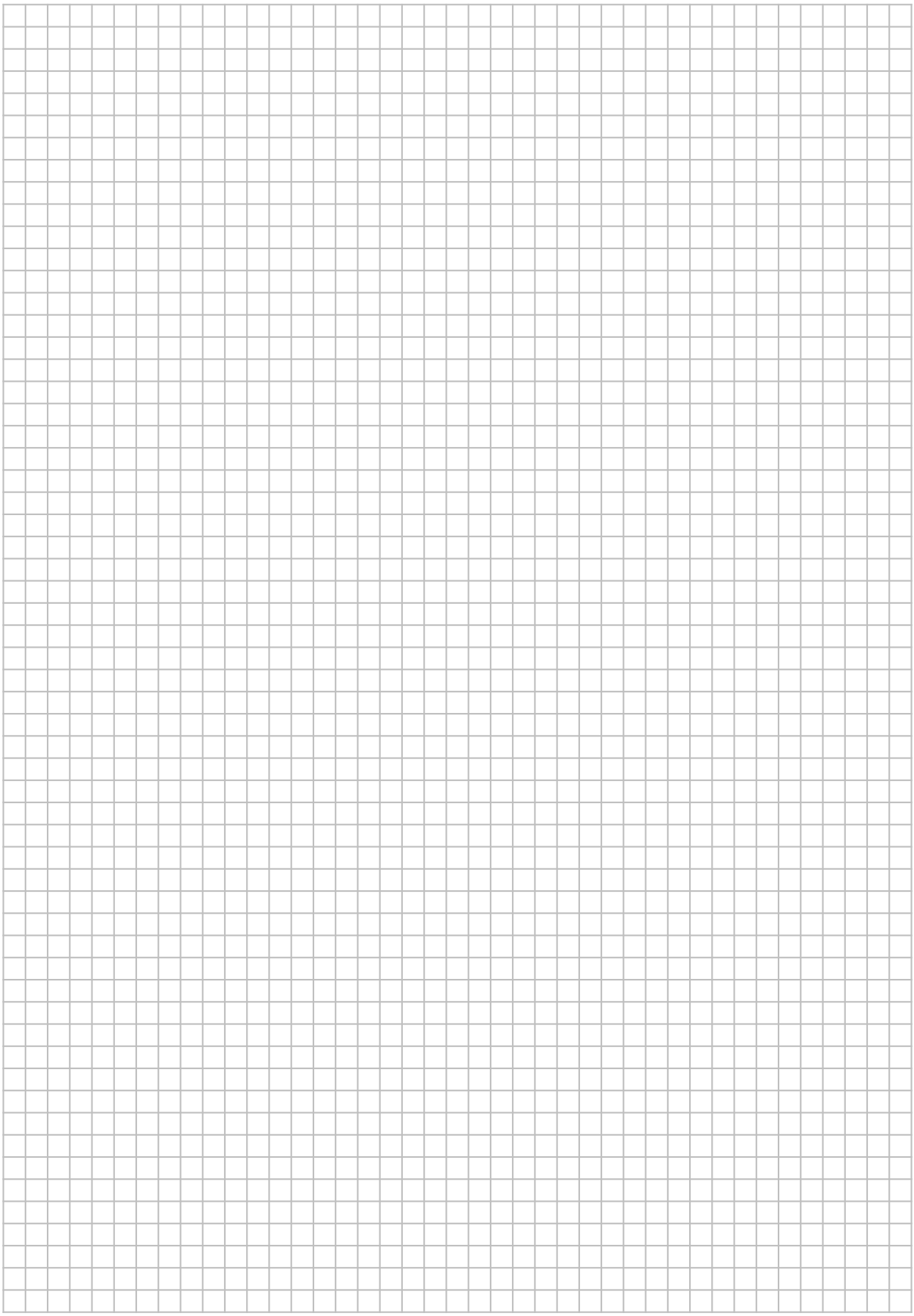
Exemple 1.18.

Trouver un zéro entier du polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ et utiliser ce résultat pour factoriser complètement $P(x)$. Vérifier ensuite que les zéros entiers sont des diviseurs de a_0.



Exemple 1.19.

Résoudre l'équation $2x^3 + 5x^2 = 23x - 10$.



1.7 Exercices

1.1

Substituer successivement les trois valeurs numériques dans l'expression proposée, puis calculer.

1)	$-x^2 - x + 3$	a)	$x = -2$	b)	$x = 3$	c)	$x = \dfrac{1}{2}$
2)	$x^3 - 2x^2 + x$	a)	$x = -1$	b)	$x = 2$	c)	$x = -\dfrac{1}{3}$
3)	$\dfrac{x^2 - x}{9 - x^2}$	a)	$x = -2$	b)	$x = 3$	c)	$x = \dfrac{2}{3}$

1.2

Effectuer et réduire :

1) $3 + (xz + y^2)$
2) $3 - (xz + y^2)$
3) $3(xz + y^2)$
4) $(2a + b - c) + (3a - b + c)$
5) $(2a + b - c) - (3a - b + c)$
6) $(2a + b - c)(3a - b + c)$
7) $(x^3 - 2x^2 - 5) + (-4x^3 - 1)$
8) $(x^3 - 2x^2 - 5) - (-4x^3 - 1)$
9) $(x^3 - 2x^2 - 5)(-4x^3 - 1)$
10) $\left(u + \dfrac{v}{4}\right) + \left(\dfrac{3u}{4} - \dfrac{5v}{6}\right)$
11) $\left(u + \dfrac{v}{4}\right) - \left(\dfrac{3u}{4} - \dfrac{5v}{6}\right)$
12) $\left(u + \dfrac{v}{4}\right)\left(\dfrac{3u}{4} - \dfrac{5v}{6}\right)$

1.3

Soient les polynômes

$a(x) = 3\,x^2 - 4\,x + 3, \quad p(x) = x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 17 \quad \text{et} \quad q(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 5\,x + 18$

1) calculer et réduire au maximum $(a(x))^2$
2) calculer $p - q$
3) déterminer le degré du polynôme $p \cdot q$
4) déterminer le coefficient du terme de degré 7 du polynôme $p \cdot q$
5) déterminer le coefficient du terme de degré 4 du polynôme $p \cdot q$

1.4

Effectuer et réduire :

1) $(a + b)^2$
2) $(a - b)^2$
3) $(a + b)(a - b)$
4) $(a + b)^3$
5) $(a - b)^3$
6) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
7) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

1.5

Effectuer et réduire :

1) $(a+8)^2$
2) $(y^4-3b)^3$
3) $(u-3)(u+3)$
4) $(2m-5n)(4m^2+10mn+25n^2)$
5) $(7-f)^2$
6) $(4+2z^2)^3$
7) $(3+y^3)(y^6-3y^3+9)$
8) $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$
9) $(t+3u^5)^3$
10) $(2x-7)^2$
11) $(b^2-c^3)(b^2c^3+b^4+c^6)$
12) $(a-3b)^3$

1.6

Réduire au maximum.

1) $(x-1)^2-(y+1)^2$
2) $(1+x)^2-(1-x)^2$
3) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2$
4) $(2x+y)^2+(2x-y)^2-2(2x+y)(2x-y)$
5) $(3x+y)(3x-y)-(3x+2y)^2-(x-3y)^2$
6) $(x+2)^2-(x+1)^2-(x+1)(x-1)-x(x+4)-4$
7) $(x+y)(x-y)+(x-y)^2-(x+y)^2+y(4x+y)$
8) $(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)-(x^2-2y^2)^2$
9) $(3x-2y)^2+(4x+y)(4x-y)-(5x-3y)^2+6y(y-3x)$
10) $(2x-y)^2(2x+y)^2-(x-2y)^2(x+2y)^2-15(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$

1.7

Réduire au maximum.

1) $-(6ab^2-7x^3)(6ab^2+7x^3)$
2) $(4x^2-7y^3)^2-(x^2-5y^2)(4x^2+y^3)$
3) $(3x-2y)^2-(4x+5y)^2-2(2x-y)(3x-5y)$
4) $(2a-3b)^3-(2a-3b)^2-(2a-3b)$

1.8

Factoriser :

1) $xy + y$
2) $ma + ap$
3) $a^3x^2 - a^2x^3$
4) $4uv - 2uw$
5) $6a^2 + 4ab$
6) $24y^3z^5 - 36yz^2$
7) $2yz^5 + 8y^2z^4 + 6y^3z^3 - 2y^4z^2$
8) $15m^7n^2 - 10m^5n^3$
9) $3a^2bc^2 - abc^3$
10) $(2a + 3b)(2x + y) + (3a + 5b)(2x + y)$
11) $3ab^4c^3 - ab^3c^2$
12) $2u^3v^2 + 8u^3v^3 - 6u^4v$
13) $(x - 3)(x + 1) + 2(x - 3)^2 - (x - 3)$
14) $(u + v)^3 - (u + v)^2$
15) $2a(a - b) - (a - b)^2$

1.9

Factoriser :

1) $a^2b^2 - m^2$
2) $x^4 - y^2$
3) $a^2 - \dfrac{1}{16}$
4) $(a + b)^2 - x^2$
5) $(ax + 2y)^2 - (2x - 3y)^2$
6) $(a - b)^2 - 1$
7) $3a^2 - 3$
8) $4x^5y^2 - 9x^3$
9) $a^4 - b^4$
10) $a^5 - a$
11) $\dfrac{u^4}{625} - \dfrac{v^4}{81}$
12) $x^5y^4 - x$
13) $a^2 + 2a + 1$
14) $1 + 2x^2 + x^4$
15) $a^4 + 9b^2 - 6a^2b$
16) $9x^4 + 16y^2 + 24x^2y$
17) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$
18) $\dfrac{xy}{3} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4}$
19) $(a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$
20) $5x^2 - 10x + 5$
21) $x^2(a + b) + 2(a + b)x + a + b$

1.10

Factoriser :

1) $x^2 + 5x + 6$
2) $x^2 + 5x + 4$
3) $u^2 - 6u + 8$
4) $x^2 - 2x - 35$
5) $9x^2 + 6x + 1$
6) $4z^2 + 5z + 1$
7) $x^2 - 2x - 80$
8) $3y^2 + 7y + 3$
9) $6x^2 + 5x + 1$
10) $x^2 - 22x + 85$
11) $x^2 + x + 1$
12) $16u^2 - 72u + 81$
13) $40x^2 + 3x - 28$
14) $a^2 + 9a - 10$
15) $2x^2 - 5x - 2$
16) $4m^2 + 25m - 21$

1.11

Factoriser si possible les polynômes suivants.

1) $x^2 + 19\,x + 18$
2) $x^2 - 4\,x + 4$
3) $2\,x^2 + 5\,x - 3$
4) $3\,x^2 - 5\,x + 2$
5) $4\,x^2 - 20\,x + 25$
6) $x^2 - 9$
7) $x^2 - \frac{4}{9}$
8) $9\,x^2 - 5\,x$
9) $8\,x^2 + 6\,x + 1$
10) $\frac{1}{3}\,x^2 - x + 4$

1.12

Factoriser :

1) $ax + bx + ay + by$
2) $a + b + ax + bx + ay + by$
3) $ax - bx - ay + by$
4) $ax - 4x + 4y - ay$
5) $ax + x - a - 1$
6) $x^3 + x - x^2 - 1$
7) $\dfrac{xy}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{yz}{3} - \dfrac{z}{6}$
8) $10xz - 10z - x^2 + x$
9) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$
10) $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$
11) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
12) $8y^4 - 8y^3 + y - 1$
13) $x^3 - 4x - x^2 + 4$
14) $2a^4 - 3 - 2a^3 + 3a$
15) $6x^2 + xy + 18xz + 3yz$

1.13

Factoriser :

1) $x^3 + 2x^2 + x$
2) $9a^3 - ab^2$
3) $1 - (x - y)^2$
4) $(x^2 - 1)^2 + 4x^2$
5) $(-3x + y)^2 - (4x - z)^2$
6) $x^3 - 9x^2 + 2x - 18$
7) $xy - 9x^3y$
8) $x^4 + 3x^3 - 8x - 24$
9) $2a^3b - a^2b^2 + b^2 - 2ab$
10) $b^3 - a^3$
11) $8a^4x^3 - 72b^2x^3 - a^4 + 9b^2$
12) $x^3 + 9x - 27 - 3x^2$
13) $z^2x^6 - 5z^2x^4 + 4z^2x^2$
14) $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6$
15) $x^3y + 7x^2y + 6xy$

1.14

Résoudre les équations suivantes.

1) $\frac{1}{4}\,x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\,x - \frac{3}{4}$
2) $3\,x + 8 = 2\,(x + 4)$
3) $2\,x + 5 = \frac{1}{2}\,(7 - 4\,x)$
4) $\frac{1}{2}\,(8 + 2\,x) = x + 4$
5) $\dfrac{t - 5}{3} = \dfrac{2 - t}{2}$
6) $3\,x - \dfrac{4 - x}{2} = x - \frac{1}{3}$

1.15

Résoudre les équations suivantes.

1) $x^2 - 3\,x + 2 = 0$
2) $x^2 - 5\,x + 4 = 0$
3) $x^2 - 4\,x + 5 = 0$
4) $x^2 + 6\,x + 9 = 0$
5) $-x^2 + 30\,x - 209 = 0$
6) $2\,x^2 - 5\,x - 2 = 0$
7) $-\frac{1}{2}\,x^2 + x + 6 = 0$
8) $2\,x^2 = x + 6$

1.16

Résoudre les équations, sans rien développer, mais en factorisant.

1) $x^2 - 9 = 0$
2) $4\,x^2 - 1 = 0$
3) $(x-2)^2 - 9\,(x-2) = 0$
4) $(x^2 - x - 6)(x+5) = 0$
5) $x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0$
6) $(x-1)(x^2+1) = 0$
7) $x^3 + x^2 = 4\,x + 4$
8) $x^2 - 9 - 4\,(x-3) = 0$
9) $(x+6)^2 - 3\,(x+6) + 2 = 0$
10) $x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0$

1.17

Résoudre les équations, sans rien développer, mais en factorisant.

1) $(x^2 - 8\,x + 12)(x+2)^3 = 0$
2) $(x-3)(x^2-4) = 0$
3) $x^3 + 2\,x^2 - 4\,x = 8$
4) $(2\,x^2 + 3\,x + 1)^2 - (2\,x^2 - 4\,x - 1)^2 = 0$
5) $x\,(x-2) + (x-3)(x-2) = 0$
6) $6\,x^2 = 3\,x^3 - 72\,x$
7) $x^3 + 3\,x^2 = 9\,x + 27$
8) $(x-1)(x-2)(x-3) = x\,(x^2-9)$

1.18

Résoudre les équations, sans rien développer, mais en factorisant.

1) $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$
2) $x^4 - 1 = 0$
3) $x^4 + 2\,x^2 + 1 = 0$
4) $x^6 - 7\,x^3 - 8 = 0$
5) $(x^2-1)^2 - 2\,(x^2-1) + 1 = 0$
6) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} - 3 = 0$
7) $(x^2 - 5\,x + 6)^2 - 2\,(x^2 - 5\,x + 6) = 0$

1.19

Résoudre les équations suivantes par factorisation.

1) $x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0$
2) $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12 = 0$
3) $4\,x^5 - 12\,x^4 + 9\,x^3 = 0$
4) $16\,x^3 - 16\,x^2 - 4\,x + 4 = 0$

1.20

Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans chacun des cas suivants et poser l'égalité fondamentale correspondante :

1) $A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 5, \quad B(x) = x^2 - 3$

2) $A(x) = 35x^3 + 47x^2 + 13x + 1, \quad B(x) = 5x + 1$

3) $A(x) = x^8 + x^4 + 1, \quad B(x) = x^2 - x + 1$

4) $A(x) = x^7 - 4x^6 + 2x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6, \quad B(x) = x^5 - 3$

5) $A(x) = x^8 - x^4 + 1, \quad B(x) = 2x^5 + 1$

6) $A(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5x, \quad B(x) = x + 2$

1.21

Effectuer la division euclidienne du polynôme $A(x)$ par le polynôme $B(x)$.

1) $A(x) = 3\,x^4 - 7\,x^3 - 18\,x^2 + 28\,x + 24, \quad B(x) = 3\,x^2 + 8\,x + 4$

2) $A(x) = 12\,x^4 + 47\,x^3 + 10\,x^2 + 12, \quad B(x) = -3\,x^2 - 8\,x + 6$

3) $A(x) = x^5 - 3\,x^2 + x + 5, \quad B(x) = -\,x^2 + x - 1$

1.22

Déterminer le polynôme tel que le quotient de sa division euclidienne par $2\,x^2 + 1$ soit $5\,x^2 - 3\,x + 1$ et le reste $1 - x$.

1.23

Déterminer le quotient et le reste de la division en utilisant le schéma de Horner.

1) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad$ par $\quad x - 1$

2) $x^5 + 1 \quad$ par $\quad x + 1$

3) $3\,x^5 - 8\,x^4 + 7\,x^3 + x^2 - 5\,x + 6 \quad$ par $\quad x + 2$

1.24

En utilisant Horner, calculer le reste de la division de $A(x)$ par le polynôme $B(x)$.

1) $A(x) = 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5 \quad$ et $\quad B(x) = x - 1$

2) $A(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2 \quad$ et $\quad B(x) = x + 2$

3) $A(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 7 \quad$ et $\quad B(x) = x + 3$

1.25

Déterminer, sans effectuer la division, le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

1) $A(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ $B(x) = x - 3$
2) $A(x) = x^4 - x + 1$ $B(x) = x + 2$
3) $A(x) = x^3 - 27$ $B(x) = x - 3$

1.26

Montrer que $x^6 - 6\,x^5 + 15\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2 - 6\,x + 1$ est divisible par $x - 1$.

1.27

Je suis un polynôme de degré 5 et possède les propriétés suivantes :

- je m'annule en 0 et en 2,
- je suis divisible par $x + 2$,
- $x - 3$ apparaît dans ma factorisation,
- le reste de ma division par $x + 3$ est égal à -630,
- mon évaluation en $x = 1$ est égale à 6.

Qui suis-je ?

1.28

Factoriser le polynôme :

1) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 35x^2 - 9x + 45$ sachant que $P(5) = 0$ et $P(-3) = 0$,
2) $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 6x$ sachant que 2 est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

1.29

Factoriser :

1) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$ 2) $x^5 + 3x^4 - 16x - 48$ 3) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

1.30

Décomposer les polynômes.

1) $x^3 + 9\,x^2 + 11\,x - 21$
2) $x^4 + 2\,x^3 - 16\,x^2 - 2\,x + 15$
3) $x^5 - x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8\,x$
4) $x^5 - 3\,x^4 - 21\,x^3 + 43\,x^2 + 96\,x - 180$

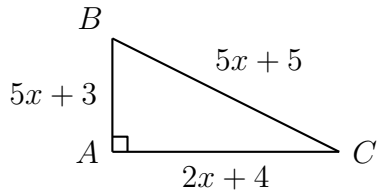
1.31

Résoudre les équations.

1) $x^4 + 2\,x^3 - 4\,x^2 - 5\,x - 6 = 0$
2) $x^4 - 7\,x^3 + 18\,x^2 - 20\,x + 8 = 0$
3) $35\,x^3 + 47\,x^2 + 13\,x + 1 = 0$
4) $x^3 + 5\,x^2 - 8\,x - 48 = 0$

1.32

On considère le triangle ABC rectangle en A dont les dimensions sont données sur la figure en fonction de x.



Quelles sont les dimensions possibles pour le triangle ABC ?

1.33

1) La longueur du côté d'un carré est x en cm. L'aire de ce carré augmente de 11 cm^2 si x augmente de 1 cm. Calculer x.
2) L'aire d'un carré augmente de 147 cm^2 si l'on double la longueur x de chacun de ses côtés. Déterminer x.

1.34

On veut construire une boîte sans couvercle à partir d'une feuille rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en découpant de chaque coin un carré d'aire x^2, et en relevant les côtés.
Montrer qu'il y a deux façons de construire une telle boîte d'un volume de 1 000 cm^3.

1.35

Un jardin rectangulaire a pour dimensions 30 m sur 20 m. Une allée de largeur uniforme fait le tour à l'intérieur.
Quelle doit être cette largeur pour que la surface de l'allée soit les $\frac{3}{8}$ de celle du rectangle entier ?

1.8 Réponses

1.1 1) a) 1 b) -9 c) $\frac{9}{4}$

2) a) -4 b) 2 c) $-\frac{16}{27}$

3) a) $\frac{6}{5}$ b) indéfini c) $-\frac{2}{77}$

1.2

1) $3 + xz + y^2$

2) $3 - xz - y^2$

3) $3xz + 3y^2$

4) $5a$

5) $-a + 2b - 2c$

6) $6a^2 - b^2 - c^2 + ab - ac + 2bc$

7) $-3x^3 - 2x^2 - 6$

8) $5x^3 - 2x^2 - 4$

9) $-4x^6 + 8x^5 + 19x^3 + 2x^2 + 5$

10) $\frac{21u - 7v}{12}$

11) $\frac{3u + 13v}{12}$

12) $\frac{36u^2 - 31uv - 10v^2}{48}$

1.3

1) $9\,x^4 - 24\,x^3 + 34\,x^2 - 24\,x + 9$
2) $x^4 + x^2 + x - 1$
3) 7
4) 2
5) 6

Remarque $p \cdot q = 2\,x^7 + x^6 - 15\,x^5 + 6\,x^4 + 92\,x^3 - 67\,x^2 - 157\,x + 306$

1.4

1) $a^2 + 2ab + b^2$
2) $a^2 - 2ab + b^2$
3) $a^2 - b^2$
4) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6) $a^3 - b^3$
7) $a^3 + b^3$

1.5

1) $a^2 + 16a + 64$
2) $y^{12} - 9y^8b + 27y^4b^2 - 27b^3$
3) $u^2 - 9$
4) $8m^3 - 125n^3$
5) $49 - 14f + f^2$
6) $64 + 96z^2 + 48z^4 + 8z^6$
7) $27 + y^9$
8) $x^4 - y^4$
9) $t^3 + 9t^2u^5 + 27tu^{10} + 27u^{15}$
10) $4x^2 - 28x + 49$
11) $b^6 - c^9$
12) $a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$

1.6

1) $x^2 - y^2 - 2\,x - 2\,y$
2) $4\,x$
3) $x\,y$
4) $4\,y^2$
5) $-x^2 - 6\,x\,y - 14\,y^2$
6) $-2\,x^2 - 2\,x$
7) x^2
8) $4\,x^2\,y^2 - 20\,y^4$
9) 0
10) 0

1.7

1) $-36\,a^2b^4 + 49\,x^6$
2) $-57\,x^2y^3 + 12\,x^4 + 49\,y^6 + 5\,y^5 + 20\,x^2y^2$
3) $-19\,x^2 - 26\,xy - 31\,y^2$
4) $8\,a^3 - 36\,a^2b + 54\,ab^2 - 4\,a^2 - 27\,b^3 + 12\,ab - 9\,b^2 - 2\,a + 3\,b$

1.8

1) $y(x+1)$
2) $a(m+p)$
3) $a^2x^2(a-x)$
4) $2u(2v-w)$
5) $2a(3a+2b)$
6) $12yz^2(2y^2z^3-3)$
7) $2yz^2(z^3+4yz^2+3y^2z-y^3)$
8) $5m^5n^2(3m^2-2n)$
9) $abc^2(3a-c)$
10) $(2x+y)(5a+8b)$
11) $ab^3c^2(3bc-1)$
12) $2u^3v(v+4v^2-3u)$
13) $3(x-3)(x-2)$
14) $(u+v)^2(u+v-1)$
15) $(a-b)(a+b)$

1.9

1) $(ab-m)(ab+m)$
2) $(x^2-y)(x^2+y)$
3) $\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$
4) $(a+b+x)(a+b-x)$
5) $(ax+2x-y)(ax-2x+5y)$
6) $(a-b+1)(a-b-1)$
7) $3(a+1)(a-1)$
8) $x^3(2xy+3)(2xy-3)$
9) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
10) $a(a^2+1)(a+1)(a-1)$
11) $\left(\frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{9}\right)\left(\frac{u}{5}+\frac{v}{3}\right)\left(\frac{u}{5}-\frac{v}{3}\right)$
12) $x(x^2y^2+1)(xy+1)(xy-1)$
13) $(a+1)^2$
14) $(1+x^2)^2$
15) $(a^2-3b)^2$
16) $(3x^2+4y)^2$
17) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
18) $(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})^2$
19) $(a+b-c)^2$
20) $5(x-1)^2$
21) $(a+b)(x+1)^2$

1.10

1) $(x+2)(x+3)$
2) $(x+1)(x+4)$
3) $(u-2)(u-4)$
4) $(x-7)(x+5)$
5) $(3x+1)^2$
6) $(4z+1)(z+1)$
7) $(x-10)(x+8)$
8) $3\left(y+\dfrac{7+\sqrt{13}}{6}\right)\left(y+\dfrac{7-\sqrt{13}}{6}\right)$
9) $(2x+1)(3x+1)$
10) $(x-17)(x-5)$
11) x^2+x+1
12) $(4u-9)^2$
13) $(5x-4)(8x+7)$
14) $(a+10)(a-1)$
15) $2\left(x-\dfrac{5+\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{41}}{4}\right)$
16) $(4m-3)(m+7)$

1.11

1) $(x+18)\cdot(x+1)$
2) $(x-2)^2$
3) $(x+3)\cdot(2x-1)$
4) $(3x-2)\cdot(x-1)$
5) $(2x-5)^2$
6) $(x-3)\cdot(x+3)$
7) $(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})\cdot$
8) $x\cdot(9x-5)$
9) $(2x+1)\cdot(4x+1)$
10) $\frac{1}{3}x^2-x+4$

1.12

1) $(x+y)(a+b)$
2) $(a+b)(1+x+y)$
3) $(a-b)(x-y)$
4) $(a-4)(x-y)$
5) $(a+1)(x-1)$
6) $(x^2+1)(x-1)$
7) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{3}\right)\left(y-\dfrac{1}{2}\right)$
8) $(10z-x)(x-1)$
9) $(a-b+1)(a-b-1)$
10) $(2x-3y)(2x+3y+1)$
11) $(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$
12) $(2y+1)(4y^2-2y+1)(y-1)$
13) $(x-2)(x+2)(x-1)$
14) $(2a^3+3)(a-1)$
15) $(6x+y)(x+3z)$

1.13

1) $x(x+1)^2$
2) $a(3a+b)(3a-b)$
3) $(1+x-y)(1-x+y)$
4) $(x^2+1)^2$
5) $(x+y-z)(-7x+y+z)$
6) $(x-9)(x^2+2)$
7) $xy(1-3x)(1+3x)$
8) $(x+3)(x-2)(x^2+2x+4)$
9) $b(2a-b)(a+1)(a-1)$
10) $(b-a)(b^2+ab+a^2)$
11) $(a^2+3b)(a^2-3b)(2x-1)(4x^2+2x+1)$
12) $(x-3)(x^2+9)$
13) $z^2x^2(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
14) $(x-1)(x+1)(3x+2)(2x+3)$
15) $xy(x+1)(x+6)$

1.14

1) $x = -23$
2) $x = 0$
3) $x = \frac{-3}{8}$
4) tout x est solution
5) $t = \frac{16}{5}$
6) $x = \frac{2}{3}$

1.15

1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
2) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$
3) Pas de solution
4) $x = -3$
5) $x_1 = 11$, $x_2 = 19$
6) $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$
7) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$
8) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 2$

1.16

1) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$
2) $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$
3) $\mathcal{S} = \{2; 11\}$
4) $\mathcal{S} = \{-5; -2; 3\}$
5) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 1; 2\}$
6) $\mathcal{S} = \{1\}$
7) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 2\}$
8) $\mathcal{S} = \{1; 3\}$
9) $\mathcal{S} = \{-5; -4\}$
10) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 1\}$

1.17

1) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 6\}$
2) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 3\}$
3) $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$
4) $\mathcal{S} = \{-\frac{2}{7}; 0; \frac{1}{4}\}$
5) $\mathcal{S} = \{\frac{3}{2}; 2\}$
6) $\mathcal{S} = \{-4; 0; 6\}$
7) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$
8) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{3}; 3\}$

1.18

1) $x_1 = -3$, $x_{2,3} = \pm 2$, $x_4 = 3$
2) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$
3) Pas de solution
4) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$
5) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$
6) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$
7) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$

1.19

1) $S = \{-2; -1; 1\}$
2) $S = \{-2; 2; 3\}$
3) $S = \{0; \frac{3}{2}\}$
4) $S = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\}$

1.20

1) $Q(x) = x^2 - 3x + 3$, $R(x) = -8x + 4$
2) $Q(x) = 7x^2 + 8x + 1$, $R(x) = 0$
3) $Q(x) = x^6 + x^5 - x^3 + x + 1$, $R(x) = 0$
4) $Q(x) = x^2 - 4x + 2$, $R(x) = x^4 - 10x$
5) $Q(x) = \frac{1}{2}x^3$, $R(x) = -x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 1$
6) $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5$, $R(x) = -10$

1.21

1) $a(x) = b(x) \cdot (x^2 - 5\,x + 6)$
2) $a(x) = b(x) \cdot (-4\,x^2 - 5\,x + 2) + (46\,x)$
3) $a(x) = b(x) \cdot (-\,x^3 - \,x^2 + 4) + (-3\,x + 9)$

1.22

Le polynôme est $10\,x^4 - 6\,x^3 + 7\,x^2 - 4\,x + 2$.

1.23

1) quotient : $x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 4$ reste : 5
2) quotient : $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ reste : 0
3) quotient : $3\,x^4 - 14\,x^3 + 35\,x^2 - 69\,x + 133$ reste : -260

1.24

1) $R = A(1) = 0$
2) $R = A(-2) = 132$
3) $R = A(-3) = -169$

1.25

59 ; 19 ; 0.

1.26

En effectuant la division et en trouvant 0 comme reste,
ou si $f(x) = x^6 - 6\,x^5 + 15\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2 - 6\,x + 1$, alors $f(1) = 0$.

1.27

Je suis $x(x-2)(x+2)(x-3)(2x-1)$.

1.28

1) $P(x) = (x-5)(x+3)(x-1)(2x+3)$
2) $P(x) = x(x-2)(x-3)(2x+1)$

1.29

1) $x(x+1)(x-2)(x+3)$
2) $(x-2)(x+2)(x+3)(x^2+4)$
3) $(x-2)(x+2)(2x-1)(3x-1)$

1.30

1) $(x-1)\,(x+3)\,(x+7)$
2) $(x-3)\,(x-1)\,(x+1)\,(x+5)$
3) $x(x-2)^2\,(x+2)\,(x+1)$
4) $(x-2)^2\,(x-5)\,(x+3)^2$

1.31

1) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)=0 \quad S=\{-3\,;\,2\}$
2) $(x-1)\,(x-2)^3=0 \quad S=\{1\,;\,2\}$
3) $(x+1)\,(5\,x+1)\,(7\,x+1)=0 \quad S=\{-1\,;\,-\frac{1}{5}\,;\,-\frac{1}{7}\}$
4) $(x-3)\,(x+4)^2=0 \quad S=\{-4\,;\,3\}$

1.32

On trouve $x=0$ et $x=1$. Les triangles ont pour dimensions 3, 4, 5 et 6, 8, 10.

1.33

1) $x=5$
2) $x=7$

1.34

En choisissant $x=5$ ou $x=5\,(2-\sqrt{2})$

1.35

La largeur de l'allée est de 2.5 m.