Les équations différentielles (ch.3 et 4)

Exercice 1. (3+4=7 pts)

a) $\bullet\ (1+x)y' = 2y \quad , \quad y(0) = 3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{y}\, dy = \dfrac{2}{1+x}\, dx$

$\Rightarrow \ln|y| = 2 \cdot \ln|1+x| + k\ , k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln(1+x)^2 + k\ , k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(x) = a(1+x)^2\ , a \in \mathbb{R}$

$\bullet\ y(0) = 3 \Rightarrow a = 3$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = 3(1+x)^2}$

b) $(E)\ y' + \dfrac{1}{t} \cdot y = t^3$

$\bullet\ (E_h)\ y' + \dfrac{1}{t} \cdot y = 0$

$\Rightarrow y' = -\dfrac{1}{t} \cdot y$

$\Rightarrow \dfrac{1}{y}\, dy = -\dfrac{1}{t}\, dt$

$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|t| + k\ , k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y_h(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-\ln(t)} = a \cdot t^{-1}\ , a \in \mathbb{R}$

$\bullet$ méthode de la variation de la constante

$y_p(t) = c(t) \cdot t^{-1}$

$\Rightarrow y_p'(t) = c'(t) \cdot t^{-1} + c(t) \cdot (-1) \cdot t^{-2}$

$\Rightarrow c'(t) \cdot t^{-1} = t^3$

$\Rightarrow c'(t) = t^4 \Rightarrow c(t) = \dfrac{t^5}{5} + a\ , a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = \dfrac{t^4}{5} + \dfrac{a}{t}\ , a \in \mathbb{R}}$

Exercice 2. (6 pts)

• $p' = k \cdot (p - 10'000)\ ;\ p(0) = 12'000\ ,\ p(30) = 13'000$

$\Rightarrow \dfrac{1}{p - 10'000}\, dp = k\ dt\ , k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln|p - 10'000| = k \cdot t + c\ , c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |p - 10'000| = \mathrm{e}^{k \cdot t} \cdot \mathrm{e}^{c}\ , c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow p - 10'000 = a \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t}\ , a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow p(t) = a \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t} + 10'000\ , a \in \mathbb{R}$

ou méthode de la variation de la constante

ou méthode des coefficients indéterminés avec $p_p(t) = \alpha$

• $p(0) = a + 10'000 = 12'000 \Rightarrow a = 2'000$

• $p(30) = 2'000 \cdot \mathrm{e}^{30 \cdot k} + 10'000 = 13'000 \Rightarrow k = \dfrac{\ln(3/2)}{30}$

$\Rightarrow \boxed{p(t) = 2'000 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{t}{30}} + 10'000}$

Exercice 3. (2+2+3=7 pts)

a) $k = -9 : \ y'' - 9y = 0$

$y_h(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{3x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}$

- $y'(x) = c_1 \cdot 3 \cdot \mathrm{e}^{3x} + c_2 \cdot (-3) \cdot \mathrm{e}^{-3x}$

- $y''(x) = c_1 \cdot 9 \cdot \mathrm{e}^{3x} + c_2 \cdot 9 \cdot \mathrm{e}^{-3x}$

$\Rightarrow y'' - 9y = 9c_1 \cdot \mathrm{e}^{3x} + 9c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x} - 9(c_1 \cdot \mathrm{e}^{3x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}) = 0$

$\Rightarrow$ y_h est la solution générale de $y'' - 9y = 0$.

b) $k = -25 : \ y'' - 25y = 0$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 0 \cdot r - 25 = 0 \Rightarrow (r+5)(r-5) = 0$

$\Rightarrow r_1 = 5 \ , r_2 = -5$

$\Rightarrow \boxed{y_h(x) = c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-5x}}$

c) $k = 4 : \ y'' + 4y = 0$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 0 \cdot r + 4 = 0 \Rightarrow (r+2i)(r-2i) = 0$

$\Rightarrow r_1 = 2 \cdot i \ , r_2 = -2 \cdot i \ ; \ p = 0 \ , q = \pm 2$

$\Rightarrow y_h(x) = \mathrm{e}^{0 \cdot x}[c_1 \cdot \cos(2 \cdot x) + c_2 \cdot \sin(2 \cdot x)]$

$\Rightarrow \boxed{y_h(x) = c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x)}$
