Géométrie vectorielle et analytique

Monographies de la Commission Romande de Mathématique 29
Société Suisse des Professeurs de Mathématiques et Physique

Géométrie vectorielle et analytique

EDITIONS G d'Encre EDUCATION

Ouvrages disponibles publiés par la Commission Romande de Mathématique

Ouvrages collectifs de la CRM

N° 18 Géométrie 2
N° 21 Méthodes numériques (M.-Y. Bachmann, H. Cattin, P. Épiney, F. Haeberli et G. Jenny)
N° 23 Géométrie vectorielle et analytique plane
N° 24 Géométrie vectorielle et analytique de l'espace
N° 25 Analyse
N° 26 Probabilités
N° 27 Notions élémentaires
N° 28 Algèbre linéaire
N° 29 Géométrie vectorielle et analytique

Cahiers de la CRM

N° 1	Suites de nombres réels	Alex Willa
N° 2	Cryptologie	Nicolas Martignoni
N° 3	Équations algébriques et nombres complexes	Martin Cuénod
N° 4	Séries numériques et séries de Taylor	Alex Willa
N° 5	Arrêt sur image avec *Mathematica*	Daniel Poncet-Montange
N° 6	Introduction à la théorie des graphes	Didier Müller

CRM, CRP et CRC

Formulaires et tables (Mathématique, Physique, Chimie)

CMSI, CRM, CRP et CRC

Formulari e tavole (Matematica, Fisica, Chimica)

Site web de la CRM

www.sspmp.ch/crm/

Diffusion : CRM Diffusion
http://www.crm-diffusion.ch/

© 2016 Éditions G d'Encre
Collection : éducation
www.editions-gdencre.ch
ISBN 978-2-940501-60-1

FSC MIXTE Papier FSC® C003211

Auteurs

Le présent ouvrage est le fruit d'un travail collectif de la Commission Romande de Mathématique (CRM), qui est actuellement composée de Mesdames et Messieurs

Tatiana Mantuano (Gymnase français, Bienne), présidente de la CRM
Christophe Bolle (Lycée Blaise-Cendrars, La Chaux-de-Fonds)
Richard Catenazzi (Collège Voltaire, Genève)
Damien Dobler (Lycée Cantonal, Porrentruy)
Yves Dubey (Collège Saint-Michel, Fribourg)
* Louis Genoud (Collège de Staël, Genève)
* Alexandre Junod (Lycée Denis-de-Rougemont, Neuchâtel)
* Nicolas Quinodoz (Collège des Creusets, Sion)
Yves Roisin (Collège Saint-Michel, Fribourg)
* Lucile Torrent (Collège de l'Abbaye, Saint-Maurice)
* Jean-Daniel Voelke (Gymnase Auguste Piccard, Lausanne)
José Luis Zuleta (Gymnase de Chamblandes, Pully)

Ont également collaboré à l'élaboration de cet ouvrage, les anciens membres de la CRM

* Patrick Hochuli (Gymnase français, Bienne)
Jean-Marc Ledermann (Lycée Denis-de-Rougemont, Neuchâtel)
Patrick Turtschy (Lycée Blaise-Cendrars, La Chaux-de-Fonds)

Les rédacteurs du texte sont désignés par un astérisque.

Préface

L'idée de la série des monographies éditées par la Commission Romande de Mathématique (CRM) a vu le jour en 1973. Visant à proposer des moyens d'enseignement conformes aux exigences de la maturité, ces ouvrages sont régulièrement réexaminés et remaniés.

En 1991 sortait de presse la première édition de *Géométrie vectorielle et analytique plane* et en 1992 la première édition de *Géométrie vectorielle et analytique de l'espace* (CRM N°23 et N°24). Ces deux ouvrages succédaient au premier fundamentum de géométrie de la CRM *Géométrie 1* paru dans les années 80 et étaient présentés comme une alternative à celui-ci.

Dans le courant de l'année 2011, un groupe de travail fut formé afin d'entreprendre la rédaction d'un nouvel ouvrage de géométrie réunissant la géométrie plane et la géométrie de l'espace dans un seul volume. Relever un tel défi a impliqué des choix, autant dans la matière traitée que dans la façon de présenter les concepts. L'ampleur de ce volume témoigne de la richesse de la matière tant au niveau de l'exposé général que des exercices proposés ; il aurait été difficile de tenir un exposé complet et détaillé en un volume plus restreint.

Ce nouvel ouvrage est le fruit d'une collaboration. Il a donc donné lieu à de multiples échanges de vue, souvent contradictoires, et a nécessité rapprochements et compréhension mutuelle. Il m'est agréable de remercier tous les collègues de la CRM qui, par les remarques, critiques et suggestions qu'ils ont formulées lors de nos nombreuses séances de lecture, ont contribué à l'élaboration de cet ouvrage.

Tatiana Mantuano
Janvier 2016

Avant-propos

Ce livre constitue une refonte des deux monographies *Géométrie vectorielle et analytique plane* et *Géométrie vectorielle et analytique de l'espace* (CRM N°23 et N°24). Il se distingue de ses prédécesseurs sur plusieurs points. La matière a tout d'abord été regroupée en un seul volume. Il est en effet apparu aux auteurs que les notions vectorielles fondamentales pouvaient être traitées simultanément dans le plan et dans l'espace et qu'il était ainsi possible d'éviter des répétitions. Ces notions font l'objet des deux premiers chapitres. Les deux chapitres suivants sont consacrés à la géométrie analytique du plan alors que les trois derniers traitent de la géométrie analytique de l'espace. Une notice historique et une annexe présentant quelques éléments de représentation des figures de l'espace complètent l'exposé. Chaque chapitre est accompagné de nombreux exercices. Plusieurs problèmes de type examen de maturité sont également proposés à la fin du livre. Ils doivent permettre à l'élève d'effectuer une synthèse des connaissances acquises et de mesurer le niveau atteint.

Conformément à la méthodologie adoptée dans les derniers ouvrages publiés par la CRM, les auteurs ont souhaité introduire autant que possible les différentes notions par des exemples. Avant de définir de nouveaux concepts, il faut en effet que le lecteur en perçoive la raison et l'utilité. Les auteurs ont essayé d'être aussi précis et rigoureux que possible dans un manuel destiné à des élèves de niveau gymnasial. Ils n'ont pas hésité à fournir des explications détaillées destinées à faciliter une lecture autonome. Le texte principal est accompagné d'un certain nombre de compléments indépendants dont l'étude peut être, dans un premier temps, laissée de côté. Notons enfin que plusieurs des concepts introduits dans ce livre sont repris et généralisés dans la monographie *Algèbre linéaire* (CRM N°28).

Les auteurs espèrent que ce nouvel ouvrage répondra aux attentes du lecteur. Ils se plaisent à relever le caractère toujours constructif des nombreux échanges qui ont eu lieu quant à la manière de présenter et de structurer la matière. Ils remercient toutes les personnes, en particulier les membres de la CRM, qui, par leurs remarques et suggestions, ont contribué à l'amélioration du manuscrit.

Commission Romande de Mathématique
Janvier 2016

Table des matières

Notice historique

Les origines de la géométrie analytique

La géométrie analytique a été inventée vers 1635 par deux mathématiciens français : René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (1601-1665). Ces deux mathématiciens ont introduit une nouvelle technique consistant à repérer un point du plan par deux coordonnées. Une courbe est alors représentée par une équation à deux variables et ses propriétés peuvent être étudiées à partir de cette équation. Réciproquement, toute équation à deux variables définit une courbe plane.

La géométrie analytique de Descartes et Fermat a peu de points communs avec celle qui est enseignée aujourd'hui au niveau gymnasial. Le langage est très différent. Il n'y a en particulier qu'un axe de coordonnées sur lequel une origine est fixée et seules des coordonnées positives sont envisagées. Les figures pour lesquelles Descartes donne une équation sont par ailleurs des coniques (courbes du deuxième degré) ou des courbes algébriques d'un degré supérieur et l'on ne trouve chez lui qu'une brève allusion au fait qu'une équation du premier degré représente une droite.

Au cours du 17ᵉ et du 18ᵉ siècle la géométrie analytique va se développer dans le plan puis dans l'espace. Cet essor est à mettre en relation avec celui du calcul différentiel. L'utilisation de coordonnées négatives apparaît peu à peu et est relativement bien établie au milieu du 18ᵉ siècle. On l'observe en particulier dans le second tome de l'*Introduction à l'analyse infinitésimale* [1748] de Leonhard Euler (1707-1783), ouvrage offrant une synthèse des connaissances de l'époque en géométrie analytique. Les figures étudiées par les géomètres restent cependant en premier lieu des courbes ou des surfaces non planes et ce n'est qu'incidemment que l'on rencontre la droite, le cercle, le plan ou la sphère dont l'étude reste confinée au domaine de la géométrie classique. Cette situation va changer à la fin du 18ᵉ siècle grâce au mathématicien français Gaspard Monge (1746-1818). Il est aujourd'hui avant tout connu comme le créateur de la géométrie descriptive, technique consistant à représenter une figure de l'espace par ses projections sur deux plans orthogonaux. Monge a cependant aussi joué un rôle important dans l'histoire de la géométrie analytique. Il a exercé une activité pédagogique intense à l'époque de la Révolution française en participant à la création de l'École polytechnique. C'est dans ce cadre qu'il donne en 1795 un cours d'application de l'analyse à la géométrie (ancien nom pour la géométrie analytique). Les premières pages constituent le premier exposé moderne de géométrie analytique de l'espace. Monge commence par établir les équations de la droite et l'équation du plan. Il résout ensuite plusieurs problèmes qui constituent la base de l'enseignement gymnasial actuel : recherche du critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan, calcul de la distance d'un point à un plan et d'un point à une droite, calcul de l'angle de deux plans et de deux droites, calcul de la distance de deux droites gauches.

Le cours de Monge se limite à l'espace. Il appartiendra à l'un de ses élèves, Sylvestre Lacroix (1765-1843), d'effectuer le même travail pour le plan. Dans un manuel publié pour la première fois en 1798, Lacroix commence ainsi par établir l'équation de la droite puis résout les problèmes élémentaires suivants : intersection de deux droites, équation de la perpendiculaire à une droite par un point donné, calcul de la distance d'un point à une droite et de l'angle de deux droites. Lacroix donne aussi l'équation du cercle et montre comment trouver les équations des tangentes à un cercle issues d'un point extérieur à celui-ci. Stimulés par l'enseignement de Monge et Lacroix, plusieurs mathématiciens vont publier entre 1800 et 1810 des manuels de géométrie analytique. Ces manuels présentent des résultats nouveaux : équations des bissectrices d'un angle, des hauteurs ou des médianes d'un triangle. Ils proposent aussi des problèmes permettant d'appliquer les techniques de base et sont, par leur contenu, proches des nôtres. La principale différence a trait au langage. Nous utilisons en effet aujourd'hui le langage vectoriel. Le calcul vectoriel n'a cependant été inventé que deux siècles après la géométrie analytique.

Les origines du calcul vectoriel

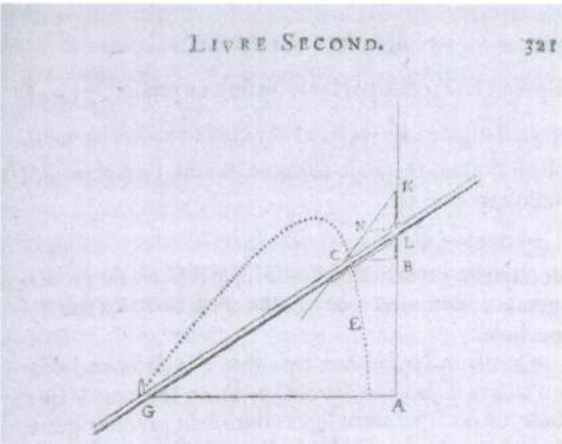
L'idée de grandeur vectorielle apparaît d'abord en mécanique. La loi de composition des vitesses ou des forces à l'aide du parallélogramme, connue dès le 16e siècle, offre un premier exemple d'addition vectorielle. Cette idée apparaît aussi dans la représentation géométrique des nombres complexes trouvée de manière indépendante par plusieurs mathématiciens au début du 19e siècle. Rappelons qu'un nombre complexe s'écrit sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont des nombres réels et i un symbole obéissant à la règle de calcul $i^2 = -1$. Un tel nombre peut être représenté par un segment orienté reliant l'origine O d'un système d'axes au point $P(a; b)$. L'addition des nombres complexes peut alors être interprétée comme une addition des lignes analogue à l'addition vectorielle. La multiplication de ces nombres peut aussi être interprétée géométriquement en termes de rotation et d'homothétie. La notion de vecteur et les opérations fondamentales que sont le produit scalaire et le produit vectoriel n'apparaissent cependant qu'au début de la décennie 1840-1850 chez William Rowan Hamilton (1805-1865) et Hermann Grassmann (1809-1877). Les travaux de Grassmann ont un caractère en partie philosophique et n'ont été compris que tardivement. À la différence de ceux de Hamilton, ils n'ont eu qu'une influence limitée sur le développement du calcul vectoriel, raison pour laquelle il n'en sera pas question dans ce qui suit.

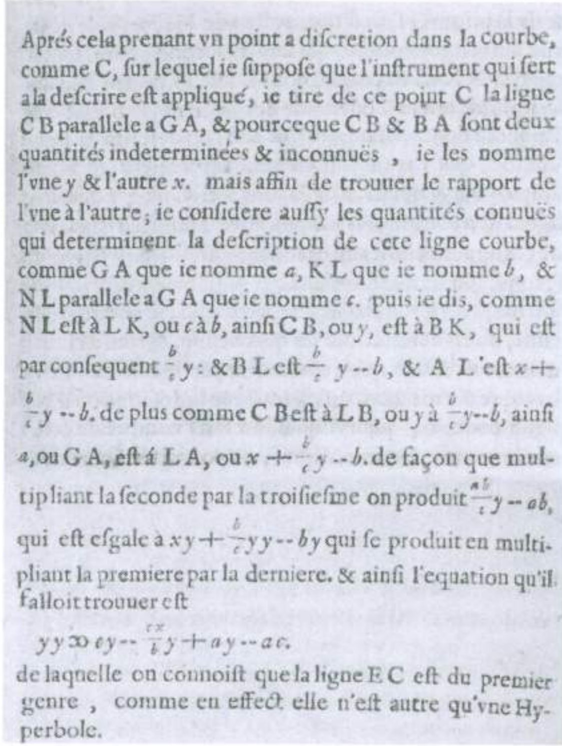
Hamilton est l'inventeur d'un système de nombres appelés «quaternions». C'est en cherchant à généraliser à l'espace le système des nombres complexes qu'il inventa ce nouveau système en 1843. Un quaternion est une expression de la forme $w+ix+jy+kz$ où w, x, y et z sont des nombres réels et i, j et k des symboles obéissant aux règles de calcul $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$, $ii = jj = kk = -1$. Le produit des quaternions est associatif mais n'est en revanche pas commutatif. Comme Hamilton le remarque, la partie imaginaire $ix + jy + kz$ d'un quaternion peut être représentée dans l'espace par une ligne orientée reliant l'origine O d'un système d'axes orthonormés au point $P(x; y; z)$. Il appelle cette ligne un *vecteur*. Un quaternion $w + ix + jy + kz$ est donc composé d'une partie réelle w, appelée *scalaire*, et d'une partie vectorielle $ix + jy + kz$. Hamilton écrit un quaternion $Q = Scal.Q + Vect.Q = S.Q + V.Q$. Soient $a = xi + yj + zk$ et $a' = x'i + y'j + z'k$ deux quaternions imaginaires, c'est-à-dire deux vecteurs. Si l'on effectue le produit de ces deux quaternions en tenant compte des règles de calcul indiquées ci-dessus, on trouve $aa' = -(xx'+yy'+zz')+i(yz'-zy')+j(zx'-xz')+k(xy'-yx')$. On a donc $S.aa' = -(xx'+yy'+zz')$ et $V.aa' = i(yz'-zy')+j(zx'-xz')+k(xy'-yx')$. On reconnaît ici le produit scalaire (au signe près) et le produit vectoriel des deux vecteurs. Hamilton remarque que la partie scalaire est égale au produit des normes des deux vecteurs multiplié par le cosinus du supplémentaire de l'angle des deux vecteurs. Il note aussi que la partie vectorielle est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs et dont le sens est donné par la règle du tire-bouchon ; sa norme est par ailleurs égale à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs. On constate donc que si l'on se restreint à des quaternions imaginaires, le calcul des quaternions de Hamilton est identique au calcul vectoriel moderne.

C'est précisément en restreignant le calcul des quaternions à des vecteurs que deux physiciens intéressés par l'électromagnétisme, Josiah Willard Gibbs (1839-1903) et Oliver Heaviside (1850-1925), donneront vers 1880 les premières présentations modernes du calcul vectoriel. Celui-ci se révèle être un puissant outil en physique. Les années 1895-1910 sont marquées par la parution d'une série de traités d'analyse vectorielle rédigés principalement par des physiciens. Si le calcul vectoriel apparaît d'abord comme un outil pour la physique, il offre aussi des applications géométriques et, dès 1920, on rencontre des traités de géométrie analytique utilisant le langage vectoriel. Ceux-ci sont cependant de niveau universitaire. L'introduction de ce langage dans l'enseignement de la géométrie analytique au niveau gymnasial n'aura lieu que tardivement, au début des années 1950. L'un des premiers exemples est le manuel *Analytische Geometrie* publié par la *Société suisse des maîtres de mathématiques* en 1952. La préface montre que le langage vectoriel est à cette époque une chose nouvelle pour certains enseignants, raison pour laquelle les auteurs proposent simultanément l'approche analytique traditionnelle et l'approche vectorielle. Cette dernière va par la suite s'imposer, stimulée par le développement de l'algèbre linéaire et son introduction dans l'enseignement.

Un texte original de Descartes

La *Géométrie* de Descartes est considérée comme le texte fondateur de la géométrie analytique. Ce mémoire fut publié en 1637 en annexe au *Discours de la méthode*. Il est divisé en trois parties et l'extrait reproduit ci-dessous se situe au début de la deuxième partie.





Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou c à b, ainſi C B, ou y, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou G A, eſt á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que multipliant la ſeconde par la troiſieſme on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui eſt eſgale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui ſe produit en multipliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

Publié avec l'aimable autorisation de la Bibliothèque Nationale de France.

Descartes montre ici comment trouver l'équation d'une courbe décrite par un moyen mécanique. Cette équation permettra ensuite de déterminer la nature de celle-ci. Descartes a expliqué précédemment comment la courbe représentée sur la figure est engendrée. Les points G et A sont fixes. Le triangle rectangle KLN se déplace de telle manière que le côté KL glisse sur la perpendiculaire à la droite GA par le point A. La droite GL tourne alors autour du point G et le point d'intersection variable C des droites GL et KN décrit une courbe dont il faut trouver l'équation. Descartes introduit d'abord un certain nombre de notations. Le point C est repéré par les segments $CB = y$ et $BA = x$ où CB est parallèle à GA. Les segments $GA = a$, $KL = b$ et $NL = c$ sont donnés. Ces notations introduites, Descartes peut commencer son raisonnement. Comme les triangles KLN et KBC sont semblables, on a $\frac{NL}{LK} = \frac{CB}{BK}$, c'est-à-dire $\frac{c}{b} = \frac{y}{BK}$, d'où $BK = \frac{b}{c}y$. On en déduit $BL = \frac{b}{c}y - b$ et $AL = x + \frac{b}{c}y - b$. Comme les triangles CBL et GAL sont semblables, on a $\dfrac{CB}{BL} = \dfrac{GA}{AL}$, c'est-à-dire $\dfrac{y}{\frac{b}{c}y - b} = \dfrac{a}{x + \frac{b}{c}y - b}$. On en déduit $a\left(\dfrac{b}{c}y - b\right) = y\left(x + \dfrac{b}{c}y - b\right)$ et, en réduisant et en multipliant de chaque côté par $\dfrac{c}{b}$, $y^2 = cy - \dfrac{c}{b}xy + ay - ac$. C'est l'équation de la courbe.

Descartes affirme sans démonstration qu'il s'agit d'une hyperbole. La méthode permettant de déterminer la nature d'une courbe dont l'équation est du deuxième degré est exposée plus loin, dans le cadre de la résolution d'un autre problème.

Le raisonnement est fondé uniquement sur la considération de triangles semblables et sur des calculs de proportions. Les coordonnées du point C ne sont pas obtenues, comme nous le ferions aujourd'hui, en cherchant le point d'intersection des droites GL et KN. Le symbolisme de Descartes est pratiquement le même que le nôtre ; seuls les signes d'égalité et de soustraction sont différents. On notera aussi l'écriture yy au lieu de y^2. Les égalités de rapports ne sont en revanche pas exprimées de manière symbolique mais de manière rhétorique, comme dans la tradition antique. Descartes écrit ainsi que NL est à LK comme CB est à BK, égalité que nous écrivons aujourd'hui $\dfrac{NL}{LK} = \dfrac{CB}{BK}$.

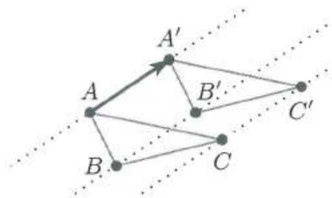
1 Notion de vecteur

Sauf mention contraire, chaque notion abordée dans ce chapitre est aussi bien valable dans le plan que dans l'espace.

1.1 Introduction

Certaines notions mathématiques ou physiques telles que la distance, la mesure d'un angle, la température, la masse ou l'altitude sont entièrement caractérisées par un nombre (pour une unité donnée). Mais ce n'est pas le cas de toutes les notions mathématiques et physiques.

Exemple 1. *Considérons la translation envoyant le point A sur le point A' représentée sur la figure ci-dessous. Un nombre ne suffit pas à décrire entièrement cette translation ; il faut encore connaître sa direction et son sens. On représente habituellement une telle translation à l'aide d'une flèche allant de A vers A'.*
Construisons l'image du triangle ABC.



La direction de cette translation est donnée par la droite passant par A et A' : pour construire les images des points B et C, on commence par tracer les parallèles à cette droite passant par B et C.
Le sens induit par cette translation est donné par l'extrémité de la flèche : ici la translation va de A vers A', et non de A' vers A.
La longueur de cette translation est celle de la flèche : on reporte la distance entre les points A et A', dans le bon sens, à partir des points B et C. On obtient ainsi leur image B' et C'.

Remarquons que le choix de l'origine de la flèche n'a aucune importance. Nous avons dessiné une flèche d'origine A car cela simplifie la compréhension, mais n'importe quelle flèche de même direction, même sens et même longueur permet de déterminer entièrement cette translation.

Exemple 2. *Considérons une luge tirée horizontalement avec une certaine force, représentée sur la figure ci-dessous par la flèche. Pour définir entièrement cette force, on doit connaître*

1. *son intensité, représentée par la longueur de la flèche,*
2. *sa direction, représentée par la droite suivant laquelle la force s'exerce,*
3. *le sens selon lequel la force s'exerce, indiqué par la pointe de la flèche.*

Un nombre seul ne suffit pas à caractériser une force ; son intensité est une information primordiale, mais insuffisante. Il faut aussi connaître sa direction et son sens.

Certaines notions nécessitent donc un nouveau concept, celui de vecteur, capable d'englober les aspects de direction, de sens et de longueur.

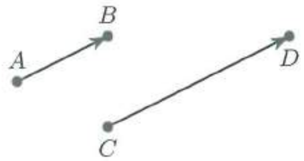
1.2 Bipoints et vecteurs

Formalisons les exemples précédents afin de parvenir à une définition rigoureuse de la notion de vecteur. À cet effet, nous devons dans un premier temps définir la notion de bipoint.

1.2.1 Bipoints

Un **bipoint** est un couple de points $(A; B)$. Le point A est son **origine** et le point B son **extrémité**. On le représente habituellement par une flèche allant de A à B.

Remarquons que, si $A \neq B$, les bipoints $(A; B)$ et $(B; A)$ sont distincts.



Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ ont la **même direction** si la droite passant par A et B est parallèle à la droite passant par C et D.

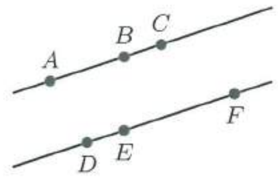
Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ de même direction peuvent avoir le **même sens** ou **des sens opposés**.

La **longueur d'un bipoint** $(A; B)$ est la distance entre A et B, notée $\delta(A; B)$.

Exemple. *Considérons la figure ci-contre.*

Les bipoints $(A; C)$ et $(E; D)$ ont même direction. Les bipoints $(A; B)$ et $(D; F)$ ont même direction et même sens, tandis que les bipoints $(E; F)$ et $(C; B)$ ont même direction mais ont des sens opposés.

Les bipoints $(B; C)$ et $(D; E)$ ont même direction, même sens et même longueur.



Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ sont **équipollents** s'ils ont même direction, même sens et même longueur. On note $(A; B) \sim (C; D)$.

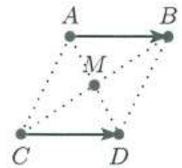
Définitions équivalentes de l'équipollence

$(A; B)$ est équipollent à $(C; D)$

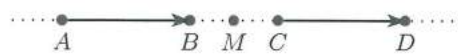
$\Leftrightarrow$ $ACDB$ est un parallélogramme (éventuellement dégénéré)

$\Leftrightarrow$ $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu M

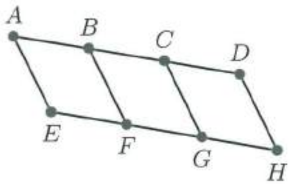
$\Leftrightarrow$ il existe une translation envoyant A sur B et C sur D.



Cas dégénéré



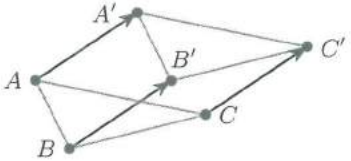
Exemple. *Sur la figure ci-dessous, on a entre autres $(A; B) \sim (F; G)$, $(A; G) \sim (B; H)$ et $(F; B) \sim (G; C)$.*



Propriété. *$(A; B) \sim (C; D)$ si et seulement si $(A; C) \sim (B; D)$.*

1.2.2 Vecteurs

Exemple. *Reprenons l'exemple de la translation.*



Les flèches sur la figure représentent des bipoints équipollents qui définissent tous la même translation. Les bipoints $(A; A')$, $(B; B')$ et $(C; C')$ sont des représentants d'un même vecteur dont ils indiquent la direction, le sens et la longueur.

Un **vecteur** est l'ensemble des bipoints équipollents à un bipoint donné.

L'ensemble des bipoints équipollents à $(A; B)$ est le vecteur noté $\overrightarrow{AB}$.

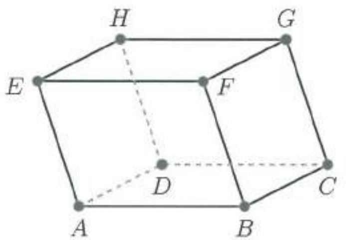
Le bipoint $(A; B)$, ou tout autre bipoint élément de $\overrightarrow{AB}$, est appelé **représentant** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

L'ensemble des vecteurs du plan est noté V_2 et l'ensemble des vecteurs de l'espace V_3.

On peut aussi noter les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \ldots, \vec{a}, \vec{b}, \ldots$, sans faire référence à un représentant.

Exemple. *Les bipoints $(A; B)$, $(D; C)$, $(E; F)$ et $(H; G)$ de la figure ci-dessous sont équipollents. Ils appartiennent donc tous au même vecteur, que l'on peut noter $\overrightarrow{AB} = \{(A; B); (D; C); (E; F); (H; G); \ldots\} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.*

On a ainsi $(A; B) \in \overrightarrow{AB}$ et $(D; C) \in \overrightarrow{AB}$, autrement dit, les bipoints $(A; B)$ et $(D; C)$ sont des représentants du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Tous les représentants d'un vecteur ont même direction, même sens et même longueur. Cette longueur est appelée **norme** du vecteur.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **de même direction** si leurs représentants ont même direction.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même direction peuvent être **de même sens** si leurs représentants ont même sens, ou **de sens opposés** si leurs représentants ont des sens opposés.

Remarque. Il faut être attentif au fait qu'un vecteur est un ensemble infini de bipoints. Lorsqu'on dessine une « flèche » (c'est-à-dire un bipoint), on dessine un des représentants du vecteur. Par abus de langage, on dira que l'on dessine ce vecteur. Ainsi un vecteur est entièrement défini par sa direction, son sens et sa longueur, mais ne dépend pas de son emplacement. On peut représenter un vecteur par un bipoint de n'importe quelle origine.

Chaque vecteur possède une infinité de représentants. On peut montrer que, étant donné un vecteur $\vec{v}$ et un point A quelconques, il existe un unique point B tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

L'ensemble des bipoints dont l'origine et l'extrémité sont confondues est appelé **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$.

On a donc $\vec{0} = \{(A; A); (B; B); \ldots\} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Propriétés.

1. $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; A = B$
2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \;\Leftrightarrow\; A = B$
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Complément. L'équipollence est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints car on peut démontrer qu'elle est
1. réflexive : $(A; B) \sim (A; B)$
2. symétrique : $\big((A; B) \sim (C; D)\big) \Rightarrow \big((C; D) \sim (A; B)\big)$
3. transitive : $\big((A; B) \sim (C; D)$ et $(C; D) \sim (E; F)\big) \Rightarrow \big((A; B) \sim (E; F)\big)$

quels que soient les points A, B, C, D, E et F.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la classe d'équivalence du bipoint $(A; B)$ selon la relation d'équipollence

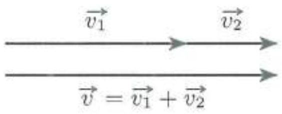
$$\overrightarrow{AB} = \{(M; N) \mid (M; N) \sim (A; B)\}$$

Ainsi on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \;\Leftrightarrow\; (A; B) \sim (C; D)$.

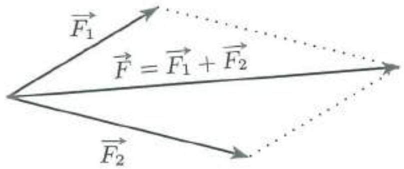
1.3 Addition de vecteurs

Exemple 1. *Considérons un bateau descendant un fleuve avec une vitesse $\vec{v_1}$, le fleuve s'écoulant lui-même avec une vitesse $\vec{v_2}$.*

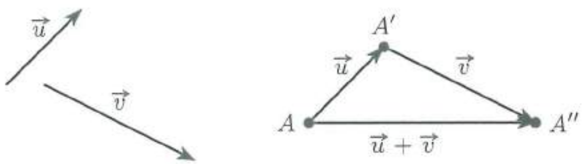
Pour un observateur immobile posté sur la berge du fleuve, le bateau avance avec une vitesse $\vec{v}$, de même direction et de même sens que les deux autres vitesses, dont l'intensité est la somme de celles des deux autres vitesses.



Exemple 2. *Deux forces qui agissent simultanément sur un corps produisent le même effet qu'une force unique, appelée résultante de ces forces. Simon Stevin*[1] *a montré que la résultante $\vec{F}$ de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ est donnée par la «règle du parallélogramme».*



Exemple 3. *Considérons une translation déterminée par le vecteur $\vec{u}$, suivie d'une deuxième translation déterminée par le vecteur $\vec{v}$. Faisons agir successivement ces deux translations sur un point A.*



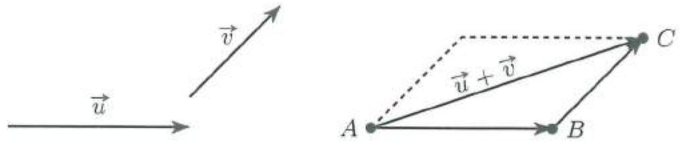
En dessinant un représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A, on obtient l'image A' du point A par la première translation. En dessinant un représentant du vecteur $\vec{v}$ d'origine A', on obtient l'image A'' du point A' par la seconde translation.

Effectuer successivement ces deux translations revient à effectuer directement la translation déterminée par le vecteur $\overrightarrow{AA''}$. Ce vecteur sera appelé vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et noté $\vec{u} + \vec{v}$.

1. Simon Stevin, physicien et mathématicien flamand, 1548–1620.

En généralisant ces exemples, on obtient la définition suivante.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. À partir d'un point A quelconque, on construit les points B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Le bipoint $(A; C)$ ainsi obtenu définit un vecteur, appelé **vecteur somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et noté $\vec{u} + \vec{v}$.



Le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est une des diagonales du parallélogramme construit avec les représentants des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

De la définition de la somme de deux vecteurs découle immédiatement que, quels que soient les points A, B et C, on a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette égalité est appelée **relation de Chasles**[2].

L'**addition vectorielle**, notée $+$, est l'opération interne qui associe à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ leur vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$.

Propriétés. *Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a*

1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ *(associativité) ;*
2. $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ *($\vec{0}$ est l'élément neutre) ;*
3. $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$ *(tout vecteur $\vec{v}$ possède un unique* ***opposé*** *noté $-\vec{v}$) ;*
4. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ *(commutativité).*

À l'aide de la notion d'opposé d'un vecteur, on peut définir la **soustraction vectorielle**, notée $-$, qui est l'opération interne associant à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ leur différence $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

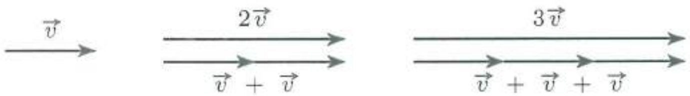
2. Cette appellation est propre aux pays francophones et n'est historiquement pas justifiée. Dans son *Traité de géométrie supérieure* (1852), le géomètre français Michel Chasles (1793-1880) utilise en effet la relation $ac = ab+bc$ uniquement pour des segments sur une droite orientée. La notion de vecteur n'apparaît pas dans le livre de Chasles. Elle ne sera formalisée que vers 1880 (cf. notice historique).

1.4 Multiplication d'un vecteur par un nombre

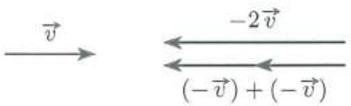
Exemple 1. *On exerce une force $\vec{F}$ sur un objet. Si l'on exerce une force de même direction et de même sens que la force initiale, mais d'une intensité triple, on dira qu'on exerce une force $3\vec{F}$ sur l'objet.*

Le vecteur $3\vec{F}$ est un vecteur de même direction et de même sens que $\vec{F}$, mais de norme triple.

Exemple 2. *Soit un vecteur $\vec{v}$. La somme $\vec{v}+\vec{v}$ est un vecteur de même direction et de même sens que $\vec{v}$, mais de norme double. Ce vecteur sera noté $2\vec{v}$.*
De même, la somme $\vec{v}+\vec{v}+\vec{v}$ est un vecteur de même direction et de même sens que $\vec{v}$, de norme triple. Ce vecteur sera noté $3\vec{v}$.



Par analogie, la somme $-\vec{v}+(-\vec{v})$ est un vecteur de même direction que $\vec{v}$, de sens opposé et de norme double. Ce vecteur sera noté $-2\vec{v}$.



En généralisant les exemples précédents à des nombres réels quelconques, on obtient la définition suivante.

Le **produit d'un vecteur $\vec{v}$ par un nombre réel** λ, noté $\lambda\cdot\vec{v}$ ou aussi $\lambda\vec{v}$, est le vecteur de même direction que $\vec{v}$, de même sens que $\vec{v}$ si λ est positif et de sens opposé si λ est négatif, et dont la norme est celle de $\vec{v}$ multipliée par $|\lambda|$.

La **multiplication d'un vecteur par un nombre réel** est l'opération externe qui associe à un nombre réel λ et à un vecteur $\vec{v}$ leur produit $\lambda\vec{v}$.

Le nombre réel λ est souvent appelé **scalaire**.

Propriétés. *Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les nombres réels λ et μ, on a les propriétés suivantes.*

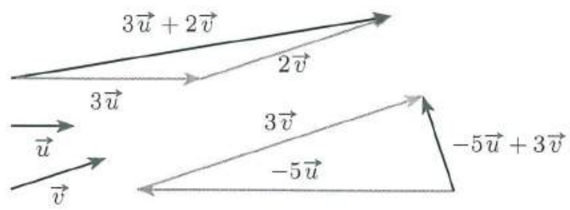
1. $1\vec{v}=\vec{v}$
2. $(\lambda\mu)\vec{v}=\lambda(\mu\vec{v})$
3. $(\lambda+\mu)\vec{v}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}$
4. $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$
5. $\lambda\vec{0}=\vec{0}$
6. $(-1)\vec{v}=-\vec{v}$

Remarque. Le vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$ peut aussi être défini comme le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ où A' et B' sont les images des points A et B par une homothétie de centre quelconque et de rapport λ.

Complément. Pour démontrer que l'addition vectorielle et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel sont des opérations bien définies, il faut prouver d'abord qu'elles ne dépendent pas du choix des représentants des vecteurs. Il faut aussi voir que l'on peut toujours effectuer une telle construction, ce qui découle directement du complément précédent page 11.
On déduit des propriétés de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel que $(V_2;+;\cdot)$ et $(V_3;+;\cdot)$ sont des **espaces vectoriels**[3].

1.5 Combinaisons linéaires

Exemple 1. *Considérons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés sur la figure ci-dessous. À partir de ces deux vecteurs, on peut « construire » les vecteurs $3\vec{u}+2\vec{v}$ et $-5\vec{u}+3\vec{v}$.*



On dit que les vecteurs $3\vec{u}+2\vec{v}$ et $-5\vec{u}+3\vec{v}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3. Pour plus d'informations sur les espaces vectoriels, voir Algèbre linéaire, CRM N°28.

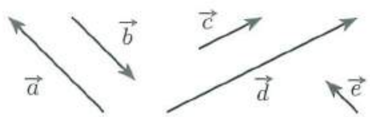
Exemple 2. *De même, le vecteur $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.*

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres réels et $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ sont des vecteurs, le vecteur $\vec{t} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n}$ est une **combinaison linéaire** de ces vecteurs.

Deux vecteurs (du plan ou de l'espace) sont **colinéaires** si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un nombre réel.

Exemple. *Considérons les vecteurs suivants.*

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires car $\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b}$.
$\vec{a}$ et $\vec{e}$ sont colinéaires car $\vec{a} = 3\vec{e}$.
$\vec{b}$ et $\vec{e}$ sont colinéaires car $\vec{b} = -2\vec{e}$.
$\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires car $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{d}$.

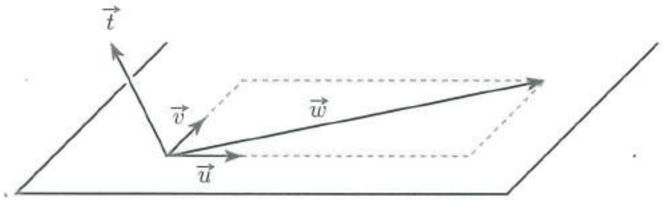


Remarque. On déduit immédiatement de la définition que

1. tout vecteur $\vec{v}$ est colinéaire au vecteur nul car $\vec{0} = 0\vec{v}$;
2. deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont même direction.

Trois vecteurs de l'espace V_3 sont **coplanaires** si l'un d'eux au moins est combinaison linéaire des deux autres.

Exemple. *Sur la figure ci-dessous, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires car $\vec{w} = 4\vec{u} + 2\vec{v}$. Remarquons que ces trois vecteurs peuvent être représentés dans le même plan.*
Les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas coplanaires car aucun de ces trois vecteurs ne peut être écrit comme combinaison linéaire des deux autres. Remarquons qu'il est impossible de représenter ces trois vecteurs dans un même plan.



Remarques.

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et $\vec{w}$ est un vecteur quelconque, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux nombres réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.
2. Le vecteur nul et deux vecteurs quelconques sont toujours coplanaires car $\vec{0} = 0\vec{v} + 0\vec{w}$, quels que soient les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Complément.

Des vecteurs sont **linéairement dépendants** si l'un d'eux au moins est combinaison linéaire des autres. Dans le cas contraire, ces vecteurs sont **linéairement indépendants**.

On en déduit immédiatement que deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si ils sont colinéaires. De même, trois vecteurs de l'espace sont linéairement dépendants si et seulement si ils sont coplanaires. Ainsi, la notion de dépendance linéaire généralise celles de colinéarité et de coplanarité.

De plus, si $\vec{u}$ est un vecteur quelconque et $\vec{v}$ est un vecteur non nul, on a

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont linéairement dépendants} &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v} \\ &\Leftrightarrow 1\vec{u} - \lambda\vec{v} = \vec{0}. \end{aligned}$$

On en déduit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants si et seulement si le vecteur nul s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, avec au moins un coefficient non nul. Si un des deux vecteurs au moins est nul, le résultat est évident. De même, si $\vec{u}$ est un vecteur quelconque de l'espace et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs de l'espace non colinéaires, on a

$$\begin{aligned} \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ linéairement dépendants} &\Leftrightarrow \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ coplanaires} \\ &\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \\ &\Leftrightarrow 1\vec{u} - \lambda\vec{v} - \mu\vec{w} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ainsi trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants si et seulement si le vecteur nul s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, avec au moins un coefficient non nul. Si au moins deux des vecteurs sont colinéaires, le résultat est évident.

Plus généralement, les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ sont linéairement dépendants si et seulement si le vecteur nul s'écrit comme combinaison linéaire de ces n vecteurs avec au moins un coefficient non nul, autrement dit s'il existe des nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls tels que $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$.

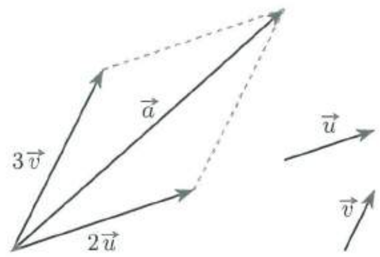
Ainsi les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ sont linéairement indépendants si et seulement si la seule combinaison linéaire donnant le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls, autrement dit, on a

$$\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha_1 = 0 \text{ et } \alpha_2 = 0 \ldots \text{ et } \alpha_n = 0)$$

1.6 Bases et composantes

1.6.1 Définitions

Exemple. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan et $\vec{a}$ un vecteur quelconque.*



Sur la figure, le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ car $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$. On remarque par ailleurs que c'est la seule manière d'écrire $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs non colinéaires.

On peut généraliser cet exemple à n'importe quel vecteur $\vec{a}$ du plan à l'aide du théorème suivant.

Théorème 1. *Tout vecteur de V_2 s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires de V_2.*

Une **base** de V_2 est un couple de vecteurs non colinéaires.

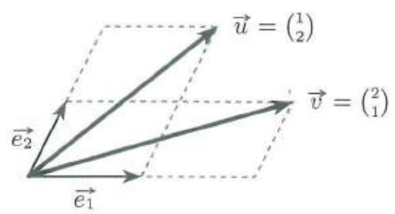
Si $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ est une base de V_2 et $\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$, alors x et y sont appelées respectivement première et seconde **composante** du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$.

On note $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

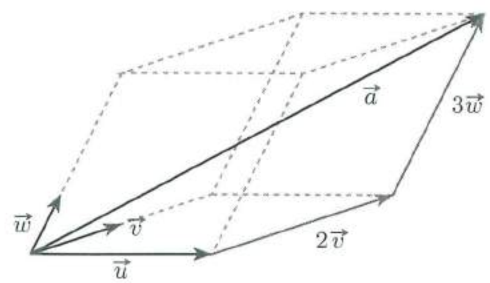
Toutes les bases de V_2 comprennent deux vecteurs ; on dit que V_2 est de **dimension 2**.

Remarque. L'ordre des composantes est essentiel : la première se rapporte au premier vecteur de base, et la seconde au second vecteur de base.

Par exemple, les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ représentés sur la figure sont deux vecteurs distincts.



Exemple. *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace et $\vec{a}$ un vecteur quelconque.*



Sur la figure, le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ car $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$. On remarque par ailleurs que c'est la seule manière d'écrire $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs non coplanaires.

On peut généraliser cet exemple à n'importe quel vecteur $\vec{a}$ de l'espace à l'aide du théorème suivant.

Théorème 2. *Tout vecteur de V_3 s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de trois vecteurs non coplanaires de V_3.*

Une **base** de V_3 est un triplet de vecteurs non coplanaires.

Si $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ est une base de V_3 et $\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$, alors x, y et z sont appelées respectivement première, deuxième et troisième **composante** du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$.

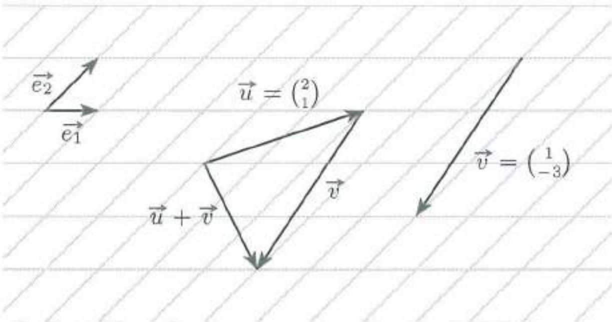
On note $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Toutes les bases de V_3 comprennent trois vecteurs ; on dit que V_3 est de **dimension 3**.

1.6.2 Opérations sur les composantes des vecteurs

Exemple. *Dans la base* $(\vec{e_1};\vec{e_2})$, *considérons les vecteurs* $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ *représentés sur la figure ci-dessous.*

On remarque que les composantes du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ *dans la base* $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ *sont* $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.



On peut généraliser l'exemple précédent à l'aide du théorème suivant, énoncé et démontré dans le plan, mais aussi valable dans l'espace en ajoutant une troisième composante.

Théorème 3. *Soient* $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ *deux vecteurs exprimés dans une base* $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ *de* V_2 *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

1. $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}$,
2. $\lambda\vec{u}=\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda u_1\\\lambda u_2\end{pmatrix}$.

Démonstration.

1. $$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v}&=(u_1\vec{e_1}+u_2\vec{e_2})+(v_1\vec{e_1}+v_2\vec{e_2})\\&=(u_1+v_1)\vec{e_1}+(u_2+v_2)\vec{e_2}=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}\lambda\vec{u}&=\lambda(u_1\vec{e_1}+u_2\vec{e_2})=\lambda(u_1\vec{e_1})+\lambda(u_2\vec{e_2})\\&=(\lambda u_1)\vec{e_1}+(\lambda u_2)\vec{e_2}=\begin{pmatrix}\lambda u_1\\\lambda u_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

Exemple. *Soient* $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ *exprimés dans une base de* V_3.

On a $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ *et* $3\vec{u}=3\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\-9\end{pmatrix}$.

1.6.3 Déterminant

Exemple. *Il est aisé de déterminer si deux vecteurs de* V_2 *dont on connaît les composantes sont colinéaires ou non :* $\vec{u}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ *sont colinéaires car* $\vec{u}=2\vec{v}$, *tandis que* $\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ *ne le sont pas.*

Il est en revanche plus délicat de déterminer à quelle condition les vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ *sont colinéaires.*

On a $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires*
$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\lambda\\4\lambda\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow u_1=3\lambda \text{ et } u_2=4\lambda \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\frac{u_1}{3}\text{ et }\lambda=\frac{u_2}{4}\\&\Leftrightarrow \frac{u_1}{3}=\frac{u_2}{4}\quad\Leftrightarrow\quad 4u_1-3u_2=0\end{aligned}$$

Cet exemple motive la définition suivante.

Soient les vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ exprimés dans une base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ de V_2. Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel

$$\mathrm{Det}(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{vmatrix}=u_1v_2-u_2v_1.$$

Soient les vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ donnés dans une base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ de V_3. Le **déterminant** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre réel

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(\vec{u};\vec{v};\vec{w})&=\begin{vmatrix}u_1&v_1&w_1\\u_2&v_2&w_2\\u_3&v_3&w_3\end{vmatrix}\\&=u_1\begin{vmatrix}v_2&w_2\\v_3&w_3\end{vmatrix}-u_2\begin{vmatrix}v_1&w_1\\v_3&w_3\end{vmatrix}+u_3\begin{vmatrix}v_1&w_1\\v_2&w_2\end{vmatrix}\\&=u_1(v_2w_3-v_3w_2)-u_2(v_1w_3-v_3w_1)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)\end{aligned}$$

Remarques.

1. Dans le plan, on parle de déterminant d'ordre 2, et dans l'espace, de déterminant d'ordre 3.
2. Dans la définition ci-dessus, le déterminant de trois vecteurs de l'espace a été calculé en le développant selon la première colonne.
   On peut aussi le calculer en utilisant le tableau suivant.

   $\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1$

$$\begin{array}{|ccc|cc} u_1 & v_1 & w_1 & u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & u_3 & v_3 \end{array}$$
$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

   Cette technique est appelée règle de Sarrus [4]. On prendra garde au fait qu'elle n'est valable que pour l'ordre 3.

Le théorème suivant généralise l'exemple donné au début du paragraphe.

Théorème 4.

1. *Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V_2. On a*

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \operatorname{Det}(\vec{u};\vec{v}) = 0$$

2. *Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de V_3. On a*

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ coplanaires} \Leftrightarrow \operatorname{Det}(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$$

Exemple. *Soient* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{On calcule } \operatorname{Det}(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot 8 - 1\cdot(-8) - 3\cdot 0 = 16 + 8 = 24 \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Det}(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$, *les vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *ne sont pas coplanaires.*

4. Pierre Frédéric Sarrus, 1798-1861, mathématicien français.

1.7 Repères et coordonnées

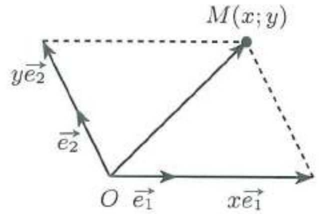
1.7.1 Définitions

Pour repérer un point dans le plan ou dans l'espace, on a non seulement besoin d'une base, comme pour les vecteurs, mais on a aussi besoin d'un point de référence.

Un **repère du plan** est un triplet $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ où O est un point du plan et $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ est une base de V_2, appelée **base associée** au repère. Le point O se nomme **origine** du repère.

Si O, A et B sont trois points non alignés, $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ est un repère du plan.

Dans un repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$, les **coordonnées** d'un point M du plan sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base associée $(\vec{e_1};\vec{e_2})$.



Autrement dit

Dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$	Dans le repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$M(x;y)$
x et y sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$	x et y sont les coordonnées du point M

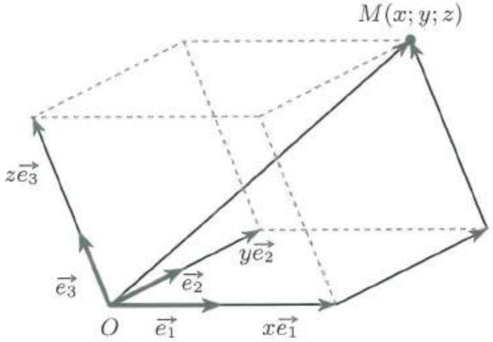
La première coordonnée du point est l'**abscisse** et la seconde l'**ordonnée**.

Un **repère de l'espace** est un quadruplet $(O;\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ où O est un point de l'espace et $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ est une base de V_3, appelée **base associée** au repère. Le point O se nomme **origine** du repère.

Si O, A, B et C sont quatre points non coplanaires, $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$ est un repère de l'espace.

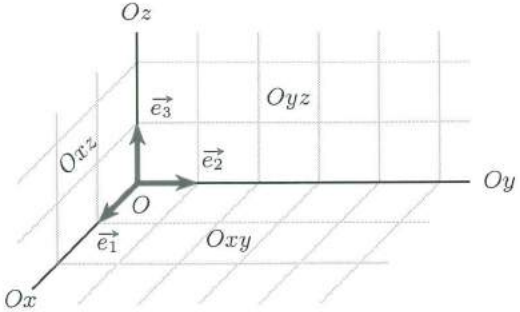
Dans un repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$, les **coordonnées** d'un point M de l'espace sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base associée $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$.

Si $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on note $M(x; y; z)$.



La première coordonnée du point est l'**abscisse**, la deuxième l'**ordonnée** et la troisième la **cote**.

Pour nommer les axes et les plans de référence, on utilisera les notations suggérées sur la figure ci-dessous.



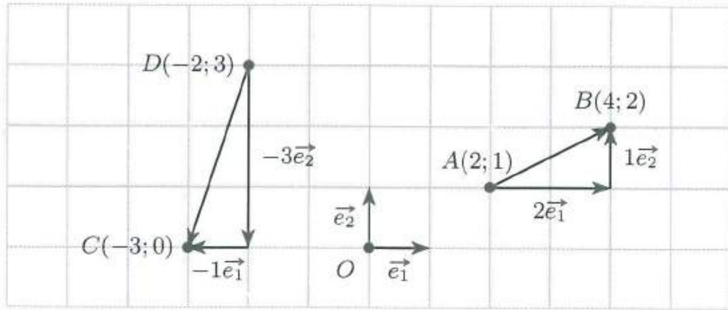
1.7.2 Calculs avec les coordonnées des points

Afin d'alléger la lecture, les théorèmes suivants sont énoncés dans le plan, mais restent aussi valables dans l'espace, en ajoutant une troisième coordonnée.

Par convention, on note $(x_A; y_A)$ les coordonnées d'un point A quelconque.

Exemple. *Considérons les points $A(2;1)$, $B(4;2)$, $C(-3;0)$ et $D(-2;3)$. On peut aisément déduire les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-(-2) \\ 0-3 \end{pmatrix}.$$

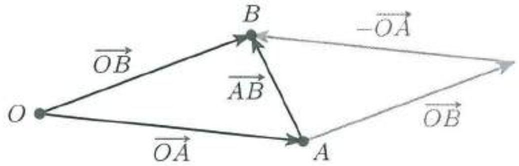


Cet exemple peut être généralisé à l'aide du théorème suivant.

Propriété.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Démonstration.
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} &&= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$



□

Propriétés. *Soient A, B et C trois points.*

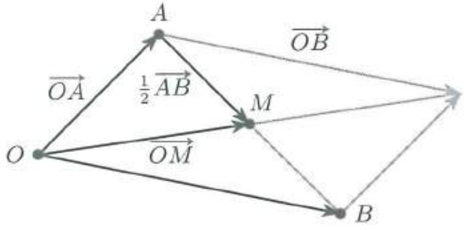
1. *Le point $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ est le milieu du segment $[AB]$.*
2. *Le point $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ est le centre de gravité du triangle ABC .*

Démonstration.

1. Le milieu M de $[AB]$ vérifie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) \\ y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$



2. La démonstration est laissée en exercice.

□

1.8 Exercices relatifs au chapitre 1

Bipoints et vecteurs

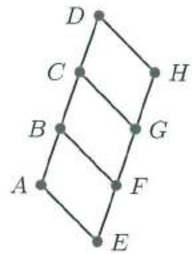
1. Trouver pour chacune des figures ci-dessous quelques ensembles de bipoints

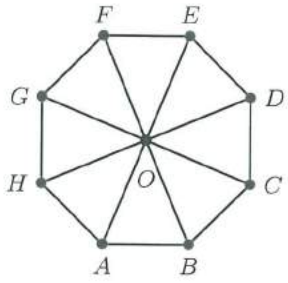
a) de même direction ;

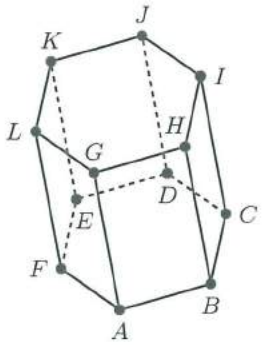
b) de même sens ;

c) de sens opposés ;

d) équipollents.







2. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O. Exprimer plus simplement les vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$ c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}$
d) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}$ e) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}$ f) $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD}$

3. On considère le parallélépipède représenté ci-dessous. Exprimer plus simplement les vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

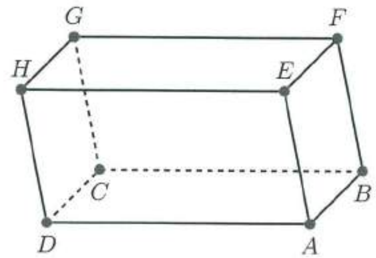
b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$



4. On considère des points A, B, C, D et E. Exprimer plus simplement les vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}$

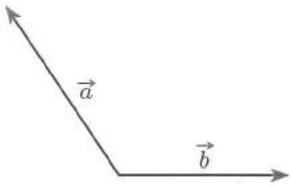
c) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$ f) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$

5. On donne les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ci-contre. Représenter les vecteurs

$\vec{c}=2\vec{a}$ $\quad\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}$ $\quad\vec{e}=-\frac{3}{4}\vec{a}$

$\vec{f}=-\frac{1}{4}\vec{b}$ $\quad\vec{g}=\frac{5}{2}\vec{b}$ $\quad\vec{h}=\sqrt{3}\,\vec{b}$

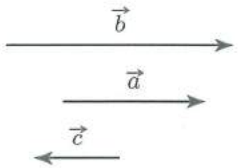


6. On donne les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ci-contre. Représenter les vecteurs

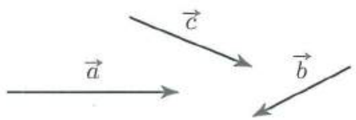
$\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$ $\quad\vec{y}=\vec{a}+\vec{c}$

$\vec{z}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ $\quad\vec{f}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$

$\vec{g}=3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$ $\quad\vec{h}=\frac{7}{3}\vec{a}-3\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$



7. On donne les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ci-dessous.



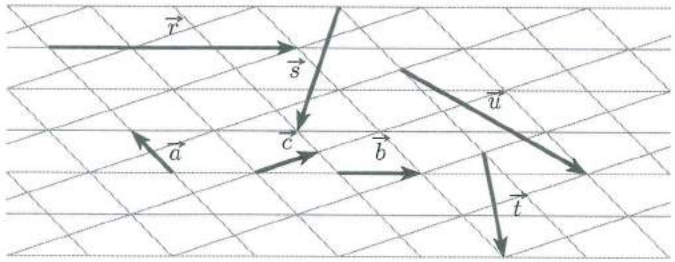
a) Représenter les vecteurs

$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ $\quad\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ $\quad\vec{w}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

b) Représenter les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ tels que

$\vec{x}+\vec{a}=\vec{b}$ $\quad\vec{y}-\vec{b}=\vec{c}$ $\quad\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}-\vec{z}$

8. On considère les vecteurs représentés dans la figure ci-dessous.



a) Représenter les vecteurs $\vec{d}=3\vec{a}+4\vec{b}-5\vec{c}$, $\vec{e}=-2\vec{a}-3\vec{b}$ et $\vec{f}=\frac{1}{2}(3\vec{a}-\vec{b})-\frac{7}{2}\vec{c}$.

b) Exprimer les vecteurs $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ et $\vec{u}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

9. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ de l'exercice 3. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AE}$ et $\vec{t}=\overrightarrow{AF}$.

a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EC}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

b) On note M le milieu de $[FG]$, N celui de $[HG]$ et P le centre du parallélogramme $ABCD$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{FN}$, $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{PM}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

c) On considère le point J tel que $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$.

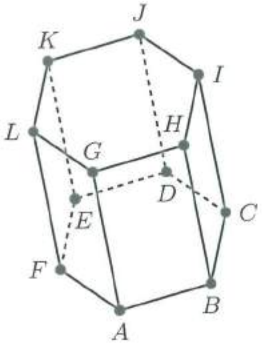
10. On considère une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{SA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{SB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{SC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{SD}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

11. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ de l'exercice 3. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres.

a) $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DG}$ b) $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{GH}$

12. On considère le prisme représenté ci-contre dont les bases sont des hexagones réguliers. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres.



a) $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{LG}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{KB}$

c) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{HI}$

13. On donne trois points non alignés O, A et B et λ un nombre réel.

a) Construire les points C, D et E tels que $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

b) Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$?

c) Construire les points F, G et H tels que $\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

d) Quel est l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$?

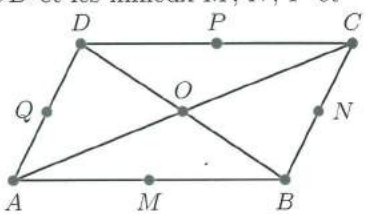
e) Construire les points I, J, K et L tels que $\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

f) Quel est l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$?

Bases

Dans les exercices suivants, les composantes des vecteurs sont données relativement à une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$ ou $\mathcal{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$, sauf mention contraire.

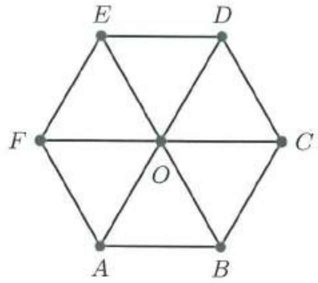
14. On considère le parallélogramme $ABCD$ et les milieux M, N, P et Q de ses côtés. Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$



a) dans la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$;

b) dans la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AM})$.

15. On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O. Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$



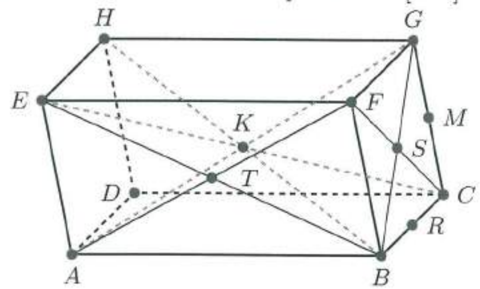
a) dans la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$;

b) dans la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{ED})$;

c) dans la base $\mathcal{B}_3 = (\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC})$;

d) dans la base $\mathcal{B}_4 = (\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{AB})$.

16. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ et les points K, M, R, S et T (M et R étant les milieux respectifs de $[CG]$ et $[BC]$).



Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AK}$ dans les bases suivantes.

a) $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ b) $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{BR})$

17. On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer les composantes des vecteurs et les représenter.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $2\vec{u} - 3\vec{v}$ d) $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

18. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les composantes des vecteurs

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ c) $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$

19. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$. Déterminer les nombres réels α et β tels que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$.

20. Exprimer le vecteur $\vec{c}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans les cas suivants.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

21. Déterminer m pour que les deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} m^2+1 \\ m+2 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

22. Parmi les vecteurs suivants, déterminer ceux qui sont colinéaires.

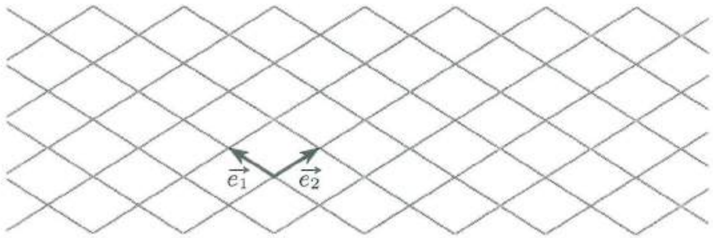
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{h} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

23. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Déterminer un nombre λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire au vecteur $\vec{a}$ tels que $\vec{x} + \lambda\vec{b} = \vec{c}$.

24. On considère la figure ci-dessous.

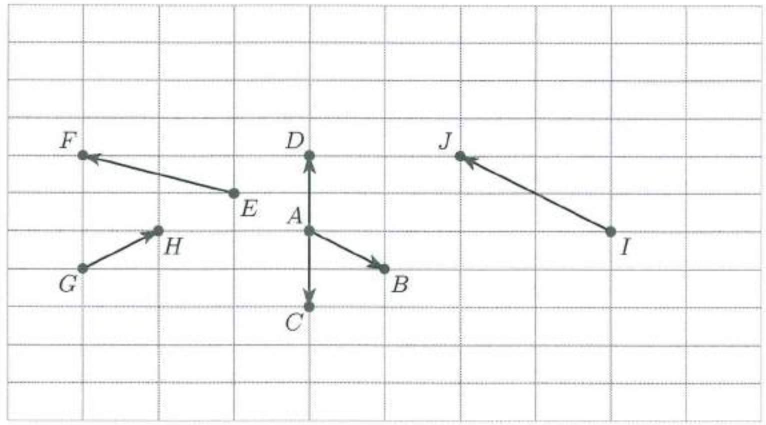


a) Représenter dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$ les vecteurs

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$

b) Représenter les vecteurs $\vec{b} + \vec{c}$ et $3\vec{b} + 2\vec{c}$ et donner leurs composantes dans la base $\mathcal{B}$.

25. On considère la figure ci-dessous et la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.



On pose $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$, $\vec{b} = \overrightarrow{GH}$, $\vec{c} = \overrightarrow{IJ}$ et $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$.

a) Représenter les vecteurs $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donnés dans la base $\mathcal{B}$.

b) Représenter les vecteurs $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$ et $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{c} - (\vec{a} - \vec{b})$.

c) Trouver les composantes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.

d) Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\vec{a}\,;\vec{b})$.

e) Déterminer deux nombres réels λ et μ tels que $\vec{a}+\lambda\vec{b}=\mu\vec{c}$.

26. On considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\8\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\18\\-11\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}35\\14\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{e}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$.

a) Calculer les composantes des vecteurs $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{d}$, $\vec{v}=-\vec{c}+3\vec{e}$, $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}+2\vec{d}$ et $\vec{t}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$.

b) Montrer que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.

27. On considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}9\\6\\15\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\-3\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{f}=\begin{pmatrix}-15\\-10\\-25\end{pmatrix}$ et $\vec{g}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-12\end{pmatrix}$.

Déterminer ceux qui sont colinéaires.

28. Déterminer si les trois vecteurs suivants sont coplanaires.

a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\12\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\13\\-4\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{5}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{4}\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}2\\-\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-10\\\frac{7}{6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{16}{3}\\-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

29. Exprimer $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-8\\6\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-16\\10\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\52\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}11\\1\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\2\\-12\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\7\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}7\\3\\4\end{pmatrix}$

30. On considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}9\\3\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

a) Déterminer le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}+2\vec{a}=\vec{b}-2\vec{c}$.

b) Déterminer le vecteur $\vec{w}$ tel que $6(\vec{c}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{w})+2\vec{b}=\vec{0}$.

c) Déterminer le vecteur $\vec{t}$ tel que $5\vec{t}-\vec{a}=\frac{3}{2}(2\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{t})+\frac{5}{6}\vec{b}$.

31. Utiliser des déterminants pour trouver parmi les vecteurs suivants lesquels sont colinéaires.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{21}{2}\\-15\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{12}\\\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\-4\end{pmatrix}$

32. Utiliser des déterminants pour trouver parmi les vecteurs suivants lesquels sont coplanaires.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-5\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{d}=\begin{pmatrix}-13\\9\\13\end{pmatrix}$

Repères

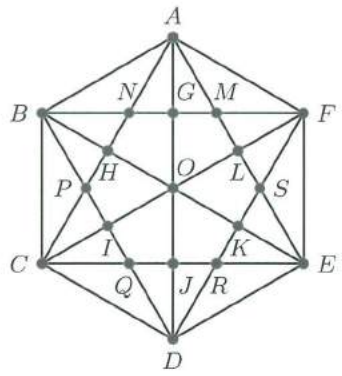
Sauf mention contraire, dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont données dans un repère $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ du plan ou $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ de l'espace. Les composantes des vecteurs sont exprimées dans les bases associées.

33. On considère l'hexagone régulier ci-contre.

Donner les coordonnées des 19 points représentés dans le repère

a) $\mathcal{R}_1 = (O; \overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OF})$

b) $\mathcal{R}_2 = (O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$

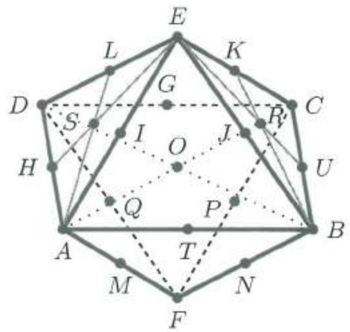


34. On considère l'octaèdre régulier ci-contre.

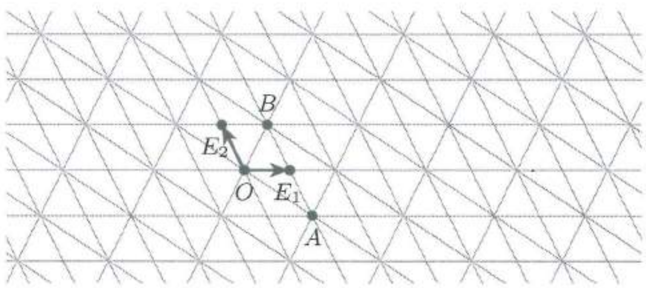
Donner les coordonnées des 21 points représentés dans le repère

a) $\mathcal{R}_1 = (O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OE})$

b) $\mathcal{R}_2 = (A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$



35. On considère la figure ci-dessous.



a) Représenter les points suivants dont les coordonnées sont données dans le repère $(O; \overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2})$.

$M(4;2)$	$N(-3;3)$	$P(-4;-4)$	$Q(2;3)$	$R(1;-3)$
$S(0;-3)$	$T(5;0)$	$U(-1;-4)$	$V(-2;3)$	

b) Trouver les coordonnées de ces points dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

c) Calculer les composantes dans la base $(\overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2})$ des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{UP}$ et $\overrightarrow{PS}$.

36. On considère les points $A(-5;3)$, $B(6;1)$, $C(0;2)$, $D(7;7)$, $E(-3;-5)$ et $F(-6;0)$.

a) Représenter les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$, puis déterminer leurs composantes.

b) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{CD}$.

c) Déterminer les coordonnées du point N tel que $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{EF}$.

d) Déterminer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PF}$.

37. On considère les points $A(6;1)$, $B(1;5)$ et $C(-4;1)$. Déterminer les coordonnées du point D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

38. Soient les points $A(5;2;-3)$, $B(8;0;5)$, $C(-2;-4;1)$ et $D(4;-6;3)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$	b) $\overrightarrow{BD}$
c) $\overrightarrow{CA}$	d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
e) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$	f) $4\overrightarrow{CD} - 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC})$

39. Soient $A(-3;1)$ et $B(6;5)$. Calculer les coordonnées du point M, milieu du segment $[AB]$.

40. Soient $A(1;-3;8)$ et $B(10;9;2)$. Déterminer les coordonnées du point P situé au tiers du segment $[AB]$ à partir de A.

41. Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC.

a) Montrer que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

b) En déduire les coordonnées de G à partir de celles de A, de B et de C.

42. On considère les points $A(-3;4)$, $B(5;-2)$ et $C(1;8)$.

a) Trouver les coordonnées des milieux respectifs A', B' et C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

b) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.

c) En déduire les composantes de la somme $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

43. Dans un triangle ABC, on considère A' le milieu de $[BC]$, B' celui de $[AC]$ et C' celui de $[AB]$. Montrer que

a) $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

44. On considère les points $A(-4;2)$, $B(1;3)$ et $C(2;5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

45. a) Trouver les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on connaît $A(6;-1)$, $B(-2;6)$ et le centre de gravité $G(3;4)$.

b) Même question pour $A(10;6)$, $B(-6;4)$ et $G(-1;-4)$.

46. On considère le point $P(\alpha;\beta)$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$. Déterminer un point X de l'axe Ox et un point Y de l'axe Oy tels que P soit le milieu du segment $[XY]$.

47. Soient λ un nombre réel et ABC un triangle. On considère les points A', B' et C' tels que $\overrightarrow{BA'} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = \lambda\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

a) Montrer que, pour tout point M, on a
$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

b) En déduire que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

48. Montrer que les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque sont les sommets d'un parallélogramme.

49. On considère les points $M(1;2)$, $N(-1;0)$ et $P(1;-1)$. Trouver le point Q tel que le quadrilatère $MNPQ$ soit un parallélogramme.

50. On considère les points $R(2;5)$, $S(1;2)$, $T(x;3)$ et $U(6;y)$. Trouver les nombres x et y pour que le quadrilatère $RSTU$ soit un parallélogramme.

51. On considère les points $R(-3;-2)$, $S(2;5)$, $T(3;9)$ et $U(-10;y)$. Trouver le nombre y pour que le quadrilatère $RSTU$ soit un trapèze dont les bases sont $[RS]$ et $[TU]$.

52. On considère les points $A(2;-1)$ et $B(0;3)$.

a) Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit l'origine O du repère.

b) Déterminer ensuite le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

53. On considère les points $A(0;1)$, $B(1;1)$, $P(\frac{1}{2};0)$ et $Q(1;\frac{1}{4})$. Trouver le point M de la droite (AB) et le point N de l'axe Oy pour que le quadrilatère $PQMN$ soit un parallélogramme.

54. On considère deux parallélogrammes $ABCD$ et $AB'CD'$ ayant deux sommets communs A et C. Montrer que le quadrilatère $BB'DD'$ est un parallélogramme.

55. On considère les points A, B et C ci-dessous. Calculer les coordonnées du sommet D du parallélogramme $ABCD$, celles des milieux M, N, P, et Q des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ respectivement ainsi que celles des centres de gravité G_1 et G_2 respectifs des triangles ABC et CDA.

a) $A(-4;1;3)$, $B(4;3;6)$ et $C(4;-6;3)$

b) $A(-1;8;2)$, $B(4;5;-1)$ et $C(2;7;1)$

56. On considère deux sommets A et B d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection P de ses diagonales. Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D.

a) $A(3;-2;5)$, $B(7;5;10)$ et $P(5;4;6)$

b) $A(5;4;-4)$, $B(9;6;3)$ et $P(6;-1;0)$

57. On considère les quatre points $A(3;-2;1)$, $B(1;5;-2)$, $C(0;-4;5)$ et $D(-4;-8;7)$. Calculer les coordonnées des points M, N, P et Q, milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

58. On considère les points $M(0;8;-2)$ et $N(4;2;4)$.

a) Trouver les coordonnées des images M' et N' de M et N par la symétrie centrale de centre $P(-2;-1;7)$.

b) Trouver les coordonnées des images M'' et N'' de M et N par l'homothétie de centre $H(2;-3;5)$ et de rapport -2.

59. Les points A, B et C ci-dessous sont-ils alignés ?

a) $A(2;3)$, $B(1;6)$ et $C(4;-3)$

b) $A(1;-1)$, $B(3;1)$ et $C(-2;3)$

c) $A(-56;84)$, $B(16;-24)$ et $C(-8;12)$

60. Les points A, B et C ci-dessous sont-ils alignés ?

a) $A(3;1;-1)$, $B(2;0;4)$ et $C(-3;2;5)$

b) $A(2;-1;0)$, $B(1;1;-2)$ et $C(4;-5;-11)$

c) $A(3;1;\frac{1}{2})$, $B(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ et $C(9;4;\frac{1}{2})$

d) $A(13;-22;2)$, $B(-5;-10;26)$ et $C(-38;12;60)$

e) $A(\frac{4}{3};-1;-\frac{2}{3})$, $B(\frac{23}{6};-\frac{11}{6};\frac{8}{3})$ et $C(-\frac{55}{6};\frac{5}{2};-\frac{44}{3})$

61. Déterminer le nombre réel α pour que les points A, B et C ci-dessous soient alignés.

a) $A(1;2)$, $B(-3;3)$ et $C(\alpha;1)$

b) $A(2;\alpha)$, $B(7\alpha-29;5)$ et $C(-4;2)$

62. Déterminer les nombres réels α, β et γ pour que les points suivants soient alignés.

$A(3;-5)$, $B(-4;4)$, $C(2;\alpha)$, $D(1-\beta;2+\beta)$ et $E(-11-7\gamma;13+9\gamma)$

63. Les points ci-dessous sont-ils coplanaires ?

a) $A(0;2;4)$, $B(1;-1;3)$, $C(-8;2;1)$ et $D(-6;-4;-1)$

b) $A(5;2;1)$, $B(-6;3;-2)$, $C(2;5;2)$ et $D(0;0;-2)$

c) $A(0;2;4)$, $B(1;-4;-3)$, $C(0;2;0)$ et $D(1;1;-1)$

64. Déterminer le nombre réel z pour que les points $A(1;1;9)$, $B(5;\frac{3}{2};14)$, $C(0;-3;0)$ et $D(-\frac{8}{3};-\frac{8}{3};z)$ soient coplanaires.

65. On considère les points $A(5;-3;2)$, $B(4;-5;9)$, $C(1;1;6)$, $D(2;-1;7)$, $E(\frac{16}{5};-\frac{9}{5};5)$ et $F(3;-1;4)$.

a) Montrer que les points A, C et F sont alignés, ainsi que les points A, D et E, les points B, C et D et les points B, E et F.

b) Déterminer les coordonnées des milieux M, N et P des segments $[AB]$, $[CE]$ et $[DF]$ respectivement et montrer que M, N et P sont alignés.

66. On considère les points $A(2;-3;0)$, $B(4;2;5)$, $C(-3;1;4)$, $D(5;3;12)$ et $E(-8;-22;-43)$. Calculer les coordonnées des centres de gravité G_1, G_2 et G_3 des triangles ABC, BCD et CDE respectivement et montrer que ces trois points sont alignés.

Réponses aux exercices du chapitre 1

2. a) $\overrightarrow{AO}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{EA}$ e) $\overrightarrow{AD}$ f) $\overrightarrow{FC}$

3. a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{HA}$ d) $\overrightarrow{EA}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{AE}$

4. a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{DC}$
d) $\overrightarrow{DA}$ e) $\vec{0}$ f) $2\overrightarrow{CB}$

7. a) $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$ b) $\vec{y}=\vec{b}+\vec{c}$ c) $\vec{z}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$

8. b) $\vec{r}=3\vec{b}$, $\vec{s}=-3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{t}=-\frac{5}{2}\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{u}=-\frac{5}{2}\vec{a}+\vec{b}$

9. a) $\overrightarrow{AG}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$
$\overrightarrow{BD}=-\vec{u}+\vec{v}$ $\overrightarrow{DH}=\vec{w}$
$\overrightarrow{BF}=\vec{w}$ $\overrightarrow{BH}=-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
$\overrightarrow{EG}=\vec{u}+\vec{v}$ $\overrightarrow{EC}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

b) $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}-\vec{w}$ $\overrightarrow{EM}=\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$
$\overrightarrow{EN}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$ $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$
$\overrightarrow{FN}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$ $\overrightarrow{NP}=-\frac{1}{2}\vec{v}-\vec{w}$
$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{w}$

c) $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{t}$

10. $\overrightarrow{AC}=-\vec{u}+\vec{w}$ $\overrightarrow{BD}=\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$
$\overrightarrow{AB}=-\vec{u}+\vec{v}$ $\overrightarrow{BC}=-\vec{v}+\vec{w}$
$\overrightarrow{AD}=-\vec{v}+\vec{w}$ $\overrightarrow{SD}=\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$

11. a) oui, $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{GH}$
b) non
c) oui, $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$
d) oui, $\overrightarrow{GH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$

12. a) oui, $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{EK}+2\overrightarrow{BC}$
b) oui, $\overrightarrow{KB}=3\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{ID}$
c) non

13. b) droite (OA) d) parallèle à (OA) par le point B
f) droite (AB)

14. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AN}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AO}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CM}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AN}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AO}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CM}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

15. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FA}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EA}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FA}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EA}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FA}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

16. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

17. a) $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}14\\-7\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}-5\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

18. a) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\7\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-\frac{11}{4}\\5\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-41\\27\end{pmatrix}$

19. $\alpha = 3$ et $\beta = 2$

20. a) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ b) impossible
c) $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b} = 2\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b} = \ldots$
Il y a une infinité de possibilités.

21. $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

22. $\vec{e}$ est colinéaire à tous ; $\vec{a}$, $\vec{d}$ et $\vec{h}$; $\vec{b}$ et $\vec{i}$; $\vec{c}$ et $\vec{g}$

23. $\lambda = \frac{35}{29}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{105}{29}\\-\frac{30}{29}\end{pmatrix}$

24. $\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $3\vec{b} + 2\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$

25. c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

e) $\lambda = \frac{1}{2}$ $\mu = \frac{3}{4}$

26. $\vec{u} = \begin{pmatrix}72\\14\\-11\end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix}-8\\-21\\11\end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix}\frac{419}{6}\\\frac{41}{2}\\-\frac{46}{3}\end{pmatrix}$ $\vec{t} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

27. $\vec{d}$ colinéaire à tous ; $\vec{a}$, $\vec{e}$ et $\vec{g}$; $\vec{b}$ et $\vec{f}$

28. a) oui b) non c) non d) oui

29. a) $4\vec{a} + 5\vec{b} + 2\vec{c}$ b) $\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$ c) $3\vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$
d) impossible

30. $\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\13\\-7\end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{t} = \dfrac{1}{29}\begin{pmatrix}54\\-34\\14\end{pmatrix}$

31. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

32. $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont coplanaires.

33. a) $A(-1;1)$ $B(-1;0)$ $C(0;-1)$ $D(1;-1)$ $E(1;0)$
$F(0;1)$ $G(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $H(-\frac{1}{2};0)$ $I(0;-\frac{1}{2})$ $J(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$
$K(\frac{1}{2};0)$ $L(0;\frac{1}{2})$ $M(-\frac{1}{3};\frac{2}{3})$ $N(-\frac{2}{3};\frac{1}{3})$ $O(0;0)$
$P(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$ $Q(\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$ $R(\frac{2}{3};-\frac{1}{3})$ $S(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$

b) $A(1;0)$ $B(1;1)$ $C(0;1)$ $D(-1;0)$ $E(-1;-1)$
$F(0;-1)$ $G(\frac{1}{2};0)$ $H(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $I(0;\frac{1}{2})$ $J(-\frac{1}{2};0)$
$K(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $L(0;-\frac{1}{2})$ $M(\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$ $N(\frac{2}{3};\frac{1}{3})$ $O(0;0)$
$P(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$ $Q(-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $R(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3})$ $S(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$

34. a) $A(1;0;0)$ $B(0;1;0)$ $C(-1;0;0)$ $D(0;-1;0)$
$E(0;0;1)$ $F(0;0;-1)$ $G(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0)$ $H(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0)$
$I(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$ $J(0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $K(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$ $L(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$
$M(\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2})$ $N(0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $O(0;0;0)$ $P(-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2})$
$Q(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $R(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $S(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $T(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$
$U(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$

b) $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$
$E(0;0;1)$ $F(1;1;-1)$ $G(\frac{1}{2};1;0)$ $H(0;\frac{1}{2};0)$
$I(0;0;\frac{1}{2})$ $J(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$ $K(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $L(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$
$M(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $N(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $O(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$ $P(1;1;-\frac{1}{2})$
$Q(\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2})$ $R(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $S(0;\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $T(\frac{1}{2};0;0)$
$U(1;\frac{1}{2};0)$

35. a) $M(1;3)$ $N(-3;0)$ $P(0;-4)$ $Q(-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$ $R(2;-1)$
$S(\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$ $T(\frac{5}{2};\frac{5}{2})$ $U(\frac{3}{2};-\frac{5}{2})$ $V(-\frac{5}{2};\frac{1}{2})$

b) $\overrightarrow{MN}=\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}-8\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{NP}=\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PM}=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{ST}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{UP}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

36. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}11\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$
b) $M(4;0)$ c) $N(-2;-2)$ d) $P(-\frac{11}{2};\frac{3}{2})$

37. $D(1;-3)$

38. a) $\begin{pmatrix}3\\-2\\8\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-4\\-6\\-2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}7\\6\\-4\end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix}9\\-4\\10\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1\\8\\-6\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}33\\-14\\32\end{pmatrix}$

39. $M(\frac{3}{2};3)$

40. $P(4;1;6)$

42. $A'(3;3)$, $B'(-1;6)$ et $C'(1;1)$;
$\overrightarrow{AA'}=\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BB'}=\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CC'}=\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

44. $M_1(\frac{3}{2};4)$, $M_2(-1;\frac{7}{2})$, $M_3(-\frac{3}{2};\frac{5}{2})$ et $G(-\frac{1}{3};\frac{10}{3})$

45. a) $C(5;7)$ b) $C(-7;-22)$

46. $X(2\alpha;0)$ et $Y(0;2\beta)$

49. $Q(3;1)$

50. $x=5$ et $y=6$

51. $y=-\frac{46}{5}$

52. a) $C(-2;-2)$ b) $D(0;-6)$

53. $M(\frac{1}{2};1)$, $N(0;\frac{3}{4})$

55. a) $D(-4;-8;0)$ $M(0;2;\frac{9}{2})$ $N(4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2})$ $P(0;-7;\frac{3}{2})$
$Q(-4;-\frac{7}{2};\frac{3}{2})$ $G_1(\frac{4}{3};-\frac{2}{3};4)$ $G_2(-\frac{4}{3};-\frac{13}{3};2)$

b) $D(-3;10;4)$ $M(\frac{3}{2};\frac{13}{2};\frac{1}{2})$ $N(3;6;0)$ $P(-\frac{1}{2};\frac{17}{2};\frac{5}{2})$
$Q(-2;9;3)$ $G_1(\frac{5}{3};\frac{20}{3};\frac{2}{3})$ $G_2(-\frac{2}{3};\frac{25}{3};\frac{7}{3})$

56. a) $C(7;10;7)$ et $D(3;3;2)$ b) $C(7;-6;4)$ et $D(3;-8;-3)$

57. $M(2;\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2})$, $P(-2;-6;6)$ et $Q(-\frac{1}{2};-5;4)$

58. a) $M'(-4;-10;16)$ et $N'(-8;-4;10)$
b) $M''(6;-25;19)$ et $N''(-2;-13;7)$

59. a) oui b) non c) oui

60. a) non b) non c) oui d) non e) oui

61. a) 5 b) 1 ou $\frac{32}{7}$

62. $\alpha = -\frac{26}{7}$ $\beta = \frac{31}{2}$ $\gamma \in \mathbb{R}$

63. a) oui b) oui c) non

64. $z = -2$

65. $M(\frac{9}{2}; -4; \frac{11}{2})$, $N(\frac{21}{10}; -\frac{2}{5}; \frac{11}{2})$ et $P(\frac{5}{2}; -1; \frac{11}{2})$

66. $G_1(1; 0; 3)$, $G_2(2; 2; 7)$ et $G_3(-2; -6; -9)$

2 Norme, angle et produit scalaire

Le chapitre précédent a permis d'introduire le concept de vecteur et de définir deux opérations fondamentales : l'addition vectorielle et la multiplication par un nombre réel. Il s'agit maintenant de présenter les notions nécessaires à la résolution de problèmes métriques comme le calcul de la distance entre deux points ou de l'angle de deux vecteurs. Ces notions sont la norme d'un vecteur et le produit scalaire de deux vecteurs.

2.1 Norme d'un vecteur

Il a déjà été mentionné au paragraphe 1.2.2 que la norme d'un vecteur $\vec{a}$ est la longueur d'un de ses représentants. On la note $\|\vec{a}\|$.

Propriétés. *Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs et λ un nombre réel.*

1. $\|\vec{a}\| \geq 0$

2. $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

3. $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \, \|\vec{a}\|$

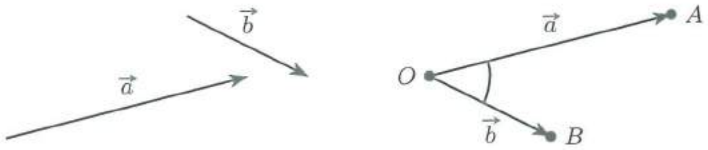
4. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ *(inégalité triangulaire)*

Un vecteur est **unitaire** si sa norme est égale à 1.

2.2 Angle de deux vecteurs

On considère deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non nuls et O un point quelconque. On sait qu'il existe exactement un point A et un point B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

L'**angle des vecteurs** $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est l'angle des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$. On peut montrer que cet angle ne dépend pas du choix du point O.



Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **orthogonaux** si leur angle est un angle droit. On note $\vec{a} \perp \vec{b}$. Le vecteur nul est par convention orthogonal à tous les vecteurs.

Une base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ de V_2 est **orthonormée** si les vecteurs qui la constituent sont unitaires et orthogonaux :

$$\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e_1} \perp \vec{e_2}.$$

Une base $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ de V_3 est **orthonormée** si les vecteurs qui la constituent sont unitaires et orthogonaux deux à deux :

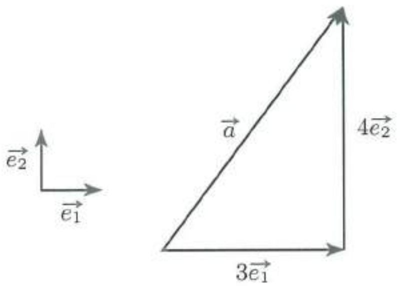
$$\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e_1} \perp \vec{e_2},\ \vec{e_1} \perp \vec{e_3} \text{ et } \vec{e_2} \perp \vec{e_3}.$$

On dira de même qu'un repère du plan ou de l'espace est orthonormé si la base associée est orthonormée.

2.3 Calcul de la norme d'un vecteur

Dorénavant, nous considérerons toujours des bases et des repères orthonormés.

Exemple. *Considérons le vecteur* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.



Comme les vecteurs $\vec{e_1}$ *et* $\vec{e_2}$ *sont orthogonaux et unitaires, on a par le théorème de Pythagore*

$$\|\vec{a}\|^2 = \|3\vec{e_1}\|^2 + \|4\vec{e_2}\|^2 = 9\|\vec{e_1}\|^2 + 16\|\vec{e_2}\|^2 = 9 + 16 = 25.$$

D'où $\|\vec{a}\| = \sqrt{25} = 5$.

Généralisons l'exemple ci-dessus à un vecteur quelconque $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. On a $\|\vec{a}\|^2 = \|a_1\vec{e_1}\|^2 + \|a_2\vec{e_2}\|^2 = a_1^2\|\vec{e_1}\|^2 + a_2^2\|\vec{e_2}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$. On en déduit

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

De manière analogue, si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur quelconque de V_3, on a

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Remarque. Si $\vec{a}$ est un vecteur non nul, alors $\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ et $-\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ sont les deux seuls vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{a}$.

Exemple. *Soit* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *On a* $\|\vec{a}\| = 3$. *Les vecteurs* $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{u'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *sont unitaires et colinéaires à* $\vec{a}$.

2.4 Distance entre deux points

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. La distance $\delta(A;B)$ entre ces points est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

On a donc

$$\delta(A;B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

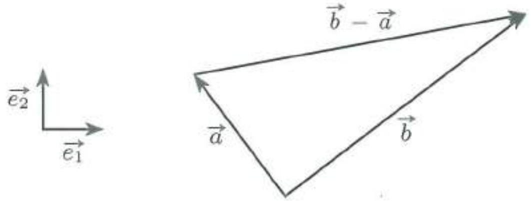
Exemple. *La distance entre les points $A(1;2)$ et $B(-2;1)$ est égale à $\delta(A;B) = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$.*

De même si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points de l'espace, on a

$$\delta(A;B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2.5 Produit scalaire

Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ donnés dans une base orthonormée de V_2. Cherchons un critère qui permette de déterminer si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux ou non.



En utilisant le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned}
\vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \\
&\Leftrightarrow (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \\
&\Leftrightarrow b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \\
&\Leftrightarrow -2a_1b_1 - 2a_2b_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le nombre réel $a_1b_1 + a_2b_2$ est nul. Ce nombre revêt donc une importance particulière et motive ainsi la définition suivante. Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le nombre réel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Un calcul analogue dans V_3 montre que $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le nombre réel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Nous avons montré ci-dessus que

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Exemple. *Les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux car $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 7 \neq 0$.*

Propriétés. *Quels que soient les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ et le nombre réel λ, on a*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *(commutativité)*
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ *(distributivité)*
3. $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$
5. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
6. $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

Remarques.

1. On prendra garde au fait que le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur, mais un nombre.
2. Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de V_2. Alors $\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ sont les deux seuls vecteurs orthogonaux à $\vec{a}$ et de même norme que $\vec{a}$.

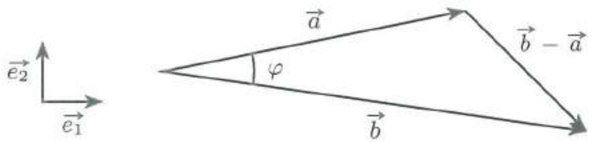
2.6 Expression trigonométrique du produit scalaire

Théorème 5. *Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls d'angle φ. On a*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi)$$

Démonstration. Le théorème du cosinus permet d'écrire

$$\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi).$$



En travaillant dans V_2 et en introduisant les composantes des vecteurs dans une base orthonormée, on obtient

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow -2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi)$$

On procède de même dans V_3. □

Le résultat précédent peut s'écrire sous la forme

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}$$

Propriétés.

1. *$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \varphi$ est aigu*
2. *$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi$ est droit*
3. *$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \varphi$ est obtus*

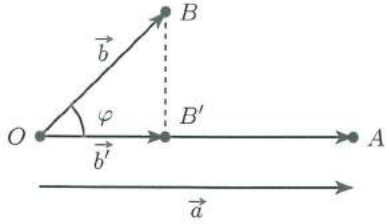
Exemple. *Calculer l'angle des vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.*

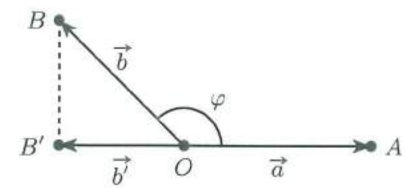
$$\cos(\varphi) = \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2 + 5^2}\sqrt{4^2 + (-5)^2}} = \frac{-17}{\sqrt{29}\sqrt{41}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 119{,}54°$$

Remarque. Le théorème précédent montre que le produit scalaire ne dépend que des normes et de l'angle des deux vecteurs. Il est donc indépendant de la base orthonormée choisie.

2.7 Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre vecteur

Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (de V_2 ou de V_3). Choisissons trois points O, A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Soit B' le point d'intersection de la droite (OA) avec sa perpendiculaire issue de B. Le vecteur $\overrightarrow{OB'} = \vec{b'}$ est la **projection orthogonale** de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.





Théorème 6.

$$\vec{b'} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a} \qquad \text{et} \qquad \|\vec{b'}\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|}$$

Démonstration. Il faut distinguer deux cas selon que l'angle φ des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est aigu ou obtus.

Si φ est aigu, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi) = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b'}\|$.

On en déduit $\|\vec{b'}\| = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$.

Comme $\vec{a}$ et $\vec{b'}$ sont de même sens, on a

$$\vec{b'} = \|\vec{b'}\| \frac{1}{\|\vec{a}\|}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}\,\frac{1}{\|\vec{a}\|}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}.$$

Si φ est obtus, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi) = -\|\vec{a}\| \, \|\vec{b'}\|$ car $\cos(\varphi)$ est négatif.

On en déduit $\|\vec{b'}\| = -\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$.

Comme $\vec{a}$ et $\vec{b'}$ sont de sens contraires, on a

$$\vec{b'} = -\|\vec{b'}\| \frac{1}{\|\vec{a}\|}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}\,\frac{1}{\|\vec{a}\|}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}.$$

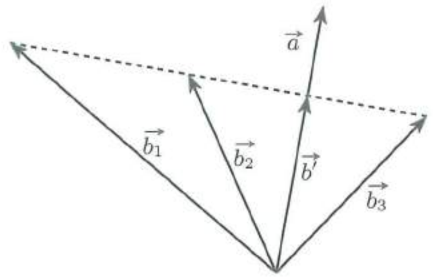
On en déduit que, dans les deux cas, on a $\|\vec{b'}\| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|}$. □

Exemple. *Considérons les vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{a} \cdot \vec{b} = -9$ *et* $\|\vec{a}\|^2 = 14$, *donc* $\vec{b'} = \dfrac{-9}{14}\,\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{9}{14} \\ -\frac{27}{14} \end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Si le vecteur $\vec{a}$ est unitaire, on obtient $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{b'}\|$.
2. Sur la figure ci-dessous, les trois vecteurs $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ et $\vec{b_3}$ ont même projection orthogonale sur le vecteur $\vec{a}$. On a $\vec{a} \cdot \vec{b_1} = \vec{a} \cdot \vec{b_2} = \vec{a} \cdot \vec{b_3} = \vec{a} \cdot \vec{b'}$.



2.8 Exercices relatifs au chapitre 2

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont données relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ ou $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ du plan ou de l'espace et les composantes des vecteurs sont relatives à la base associée.

Norme

1. Montrer que les vecteurs suivants sont unitaires.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{41}} \\ \frac{4}{\sqrt{41}} \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

2. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

a) Calculer les normes de ces vecteurs.

b) Calculer ensuite les composantes des vecteurs unitaires colinéaires respectivement aux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

3. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les normes de ces vecteurs ainsi que celles des vecteurs $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{d}$ et $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

b) Calculer ensuite les composantes des vecteurs unitaires colinéaires et de sens contraire respectivement aux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

4. Soit le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer les vecteurs unitaires colinéaires au vecteur $\vec{a}$.

   b) Déterminer les vecteurs de norme 5 colinéaires au vecteur $\vec{a}$.

5. Soit le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer les vecteurs unitaires colinéaires au vecteur $\vec{a}$.

   b) Déterminer les vecteurs de norme 9 colinéaires au vecteur $\vec{a}$.

6. Calculer la distance entre les points A et B suivants.

   a) $A(5;-3;1)$, $B(3;0;9)$ b) $A(-2;10;5)$, $B(8;4;-10)$

   c) $A(0;0;1)$, $B(5;6;7)$ d) $A(0;0;0)$, $B(8;-3;9)$

7. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

   a) $A(4;0;-3)$, $B(10;2;0)$, $C(8;-1;6)$ et $D(2;-3;3)$

   b) $A(3;4;-2)$, $B(10;5;-6)$, $C(5;9;-1)$ et $D(-2;8;3)$

8. On considère les points $A(4;-1)$ et $B(-5;11)$. Déterminer les points de la droite (AB) situés à une distance 3 de A.

9. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Déterminer k pour que le vecteur $\vec{a} + k\vec{b}$ ait une norme égale à $\sqrt{82}$.

10. On considère les points $A(1;3)$, $B(-8;12)$ et $C(1;2)$: Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

11. Vérifier que le triangle de sommets $A(-4;-2)$, $B(\frac{4}{5};\frac{22}{5})$ et $C(\frac{24}{5};-\frac{18}{5})$ est isocèle. Calculer ensuite son aire.

12. Montrer que les trois points $A(-\frac{35}{9};-\frac{40}{9};\frac{35}{9})$, $B(-5;0;-\frac{45}{9})$ et $C(-\frac{20\sqrt{2}}{9};\frac{35\sqrt{2}}{9};\frac{20\sqrt{2}}{9})$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.

13. Montrer que les points $A(7;1)$, $B(5;5)$, $C(5;-3)$ sont sur un cercle de centre $I(2;1)$.

14. Calculer les longueurs des côtés du quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A(-2;1)$, $B(5;2)$, $C(10;7)$ et $D(3;6)$. Que peut-on dire de ce quadrilatère ?

15. Montrer que les points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre régulier.

    a) $A(0;11;7)$, $B(20;10;0)$, $C(15;23;16)$ et $D(15;2;19)$

    b) $A(5;13;21)$, $B(25;12;14)$, $C(10;21;2)$ et $D(10;0;5)$

16. Un mobile part du point $A(-2;3)$ et avance en ligne droite d'une distance 7 en direction du point $B(10;-2)$. Il arrive au point P. Déterminer les coordonnées du point P.

17. On considère les points $A(4;5;8)$ et $B(3;11;5)$. Déterminer le point P de l'axe Ox tel que

    a) $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$ b) $\|\overrightarrow{AP}\| = 2\|\overrightarrow{BP}\|$

18. Déterminer le centre P et le rayon r de la sphère passant par les quatre points A, B, C et D suivants.

    a) $A(3;1;3)$, $B(0;-3;4)$, $C(3;0;4)$ et $D(1;-1;-1)$

    b) $A(5;1;6)$, $B(6;-4;-6)$, $C(3;-2;7)$ et $D(-4;-2;0)$

Produit scalaire

19. On considère les vecteurs suivants.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\quad \vec{e}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

Calculer
$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{e}$, $\vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{d}\cdot\vec{e}$, $\vec{c}\cdot\vec{d}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{d})$.

20. On considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\-9\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\-8\end{pmatrix}$.

Calculer $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$, $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$.

21. On considère les vecteurs suivants.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{f}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\quad \vec{g}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\quad \vec{h}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\quad \vec{i}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$$

a) Déterminer les paires de vecteurs orthogonaux.

b) Calculer $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$, $(\vec{b}\cdot\vec{h})\cdot\vec{c}$, $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{i}$, $(\vec{g}\cdot\vec{a})\cdot\vec{d}$, $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{d}\cdot\vec{a})$.

22. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A(0;2)$, $B(6;6)$, $C(8;3)$ et $D(2;-1)$ est un rectangle.

23. a) On considère les points $A(-4;-3)$, $B(2;0)$ et $C(0;4)$. Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

b) Trouver les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

24. Déterminer le nombre réel λ pour que le vecteur $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\\lambda\end{pmatrix}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}$.

25. On considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\11\end{pmatrix}$. Déterminer le nombre λ et le vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{a}$ tels que $\vec{b}=\lambda\vec{a}+\vec{v}$.

26. Calculer les composantes des vecteurs de norme $\frac{13}{2}$ orthogonaux au vecteur $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$.

27. Déterminer les vecteurs de norme 15 orthogonaux à $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

28. Soit $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$. Déterminer les vecteurs unitaires de première composante nulle qui sont orthogonaux à $\vec{a}$.

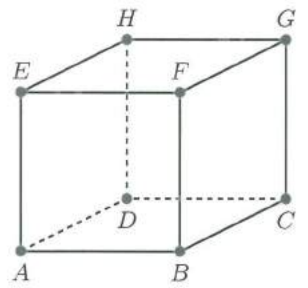
29. Déterminer les nombres réels s et t pour que le vecteur $\begin{pmatrix}7\\s\\t\end{pmatrix}$ soit orthogonal à chacun des vecteurs $\begin{pmatrix}4\\3\\8\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-5\\20\\9\end{pmatrix}$.

30. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

a) $A(-4;5;3)$, $B(-1;1;5)$, $C(5;5;4)$ et $D(2;9;2)$

b) $A(7;-2;0)$, $B(5;2;2)$, $C(10;5;1)$ et $D(12;1;-1)$

31. Montrer que les points $A(0;11;7)$, $B(10;21;2)$, $C(20;10;0)$, $D(10;0;5)$, $E(5;13;21)$, $F(15;23;16)$, $G(25;12;14)$ et $H(15;2;19)$ sont les sommets d'un cube.



32. On considère les points $A(-2;3;-2)$ et $B(-6;-1;1)$. Déterminer les points P de l'axe Ox tels que le triangle APB soit rectangle.

33. On considère les points $A(2;1)$ et $B(3;-5)$. Déterminer les sommets C et D

a) d'un carré $ABCD$ dont $[AB]$ est un côté ;

b) d'un carré $ACBD$ dont $[AB]$ est une diagonale.

34. On considère les points $B(3;4)$ et $C(1;-2)$. Trouver un point A tel que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en A.

35. On considère les points $A(-2;4)$, $B(1;-2)$ et $C(\lambda;\lambda)$. Pour quels nombres réels λ le triangle ABC est-il rectangle ? Parmi les solutions, trouve-t-on des cas où le triangle est également isocèle ?

36. On considère les points $A(1;4)$, $B(5;2)$ et $C(\lambda;5)$. Déterminer les nombres réels λ pour lesquels le triangle ABC est rectangle. Parmi les solutions, trouve-t-on des cas où le triangle est également isocèle ?

37. On considère les points $A(0;0)$ et $B(6;6)$. Trouver deux points C et D tels que le quadrilatère $ACBD$ soit un losange dont la diagonale $[CD]$ a une longueur double de celle de la diagonale $[AB]$.

38. On considère les points $A(0;0)$, $B(0;3)$, $C(3;4)$ et $D(4;0)$. Trouver les milieux respectifs R, S, T et U de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et montrer qu'ils sont les sommets d'un carré.

39. On considère les points $A(2;3)$, $B(14;12)$ et $H(10;9)$.

a) Vérifier que les points A, B et H sont alignés.

b) Déterminer le point C tel que ABC est un triangle dont l'aire est égale à 75 et tel que H soit le pied de la hauteur issue de C.

40. On considère les points $A(4;4)$ et $B(-2;3)$. Déterminer le centre C et le rayon r du cercle qui passe par A et qui est tangent à la droite (OB) en O.

41. Dans une base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$, calculer les composantes et la norme du vecteur $\vec{v}$ dans les cas suivants.

a) $\vec{v}\cdot\vec{e_1}=4$, $\vec{v}\cdot\vec{e_2}=7$ et $\vec{v}\cdot\vec{e_3}=7$

b) $\vec{v}\cdot\vec{e_1}=-5$, $\vec{v}\cdot\vec{e_2}=0$ et $\vec{v}\cdot\vec{e_3}=12$

42. Dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$, on considère les vecteurs
$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$, $\vec{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

a) Vérifier que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment une base orthonormée de V_2.

b) Exprimer $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans cette base.

c) Calculer $\vec{a}\cdot\vec{b}$ lorsque ces vecteurs sont exprimés dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$.

d) Calculer $\vec{a}\cdot\vec{b}$ lorsque ces vecteurs sont exprimés dans la base $(\vec{i};\vec{j})$.

43. On donne un vecteur $\vec{a}$ de V_3. Montrer que, dans une base orthonormée $(\vec{f_1}; \vec{f_2}; \vec{f_3})$, les composantes de $\vec{a}$ sont $a'_1 = \vec{f_1} \cdot \vec{a}$, $a'_2 = \vec{f_2} \cdot \vec{a}$ et $a'_3 = \vec{f_3} \cdot \vec{a}$.

44. Relativement à une base orthonormée $\mathcal{B}$, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{f_3} = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $\|\vec{a}\|$ et $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en utilisant les composantes dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{f_1}; \vec{f_2}; \vec{f_3})$ est une base orthonormée.

c) Calculer les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

d) Calculer $\|\vec{a}\|$ et $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en utilisant les composantes dans la base $\mathcal{B}'$.

45. a) Établir la relation $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\right)$ en développant $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

b) En déduire que le produit scalaire ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

46. Montrer que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

47. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non colinéaires.

a) Établir l'équivalence $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$

b) Interpréter géométriquement ce résultat.

48. On considère les vecteurs

$$\vec{a} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \tfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que les vecteurs $2\vec{a} + \vec{b}$, $-\vec{a} + 2\vec{b}$ et $\vec{b} - \vec{c}$ forment une base orthonormée de V_3.

49. On considère les vecteurs $\vec{a} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 23 \\ -36 \\ 24 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -36 \\ -31 \\ r \end{pmatrix}$.

Déterminer le nombre réel r et un vecteur $\vec{c}$ pour que $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ soit une base orthonormée de V_3.

50. a) Montrer que le produit scalaire de deux vecteurs ne change pas si l'on ajoute à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.

b) Interpréter ce résultat géométriquement.

Angles

51. Calculer l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans les cas suivants.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$

52. Calculer l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans les cas suivants.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

53. On considère les points $A(4; 2)$, $B(-3; 2)$, $C(0; 4)$ et $D(\frac{7}{2}; -\frac{11}{2})$.
Calculer les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{BOD}$, $\widehat{COD}$.

54. On considère les points $A(4; -2)$, $B(2; 6)$ et $C(-3; 2)$. Calculer les angles du triangle ABC.

55. On considère les points $A(5;-3;8)$, $B(1;7;2)$ et $C(-3;2;5)$. Calculer les angles du triangle ABC.

56. On considère les points $A(-2;1)$, $B(2;-2)$ et $C(4;4)$.

a) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

b) Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point $P(\frac{3}{2};\frac{3}{2})$.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

d) Calculer les angles du triangle ABC.

57. On considère deux points A et B tels que $\|\overrightarrow{OA}\| = 4$, $\|\overrightarrow{OB}\| = 2$ et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$. On pose $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

a) Calculer les normes des vecteurs $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{b} - \vec{a}$.

b) Calculer $\vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$, $2\vec{a} \cdot (3\vec{a} + 2\vec{b})$ et $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

58. On considère un parallélogramme $OACB$ et on donne $\|\overrightarrow{OA}\| = 7$, $\|\overrightarrow{OB}\| = 2$ et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$. Calculer les longueurs des diagonales de ce parallélogramme et l'angle aigu qu'elles forment.

59. Calculer les angles que la droite (OA) forme avec les axes de coordonnées dans les cas suivants.

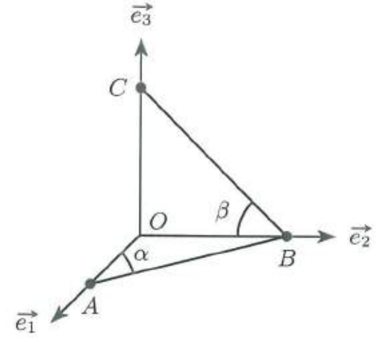
a) $A(3;4;5)$ b) $A(1;-2;0)$ c) $A(1;1;2)$

60. Soit A un point distinct de O. On appelle φ_1, φ_2 et φ_3 les angles que la droite (OA) forme respectivement avec les axes Ox, Oy et Oz. Trouver une relation trigonométrique entre les angles φ_1, φ_2 et φ_3.

61. On considère les points $E_1(1;0;0)$, $E_2(0;1;0)$, $E_3(0;0;1)$ et A tels que $\widehat{E_1OA} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{E_3OA} = \frac{\pi}{4}$. Déterminer l'angle $\widehat{E_2OA}$.

62. On considère les points $E_1(1;0;0)$, $E_2(0;1;0)$ et $E_3(0;0;1)$. Déterminer les coordonnées des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{OM}\| = 2\sqrt{2}$, $\widehat{E_1OM} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{E_2OM} = \frac{3\pi}{4}$.

63. On considère la figure ci-contre et on donne les angles $\alpha = 60°$ et $\beta = 45°$. Déterminer l'angle $\widehat{ABC}$.



Projection orthogonale

64. Calculer la norme de la projection orthogonale du vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

65. Calculer la norme de la projection orthogonale du vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

66. Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix}$

67. Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

68. Déterminer la projection orthogonale P' de P sur la droite (AB) et le symétrique P'' du point P par rapport à la droite (AB) dans les cas suivants.

a) $A(-3;4)$, $B(9;-2)$ et $P(4;-7)$

b) $A(8;-1)$, $B(2;7)$ et $P(7;17)$

69. On considère les points $A(-2;-1;2)$ et $B(-5;3;4)$.

a) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale P de A sur la droite (OB).

b) Déterminer les coordonnées du symétrique S de A par rapport à la droite (OB).

70. Déterminer le symétrique S de $A(12;0;-3)$ par rapport à la droite (OB) avec $B(-5;5;10)$.

71. On considère un tétraèdre $ABCD$ et les milieux respectifs M, N, P et Q des arêtes $[AD]$, $[BC]$, $[AB]$ et $[CD]$.

a) Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$ et que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

b) Montrer, en calculant $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$, que si les arêtes $[AC]$ et $[BD]$ ont la même longueur, les droites (MN) et (PQ) sont orthogonales.

72. On considère un triangle ABC rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A.

a) Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ de deux manières différentes.
En déduire le théorème d'Euclide : $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{BH}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|$.

b) Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})$ de deux manières différentes.
En déduire le théorème de la hauteur : $\|\overrightarrow{AH}\|^2 = \|\overrightarrow{CH}\| \cdot \|\overrightarrow{BH}\|$.

73. Soit un triangle ABC quelconque. On considère H le point d'intersection des deux hauteurs (AA') et (BB').

a) Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})$ de deux manières différentes.

b) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

74. Soient A, B, C et D quatre points quelconques du plan.

a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

b) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

75. Soit Γ le cercle circonscrit à un triangle ABC. On considère le point D de Γ diamétralement opposé à A et le point M milieu de $[BC]$.

a) Montrer que $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ et que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AC}\|^2$.

c) En déduire que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$ et que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = \|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\overrightarrow{BM}\|^2$.

76. Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC.

a) Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

b) En déduire que le point H défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ est situé sur la hauteur issue de C.

c) À l'aide de l'associativité de l'addition vectorielle, montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

d) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G est situé sur le segment $[OH]$ du triangle ABC, au tiers de ce segment à partir de O. La droite (OH) est appelée **droite d'Euler** du triangle ABC.

77. Soit $ABCD$ un tétraèdre.

a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

b) En déduire que, si deux couples d'arêtes opposées (non adjacentes) ont pour support des droites orthogonales, il en est de même pour le troisième couple d'arêtes opposées.

78. On considère un tétraèdre $ABCD$ dans lequel on a la relation $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

a) Montrer que ses arêtes opposées (non adjacentes) sont deux à deux orthogonales.

b) Montrer que la somme des carrés des longueurs de deux arêtes opposées est la même pour les trois couples d'arêtes opposées.

Réponses aux exercices du chapitre 2

2. a) $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 4$, $\|\vec{c}\| = \sqrt{73}$, $\|\vec{d}\| = 1$

b) $\pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{73}}\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

3. a) $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = \frac{3}{2}$, $\|\vec{c}\| = 3\sqrt{2}$, $\|\vec{d}\| = 13$,
$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \frac{7}{2}$, $\|\vec{a} - \vec{d}\| = 2\sqrt{35}$, $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = \frac{\sqrt{181}}{2}$

b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$, $\frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\-12\\0\end{pmatrix}$

4. a) $\pm\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ b) $\pm\frac{5}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$

5. a) $\pm\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix}$ b) $\pm\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix}$

6. a) $\sqrt{77}$ b) 19 c) $\sqrt{97}$ d) $\sqrt{154}$

8. $(\frac{11}{5}; \frac{7}{5})$ et $(\frac{29}{5}; -\frac{17}{5})$

9. $\frac{3}{2}$ ou $-\frac{23}{10}$

10. $\|\overrightarrow{AB}\| = 9\sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{181}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 1$

11. $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = 4\sqrt{5}$ et $aire = 32$

14. $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{DA}\| = 5\sqrt{2}$. C'est un losange.

16. $P(\frac{58}{13}; \frac{4}{13})$

17. a) $P(-25; 0; 0)$ b) pas de solution

18. a) $P(1; -1; 2)$, $r = 3$ b) $P(3; -2; 0)$, $r = 7$

19. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{e} = -9$, $\vec{b} \cdot \vec{a} = -8$, $\vec{d} \cdot \vec{e} = 0$,
$\vec{c} \cdot \vec{d} = -9$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d}) = 24$

20. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 61$, $\vec{b} \cdot \vec{a} = 61$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -19$,
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 61$, $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 66$

21. a) $\vec{a}$ et $\vec{d}$, $\vec{a}$ et $\vec{g}$, $\vec{b}$ et $\vec{h}$, $\vec{d}$ et $\vec{i}$

b) $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}12\\12\\12\end{pmatrix}$, $\quad (\vec{b}\cdot\vec{h})\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\quad (\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{i} = \begin{pmatrix}48\\12\\24\end{pmatrix}$,

$(\vec{g}\cdot\vec{a})\cdot\vec{d} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\quad (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{d}\cdot\vec{a}) = 0$

23. $D(-6;1)$

24. $\frac{3}{4}$

25. $\lambda = 3$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

26. $\pm\begin{pmatrix}6\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

27. $\vec{v} = \pm\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$

28. $\pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$

29. $s = 4 \quad$ et $\quad t = -5$

32. $P_1(-1;0;0)$ et $P_2(-7;0;0)$ si le triangle est rectangle en P,
$P_3(\frac{5}{2};0;0)$ si le triangle est rectangle en A et
$P_4(-\frac{31}{4};0;0)$ si le triangle est rectangle en B.

33. a) $C(9;-4)$ et $D(8;2) \quad$ ou $\quad C(-3;-6)$ et $D(-4;0)$
b) $C(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2})$ et $D(\frac{11}{2};-\frac{3}{2})$

34. $A(5;0) \quad$ ou $\quad A(-1;2)$

35. $\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 10, \quad \lambda_3 = \frac{5}{2}, \quad \lambda_4 = -2 \qquad$ isocèle pour λ_1 ou λ_3

36. $\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{13}{2}, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 4 \qquad$ isocèle pour λ_4

37. $C(9;-3), \quad D(-3;9)$

38. $R(0;\frac{3}{2}), \quad S(\frac{3}{2};\frac{7}{2}), \quad T(\frac{7}{2};2), \quad U(2;0)$

39. $C(4;17) \quad$ ou $\quad C(16;1)$

40. $C(\frac{12}{5};\frac{8}{5}) \quad r = \frac{4\sqrt{13}}{5}$

41. a) $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\7\\7\end{pmatrix} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{114} \quad$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix}-5\\0\\12\end{pmatrix} \quad \|\vec{v}\| = 13$

42. b) $\vec{a} = -\frac{7\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{j}, \quad \vec{b} = 5\sqrt{2}\,\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{j}$
c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -41 \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = -41$

44. a) $\sqrt{6}$ et $11 \qquad$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{2}\\-\frac{1}{3}\\\frac{5\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\-\frac{10}{3}\\\frac{7\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix} \qquad$ d) $\sqrt{6}$ et 11

49. $r = -\frac{12}{49} \quad$ et $\quad \vec{c} = \pm\frac{1}{49}\begin{pmatrix}24\\-12\\-41\end{pmatrix}$

51. a) 45° $\quad$ b) 138,18° $\quad$ c) 90°

52. a) 63,61° $\quad$ b) 139,56° $\quad$ c) 90°

53. $\widehat{AOB} = 119{,}74°, \quad \widehat{AOD} = 84{,}09°, \quad \widehat{BOC} = 56{,}31°$
$\widehat{BOD} = 156{,}16°, \quad \widehat{COD} = 147{,}53°$

54. $\alpha = 46{,}22° \quad \beta = 65{,}38° \quad \gamma = 68{,}40°$

55. $\alpha = 34{,}98° \quad \beta = 53{,}38° \quad \gamma = 91{,}64°$

56. a) $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 2\sqrt{10}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{5} \qquad$ c) 15
d) $\alpha = 63{,}43°$, $\beta = 71{,}57°$ et $\gamma = 45°$

57. a) $\|2\vec{a} - \vec{b}\| = 2\sqrt{13}, \quad \|\vec{a} + \vec{b}\| = 2\sqrt{7}, \quad \|\vec{b} - \vec{a}\| = 2\sqrt{3}$
b) $\vec{a}\cdot(\vec{a} - 2\vec{b}) = 8, \quad 2\vec{a}\cdot(3\vec{a} + 2\vec{b}) = 112, \quad (\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = 12$

58. $\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{67}, \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{39}, \quad$ angle $= 28,32°$

59. a) 64,9° $\quad$ 55,6° $\quad$ 45°
b) 63,4° $\quad$ 153,4° $\quad$ 90°
c) 65,9° $\quad$ 65,9° $\quad$ 35,3°

60. $\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) + \cos^2(\varphi_3) = 1$

61. $\frac{\pi}{3} \quad$ ou $\quad \frac{2\pi}{3}$

62. $M_1(\sqrt{2};-2;\sqrt{2}) \quad$ ou $\quad M_2(\sqrt{2};-2;-\sqrt{2})$

63. 52,24°

64. a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

65. a) 9 b) $\frac{46}{\sqrt{38}}$ c) $\frac{2}{9}$

66. a) $\begin{pmatrix} 3,52 \\ 2,64 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -155 \\ -93 \end{pmatrix}$

67. a) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 56 \\ -56 \\ 28 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-5 \\ \sqrt{2}-5 \\ 2-5\sqrt{2} \end{pmatrix}$

68. a) $P'(7;-1)$ et $P''(10;5)$ b) $P'(-1;11)$ et $P''(-9;5)$

69. a) $P(-\frac{3}{2};\frac{9}{10};\frac{6}{5})$ b) $S(-1;\frac{14}{5};\frac{2}{5})$

70. $S(-6;-6;-9)$

3 Équations de la droite dans le plan

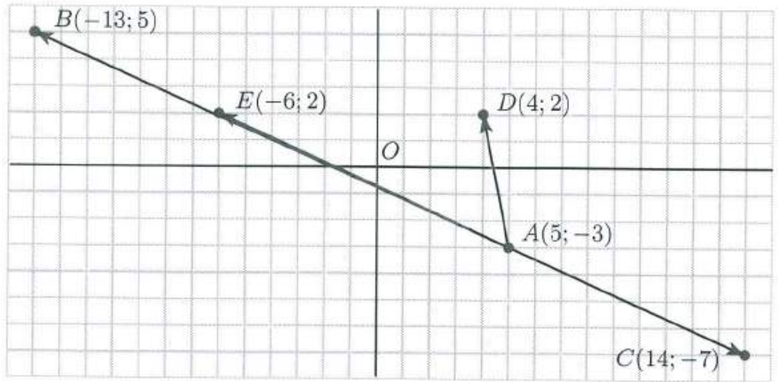
Dans les deux premiers chapitres de cet ouvrage, nous avons présenté la notion de vecteur et exposé ses propriétés essentielles.

L'ambition de ce troisième chapitre est double. Dans un premier temps, nous nous attacherons à caractériser la droite et à établir ses diverses équations en fondant notre démarche sur la notion de vecteur du plan. Par la suite, nous traiterons quelques questions d'ordre métrique telles que le calcul de l'angle de deux droites ou la distance d'un point à une droite.

3.1 Vecteur directeur d'une droite

Exemple. *Les points $A(5;-3)$, $B(-13;5)$, $C(14;-7)$, $D(4;2)$ et $E(-6;2)$ sont-ils alignés ?*

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$.



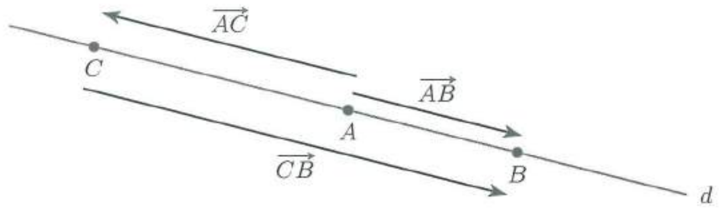
Nous constatons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, mais que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ ne leur est pas colinéaire. Nous en déduisons que les points A et B sont alignés avec C mais pas avec D.

Le dessin pourrait suggérer que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, mais le calcul montre que ce n'est pas le cas. Les points A, B et E ne sont donc pas alignés.

Dans l'exemple précédent, nous avons vu que les points A, B et C étaient alignés en remarquant que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Nous aurions aussi pu considérer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ou les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Trois points distincts A, B et C sont alignés s'ils appartiennent à une même droite d. Dans ce cas, les six vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et ont donc même direction, celle de la droite d. Ce sont des **vecteurs directeurs** de la droite d.

Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur directeur de d est aussi un vecteur directeur de d.



Une droite est déterminée par la donnée de deux points distincts ou d'un point et d'une direction, autrement dit par un point et un vecteur directeur.

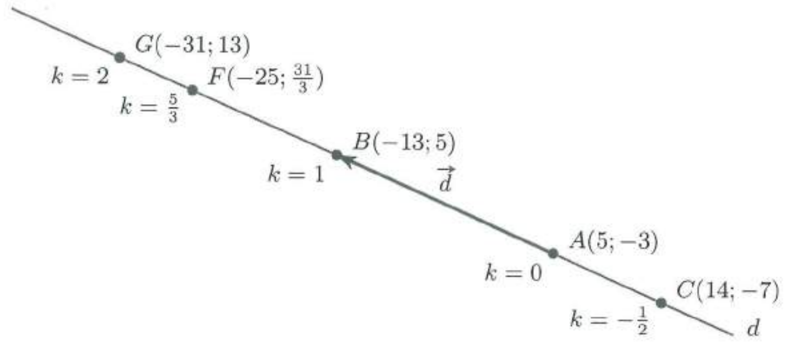
Si la droite est déterminée par deux points distincts A et B, on peut choisir comme vecteur directeur $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

Exemple. *Nous avons vu dans l'exemple précédent que les points $A(5; -3)$, $B(-13; 5)$ et $C(14; -7)$ sont alignés. Considérons $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur de la droite d passant par les points A et B.*

Le point C de d vérifie $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\vec{d}$.

En considérant le point $F(-25; \frac{31}{3})$, nous trouvons que $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{3}\vec{d}$ et donc que F appartient aussi à la droite d.

Nous pouvons rapidement trouver d'autres points de d : $\overrightarrow{AG} = 2\vec{d}$ permet de trouver $G(-31; 13)$.



On remarque que, pour tout point P de la droite, il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AP} = k\,\vec{d}$ et réciproquement.

3.2 Équations de la droite

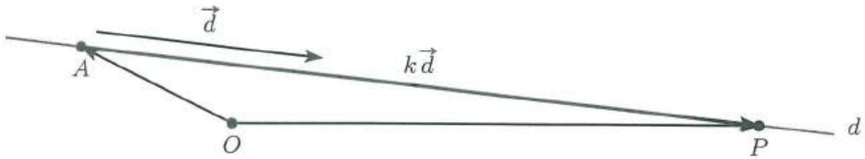
Considérons un point $A(x_A; y_A)$ d'une droite d et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de cette droite. Quelle condition doit vérifier un point quelconque $P(x; y)$ pour appartenir à la droite d ?

Pour tout point P de la droite d, les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires. Il existe donc un nombre réel k vérifiant $\overrightarrow{AP} = k\,\vec{d}$. Réciproquement, tout nombre réel k définit un point de la droite.

$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = k\vec{d}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Comme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$, on obtient l'**équation vectorielle** de la droite d.

$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$$



Les coordonnées x et y d'un point P quelconque de d doivent alors vérifier la condition suivante appelée **représentation paramétrique** de la droite.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

On obtient alors les **équations paramétriques** de la droite.

$$\begin{cases} x = x_A + kd_1 \\ y = y_A + kd_2 \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

À toute valeur du paramètre k, la première équation associe une valeur unique de l'abscisse x et la seconde une valeur unique de l'ordonnée y d'un point $P(x;y)$ de la droite d.

Réciproquement, pour tout point $P(x;y)$ de la droite d, il existe une unique valeur du paramètre k pour laquelle les coordonnées x et y sont données par les deux équations ci-dessus.

3.2.1 Équations cartésiennes

Les équations paramétriques de la droite sont

$$\begin{cases} x = x_A + kd_1 \\ y = y_A + kd_2 \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Éliminons le paramètre k par la méthode des combinaisons linéaires.

$$\begin{cases} x = x_A + kd_1 \\ y = y_A + kd_2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot d_2 \\ \cdot(-d_1) \end{array} \right.$$

On obtient

$$d_2x - d_1y = d_2x_A - d_1y_A$$

$$d_2x - d_1y - d_2x_A + d_1y_A = 0$$

En posant $a = d_2$, $b = -d_1$ et $c = d_1y_A - d_2x_A$, on obtient une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

Il s'agit de l'**équation cartésienne implicite** de la droite d.

Lorsque b est non nul, on peut isoler y dans l'équation cartésienne implicite et on obtient l'**équation cartésienne explicite** de la droite d de la forme

$$y = mx + h$$

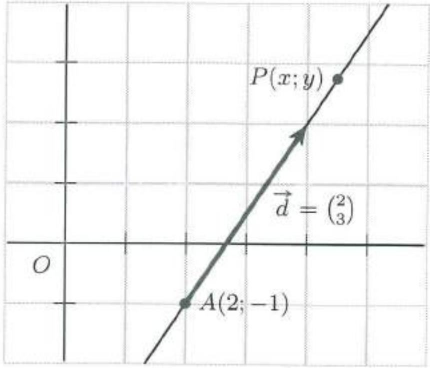
Remarques.

1. Dorénavant on parlera d'équation implicite ou d'équation explicite en omettant l'adjectif «cartésienne».

2. Il existe une infinité d'équations implicites équivalentes représentant toutes la même droite. On utilisera de préférence la forme la plus simple.
3. L'équation explicite est en revanche unique, si elle existe.
4. Les coefficients de l'équation implicite $ax + by + c = 0$ permettent de trouver un vecteur directeur de la droite.

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Exemple. *On considère une droite d passant par le point $A(2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.*



On note $P(x;y)$ un point quelconque de la droite. Les différentes descriptions de d sont

Équation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{d}$

Représentation paramétrique : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -1 + 3k \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -1 + 3k \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{array} \right.$$

$$3x - 2y = 8$$

Équation implicite : $3x - 2y - 8 = 0$

Équation explicite : $y = \frac{3}{2}x - 4$

Le point $Q(0;-4)$ appartient-il à cette droite ?

Pour le savoir, nous substituons les coordonnées de Q dans l'une des différentes descriptions de d, par exemple dans les équations paramétriques.

$$\begin{cases} 0 = 2 + 2k \\ -4 = -1 + 3k \end{cases}$$

Ce système admet pour solution $k = -1$ (même valeur pour les deux équations) et nous en concluons que Q est bien un point de d.
Nous pouvons aussi substituer les coordonnées de Q dans l'équation implicite $3 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) - 8 = 0$ ou dans l'équation explicite $-4 = \frac{3}{2} \cdot 0 - 4$.

Le point $S(-1;-5)$ appartient-il à cette droite ?

Substituons les coordonnées de S dans les équations paramétriques.

$$\begin{cases} -1 = 2 + 2k \\ -5 = -1 + 3k \end{cases}$$

La première équation donne $k = -\frac{3}{2}$ alors que la seconde donne $k = -\frac{4}{3}$. Ces deux valeurs de k étant différentes, le système est impossible et le point S n'appartient pas à la droite.
Nous laissons le lecteur contrôler que les coordonnées du point $S(-1;-5)$ ne vérifient pas non plus les autres équations.

Remarques.

1. Dans l'exemple ci-dessus, pour tout point $P(x;y)$ de la droite d, les vecteurs $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que leur déterminant est nul comme nous l'avons vu au chapitre 1. Ainsi

$$\begin{aligned} P \in d \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Det}(\overrightarrow{AP};\vec{d}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ y+1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x - 2y - 8 = 0 \end{aligned}$$

   Il s'agit de l'équation cartésienne implicite de la droite. On dispose ainsi d'une autre méthode pour obtenir une telle équation.

2. Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur directeur d'une droite est aussi un vecteur directeur de cette droite. Un choix judicieux permet de simplifier les calculs.

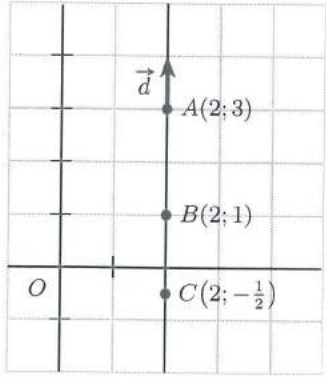
   Exemple. *Soit la droite d passant par les points $A(\frac{1}{6};-\frac{2}{3})$ et $B(2;-\frac{5}{2})$.*
   On a alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ -\frac{11}{6} \end{pmatrix} = \frac{11}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   On prendra plus volontiers $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de d.

3.2.2 Droite verticale

Exemple.
Soit la droite d donnée par le point $A(2;3)$ et par le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + k \end{cases}$$

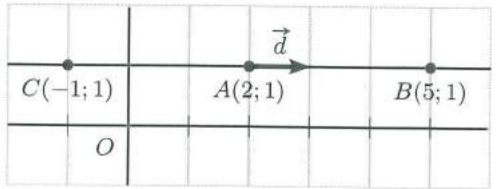
On constate que les points $B(2;1)$ et $C(2;-\frac{1}{2})$ appartiennent à cette droite, de même que tous les points d'abscisse 2.
On peut alors écrire $\begin{cases} x = 2 \\ y \text{ quelconque} \end{cases}$.



Si la première composante du vecteur $\vec{d}$ est nulle, le système d'équations $\begin{cases} x = x_A \\ y \text{ quelconque} \end{cases}$ se réduit à la seule équation $x = x_A$. Il s'agit de l'équation d'une droite parallèle à l'axe Oy. Une telle droite est **verticale**.

3.2.3 Droite horizontale

Exemple.
Soit la droite d donnée par le point $A(2;1)$ et par le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 \end{cases}$.
On constate que les points $B(5;1)$ et $C(-1;1)$ appartiennent à cette droite, de même que tous les points d'ordonnée 1. On peut alors écrire $\begin{cases} x \text{ quelconque} \\ y = 1 \end{cases}$.

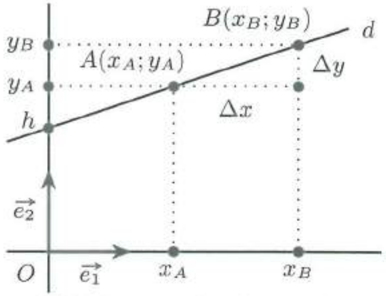


Si la deuxième composante du vecteur $\vec{d}$ est nulle, le système d'équations $\begin{cases} x \text{ quelconque} \\ y = y_A \end{cases}$ se réduit à la seule équation $y = y_A$. Il s'agit de l'équation d'une droite parallèle à l'axe Ox. Une telle droite est **horizontale**.

3.3 Pente d'une droite

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$, considérons une droite d donnée par un point $A(x_A; y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{d}$ non colinéaire au vecteur de base $\vec{e_2}$.

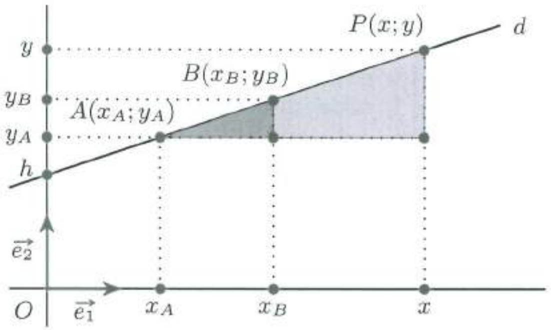
Considérons un point $B(x_B; y_B)$ de la droite d. Notons Δx la différence des abscisses des points A et B et Δy la différence de leurs ordonnées.
La **pente** m de la droite d est



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Observons que cette définition n'est pas valable lorsque la droite d est parallèle à l'axe Oy car, dans ce cas, l'abscisse du point B est égale à celle du point A et, par conséquent, Δx est nul.

Choisissons un point quelconque $P(x; y)$ de la droite d.



Le théorème de Thalès et la définition de la pente donnent

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A}.$$

D'où

$$y - y_A = m \cdot (x - x_A)$$

$$y = mx - mx_A + y_A$$

Cette dernière équation est l'équation explicite de la droite $d : y = mx + h$. Nous en déduisons le théorème suivant.

Théorème 7. *Dans l'équation explicite d'une droite, le coefficient m de x est la pente de la droite.*

Dans le cas particulier où le point B possède une abscisse égale à $x_A + 1$, on voit que $m = \Delta y$ et que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur particulier de la droite d puisque sa première composante vaut 1 et sa deuxième composante vaut m. Nous en déduisons le théorème suivant.

Théorème 8. *Un vecteur directeur particulier d'une droite de pente m est*

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

Théorème 9. *Deux droites de même pente sont parallèles. Réciproquement, deux droites parallèles non verticales ont même pente.*

Théorème 10. *Considérons deux droites non verticales d_1 et d_2 de pentes m_1 et m_2. On a*

$$d_1 \perp d_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 m_2 = -1$$

Démonstration. Les vecteurs directeurs respectifs des droites d_1 et d_2 sont $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$.

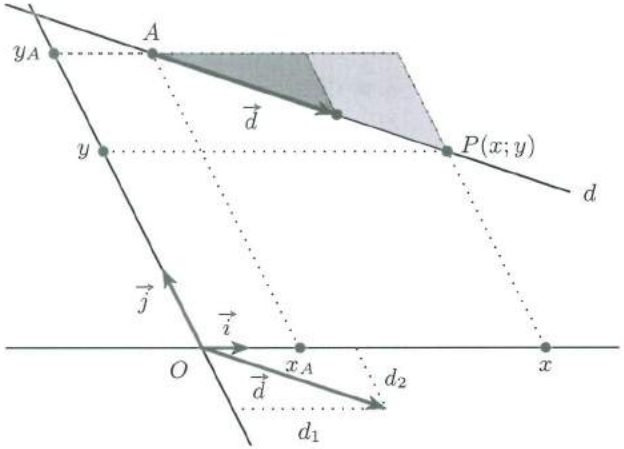
On a $d_1 \perp d_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{d_1} \perp \vec{d_2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + m_1 m_2 = 0.$$

□

Complément. Nous avons fait le choix dans ce livre de travailler dans des repères orthonormés. Il n'est toutefois pas nécessaire de munir le plan d'un repère orthonormé pour définir la notion de pente d'une droite. Si on se place dans un repère quelconque, on utilise plus volontiers le terme de coefficient directeur d'une droite.

Dans un repère quelconque $(O; \vec{i}; \vec{j})$, considérons la droite d passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ où d_1 et d_2 sont tous deux non nuls.



Pour tout point $P(x;y)$ distinct de A de la droite d, le théorème de Thalès donne

$$\frac{x-x_A}{d_1}=\frac{y-y_A}{d_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d_2}{d_1}=\frac{y-y_A}{x-x_A}$$

Le rapport $m=\dfrac{d_2}{d_1}$ est le **coefficient directeur** de la droite d.

On observe que donner la droite d par le point A et par le vecteur directeur $\vec{d}$ revient à donner d par A et par son coefficient directeur m.

On peut donc écrire $m=\dfrac{y-y_A}{x-x_A}$.

Cette égalité est équivalente à $y-y_A=m(x-x_A)$.

Remarques.

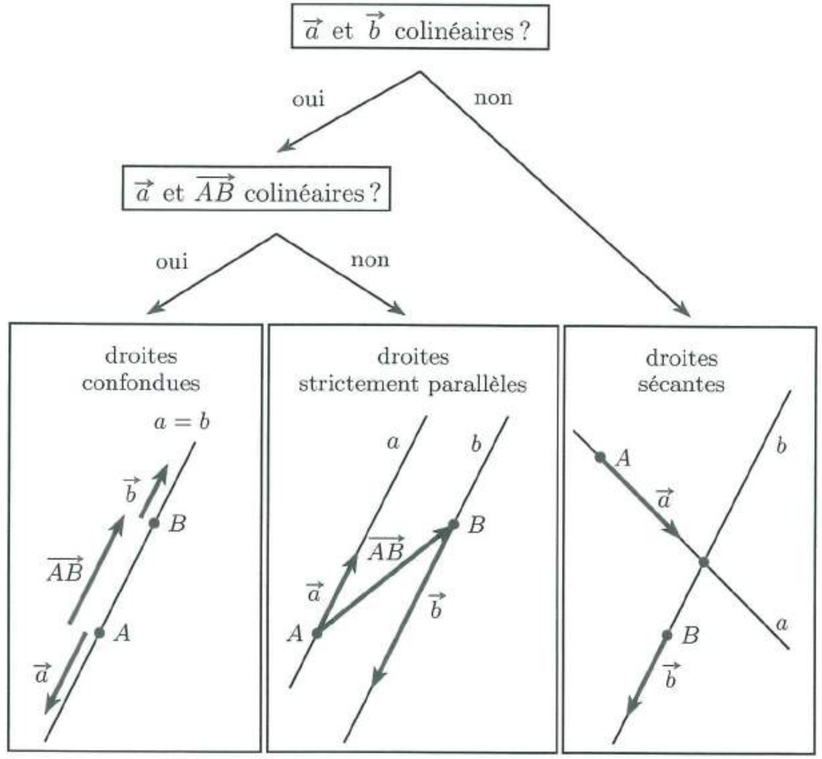
1. Le vecteur $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d de coefficient directeur m.
2. Dans le cas où la droite d est parallèle à la direction du vecteur $\vec{i}$, son coefficient directeur est nul et $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
3. Dans le cas où la droite d est parallèle à la direction du vecteur $\vec{j}$, son coefficient directeur n'est pas défini.

3.4 Positions relatives de deux droites

Dans le plan, deux droites peuvent être sécantes, strictement parallèles ou confondues. Comment distinguer ces trois situations par calcul ?

Soient une droite a passant par A et de vecteur directeur $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ et une droite b passant par B et de vecteur directeur $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$.

Nous pouvons décrire leur position relative en utilisant le schéma ci-dessous.



Remarque. Les droites a et b sont parallèles si et seulement si il existe un nombre réel k non nul tel que $a_2=ka_1$ et $b_2=kb_1$.

Exemples. *Trouver les positions relatives des droites suivantes.*

1. $a : y = -3x + 2$ et $b : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

   On trouve $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *qui sont colinéaires.*

   En posant $x = 0$ *dans l'équation de* a*, on trouve* $A(0; 2)$ *et en posant* $t = 0$ *dans l'équation de* b*, on trouve* $B(2; 4)$*. Donc* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$*. Ce vecteur n'est pas colinéaire à* $\vec{a}$*.*

   Les deux droites sont donc strictement parallèles.

2. $a : y = 2x - 4$ et $b : x - 3y - 2 = 0$

   On trouve $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *qui ne sont pas colinéaires.*

   Les deux droites sont donc sécantes. On trouve leur intersection en résolvant le système d'équations

   $$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases}.$$

   On obtient $x = 2$ *et* $y = 0$*. Le point d'intersection est donc* $I(2; 0)$*.*

3.5 Angle de deux droites

Soient a et b deux droites sécantes de vecteurs directeurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Au chapitre 2, nous avons établi que $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}$ où φ est l'angle aigu ou obtus des droites a et b.

Remarques.

1. La mesure de l'angle aigu est obtenue par $\cos(\varphi) = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}$.
2. Si a et b sont parallèles, on obtient un angle de $0°$.

Exemple. *Considérons les droites décrites par* $a : \begin{cases} y = 3 - 5k \\ y = -2 + k \end{cases}$ *et* $b : 3x - 2y + 4 = 0$*. Un de leurs angles est donné par*

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{26}\,\sqrt{13}} = \frac{-7}{13\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 112{,}38°$$

Il s'agit de l'angle obtus.
L'angle aigu vaut $\varphi' = 180° - \varphi \approx 67{,}62°$*.*

3.6 Vecteur normal à une droite

Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{d}$. Un **vecteur normal** à la droite d est un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{d}$, c'est-à-dire tel que $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$.

Exemple. *Trouver l'équation de la droite* d *passant par* $A(5; 7)$ *et de vecteur normal* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$*.*

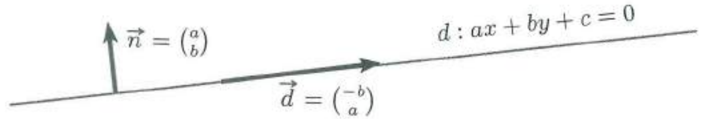
Soit $P(x; y)$ *un point quelconque de* d*. On a*

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 7 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-5) - 3(y-7) = 0$$

L'équation de la droite est donc $2x - 3y - 11 = 0$*.*

On constate que les coefficients de x *et de* y *sont les composantes du vecteur* $\vec{n}$*.*

Théorème 11. *Le vecteur* $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *est un vecteur normal à la droite* d *d'équation implicite* $ax + by + c = 0$*.*



Remarques.

1. Une droite d est entièrement déterminée par la donnée d'un de ses points A et d'un vecteur normal $\vec{n}$.
2. Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à d.
3. Les angles de deux droites peuvent être calculés à l'aide de vecteurs normaux.

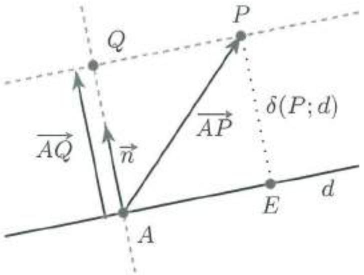
Exemple. *On donne le point* $A(-3; 5)$ *et le vecteur* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ *normal à* d*. En vertu de ce qui précède, une équation implicite de la droite* d *est* $x - 4y + c = 0$*.*

Les coordonnées $x = -3$ *et* $y = 5$ *du point* A *vérifient cette équation. On en déduit que* $c = 23$*. Une équation implicite de* d *est donc* $x - 4y + 23 = 0$*.*

3.7 Distance d'un point à une droite

Soient une droite d et un point P quelconque. Nous voulons calculer la distance $\delta(P;d)$ du point P à la droite d.

Considérons un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite d et un point A de cette droite.



La distance du point P à la droite d est $\delta(P;d) = \|\overrightarrow{AQ}\|$ où $\overrightarrow{AQ}$ est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AP}$ sur le vecteur normal $\vec{n}$.

En utilisant le théorème 6 du chapitre 2, on trouve

$$\delta(P;d) = \|\overrightarrow{AQ}\| = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Théorème 12. *Soient la droite d d'équation implicite $ax+by+c=0$ et $P(x_P;y_P)$ un point du plan. On a*

$$\delta(P;d) = \frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Démonstration.

Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d. Soit $A(x_A;y_A)$ un point de d. Alors $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \end{pmatrix}$ et on a

$$\begin{aligned}\delta(P;d) &= \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_P-x_A)+b(y_P-y_A)|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{|ax_P+by_P-(ax_A+by_A)|}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

Les coordonnées du point A vérifient l'équation de la droite d.
Par conséquent $ax_A+by_A+c=0$, c'est-à-dire $ax_A+by_A=-c$ et donc $\delta(P;d) = \dfrac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. □

Exemple. *On considère la droite d d'équation $x-4y+23=0$, le point $P_1(-3;10)$ et le point $P_2(-13;\frac{5}{2})$. On a*

$$\delta(P_1;d) = \frac{|1\cdot(-3)-4\cdot10+23|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}} = \frac{20}{\sqrt{17}} = \frac{20\sqrt{17}}{17}$$

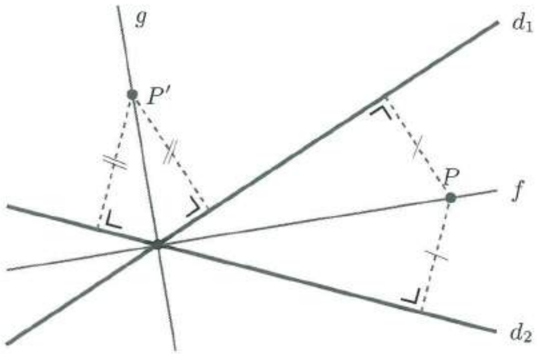
$$\delta(P_2;d) = \frac{|-13-10+23|}{\sqrt{17}} = 0$$

Le point P_2 appartient donc à la droite d.

3.8 Bissectrices de deux droites

On cherche à établir les équations des bissectrices f et g de deux droites sécantes $d_1 : a_1x+b_1y+c_1=0$ et $d_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$.

Un point $P(x;y)$ appartient à une bissectrice si et seulement si $\delta(P;d_1) = \delta(P;d_2)$.



D'où $\dfrac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \dfrac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

Les équations des bissectrices sont donc

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

et

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = -\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

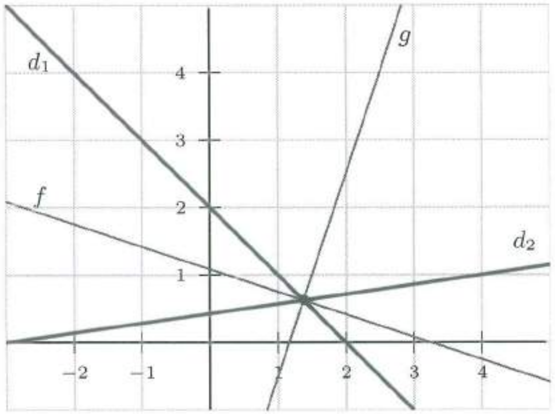
Exemple 1. *Considérons les droites d_1 et d_2 d'équations implicites respectives $x + y - 2 = 0$ et $x - 7y + 3 = 0$.*
Le point $P(x; y)$ appartient à l'une ou l'autre des bissectrices f ou g des droites d_1 et d_2 si et seulement si

$$\frac{x+y-2}{\sqrt{2}} = \pm\frac{x-7y+3}{5\sqrt{2}}$$

De l'égalité $\dfrac{x+y-2}{\sqrt{2}} = \dfrac{x-7y+3}{5\sqrt{2}}$, on déduit que l'équation de f est $4x + 12y - 13 = 0$.

De l'égalité $\dfrac{x+y-2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{x-7y+3}{5\sqrt{2}}$, on déduit que l'équation de g est $6x - 2y - 7 = 0$.

Ces bissectrices sont perpendiculaires car $\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = 0$. De manière générale, les bissectrices de deux droites sont perpendiculaires.



Exemple 2. *On considère le triangle ABC avec $A(4; 6)$, $B(5; -1)$ et $C(-3; -1)$. On veut déterminer une équation de la bissectrice intérieure issue du sommet A de ce triangle.*
Équation de la droite (AB) : $7x + y - 34 = 0$

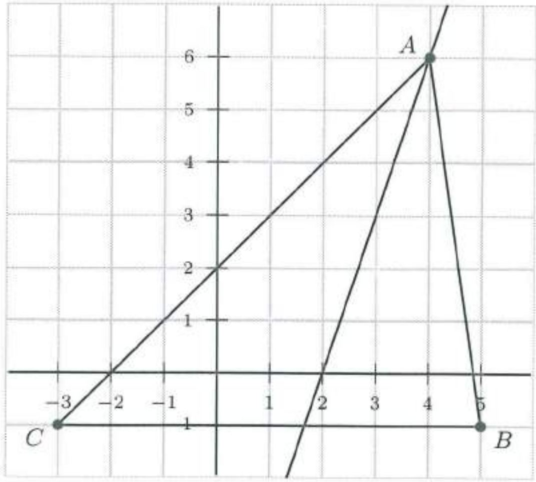
Équation de la droite (AC) : $x - y + 2 = 0$

Les équations des bissectrices sont $\dfrac{7x+y-34}{5\sqrt{2}} = \pm\dfrac{x-y+2}{\sqrt{2}}$.

L'équation $\dfrac{7x+y-34}{5\sqrt{2}} = \dfrac{x-y+2}{\sqrt{2}}$ conduit à $y = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3}$. Il s'agit de l'équation d'une droite de pente négative.

L'équation $\dfrac{7x+y-34}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{x-y+2}{\sqrt{2}}$ conduit à $y = 3x - 6$. Il s'agit de l'équation d'une droite de pente positive.

Cette seconde équation est celle que nous cherchions comme le montre le dessin.
Nous remarquons ainsi que l'équation de la bissectrice de pente positive ne provient pas forcément du choix du signe + de l'équation initiale.



On peut également déterminer l'équation d'une bissectrice intérieure d'un triangle à partir de sa construction à la règle et au compas. En effet lorsqu'on additionne deux vecteurs de même norme, leur somme est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle qu'ils forment (car une diagonale d'un losange est également une de ses bissectrices).

Ainsi, pour déterminer un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$, on prend un vecteur $\overrightarrow{AB'}$ de même direction et même sens que $\overrightarrow{AB}$ et un vecteur $\overrightarrow{AC'}$ de même direction et même sens que $\overrightarrow{AC}$ tels que $||\overrightarrow{AB'}|| = ||\overrightarrow{AC'}||$ (on choisit généralement les vecteurs unitaires $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{||\overrightarrow{AB}||} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{||\overrightarrow{AC}||} \cdot \overrightarrow{AC}$). Le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ est alors un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle α. Il suffit ensuite de considérer le point A pour obtenir l'équation de cette bissectrice.

Exemple. *Soient les points* $A(4;8)$, $B(4;2)$ *et* $C(1;4)$. *Pour déterminer la bissectrice de l'angle* $\alpha = \widehat{BAC}$, *on calcule*

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Un vecteur directeur de la bissectrice est alors donné par

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix} \text{ colinéaire à } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'équation de la bissectrice de l'angle α *est* $b_\alpha : y = 3x - 4$.

3.9 Exercices relatifs au chapitre 3

Équations de la droite

1. Déterminer α et β afin que les points $A(2;-3)$, $B(4;7)$, $C(-1;\alpha)$ et $D(\beta-1;1-2\beta)$ soient alignés.

2. On donne une droite d par la représentation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Représenter les points de d correspondant aux valeurs suivantes du paramètre k : -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; 1 ; 2 ; π.

3. Déterminer si les points $A(6;-1)$, $B(3;-2)$, $C(1;0)$, $D(-9;8)$, $E(-6;\frac{31}{5})$ et $F(-\frac{3}{2};4)$ appartiennent à la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1-5k \\ y = 2+3k \end{cases}$.

4. Trouver une représentation paramétrique de la droite

a) qui passe par $A(3;5)$ et qui a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) qui passe par $A(-3;-2)$ et $B(4;-5)$;

c) qui passe par $A(5;2)$ et qui est parallèle à la droite (BC), où $B(1;1)$ et $C(-3;2)$;

d) qui passe par $A(0;-2)$ et qui est parallèle à l'axe Ox ;

e) qui passe par $A(8;12)$ et qui est parallèle à l'axe Oy.

5. On donne une droite d par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le point de d

a) situé sur l'axe Ox et celui situé sur l'axe Oy ;

b) qui possède une abscisse égale à 7 ;

c) qui possède une ordonnée égale à -2 ;

d) dont les deux coordonnées sont égales.

6. Déterminer si les points $A(1;-3)$, $B(3;2)$, $C(2;-4)$, $D(-3;-13)$, $E(\frac{1}{2};-\frac{17}{4})$ et $F(-\frac{4}{3};-\frac{5}{6})$ appartiennent à la droite d'équation implicite $5x-2y-11=0$.

7. Calculer les coordonnées de quelques points situés sur chacune des droites suivantes et dessiner ces droites.

a) $x+2y-12=0$ b) $y=\frac{3}{5}x+3$ c) $4x-3y=0$

d) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}$ e) $y-4=0$ f) $2x+7=0$

8. On donne la droite d d'équation $2x+5y-20=0$. Déterminer le point de la droite d

a) situé sur l'axe Ox ;

b) situé sur l'axe Oy ;

c) qui possède une abscisse égale à 3 ;

d) qui possède une ordonnée égale à 15 ;

e) dont les deux coordonnées sont égales ;

f) qui est situé sur la droite d'équation $3x-2y-11=0$.

9. Soit une droite d passant par $A(-3;1)$ de vecteur directeur $\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

a) Trouver des équations paramétriques de d et calculer les coordonnées des points correspondant aux valeurs suivantes du paramètre : $1\,;0\,;2\,;-1\,;-3\,;\frac{3}{2}$.

b) Dessiner cette droite à l'aide des points trouvés ci-dessus.

c) Trouver l'équation explicite et l'équation implicite de cette droite.

d) Le point $C(12;5)$ appartient-il à cette droite ?

e) Trouver les nombres α et β pour que les points $D(15;\alpha)$ et $E(\beta;-7)$ appartiennent à la droite d.

10. Trouver des équations paramétriques et l'équation explicite de la droite passant par $A(5;2)$ et $B(8;-1)$.

11. Trouver l'équation implicite, puis explicite, de chacune des droites données à l'exercice 4.

12. a) Trouver l'équation explicite de la droite passant par $A(5;-7)$ et $B(-4;8)$.

b) Les points $C(\frac{1}{2};0)$ et $D(-\frac{3}{5};\frac{7}{3})$ appartiennent-ils à cette droite ?

c) Trouver le point E de cette droite dont l'ordonnée est $-\frac{1}{2}$.

13. Trouver l'équation implicite de la droite passant par

a) $A(-5;3)$ et $B(7;3)$ b) $A(4;6)$ et $B(4;-2)$

14. Déterminer la pente m et un vecteur directeur $\vec{d}$ des droites suivantes.

a) $5x-6y-7=0$ b) $x+y-5=0$

c) $4x-3y=0$ d) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{15}=0$

e) $\sqrt{5}x-4y-5=0$ f) $3y-8=0$

g) $x=0$ h) $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-3}{4}$

15. Trouver l'équation implicite de la droite d donnée par les systèmes suivants.

a) $\begin{cases}x=4-3k\\y=1+k\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=7-4k\\y=3+5k\end{cases}$

16. Trouver une représentation paramétrique de chacune des droites données à l'exercice 14.

17. Montrer que les descriptions suivantes définissent toutes la même droite.

a) $3x+2y-11=0$ b) $6x+4y-22=0$

c) $\begin{cases}x=3+2k\\y=1-3k\end{cases}$ d) $\begin{cases}x=5-2k\\y=-2+3k\end{cases}$

e) $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{11}{2}$ f) $\dfrac{x-9}{-2}=\dfrac{y+8}{3}$

18. a) Donner l'équation explicite de la droite de pente 3 et passant par $A(2;-5)$.

b) Calculer les coordonnées de deux autres points B et C de cette droite.

c) Déterminer les points d'intersection de cette droite avec l'axe Ox et avec l'axe Oy.

19. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles dans les cas suivants ?

a) $A(1;1)$, $B(1;0)$, $C(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ et $D(\frac{1}{2};0)$

b) $A(1;-1)$, $B(1;1)$, $C(-1;-\frac{1}{2})$ et $D(2;1)$

c) $A(1;-1)$, $B(2;-1)$, $C(1;-1)$ et $D(2;1)$

20. a) Soit d la droite d'équation $2x-3y+7=0$. Déterminer l'équation explicite de la parallèle à d passant par le point $A(2;-5)$.

b) Soit d la droite d'équation $x-2y+4=0$. Déterminer l'équation explicite de la parallèle à d passant par le point $A(4;-10)$.

21. Montrer que l'équation de toute droite parallèle à la droite d'équation $ax+by+c=0$ peut s'écrire sous la forme $ax+by+d=0$ où $d \in \mathbb{R}$.

22. Indiquer si les droites d_1 et d_2 ci-dessous sont sécantes, strictement parallèles ou confondues.

a) $d_1 : 4x-2y-1=0$ et $d_2 : -2x+y-5=0$

b) $d_1 : 3x+y-8=0$ et $d_2 : y=3x-\frac{3}{2}$

c) $d_1 : 8x-4y-2=0$ et $d_2 : -4x+2y+1=0$

d) $d_1 : \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{4}$ et $d_2 : 3x+4y-5=0$

23. Indiquer si les droites d_1 et d_2 ci-dessous sont sécantes, strictement parallèles ou confondues.

a) $d_1 : -x+2y-3=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=-1+2k \\ y=1+k \end{cases}$

b) $d_1 : 3x+2y-7=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=4+2k \\ y=3-3k \end{cases}$

c) $d_1 : 6x+y-9=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=1-k \\ y=3+2k \end{cases}$

d) $d_1 : \begin{cases} x=7+k \\ y=8-k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x=5-3t \\ y=10+3t \end{cases}$

e) $d_1 : y=\dfrac{1}{2}x-2$ et $d_2 : \begin{cases} x=6-2t \\ y=3-t \end{cases}$

f) $d_1 : \begin{cases} x=2k \\ y=3+5k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x=4+3k \\ y=1-2k \end{cases}$

Intersection de deux droites

24. Déterminer les points d'intersection des droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 4x-3y-6=0$ et $d_2 : 6x+y-20=0$

b) $d_1 : y=\frac{3}{7}x-\frac{57}{7}$ et $d_2 : 2x+3y+8=0$

c) $d_1 : 4x+5y+33=0$ et $d_2 : y=3x-56$

d) $d_1 : 4x-6y-3=0$ et $d_2 : y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

e) $d_1 : x-2y+26=0$ et $d_2 : 5y+8=0$

f) $d_1 : 2x-7y+9=0$ et $d_2 : \dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-1}{2}$

g) $d_1 : -7x-8y+2=0$ et $d_2 : 4x-3y+4=0$

h) $d_1 : 3x+2y-4=0$ et $d_2 : \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-6}{-4}$

25. Déterminer les points d'intersection des droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 2x-9y-8=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=16-4k \\ y=-6+2k \end{cases}$

b) $d_1 : 5x+4y-7=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=7-4k \\ y=1+k \end{cases}$

c) $d_1 : 2x+3y+5=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=7-3k \\ y=3+2k \end{cases}$

d) $d_1 : x+y-3=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=1+k \\ y=2+k \end{cases}$

26. Déterminer les points d'intersection des droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

b) $d_1 : \begin{cases} x = -2 + k \\ y = -5 + 2k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$

c) $d_1 : \begin{cases} x = 8 - \frac{3}{2}k \\ y = 1 + \frac{1}{2}k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 3k \\ y = \frac{7}{2} - k \end{cases}$

27. Déterminer les points d'intersection des droites (AB) et (CD) ci-dessous.

a) $A(0;1)$, $B(0;0)$, $C(1;1)$, $D(-1;\frac{1}{2})$

b) $A(0;1)$, $B(2;\frac{1}{2})$, $C(1;-\frac{1}{2})$, $D(0;\frac{1}{2})$

c) $A(\frac{1}{2};1)$, $B(0;\frac{1}{2})$, $C(1;0)$, $D(-1;\frac{1}{2})$

d) $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(\frac{1}{2};1)$, $D(1;\frac{1}{2})$

e) $A(2;3)$, $B(-1;2)$, $C(-9;-3)$, $D(-7;-7)$

f) $A(4;4)$, $B(5;1)$, $C(1;-2)$, $D(-1;4)$

28. On considère la droite d passant par $A(-1;5)$ et $B(4;6)$ et la droite d' passant par $C(7;3)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le point d'intersection I de ces deux droites.

29. Soient les points $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

a) Déterminer le point d'intersection K des droites (AD) et (BC) et le point d'intersection L des droites (AC) et (BD), ainsi que le milieu M du segment $[AB]$.

b) Montrer que les points K, L et M sont alignés.

30. Soient les points $A(0;1)$, $B(1;2)$, $C(1;0)$ et $D(0;2)$. .

a) Déterminer le point d'intersection I des droites (AB) et (CD).

b) Pour quel nombre réel λ la droite passant par les points $P(\lambda;0)$ et $Q(1;1)$ contient-elle aussi le point I ?

31. Soient les points $A(0;0)$, $B(2;-1)$, $C(4;0)$, $D(5;2)$, $E(4;4)$, $F(2;5)$, $G(0;4)$ et $H(-1;2)$.

a) Trouver les coordonnées du milieu P de $[BD]$ et du milieu N de $[FH]$.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection M des droites (AE) et (GC).

c) Les points M, N et P sont-ils alignés ?

32. Soient les points $A(1;0)$, $B(\frac{3}{2};0)$, $C(3;0)$, $D(0;1)$, $E(0;2)$ et $F(0;3)$.

a) Déterminer le point d'intersection X des droites (AE) et (BD), le point d'intersection Y des droites (AF) et (CD) et le point d'intersection Z des droites (CE) et (BF).

b) Montrer que les points X, Y et Z sont alignés [1].

33. Soient les points $A(3;0)$, $A'(9;0)$, $B(1;1)$, $B'(9;9)$, $C(0;6)$ et $C'(0;9)$.

a) Vérifier que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourrantes.

b) Soient I le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$, J le point d'intersection des droites (AC) et $(A'C')$ et K le point d'intersection des droites (BC) et $(B'C')$. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

c) Montrer que les points I, J et K sont alignés [2].

34. Les supports des côtés d'un triangle sont les droites d'équation $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$ et $x - 2 = 0$. Trouver les coordonnées des sommets de ce triangle.

---

1. Cet exercice illustre le théorème de Pappus :
Soient d_1 et d_2 deux droites, A, B et C trois points distincts de d_1, D, E et F trois points distincts de d_2. Soient X le point d'intersection des droites (AE) et (BD), Y le point d'intersection des droites (AF) et (CD) et Z le point d'intersection des droites (CE) et (BF). Les points X, Y et Z sont alignés.

2. Cet exercice illustre le théorème de Desargues :
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en un point O. Soient I, J et K les points d'intersection des paires de côtés correspondant dans chaque triangle : ces trois points sont alignés. Réciproquement, si ces points sont alignés, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point O.

35. Les supports des côtés d'un triangle sont les droites d'équation $y = 11 - 3x$, $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + k \end{cases}$ et $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{-3}$. Trouver les coordonnées des sommets de ce triangle.

36. Soit le triangle de sommets $A(3;1)$, $B(7;3)$ et $C(4;8)$. Trouver l'équation de la médiane issue de C.

37. On donne trois sommets consécutifs $A(1;2)$, $B(6;0)$ et $C(9;2)$ d'un parallélogramme $ABCD$. Trouver les équations des côtés et des diagonales de ce parallélogramme, ainsi que les coordonnées du quatrième sommet D.

38. Un parallélogramme $ABCD$ est donné par les équations de deux côtés et d'une diagonale :

$(AB) : x - 2y - 4 = 0$ $\qquad$ $(BC) : x + 5y + 24 = 0$

$(AC) : 2x + 3y + 13 = 0$

Trouver l'équation de la seconde diagonale et les coordonnées des sommets.

39. Déterminer les équations des médianes et les coordonnées du centre de gravité G des triangles donnés par les équations suivantes.

a) $2x - 3y + 5 = 0$, $5x - 2y - 26 = 0$ et $3x + y - 9 = 0$

b) $2x - y = 0$, $2x + y - 12 = 0$ et $y = 0$

40. Un quadrilatère $ABCD$ est donné par les équations de ses côtés :

$(AB) : 7x + 2y - 20 = 0$ $\qquad$ $(BC) : y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

$(CD) : 5x - 2y + 14 = 0$ $\qquad$ $(DA) : y = -\frac{1}{8}x - \frac{7}{2}$

a) Déterminer les coordonnées des sommets du quadrilatère.

b) Déterminer les équations des diagonales.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des diagonales.

41. Soit le triangle de sommets $A(3;1)$, $B(-2;5)$ et $C(-6;-1)$.

a) Trouver l'équation explicite de la droite (AB).

b) Trouver l'équation explicite de la droite (BC).

c) Trouver l'équation implicite de la médiane issue de A.

d) Trouver l'équation implicite de la médiane issue de B.

e) En déduire les coordonnées du centre de gravité du triangle.

f) Vérifier que les trois médianes se coupent en un même point.

42. On considère les points $A(2;4)$, $B(5;6)$ et $P(10;6)$, ainsi que les droites $b : \begin{cases} x = 1 + 6k \\ y = 4k \end{cases}$ et $c : 2x + y - 10 = 0$.

a) Trouver une représentation paramétrique de la droite a passant par A et B.

b) Trouver l'équation explicite de la droite a.

c) Trouver l'équation implicite de la droite b.

d) Trouver une représentation paramétrique de la droite c.

e) Trouver le point d'intersection des droites b et c.

f) Déterminer si le point P appartient à la droite b.

g) Chercher le point C d'abscisse 6 de la droite c.

h) Montrer que les droites a et b sont parallèles.

i) Trouver l'équation explicite de la droite parallèle à c passant par l'origine.

43. On donne les points $A(1;0)$, $B(0;\lambda)$ et $C(1-\lambda;\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

a) Représenter sur une même figure les points correspondant à $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 4$.

b) Quel est le lieu géométrique des points d'intersection des droites (AB) et (OC) ?

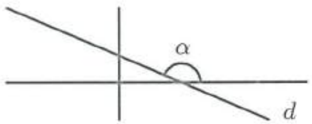
Angle de deux droites

44. a) On considère une droite de pente m positive formant un angle aigu α avec l'axe Ox. Démontrer que $m = \tan(\alpha)$.

b) Compléter le tableau suivant.

α			$45°$	$30°$		
m	0,1	$\frac{1}{2}$			300%	$\sqrt{3}$

c) Que se passe-t-il si la pente m est négative ?



45. Calculer l'angle aigu des droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 3x - 5y + 4 = 0$ et $d_2 : x + y - 2 = 0$

b) $d_1 : 5x - 8\sqrt{3}y + 7 = 0$ et $d_2 : 3x + 4\sqrt{3}y - 3 = 0$

c) $d_1 : 2x + 4y - 5 = 0$ et $d_2 : \begin{cases} x = a + k \\ y = b + \sqrt{3}k \end{cases}$

46. Déterminer l'équation implicite de la droite d_1 passant par le point

a) $P(3; -4)$ et formant avec la droite d_2 d'équation $3x + 2y - 5 = 0$ un angle de $45°$;

b) $P(-1; 2)$ et formant avec la droite d_2 d'équation $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$ un angle de $60°$.

Vecteur normal

47. Soit la droite d'équation $3x + y - 17 = 0$. Trouver les vecteurs directeurs unitaires et les vecteurs normaux unitaires à cette droite.

48. Trouver l'équation de la droite passant par un point P et perpendiculaire à une droite d dans les cas suivants.

a) $P(5; 2)$ et $d : 3x - 5y + 4 = 0$

b) $P(-4; 6)$ et $d : y = 52 - \frac{1}{2}x$

c) $P(-\frac{5}{3}; -\frac{9}{8})$ et $d : -4x + 5y = 0$

d) $P(7; -3)$ et $d : 15y + 8 = 0$

e) $P(8; -3)$ et $d : \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+8}{2}$

f) $P(\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$ et $d : \begin{cases} x = -3 + 8k \\ y = 5 + 3k \end{cases}$

49. Déterminer le nombre k pour que les droites $kx + (k-1)y = 2(k+2)$ et $3kx - (3k+1)y = (5k+4)$ soient perpendiculaires. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

50. Les équations de deux côtés d'un rectangle sont respectivement $2x - y + 11 = 0$ et $2x - y + 1 = 0$. L'équation d'une de ses diagonales est $y = 3$. Trouver les coordonnées des sommets de ce rectangle.

51. Déterminer les coordonnées des sommets B, C et D du rectangle $ABCD$ connaissant le sommet $A(2; 5)$, le centre de symétrie $S(\frac{13}{2}; \frac{17}{2})$ et la pente $m = -\frac{2}{3}$ de la droite (AB).

52. Des perpendiculaires sont abaissées du point $P(9; 5)$ sur les côtés du triangle de sommets $A(8; 8)$, $B(0; 8)$ et $C(4; 0)$. Montrer que les pieds de ces perpendiculaires sont alignés.

53. Déterminer les équations des hauteurs et des médiatrices du triangle de sommets $A(5; 3)$, $B(6; -2)$ et $C(-3; -8)$.

54. On considère les points $A(3;-4)$ et $B(2;1)$. Trouver le point P de la droite d

a) d'équation $3x-5y+6=0$ qui est équidistant des points A et B ;

b) d'équations paramétriques $\begin{cases} x=3+8k \\ y=2-5k \end{cases}$ qui est équidistant des points A et B.

55. Trouver la projection orthogonale du point $A(2;6)$ sur la droite d d'équation $2x-3y+1=0$.

56. On considère les points $A(-2;1)$, $B(1;\frac{5}{2})$ et $C(1;-1)$. Déterminer le point M de la droite (OC) dont la projection orthogonale sur la droite (AB) est le point $M'(0;2)$.

57. Trouver le point B symétrique du point

a) $A(7;3)$ relativement à la droite d d'équation $3x+5y-2=0$;

b) $A(-2;5)$ relativement à la droite d d'équation $3x-2y+12=0$.

58. Trouver l'équation de la droite d' symétrique de la droite d par rapport à la droite a dans les cas suivants.

a) $d: 5x-2y-11=0$ et $a: x-y-1=0$

b) $d: y=0$ et $a=(CD)$ avec $C(3;0)$ et $D(-5;2)$

59. Un rayon lumineux se déplace suivant la droite a d'équation $x-2y+5=0$. Après avoir atteint la droite d d'équation $3x-2y+7=0$, le rayon est réfléchi. Déterminer l'équation de la droite b qui porte le rayon réfléchi.

60. On donne les deux points $B(2;0)$ et $C(6;3)$. Trouver les coordonnées du sommet A de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle ABC.

61. On donne un sommet $A(6;12)$ d'un triangle ABC ainsi que deux de ses hauteurs $h_B: 2x+7y-65=0$ et $h_C: 2x-5y+17=0$. Calculer les coordonnées des deux autres sommets de ce triangle.

62. Déterminer les coordonnées des sommets B, C et D d'un carré $ABCD$ connaissant l'équation de la droite $(BD): 7x+2y-11=0$ et le point $A(-4;-7)$.

63. Déterminer les coordonnées des sommets B, C et D d'un carré $ABCD$ connaissant le point $A(3;1)$ et l'équation de la droite $(CD): 2x-y=0$.

Distance d'un point à une droite

64. Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants.

a) $P(3;-2)$ et $d: 4x+3y+9=0$

b) $P(-2;-4)$ et $d: y=\frac{5}{12}x-1$

c) $P(-2;3)$ et $d: y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

d) $P(3;-5)$ et $d: 2x-7y+8=0$

e) $P(2;1)$ et $d: \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-1=0$

f) $P(4;-3)$ et $d: 2x-5y=0$

g) $P(5;9)$ et $d: \begin{cases} x=5+5k \\ y=4-2k \end{cases}$

65. Calculer la distance de M à la droite (CD) dans les cas suivants.

a) $C(8;-1)$, $D(2;7)$ et $M(7;17)$

b) $C(-3;9)$, $D(2;-3)$ et $M(19;-10)$

66. On donne un sommet $A(-2;1)$ d'un rectangle. Deux de ses côtés se trouvent sur les droites d'équations $3x-2y-5=0$ et $2x+3y+7=0$. Calculer l'aire de ce rectangle.

67. Calculer les longueurs des hauteurs du triangle déterminé par les droites d'équations suivantes. Calculer ensuite l'aire de ce triangle.

a) $2x - y + 1 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$ et $x + y - 4 = 0$

b) $2x + 3y = 0$, $x + 3y + 3 = 0$ et $x + y + 1 = 0$

68. Trouver les équations des droites passant par le point $A(1;1)$ et dont la distance au point $B(-6;2)$ est égale à 5.

69. Calculer la distance entre les droites parallèles d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 3x + 4y - 13 = 0$ et $d_2 : 3x + 4y - 3 = 0$

b) $d_1 : x - 2y + 9 = 0$ et $d_2 : x - 2y - 1 = 0$

70. Montrer que d_1 est parallèle à d_2 et calculer la distance entre ces deux droites dans les cas suivants.

a) d_1 passe par $(2;1)$ et $(1;-1)$ et d_2 par $(0;1)$ et $(1;3)$.

b) d_1 passe par $(1;1)$ et $(-2;2)$ et d_2 par $(1;-2)$ et $(4;-3)$.

71. Trouver l'équation de la droite équidistante des droites parallèles d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 5x + 2y - 3 = 0$ et $d_2 : 5x + 2y - 9 = 0$

b) $d_1 : 2x - 9y + 4 = 0$ et $d_2 : 2x - 9y - 6 = 0$

72. Déterminer les équations des droites situées à une distance 3 de la droite d'équation $4x - 3y - 8 = 0$.

73. On donne un triangle par les équations de ses côtés $a : 5x - 12y + 7 = 0$, $b : x + 21y - 22 = 0$ et $c : 4x - 33y + 146 = 0$. Calculer la distance du centre de gravité de ce triangle à la droite a.

Bissectrices

74. Déterminer les équations des bissectrices des droites d'équations $x - 3y + 8 = 0$ et $3x - y - 1 = 0$.

75. Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle aigu formé par les droites d'équations $3x + 4y - 1 = 0$ et $5x + 12y - 2 = 0$.

76. Déterminer l'ensemble des points du plan équidistants des deux droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 20x + 21y - 19 = 0$ et $d_2 : 7x - 24y - 38 = 0$

b) $d_1 : 2x - 3y + 6 = 0$ et $d_2 : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$

77. Deux droites d_1 et d_2 ont pour bissectrice la droite d'équation $3x - 2y + 16 = 0$. Trouver l'équation de d_1 connaissant l'équation de $d_2 : y = \frac{1}{2}x + 4$.

78. Les côtés d'un triangle ABC sont donnés par les droites $(AB) : y = 5 - x$, $(BC) : x + 7y - 7 = 0$ et $(AC) : y = -7x - 14$.

a) Trouver l'équation de la bissectrice intérieure de l'angle en B.

b) Trouver l'équation de la bissectrice extérieure de l'angle en C.

79. On donne les droites $a : x + 7y - 23 = 0$ et $b : y = x + 9$ ainsi que les points $R(3;0)$ et $S(-9;6)$. Chercher les points P et Q équidistants à la fois des droites a et b et des points R et S.

80. On considère le triangle formé par les trois droites a, b et c. Déterminer les équations des bissectrices intérieures, le centre I et le rayon ρ du cercle inscrit dans ce triangle dans les cas suivants.

a) $a : x = 8$ $b : 3x - 4y + 56 = 0$ $c : 4x + 3y + 58 = 0$

b) $a : y = \frac{4}{3}x + 8$ $b : 12x + 5y - 33 = 0$ $c : 3x + 4y + 11 = 0$

c) $a : y = 4 - x$ $\quad b : y = -7x - 2$ $\quad c : x - 7y = 12$

d) $a : y = \frac{4}{3}x - \frac{65}{3}$ $\quad b : 7x - 24y + 55 = 0$ $\quad c : 3x + 4y - 5 = 0$

Divers

81. Déterminer les équations des côtés d'un triangle ABC connaissant le sommet $B(2; -1)$ ainsi que les équations de la hauteur h_A d'équation $3x - 4y + 27 = 0$ issue du sommet A et de la bissectrice intérieure $b_C : x + 2y - 5 = 0$ issue du sommet C.

82. Déterminer les équations des côtés d'un triangle connaissant le sommet $A(1; 3)$ et deux médianes d'équations $y - 1 = 0$ et $x - 2y + 1 = 0$.

83. Trouver une droite passant par le point $A(3; 1)$ et qui forme un triangle isocèle avec les deux droites d'équations $2x - y + 5 = 0$ et $3x + 6y - 16 = 0$.

84. On donne les trois points $A(0; 20)$, $B(-15; 0)$ et $C(48; 0)$.

a) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

b) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

c) Déterminer les coordonnées du centre K du cercle circonscrit au triangle ABC, ainsi que le rayon r de ce cercle.

d) Déterminer les coordonnées du centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC, ainsi que le rayon ρ de ce cercle.

e) Montrer que G, H et K sont alignés.

f) Calculer le rapport $\dfrac{\|\overrightarrow{GH}\|}{\|\overrightarrow{GK}\|}$.

g) Donner l'équation cartésienne de la droite passant par G, H et K, appelée *droite d'Euler* du triangle ABC.

85. Représenter l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'inéquation donnée dans les cas suivants.

a) $x + 3y - 12 > 0$ $\quad$ b) $2x - 3y \leq 0$

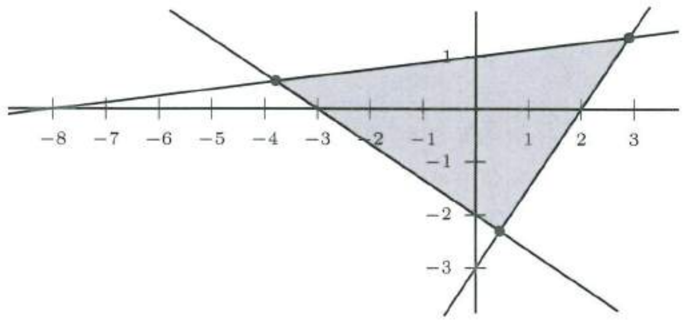
c) $y \leq \dfrac{3}{5}x + 3$ $\quad$ d) $y + 2 < 0$

86. Représenter l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient le système d'inéquations donné dans les cas suivants.

a) $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ y \geq 4 \\ 2x + y - 8 \leq 0 \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} 3x - 2y - 6 < 0 \\ 3x - 5y + 12 \geq 0 \\ y \geq -2x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y < 6 \\ 3x - 5y + 12 \geq 0 \\ 2x + y \leq 0 \end{cases}$ $\quad$ d) $\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ x - 7 < 0 \\ 2x + y > 4 \end{cases}$

87. Trouver un système d'inéquations qui détermine la portion du plan représentée ci-dessous (y compris les frontières).



Réponses aux exercices du chapitre 3

1. $\alpha = -18$ et $\beta = \frac{19}{7}$

3. oui non non oui oui non

4. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. a) $(\frac{9}{2};0)$ et $(0;9)$ b) $(7;-5)$ c) $(\frac{11}{2};-2)$ d) $(3;3)$

6. oui oui non oui oui non

8. a) $(10;0)$ b) $(0;4)$ c) $(3;\frac{14}{5})$ d) $(-\frac{55}{2};15)$ e) $(\frac{20}{7};\frac{20}{7})$ f) $(5;2)$

9. a) $\begin{cases} x = -3+5k \\ y = 1+2k \end{cases}$ et $(2;3)$, $(-3;1)$, $(7;5)$, $(-8;-1)$, $(-18;-5)$, $(\frac{9}{2};4)$

c) $y = \frac{2}{5}x + \frac{11}{5}$ et $2x - 5y = -11$ d) non e) $\alpha = \frac{41}{5}$ et $\beta = -23$

10. $\begin{cases} x = 5+3k \\ y = 7-k \end{cases}$

11. a) $x+4y-23=0$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}$ b) $3x+7y+23=0$, $y = -\frac{3}{7}x - \frac{23}{3}$

c) $x+4y-13=0$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ d) $y+2=0$, $y=-2$

e) $x-8=0$, pas d'équation explicite

12. a) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$ b) C : non, D : oui c) $x = \frac{11}{10}$

13. a) $y=3$ b) $x=4$

14. a) $m = \frac{5}{6}$ et $\vec{d} = \binom{6}{5}$ b) $m = -1$ et $\vec{d} = \binom{1}{-1}$

c) $m = \frac{4}{3}$ et $\vec{d} = \binom{3}{4}$ d) $m = 1$ et $\vec{d} = \binom{1}{1}$

e) $m = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $\vec{d} = \binom{4}{\sqrt{5}}$ f) $m = 0$ et $\vec{d} = \binom{1}{0}$

g) m n'existe pas et $\vec{d} = \binom{0}{1}$ h) $m = \frac{4}{5}$ et $\vec{d} = \binom{5}{4}$

15. a) $x+3y-7=0$ b) $5x+4y-47=0$

16. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{2} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

18. a) $y = 3x - 11$ c) $D(\frac{11}{3};0)$ et $E(0;-11)$

19. a) oui b) non c) non

20. a) $y = \frac{2}{3}x - \frac{19}{3}$ b) $y = \frac{1}{2}x - 12$

22. a) parallèles b) sécantes c) confondues d) sécantes

23. a) confondues b) parallèles c) sécantes
d) confondues e) parallèles f) sécantes

24. a) $(3;2)$ b) $(5;-6)$ c) $(13;-17)$
d) néant e) $(-\frac{146}{5};-\frac{8}{5})$ f) droites confondues
g) $(-\frac{26}{53};\frac{36}{53})$ h) $(0;2)$

25. a) $(4;0)$ b) $(-1;3)$ c) néant d) $(1;2)$

26. a) $(-5;7)$ b) $(2;3)$ c) droites confondues

27. a) $(0;\frac{3}{4})$ b) $(-\frac{2}{3};\frac{7}{6})$ c) $(-\frac{1}{5};\frac{3}{10})$
d) néant e) $(-10;-1)$ f) néant

28. $I(9;7)$

29. a) $K(0;2)$, $L(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$ et $M(1;0)$

30. a) $I(\frac{1}{3};\frac{4}{3})$ b) $\lambda = 3$

31. a) $P(\frac{7}{2};\frac{1}{2})$ et $N(\frac{1}{2};\frac{7}{2})$ b) $M(2;2)$ c) oui

32. a) $X(\frac{3}{4};\frac{1}{2})$, $Y(\frac{3}{4};\frac{3}{4})$ et $Z(\frac{3}{4};\frac{3}{2})$

33. a) $I(9;-3)$, $J(-3;12)$ et $K(-\frac{3}{5};9)$

34. $A(2;-1)$, $B(-1;3)$ et $C(2;4)$

35. $A(4;-1)$, $B(3;2)$ et $C(7;-4)$

36. $y=-6x+32$

37. $(AB): 2x+5y-12=0$ $\quad (BC): 2x-3y-12=0$
$(CD): 2x+5y-28=0$ $\quad (DA): 2x-3y+4=0$
$D(4;4)$
$(AC): y-2=0$ $\quad (BD): 2x+y-12=0$

38. $(BD): y+4=0$ $\quad A(-2;-3)$, $B(-4;-4)$, $C(1;-5)$ et $D(3;-4)$

39. a) $8x-y-35=0$, $x+4y-14=0$, $7x-5y-21=0$, $G(\frac{14}{3};\frac{7}{3})$
b) $2x+3y-12=0$, $2x-3y=0$, $x-3=0$, $G(3;2)$

40. a) $A(4;-4)$, $B(2;3)$, $C(-2;2)$ et $D(-4;-3)$
b) $(AC): x+y=0$, $(BD): x-y+1=0$ $\quad$ c) $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

41. a) $y=-\frac{4}{5}x+\frac{17}{5}$ $\quad$ b) $y=\frac{3}{2}x+8$ $\quad$ c) $y=-\frac{1}{7}x+\frac{10}{7}$
d) $y=-10x-15$ $\quad$ e) $G(-\frac{5}{3};\frac{5}{3})$

42. a) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ b) $y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ $\quad$ c) $2x-3y-2=0$
d) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$
e) $G(4;2)$ $\quad$ f) oui $\quad$ g) $C(6;-2)$ $\quad$ i) $y=-2x$

43. droite d'équation $2x+y-1=0$ sans les points $(1;-1)$ et $(\frac{1}{2};0)$

44.

α	5,71°	26,56°	45°	60°	71,56°	60°
p	0,1	$\frac{1}{2}$	1	173%	300%	$\sqrt{3}$

45. a) 75,96° $\quad$ b) 43,25° $\quad$ c) 86,57°

46. a) $5x-y-19=0$ ou $x+5y+17=0$
b) $\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}-2=0$ ou $y=2$

47. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

48. a) $5x+3y-31=0$ $\quad$ b) $2x-y+14=0$ $\quad$ c) $5x+4y+\frac{77}{6}=0$
d) $x-7=0$ $\quad$ e) $5x+2y-34=0$ $\quad$ f) $8x-3y-23\sqrt{2}=0$

49. $k=-\frac{1}{2}$ et $I(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$

50. $(-3;5)$, $(-4;3)$, $(0;1)$ et $(1;3)$

51. $B(5;3)$, $C(11;12)$ et $D(8;14)$

53. $h_A: 3x+2y-21=0$ et $m_A: 6x+4y+11=0$
$h_B: 8x+11y-26=0$ et $m_B: 16x+22y+39=0$
$h_C: x-5y-37=0$ et $m_C: x-5y-3=0$

54. a) $P(-8;-\frac{18}{5})$ $\quad$ b) $P(\frac{235}{33};-\frac{19}{33})$

55. $(4;3)$

56. $M(2;-2)$

57. a) $B(1;-7)$ $\quad$ b) $P(-\frac{2}{13};\frac{49}{13})$

58. a) $2x-5y+4=0$ $\quad$ b) $8x+15y-24=0$

59. $29x-2y+33=0$

60. $A_1(\frac{5}{2};\frac{7}{2})$ et $A_2(\frac{11}{2};-\frac{1}{2})$

61. $B(8;7)$ et $C(4;5)$

62. $B(1;2)$, $C(10;-3)$ et $D(5;-12)$

63. $B_1(4;3)$, $C_1(2;4)$ et $D_1(1;2)$ $\quad$ ou $\quad$ $B_2(2;-1)$, $C_2(0;0)$ et $D_2(1;2)$

64. a) 3 $\quad$ b) 2 $\quad$ c) 4 $\quad$ d) $\frac{49}{\sqrt{53}}$ $\quad$ e) $\frac{3}{5}$ $\quad$ f) $\frac{23}{\sqrt{29}}$ $\quad$ g) $\frac{25}{\sqrt{29}}$

65. a) 10 $\quad$ b) 13

66. 6

67. a) $\frac{9}{\sqrt{5}}$, $\frac{9}{\sqrt{5}}$ et $\frac{9}{\sqrt{2}}$; aire $=\frac{27}{2}$ $\quad$ b) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ et $\sqrt{2}$; aire $=3$

68. $4x+3y-7=0$ et $3x-4y+1=0$

69. a) 2 $\quad$ b) $2\sqrt{5}$

70. a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ b) $\frac{9\sqrt{10}}{10}$

71. a) $5x+2y-6=0$ $\quad$ b) $2x-9y-1=0$

72. $4x-3y-23=0$ $\quad$ $4x-3y+7=0$

73. 3

74. $2x+2y-9=0$ $\quad$ et $\quad$ $4x-4y+7=0$

75. $64x+112y-23=0$

76. a) $9x+37y+19=0$ et $37x-9y-83=0$ b) $8x-12y+7=0$

77. $29x-2y+120=0$

78. a) $3x+6y-16=0$ b) $8x+8y+7=0$

79. $P(-2;5)$, $Q(-4;1)$

80. a) $b_A : x+7y+2=0$, $b_B : 3x+y+6=0$, $b_C : 2x-y+4=0$, $I(-2;0)$ et $\rho=10$
b) $b_A : 9x+7y-2=0$, $b_B : x-7y+13=0$, $b_C : 16x-2y+21=0$, $I(-\frac{11}{10};\frac{17}{10})$ et $\rho=\frac{29}{10}$
c) $b_A : 4x-3y-5=0$, $b_B : x+3y-2=0$, $b_C : 2x+y-3=0$, $I(\frac{7}{5};\frac{1}{5})$ et $\rho=\frac{6\sqrt{2}}{5}$
d) $b_A : 2x+11y-20=0$, $b_B : 7x+y-70=0$, $b_C : 9x-13y-90=0$, $I(10;0)$ et $\rho=5$

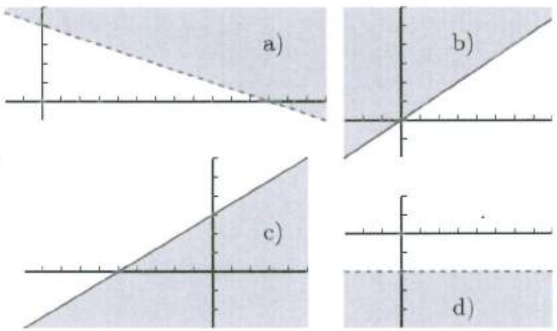
81. $4x+7y-1=0$, $y-3=0$ et $4x+3y-5=0$

82. $x+2y-7=0$, $x-4y-1=0$ et $x-y+2=0$

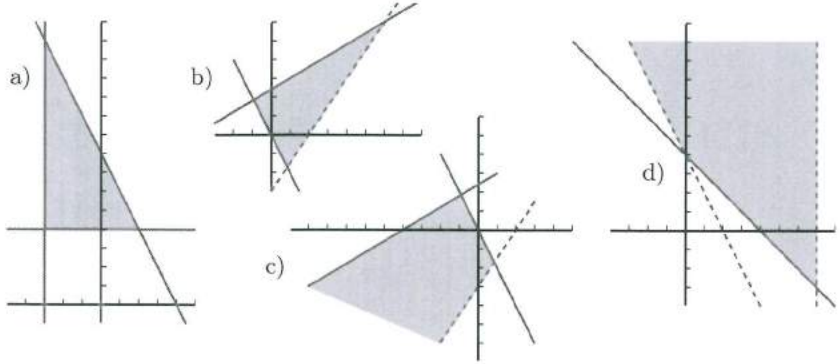
83. $x-3y=0$, $3x+y-10=0$

84. a) $G(11;\frac{20}{3})$ b) $H(0;36)$ c) $K(\frac{33}{2};-8)$, $r=\frac{65}{2}$
d) $I(3;9)$, $\rho=9$ f) 2 g) $8x+3y-108=0$

85.



86.



87. $\begin{cases} x-8y+8\geq 0 \\ 2x+3y+6\geq 0 \\ 3x-2y-6\leq 0 \end{cases}$

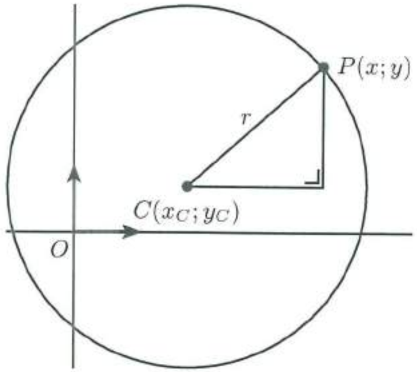
4 Équation du cercle dans le plan

Dans les chapitres précédents, nous avons parlé de droites dont l'équation est de degré un. Nous allons passer à une courbe dont l'équation est de degré deux : le cercle.

Ce chapitre introduira l'équation du cercle et traitera de la position d'objets géométriques par rapport à un cercle.

4.1 Généralités

Le **cercle** Γ de centre $C(x_C;y_C)$ et de rayon r ($r > 0$) est l'ensemble des points $P(x;y)$ du plan situés à une distance r de C.



$$P \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{CP}\| = r \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2} = r$$

En élevant au carré, on obtient l'équation du cercle Γ

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2 = r^2$$

Exemples.

1. *Déterminer l'équation du cercle centré en $C(-3;2)$ et de rayon $\sqrt{20}$.*

$$\left(x-(-3)\right)^2+(y-2)^2=(\sqrt{20})^2 \quad\Leftrightarrow\quad (x+3)^2+(y-2)^2=20$$

En développant, on obtient $x^2+y^2+6x-4y-7=0$.

2. *Trouver les coordonnées du centre et le rayon du cercle d'équation $x^2+y^2-16x+12y+19=0$. On réécrit cette équation*

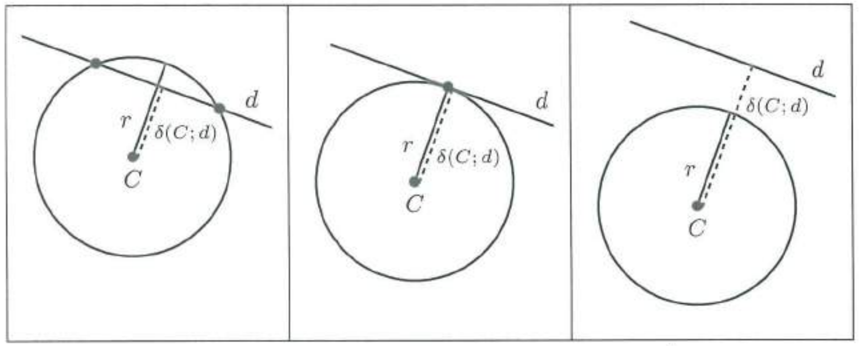
$$(x-8)^2-64+(y+6)^2-36+19=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-8)^2+(y+6)^2=81$$

Le centre est $C(8;-6)$ et le rayon est 9.

4.2 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

On considère un cercle Γ de centre C et de rayon r ainsi qu'une droite d. Pour situer la droite d par rapport au cercle Γ, on compare la distance $\delta(C;d)$ du centre C à la droite d avec le rayon r.

1. $\delta(C;d)<r \quad\Leftrightarrow\quad$ la droite d est sécante à Γ (deux points d'intersection)
2. $\delta(C;d)=r \quad\Leftrightarrow\quad$ la droite d est tangente à Γ (un point d'intersection)
3. $\delta(C;d)>r \quad\Leftrightarrow\quad$ la droite d est extérieure à Γ (aucun point d'intersection)



Pour déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de d et Γ, on peut résoudre par substitution le système formé par les équations du cercle et de la droite.

Exemple 1. *Déterminer l'intersection de la droite $d: 2x-3y-5=0$ et du cercle $\Gamma: (x-2)^2+(y+5)^2=40$. On résout le système*

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+5)^2=40\\ 2x-3y-5=0\end{cases}$$

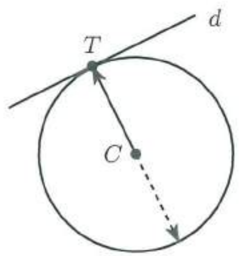
De la deuxième équation, on tire $y=\dfrac{2x-5}{3}$ qu'on substitue dans la première équation

$$\begin{aligned}(x-2)^2+\left(\frac{2x-5}{3}+5\right)^2=40 \quad&\Leftrightarrow\quad 13x^2+4x-224=0\\ &\Leftrightarrow\quad x_1=4 \text{ et } x_2=-\tfrac{56}{13}\end{aligned}$$

Le cercle Γ et la droite d ont donc deux points d'intersection $I_1(4;1)$ et $I_2(-\frac{56}{13};-\frac{59}{13})$.

Exemple 2. *Considérons la droite $d: x-2y+16=0$ et le cercle Γ de centre $C(2;-1)$ et de rayon $r=4\sqrt{5}$.*

Pour déterminer l'intersection de d et de Γ, nous pouvons résoudre un système d'équations comme dans l'exemple précédent. Nous pouvons aussi remarquer que $\delta(C;d)=\dfrac{|2+2+16|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}=r$ et en déduire que d est tangente à Γ en un point T.



Le vecteur $\overrightarrow{CT}$ est un vecteur normal à d. Il est donc colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et a pour norme $4\sqrt{5}$. Ainsi

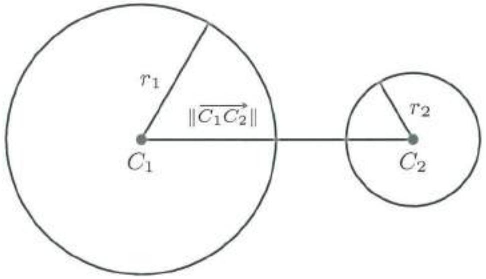
$$\overrightarrow{CT}=\pm4\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_T-2\\y_T+1\end{pmatrix}$$

et donc $T_1(6;-9)$ et $T_2(-2;7)$. Le point T_1 n'appartient pas à d. On en déduit que T_2 est le point de contact cherché.

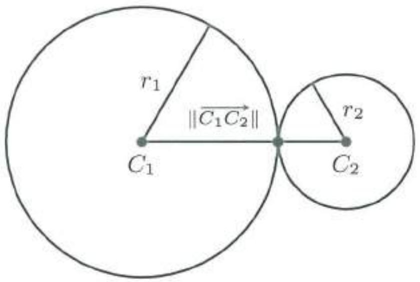
4.3 Positions relatives de deux cercles

On considère les cercles Γ_1 de centre C_1 et de rayon r_1 et Γ_2 de centre C_2 et de rayon r_2. Pour situer Γ_1 par rapport à Γ_2, on compare la distance $\|\overrightarrow{C_1C_2}\|$ entre les centres avec $r_1 + r_2$ et $|r_1 - r_2|$.

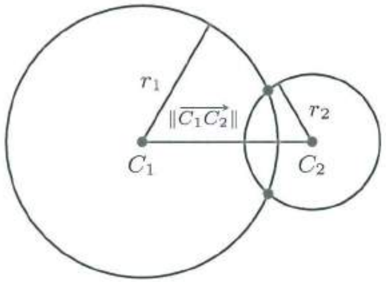
1. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| > r_1 + r_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ Γ_1 est à l'extérieur de Γ_2 (aucun point d'intersection).



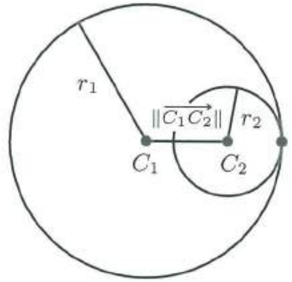
2. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = r_1 + r_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ Γ_1 et Γ_2 sont tangents extérieurement (un point d'intersection).



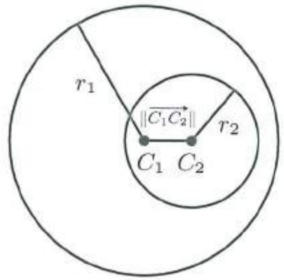
3. $|r_1 - r_2| < \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < r_1 + r_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ Γ_1 et Γ_2 sont sécants (deux points d'intersection).



4. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = |r_1 - r_2| \quad \Leftrightarrow \quad$ Γ_1 et Γ_2 sont tangents intérieurement (un point d'intersection).



5. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| < |r_1 - r_2| \quad \Leftrightarrow \quad$ l'un des cercles est à l'intérieur de l'autre (aucun point d'intersection).



Pour déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de Γ_1 et Γ_2, on résout le système formé des équations des deux cercles.

Exemple. *Déterminer l'intersection des cercles de centre $C_1(1;-3)$ et $C_2(5;5)$ et de rayons respectifs $5\sqrt{2}$ et $\sqrt{10}$.*

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 50 \\ (x-5)^2 + (y-5)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y = 40 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y = -40 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y = 40 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

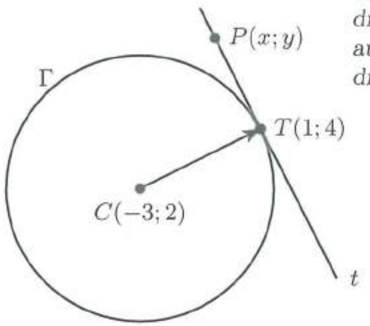
$$\begin{cases} (10-2y)^2 + y^2 - 2(10-2y) + 6y = 40 \\ x = 10 - 2y \end{cases}$$

Nous trouvons $y_1 = 2$ et $y_2 = 4$ et donc deux points d'intersection $I_1(6;2)$ et $I_2(2;4)$.

On remarque que l'équation $x + 2y = 10$ obtenue dans le troisième système d'équations représente la droite passant par I_1 et I_2, appelée axe radical des deux cercles. Elle est perpendiculaire à la droite passant par les centres des deux cercles.

4.4 Tangente à un cercle

Exemple. *Considérons le cercle d'équation $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$.*
Le point $T(1;4)$ appartient au cercle puisqu'il vérifie l'équation $(1+3)^2 + (4-2)^2 = 20$.
On veut trouver l'équation de la tangente t au cercle au point T.



On considère un point $P(x;y)$ de t. La droite passant par T et P étant tangente au cercle, elle est perpendiculaire à la droite (CT). On a donc $\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix} = 0$$
$$4(x-1) + 2(y-4) = 0$$
$$4x - 4 + 2y - 8 = 0$$
$$2x + y - 6 = 0$$
$$y = -2x + 6$$

On considère un point T du cercle Γ de centre C et de rayon r et on note t la tangente au cercle en T. De manière générale, on a

$$P \in t \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$$

Il existe une autre façon de trouver l'équation de la tangente à Γ en utilisant le centre et le rayon de ce cercle

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$$
$$\overrightarrow{CT} \cdot \left(\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CP}\right) = 0$$
$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$$
$$-\overrightarrow{TC} \cdot \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$$
$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{TC}^2 = \|\overrightarrow{TC}\|^2 = r^2$$

Finalement on obtient

$$P \in t \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2$$

Exemple. *Reprenons le cercle centré en $C(-3;2)$ et de rayon $r = \sqrt{20}$ avec le point de tangence $T(1;4)$.*

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} = 20$$
$$4(x+3) + 2(y-2) = 20$$
$$4x + 12 + 2y - 4 = 20$$
$$4x + 2y + 8 = 20$$
$$2x + y - 6 = 0$$

Cette dernière équation est celle de la tangente t comme vu dans l'exemple précédent.
Nous aurions pu obtenir différemment l'équation de cette droite. Nous savons que $\vec{n} = \overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Donc $t : 2x + y + k = 0$.
Or t passe par $T(1;4)$, donc $k = -6$ et $t : 2x + y - 6 = 0$.

Généralisons le résultat ci-dessus en notant $T(x_T; y_T)$. On a

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2$$
$$\begin{pmatrix} x_T - x_0 \\ y_T - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = r^2$$

On obtient l'équation de la tangente t à Γ en T.

$$(x_T - x_0)(x - x_0) + (y_T - y_0)(y - y_0) = r^2$$

4.5 Tangentes par un point extérieur au cercle

On considère un cercle Γ et un point A extérieur à Γ. Il existe alors deux tangentes à Γ passant par A. Voyons comment déterminer les équations de ces droites.

Exemple. *Soit le cercle Γ de centre $C(-1;2)$ et de rayon $r = \sqrt{10}$ ainsi que le point $A(1;6)$.*
On peut vérifier que $\|\overrightarrow{CA}\| > r$ et que le point A est donc extérieur au cercle.
Soit $t : y = mx + h$ une droite passant par A. Comme A appartient à t, on a $6 = m + h$.

Ainsi $h = 6 - m$ et on a donc $t : y = mx + 6 - m$ ou $mx - y + 6 - m = 0$. Parmi les droites passant par A, celles qui sont tangentes au cercle Γ sont à une distance $r = \sqrt{10}$ du centre C.

Comme $\delta(C; t) = r$, on a $\dfrac{|-m - 2 + 6 - m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{10}$.

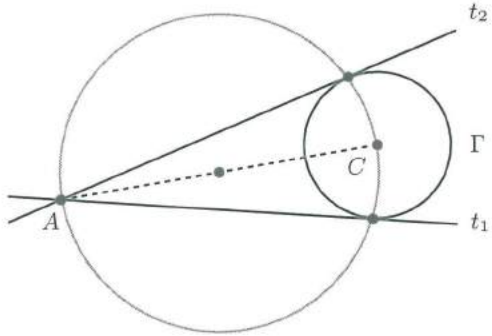
D'où

$$\begin{aligned} -m - 2 + 6 - m &= \pm\sqrt{10(m^2+1)} \\ (-2m+4)^2 &= 10(m^2+1) \\ 3m^2 + 8m - 3 &= 0 \end{aligned}$$

D'où $m_1 = \frac{1}{3}$ et $m_2 = -3$. Et donc $h_1 = \frac{17}{3}$ et $h_2 = 9$. On en déduit les équations des deux tangentes à Γ passant par A :

$$t_1 : y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{3} \qquad \text{et} \qquad t_2 : y = -3x + 9$$

Nous aurions aussi pu déterminer les points de contact en considérant l'intersection du cercle Γ et du cercle de Thalès du segment d'extrémités A et C.



4.6 Exercices relatifs au chapitre 4

Équation du cercle

1. Déterminer l'équation du cercle

a) de rayon 3 centré en $C(2; 5)$;

b) de rayon 5 centré en $C(6; -3)$;

c) centré à l'origine et passant par le point $A(-2; 7)$;

d) de centre $C(-3; 5)$ et passant par l'origine ;

e) de centre $C(4; 2)$ et passant par le point $A(2; -3)$;

f) de diamètre $[AB]$ avec $A(3; 2)$ et $B(-1; 6)$;

g) centré à l'origine et tangent à la droite d'équation $3x + 4y - 15 = 0$;

h) de centre $C(1; -1)$ et tangent à la droite d'équation $y = \frac{5}{12}x + \frac{3}{4}$;

i) passant par les points $A(3; 1)$ et $B(-1; 3)$ et ayant son centre sur la droite d'équation $y = 3x - 2$;

j) passant par les points $A(1; 0)$ et $B(5; 0)$ et tangent à l'axe Oy.

2. On considère le cercle de rayon $r = 5$ centré en $C(-4; 0)$.

a) Déterminer l'équation de ce cercle.

b) Déterminer les éventuels points d'intersection de ce cercle avec les axes de coordonnées.

c) Le point $P(-1; -3)$ appartient-il au cercle ?

d) Représenter graphiquement la situation.

3. Dans chaque cas, déterminer si l'équation proposée est celle d'un cercle. Si oui, en donner son centre et son rayon.

a) $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 35 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 35 = 0$

c) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 59 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$

e) $9x^2 + 4y^2 + 6x + 4y = 18$

f) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 25 = 0$

g) $x^2 + y^2 + 10x - 11 = 0$

h) $3x^2 + 3y^2 + 16x - 12y = 0$

4. a) Déterminer l'équation du cercle centré en $C(3;-4)$ et passant par $A(15;-9)$.
   b) Quelle est la position des points $P_1(3;-17)$, $P_2(13;-12)$ et $P_3(10;8)$ par rapport à ce cercle ?

5. Déterminer l'équation du cercle passant par les points $A(-3;-1)$, $B(4;-2)$ et $C(1;7)$.

6. Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC avec $A(7;-1)$, $B(6;4)$ et $C(4;-4)$.

7. Déterminer l'équation du cercle inscrit dans le triangle ABC donné par les équations de ses côtés.
   $(AB) : 4x+3y-12=0$ $\quad (BC) : y=2$ $\quad (AC) : x=10$

8. Déterminer l'équation du cercle inscrit dans le triangle ABC donné par les équations de ses côtés, ainsi que les équations des cercles exinscrits de ce triangle.
   $(AB) : x=1$ $\quad (BC) : 3x+4y-31=0$ $\quad (AC) : 4x-3y-58=0$

9. Déterminer l'équation du cercle
   a) centré à l'origine et tangent à la droite d'équation $3x+4y-15=0$;
   b) centré en $C(1;2)$ et tangent à la droite (AB) où $A(-4;-8)$ et $B(8;1)$;
   c) de centre $C(3;-1)$ et tangent à la droite d'équation $y=x-2$;
   d) de centre $C(1;-1)$ et tangent à la droite d'équation $y=\frac{5}{12}x+\frac{3}{4}$;
   e) passant par les points $A(3;1)$ et $B(-1;3)$ et ayant son centre sur la droite d'équation $y=3x-2$.

10. Déterminer l'intersection du cercle centré en O de rayon $\sqrt{10}$ et de la droite $y=-2x+1$.

11. Déterminer l'intersection du cercle d'équation $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ et de la droite $y=7x+12$.

12. Soit le cercle d'équation $x^2+y^2-4x+2y-11=0$. Déterminer l'équation du diamètre passant par le milieu de la corde située sur la droite d'équation $x-2y-3=0$.

13. On donne deux cercles Γ_1 et Γ_2. Déterminer les points d'intersection de ces cercles pour
    a) $\Gamma_1 : x^2+y^2-12x-10y+41=0$ et $\Gamma_2 : x^2+y^2-8x+4y-9=0$
    b) $\Gamma_1 : x^2+y^2-2x-4y-95=0$ et $\Gamma_2 : x^2+y^2-26x-22y+265=0$

14. Déterminer l'équation du cercle qui passe par le point $A(1;-1)$ et par les points d'intersection des cercles d'équations $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ et $x^2+y^2-6x+12y-35=0$.

15. Déterminer les distances entre le point $P(-7;2)$ et le point le plus proche et le plus éloigné du cercle $\Gamma : x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

16. Vérifier que le point T appartient à la droite d_1 et trouver les équations des cercles tangents à d_1 en T et tangents à d_2 dans les cas suivants.
    a) $T(3;7)$ $\quad d_1 : 3x-4y+19=0$ $\quad d_2 : 4x+3y-58=0$
    b) $T(4;3)$ $\quad d_1 : y=5x-17$ $\quad d_2 : x-5y-5=0$

17. Déterminer les équations des cercles centrés sur la droite d et tangents aux droites a et b dans les cas suivants.
    a) $d : 3x+7y-39=0$ $\quad a : 3x-4y+12=0$ $\quad b : x=0$
    b) $d : 4x-5y-3=0$ $\quad a : 2x-3y-10=0$ $\quad b : 3x-2y+5=0$

18. Déterminer les équations des cercles tangents aux deux droites d_1 et d_2 et passant par le point A dans les cas suivants.

a)	$d_1 : x - 2y + 2 = 0$	$d_2 : y = 2x - 17$	$A(6; -1)$
b)	$d_1 : y = -2x - 2$	$d_2 : y = -2x + 18$	$A(1; 0)$
c)	$d_1 : 4x + 3y - 36 = 0$	$d_2 : 3x - 4y + 23 = 0$	$A(-1; -3)$

19. Déterminer les équations de tous les cercles de rayon r tangents à la fois aux droites a et b dans les cas suivants.

a)	$a : 4x + 3y - 12 = 0$	$b : y = 0$	$r = 2$
b)	$a : 3x - 4y + 12 = 0$	$b : 12x + 5y - 15 = 0$	$r = 3$

20. On considère les deux cercles $\Gamma_1 : (x+9)^2 + (y-12)^2 = 180$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 = 45$.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_2.

b) Soit A l'un de ces points d'intersection et C le centre de Γ_1. Montrer que le triangle OAC est rectangle en A.

c) Trouver les coordonnées du centre H de l'homothétie de rapport positif transformant Γ_1 en Γ_2.

21. On considère la droite $d : y = -x$ et les trois cercles
$\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$, $\Gamma_2 : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$ et
$\Gamma_3 : (x+3)^2 + (y-1)^2 = 1$.

a) Montrer que Γ_3 est le symétrique de Γ_2 par rapport à d.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_3.

c) Trouver un point P de Γ_1 et un point Q de Γ_2 symétriques l'un de l'autre par rapport à d.

Tangente au cercle

22. On considère le cercle centré en $A(5; 0)$ et passant par l'origine.

a) Calculer les coordonnées des points d'abscisse 1 de ce cercle.

b) Déterminer les équations des tangentes à ce cercle en ces points.

23. Déterminer les équations des cercles de rayon 5 dont les centres sont sur la droite d'équation $y = -2x + 1$ et qui sont tangents à la droite d'équation $3x + 4y - 34 = 0$.

24. On donne un cercle Γ et un point A. Après avoir vérifié que A appartient à Γ, trouver l'équation de la tangente à Γ au point A.

a)	$\Gamma : (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$	$A(-2; 1)$
b)	$\Gamma : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 37$	$A(3; 4)$
c)	$\Gamma : x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$	$A(2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2})$
d)	$\Gamma : 3x^2 + 3y^2 - 7x + 12y = 28$	$A(5; -2)$

25. Déterminer les équations des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ aux points d'intersection de ce cercle avec les axes de coordonnées.

26. On considère le cercle de centre $C(4; -1)$ et de rayon $r = 2$. Déterminer l'équation de la (des) tangente(s) de pente 2 à ce cercle.

27. On donne le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$. Pour quelle(s) valeur(s) de m la droite $y = mx$

a) est-elle tangente à ce cercle ?

b) coupe-t-elle ce cercle ?

28. a) Montrer que les cercles d'équations $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$ et $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ sont tangents.

b) Trouver le point de tangence T.

c) En déduire l'équation de la tangente commune en ce point T.

29. On considère le cercle Γ centré à l'origine et passant par le point $M(3; 4)$. La tangente à Γ au point M coupe l'axe Ox en un point P. On trace la droite joignant le point P au point $B(0; 5)$ qui recoupe Γ en un point A. Calculer l'aire du triangle OAB.

30. Calculer l'angle aigu formé par la droite d'équation $y = 3x - 1$ et le cercle d'équation $(x-2)^2 + y^2 = 5$ (c'est-à-dire l'angle aigu que forme cette droite avec la tangente en l'un de ses points d'intersection avec le cercle).

31. Calculer l'angle sous lequel se coupent les cercles d'équations $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ et $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$ (c'est-à-dire l'angle aigu que forment les deux tangentes en l'un des points d'intersection des deux cercles).

32. Déterminer les équations des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 4 = 0$ perpendiculaires à la droite d'équation $2x + 3y - 6 = 0$.

33. Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ passant par le point P.

a) $\Gamma : x^2 + y^2 = 25$ — $P(7;1)$

b) $\Gamma : (x+1)^2 + y^2 = 20$ — $P(1;6)$

c) $\Gamma : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ — $P(10;3)$

d) $\Gamma : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 31 = 0$ — $P(-1;5)$

e) $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ — $P(3;2)$

f) $\Gamma : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$ — $P(9;4)$

34. Déterminer les équations des tangentes communes aux cercles Γ_1 et Γ_2.

a) $\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$ — $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

b) $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 25$ — $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 24y + 143 = 0$

35. On donne le point $C(0;9)$ et le cercle $\Gamma : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

a) Construire le triangle ABC isocèle de sommet A sachant que Γ en est le cercle inscrit et que l'abscisse de A est positive.

b) Calculer les coordonnées des sommets A et B et des points de contact A', B' et C' du cercle Γ avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement.

36. On donne les sommets $A(-15;-5)$ et $B(1;7)$ d'un triangle ABC.

a) Déterminer les coordonnées du sommet C de ce triangle sachant que le centre du cercle inscrit dans le triangle est l'origine du repère.

b) Montrer que ce triangle est rectangle.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

37. On donne les sommets $A(7;3)$, $B(1;-1)$ et $C(9;0)$ d'un triangle. Considérons le cercle Γ de diamètre $[AC]$ et T le point où la droite (BC) recoupe Γ. La tangente t à Γ en T coupe le côté $[AB]$ en M.

a) Montrer que M est le milieu de $[AB]$.

b) Calculer l'aire du quadrilatère $AMTC$.

38. On considère les points $A(0;5)$, $B(6;-3)$ et $C(7;4)$.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle et déterminer l'équation du cercle Γ_1 circonscrit à ce triangle.

b) Déterminer l'équation du cercle Γ_2 de rayon $\frac{5}{2}$ qui coupe Γ_1 en A et dont le centre E, d'abscisse strictement positive, est situé sur la droite d'équation $4x - 2y + 5 = 0$.

c) Déterminer les équations des tangentes t_1 et t_2 en A à Γ_1 et Γ_2 respectivement et montrer que ces tangentes sont perpendiculaires.

Divers

39. On considère le cercle $\Gamma : x^2 + y^2 + 10y = 0$, la droite $d : y = -2x + 6$ et le point $A(-4;-2)$.

a) Vérifier que le point A est situé sur Γ.

b) Déterminer l'équation de la tangente t au cercle Γ en A.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection B des droites d et t.

d) Calculer les coordonnées des points d'intersection C et D du cercle Γ avec la droite d.

e) Montrer que les triangles ABC et ABD sont isocèles (préciser en quel sommet).

f) Montrer que $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\|$.

40. On considère les points $A(0;0)$, $B(5;0)$ et $C(0;5\sqrt{3})$. La droite perpendiculaire p à (BC) élevée en B coupe (AC) en D et la perpendiculaire q à (BC) élevée en C coupe (AB) en E.

a) Calculer les coordonnées des point d'intersection D et E.

b) Calculer les coordonnées du centre I_1 du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ADB et celles du centre I_2 du cercle Γ_2 circonscrit au triangle ACE.

c) Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents.

d) Déterminer l'angle aigu formé par les droites (I_1I_2) et la droite q.

e) Calculer l'aire du triangle I_1BI_2.

41. On considère un cercle Γ centré en $C(x_0;y_0)$ et de rayon r. Montrer que tout point $P(x;y)$ du cercle Γ vérifie les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos(\varphi) \\ y = y_0 + r\sin(\varphi) \end{cases} \quad \text{avec } \varphi \in \mathbb{R}.$$

42. Montrer que les systèmes d'équations ci-dessous représentent des cercles dont on donnera le centre, le rayon et l'équation cartésienne.

a) $\begin{cases} x = 3 + 2\cos(\varphi) \\ y = -2 + 2\sin(\varphi) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 + \cos(\varphi) \\ y = -\sin(\varphi) \end{cases}$

43. Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'inéquation donnée dans les cas suivants.

a) $x^2 + y^2 \leq 36$ b) $(x-3)^2 + (y+4)^2 > 8$

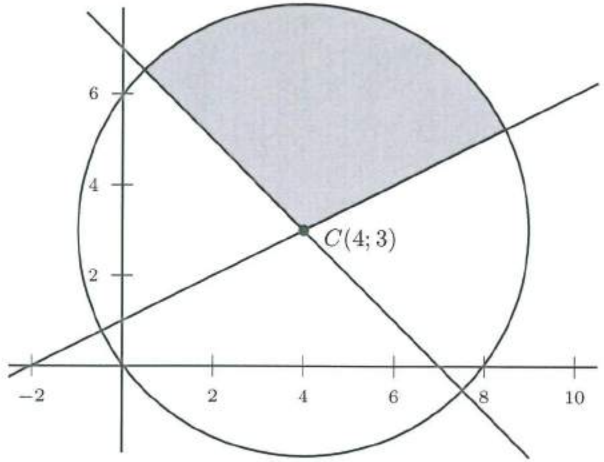
c) $x^2 + y^2 - 6y < 0$ d) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 10y + 5 \geq 0$

44. Représenter l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient le système d'inéquations donné dans les cas suivants.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y < 20 \\ x - 1 \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 > 75 \\ 2x + 3y + 5 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x - y + 5 \geq 0 \\ x - y - 5 \leq 0 \end{cases}$

45. Trouver un système d'inéquations qui détermine la portion du plan représentée ci-dessous (y compris les frontières).



Réponses aux exercices du chapitre 4

1. a) $(x-2)^2+(y-5)^2=9$ b) $(x-6)^2+(y+3)^2=25$
c) $x^2+y^2=53$ d) $(x+3)^2+(y-5)^2=34$
e) $(x-4)^2+(y-2)^2=29$ f) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$
g) $x^2+y^2=9$ h) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$
i) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$
j) deux solutions : $(x-3)^2+(y\pm\sqrt{5})^2=9$

2. a) $(x+4)^2+y^2=25$ b) $I_1(0;3)$, $I_2(0;-3)$, $I_3(-9;0)$ et $I_4(1;0)$
c) non

3. a) oui, $C(-2;5)$, $r=8$ b) oui, $C(0;0)$, $r=\sqrt{35}$
c) oui, $C(\frac{1}{2};-1)$, $r=4$ d) non car $r=0$ e) non
f) non g) $C(-5;0)$, $r=6$ h) oui, $C(-\frac{8}{3};2)$, $r=\frac{10}{3}$

4. a) $(x-3)^2+(y+4)^2=169$
b) P_1 appartient au cercle, P_2 intérieur et P_3 extérieur

5. $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

6. $3x^2+3y^2-14x-4y-56=0$

7. $(x-\frac{43}{6})^2+(y+\frac{5}{6})^2=\frac{289}{36}$

8. cercle inscrit : $(x-6)^2+(y+3)^2=25$
cercles exinscrits : $(x-11)^2+(y-12)^2=100$, $(x-16)^2+(y+23)^2=225$ et $(x+29)^2+(y+8)^2=900$

9. a) $x^2+y^2=9$ b) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ c) $(x-3)^2+(y+1)^2=2$
d) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ e) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$

10. $I_1(-1;3)$ et $I_2(\frac{9}{5};-\frac{13}{5})$

11. $I_1(-1;5)$ et $I_2(-2;-2)$

12. $y=-2x+3$

13. a) $I_1(2;3)$ et $I_2(\frac{442}{53};\frac{63}{53})$ b) $I(9;8)$

14. $x^2+y^2+6x-9y-17=0$

15. Plus courte distance : 2 et plus longue distance : 28

16. a) $x^2+(y-11)^2=25$ $(x-6)^2+(y-3)^2=25$
b) $(x-\frac{56}{9})^2+(y-\frac{23}{9})^2=\frac{416}{81}$ $(x+1)^2+(y-4)^2=26$

17. a) $(x+36)^2+(y-21)^2=1296$ $(x-\frac{18}{17})^2+(y-\frac{87}{17})^2=\frac{324}{289}$
b) $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{81}{13}$ $(x+8)^2+(y+7)^2=\frac{25}{13}$

18. a) $(x-\frac{58}{9})^2+(y-\frac{13}{9})^2=\frac{500}{81}$ $(x-2)^2+(y+3)^2=20$
b) $(x-5)^2+(y+2)^2=20$ $(x-\frac{9}{5})^2+(y-\frac{22}{5})^2=20$
c) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ $(x+\frac{62}{25})^2+(y+\frac{759}{25})^2=\frac{18769}{25}$

19. a) $(x-4)^2+(y-2)^2=4$, $(x+1)^2+(y-2)^2=4$, $(x-2)^2+(y+2)^2=4$, $(x-7)^2+(y+2)^2=4$
b) $(x+\frac{11}{3})^2+(y-4)^2=9$, $(x-\frac{11}{3})^2+(y-2)^2=9$, $(x-\frac{9}{7})^2+(y-\frac{54}{7})^2=9$
$(x+\frac{9}{7})^2+(y+\frac{12}{7})^2=9$

20. a) $(3;6)$ et $(-\frac{33}{5};-\frac{6}{5})$ c) $H(9;-12)$

21. b) $(-3;0)$ et $(-4;1)$
c) deux solutions : $P_1(-3;0)$ et $Q_1(0;3)$ ou $P_2(-4;1)$ et $Q_2(-1;4)$

22. a) $T_1(1;3)$ et $T_2(1;-3)$ b) $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$ et $y=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

23. $(x+11)^2+(y-23)^2=25$ et $(x+1)^2+(y-3)^2=25$

24. a) $3x-4y+10=0$ b) $x+7y-31=0$ c) $x+y-2-4\sqrt{2}=0$
d) $x-5=0$

25. $x=8$, $x=-2$, $3x-4y+16=0$ et $3x+4y+16=0$

26. $y=2x-9+2\sqrt{5}$ et $y=2x-9-2\sqrt{5}$

27. a) $m=\pm\frac{3}{4}$ b) $|m|<\frac{3}{4}$

28. b) $T\left(\frac{20}{13};\frac{95}{13}\right)$ c) $12x+5y-55=0$

29. $\frac{375}{34}$

30. $45°$

31. $90°$

32. $6x-4y-22\pm5\sqrt{13}=0$

33. a) $3x+4y-25=0$ et $4x-3y-25=0$
b) $2x+y-8=0$ et $x-2y+11=0$
c) $4x-3y-31=0$ et $3x+4y-42=0$
d) $y=5$ et $4x-3y+19=0$
e) $x-3y+3=0$ et $3x+y-11=0$
f) $x-2y-1=0$ et $y=2x-14$

34. a) $y = 3$ et $4x - 3y - 19 = 0$
b) $y = \sqrt{8}x + 15$, $y = -\sqrt{8}x + 15$, $y = \sqrt{3}x + 10$ et $y = -\sqrt{3}x + 10$

35. $A(\frac{3}{2}; \frac{3}{4})$ $B(-6; -3)$ $A'(-3; 3)$ $B'(\frac{6}{5}; \frac{12}{5})$ $C'(0; 0)$

36. a) $C(10; -5)$ c) 150

37. $\frac{39}{5}$

38. a) $\Gamma_1 : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$ b) $\Gamma_2 : (x-2)^2 + (y - \frac{13}{2})^2 = \frac{25}{4}$
c) $t_1 : 3x - 4y + 20 = 0$ et $t_2 : 4x + 3y - 15 = 0$

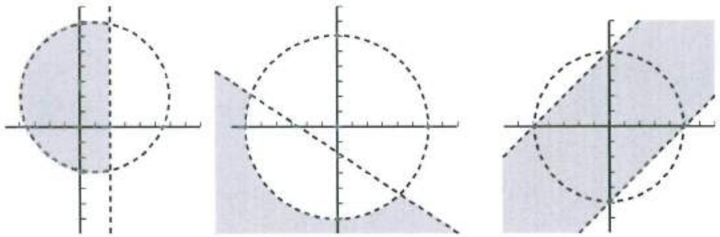
39. b) $t : 4x - 3y + 10 = 0$ c) $B(\frac{4}{5}; \frac{22}{5})$ d) $C(4; -2)$ et $D(\frac{24}{5}; -\frac{18}{5})$
e) isocèles en A et en D respectivement

40. a) $D(0; -\frac{5\sqrt{3}}{3})$ et $E(-15; 0)$ b) $I_1(\frac{5}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{6})$ et $I_2(-\frac{15}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2})$
d) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{25\sqrt{3}}{3}$

42. a) $C(3; -2)$, $r = 2$, $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$
b) $C(1; 0)$, $r = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$

43. a) intérieur et pourtour du cercle centré en l'origine et de rayon 6
b) extérieur du cercle centré en $(3; -4)$ et de rayon $\sqrt{8}$
c) intérieur du cercle centré en $(0; 3)$ et de rayon 3
d) extérieur et pourtour du cercle centré en $(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2})$ et de rayon 2

44.



45. $\begin{cases} y \geq 7 - x \\ x - 2y + 2 \leq 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 25 \end{cases}$

5 Équations de la droite et du plan dans l'espace

Explorer la géométrie de l'espace amène une plus grande richesse de notions et de situations.

Nous avons vu au chapitre 3 qu'une droite du plan peut être décrite par différentes équations : vectorielle, paramétriques et cartésiennes. Dans ce qui suit, nous allons voir qu'avec quelques ajustements c'est encore le cas dans l'espace. Il est aussi possible de décrire par les mêmes types d'équations des plans et d'étudier les positions relatives de droites et de plans. Nous calculerons aussi des angles formés par des droites et des plans.

Pour améliorer la compréhension de ce chapitre, il est judicieux de savoir représenter de manière réaliste des droites et des plans. À cet effet, l'étude de l'annexe A est recommandée.

5.1 Équations de la droite

Comme en géométrie plane, une droite de l'espace est entièrement déterminée par deux points distincts. Ceux-ci définissent un vecteur non nul, appelé **vecteur directeur** de la droite, qui indique la direction de cette droite. Pour décrire une droite dans l'espace, il suffit d'en connaître un point A et sa direction donnée par un vecteur directeur $\vec{d}$.

Pour tout point P de la droite d, les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires. Il existe donc un nombre réel k vérifiant $\overrightarrow{AP} = k\vec{d}$. Réciproquement, tout nombre réel k définit un point de la droite.

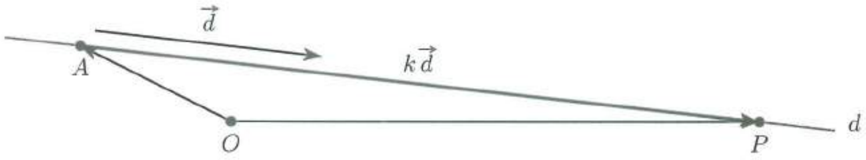
$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = k\vec{d}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Si la droite est déterminée par deux points distincts A et B, un vecteur directeur peut être $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

Considérons un point $A(x_A; y_A; z_A)$ d'une droite d et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de cette droite. Quelle condition doit vérifier un point quelconque $P(x; y; z)$ pour appartenir à la droite d ?

Comme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$, on obtient l'**équation vectorielle** de la droite d.

$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$$



Les coordonnées x, y et z d'un point P quelconque de d doivent alors vérifier la condition suivante appelée **représentation paramétrique** de la droite.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

On obtient alors les **équations paramétriques** de la droite.

$$\begin{cases} x = x_A + kd_1 \\ y = y_A + kd_2 \\ z = z_A + kd_3 \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Pour éliminer le paramètre k dans ces équations, nous pouvons utiliser la méthode des combinaisons linéaires.

$$\left\{\begin{array}{l|c|c} x = x_A + kd_1 & \cdot d_2 & \cdot d_3 \\ y = y_A + kd_2 & \cdot(-d_1) & \\ z = z_A + kd_3 & & \cdot(-d_1) \end{array}\right.$$

On obtient le **système d'équations cartésiennes** $\begin{cases} d_2x - d_1y = d_2x_A - d_1y_A \\ d_3x - d_1z = d_3x_A - d_1z_A \end{cases}$

qui peut être écrit sous la forme $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + e_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + e_2 = 0 \end{cases}.$

Exemples.

1. *Une droite d passe par le point $A(2; -1; 3)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.*

   Soit $P(x; y; z)$ un point quelconque de la droite. Les différentes descriptions de d sont

   Équation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$

   Représentation paramétrique : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 + 5k \\ z = 3 - 2k \end{cases}$

   $$\left\{\begin{array}{l|c|c} x = 2 + k & \cdot 5 & \cdot 2 \\ y = -1 + 5k & \cdot(-1) & \\ z = 3 - 2k & & \cdot 1 \end{array}\right.$$

   Équations cartésiennes : $\begin{cases} 5x - y - 11 = 0 \\ 2x + z - 7 \ = 0 \end{cases}$

   La droite d passe-t-elle par les points $C(5; 14; -3)$ et $D(1; -6; 3)$?

   Pour le savoir, nous substituons les coordonnées de C dans l'une des différentes descriptions de d, par exemple dans les équations paramétriques.

   $$\begin{cases} 5 = 2 + k \\ 14 = -1 + 5k \\ -3 = 3 - 2k \end{cases}$$

   La première équation donne $k = 3$ (même valeur pour les trois équations) et donc $C \in d$.

   On a aussi $\begin{cases} 5 \cdot 5 - 14 - 11 = 0 \\ 2 \cdot 5 + (-3) - 7 = 0 \end{cases}.$

   Pour le point D, on a $\begin{cases} 5 \cdot 1 - (-6) - 11 = 0 \\ 2 \cdot 1 + 3 - 7 \neq 0 \end{cases}$ *et donc $D \notin d$.*

2. *Une droite d passe par le point $A(1; -2; 4)$ et est parallèle à la droite (BC) où $B(3; -2; 0)$ et $C(-5; -2; 2)$.*

   La droite d a la même direction que la droite (BC).

   Comme $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que tout vecteur non nul *colinéaire à un vecteur directeur d'une droite est aussi un vecteur directeur de cette droite, on peut choisir* $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *comme vecteur directeur de la droite d. On en déduit*

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 4k \\ y = -2 \\ z = 4 + k \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \\ \cdot 4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2 = 0 \\ x + 4z - 17 = 0 \end{cases}$$

Remarques.

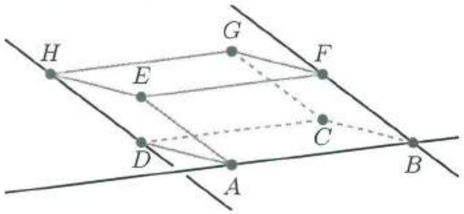
1. Dans l'exemple précédent, on observe que $\vec{d} \cdot \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

   On en déduit que $\vec{d} \perp \vec{e_2}$ et que la droite d est parallèle au plan Oxz. Plus généralement, si une composante du vecteur directeur est nulle, la droite est parallèle à un des plans de référence.
2. Si $d_1 = d_2 = 0$, nous pouvons écrire $\vec{d} \cdot \vec{e_1} = \vec{d} \cdot \vec{e_2} = 0$ et donc $\vec{d} \perp \vec{e_1}$ et $\vec{d} \perp \vec{e_2}$. Ainsi la droite d est perpendiculaire au plan Oxy et donc parallèle à l'axe Oz. Plus généralement, si deux composantes du vecteur directeur sont nulles, la droite est parallèle à un des axes.

5.2 Positions relatives de deux droites

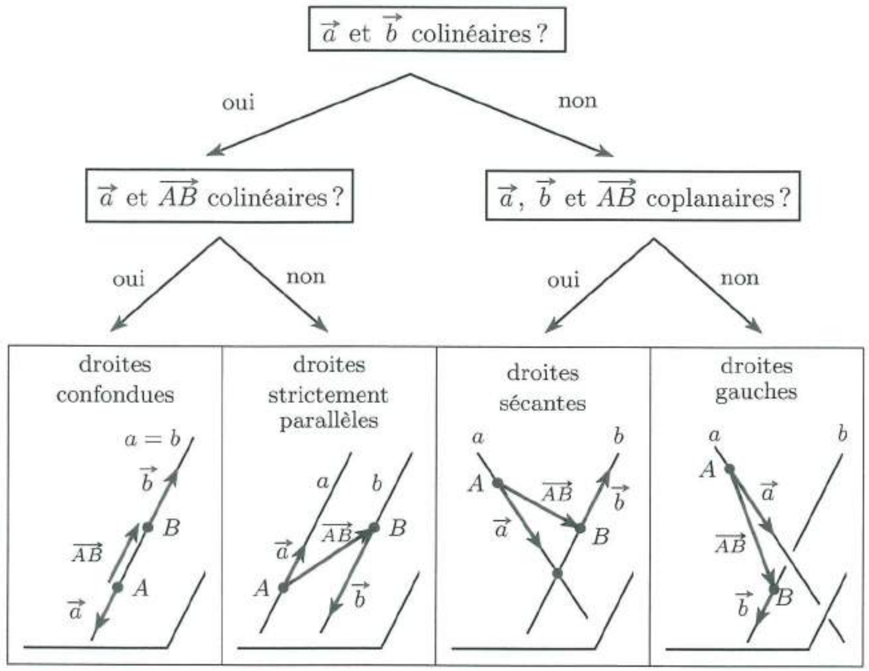
Si, dans le plan, deux droites ne peuvent être que sécantes ou parallèles, la situation est plus riche dans l'espace. Deux droites de l'espace peuvent ne pas être coplanaires. Elles sont alors dites **gauches**.

Sur la figure ci-contre, les droites (BF) et (DH) sont strictement parallèles, les droites (AB) et (BF) sont sécantes et les droites (AB) et (DH) sont gauches.



Dès lors, deux droites de l'espace peuvent être confondues, strictement parallèles, sécantes ou gauches.

Soient une droite a passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{a}$ et une droite b passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{b}$. Nous pouvons décrire leur position relative en utilisant le schéma ci-dessous.



Exemple. *Considérons la droite d passant par les points* $A(3; 0; 1)$ *et* $B(2; 1; -1)$ *ainsi que la droite e passant par les points* $C(4; -5; 2)$ *et* $D(2; 1; 6)$.

Les vecteurs $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{e} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *sont des vecteurs directeurs des droites d et e et ne sont pas colinéaires. Déterminons si* $\vec{d}$, $\vec{e}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont coplanaires.*

$$\mathrm{Det}(\vec{d}; \vec{e}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

Nous en déduisons que les droites d et e sont gauches.

Remarques.

1. Les affirmations suivantes sont équivalentes.
   a) Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.
   b) Les droites a et b sont coplanaires.
   c) Il existe un plan contenant les droites a et b.
   d) Les droites a et b ne sont pas gauches.
2. Nous pouvons déterminer l'intersection de deux droites en résolvant un système d'équations décrivant ces deux droites (voir exercices) et en déduire partiellement leur position relative. Si le système est indéterminé, les droites sont confondues. Si le système admet une solution unique, les droites sont sécantes et si le système est impossible, les droites sont strictement parallèles ou gauches.
3. Si les vecteurs directeurs de deux droites sont orthogonaux, celles-ci sont orthogonales. Si de plus elles sont sécantes, on dit qu'elles sont **perpendiculaires**.

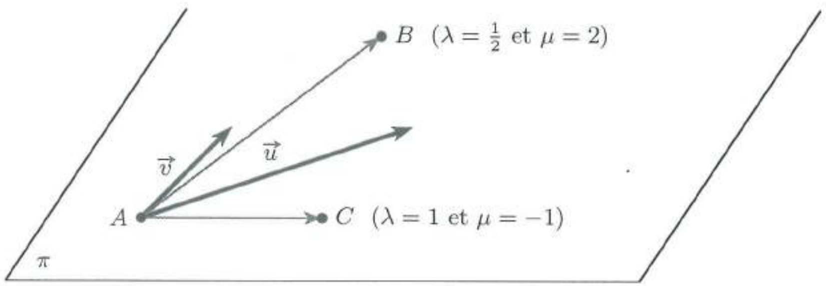
5.3 Équations du plan

Un plan de l'espace est entièrement déterminé par trois points non alignés. Ceux-ci permettent de définir deux vecteurs non colinéaires appelés **vecteurs directeurs** du plan.

Afin de décrire un plan dans l'espace, il suffit d'en connaître un point A et deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Pour tous les points P du plan π, les vecteurs $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Il existe donc deux nombres réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Réciproquement, à tout couple de nombres réels λ et μ correspond un point P du plan.

$$P \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

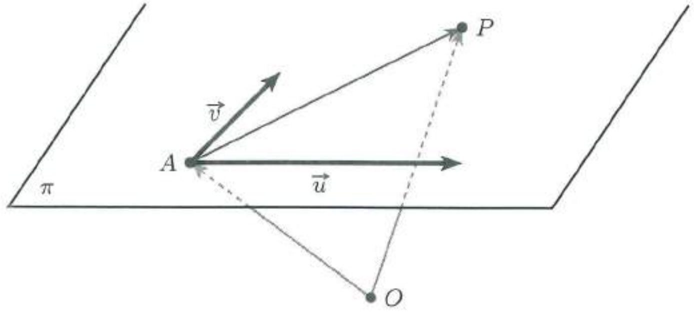


Si le plan est déterminé par trois points non alignés A, B et C, on peut choisir comme vecteurs directeurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point d'un plan π et $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs directeurs de ce plan. Quelle condition doit vérifier un point quelconque $P(x; y; z)$ pour appartenir au plan π ?

Comme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, on obtient l'**équation vectorielle** du plan π.

$$P \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$



En considérant les coordonnées des points A et P et les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on trouve la **représentation paramétrique** du plan.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On en déduit les **équations paramétriques** du plan.

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_A + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_A + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

En éliminant les paramètres λ et μ de ce système d'équations, on obtient une **équation cartésienne** du plan de la forme suivante.

$$ax + by + cz + d = 0$$

Exemple. *Soit le plan π déterminé par les points $A(-3;1;4)$, $B(-1;2;7)$ et $C(0;5;2)$.*

On note $P(x;y;z)$ un point quelconque du plan π. Ses différentes descriptions sont les suivantes.

Équation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

Représentation paramétrique : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Équations paramétriques : $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda + 3\mu \\ y = \ \ 1 + \lambda + 4\mu \\ z = \ \ 4 + 3\lambda - 2\mu \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda + 3\mu \\ y = \ \ 1 + \lambda + 4\mu \\ z = \ \ 4 + 3\lambda - 2\mu \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-2) \\ \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y = -5 - 5\mu \\ 3x - 2z = -17 + 13\mu \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot 13 \\ \cdot 5 \end{array}\right.$$

Équation cartésienne : $14x - 13y - 5z + 75 = 0$

Remarques.

1. Comme on l'a vu à la page 138, une droite peut être représentée par un système d'équations $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$. Chacune de ces équations représente un plan. Une droite de l'espace peut donc être considérée comme l'intersection de deux plans sécants.
2. L'équation cartésienne d'un plan peut aussi être établie en utilisant la notion de déterminant vue au chapitre 1.

$$P \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP}, \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont coplanaires}$$

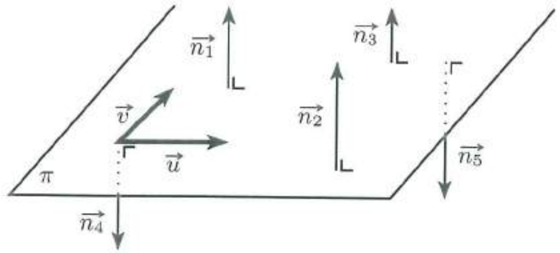
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Det}(\overrightarrow{AP}; \vec{u}; \vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_A & u_1 & v_1 \\ y - y_A & u_2 & v_2 \\ z - z_A & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

En reprenant l'exemple précédent, on obtient

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2 & 3 \\ y-1 & 1 & 4 \\ z-4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 14x - 13y - 5z + 75 = 0$$

5.4 Vecteur normal à un plan

Soit un plan π de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On appelle **vecteur normal** au plan π tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Ce vecteur est alors orthogonal à tout vecteur directeur de ce plan (voir exercice 30).



Notons que si $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan, tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ l'est aussi.

Étant donnés deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un plan π, on montrera au chapitre 6 qu'on peut trouver un vecteur normal $\vec{n}$ en résolvant le système indéterminé $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$.

Le théorème suivant établit le lien entre l'équation cartésienne d'un plan π et un vecteur normal à ce plan.

Théorème 13. *Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan π d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.*

Exemple 1. *Reprenons l'exemple précédent où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme l'équation du plan est $14x - 13y - 5z + 75 = 0$, en vertu du théorème 13, un vecteur normal au plan est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et que $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.*

Exemple 2. *Déterminons l'équation du plan π perpendiculaire à la droite (AB) et passant par C où $A(0;2;-1)$, $B(3;-1;5)$ et $C(3;10;-2)$.*

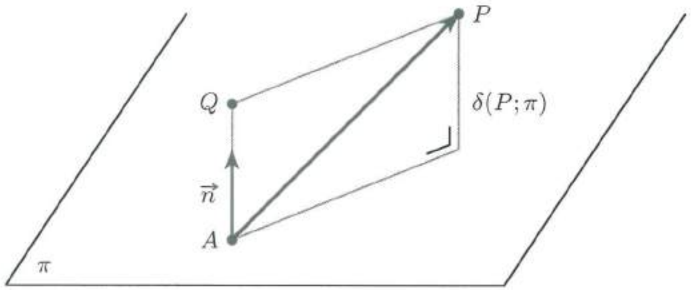
Le plan π admet pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ ou encore $\vec{n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\pi : x - y + 2z + d = 0$.
Comme $C \in \pi$, on a $3 - 10 - 4 + d = 0 \Rightarrow d = 11$.
Donc $\pi : x - y + 2z + 11 = 0$.

5.5 Distance d'un point à un plan

Soient un plan π et un point P quelconque. Nous voulons calculer la distance $\delta(P;\pi)$ du point P au plan π. Nous adoptons une démarche analogue à celle présentée au paragraphe 3.7 où nous avons calculé la distance d'un point à une droite.

Considérons un vecteur $\vec{n}$ normal au plan π et un point A de ce plan. La distance cherchée est $\delta(P;\pi) = \|\overrightarrow{AQ}\|$ où $\overrightarrow{AQ}$ est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AP}$ sur $\vec{n}$.



En utilisant le théorème 6 du chapitre 2, on trouve

$$\delta(P;\pi) = \|\overrightarrow{AQ}\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Théorème 14. *Soit le plan π d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et un point $P(x_P;y_P;z_P)$. On a*

$$\delta(P;\pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration.

Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan π. Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de π. Alors $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \\ z_P - z_A \end{pmatrix}$ et on a

$$\begin{aligned} \delta(P;\pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} &= \frac{|a(x_P - x_A) + b(y_P - y_A) + c(z_P - z_A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|ax_P + by_P + cz_P - (ax_A + by_A + cz_A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

Les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan π. Par conséquent $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$, c'est-à-dire $ax_A + by_A + cz_A = -d$ et donc

$$\delta(P;\pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

□

Exemple. *La distance entre le point $P(2;-3;5)$ et le plan π d'équation $4x + 4y - 7z + 1 = 0$ est $\delta(P;\pi) = \dfrac{|4 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 7 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-7)^2}} = \dfrac{38}{9}$.*

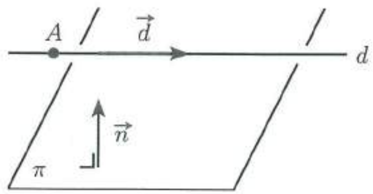
Remarque. À l'aide du théorème 14, on peut déterminer les équations des plans bissecteurs de deux plans donnés (voir paragraphe 6.3.3).

5.6 Positions relatives d'une droite et d'un plan

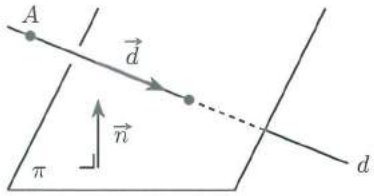
Soient une droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{d}$ et un plan π de vecteur normal $\vec{n}$.

La droite d est parallèle au plan π si et seulement si les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Si, de plus, $A \in \pi$, la droite d est contenue dans le plan π.



Dans tous les autres cas, la droite d est sécante au plan π.



Exemple. *On considère la droite* $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et le plan* $\pi : 2x - y + 4z + 10 = 0$.

On peut prendre $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Comme* $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$, *la droite et le plan sont sécants.*

On peut déterminer le point d'intersection I de d et π en remplaçant dans l'équation cartésienne du plan les variables x, y et z par leur expression tirée des équations paramétriques de d. On obtient

$$2(2+3k) - (5+4k) + 4(-2k) + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \tfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad I(\tfrac{13}{2}; 11; -3)$$

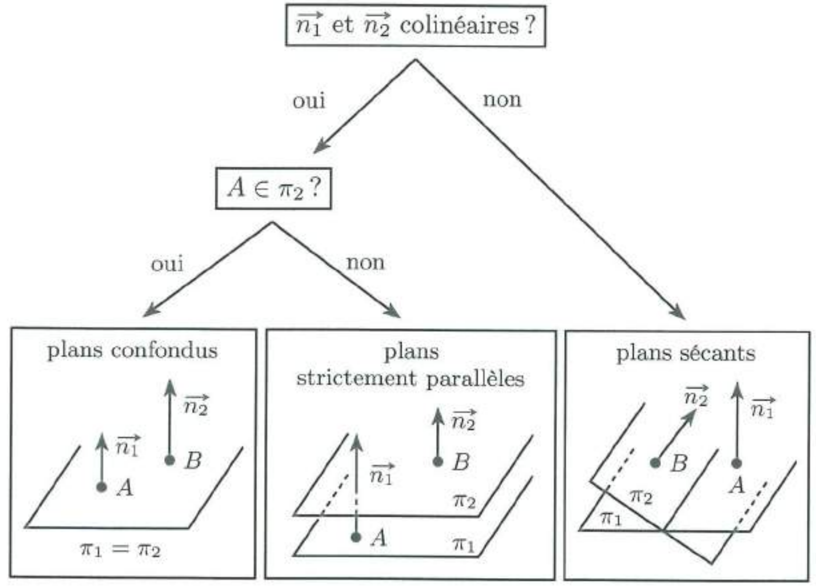
Remarques.

1. La droite d et le plan π sont perpendiculaires si et seulement si le vecteur directeur $\vec{d}$ et le vecteur normal $\vec{n}$ sont colinéaires.
2. On détermine l'intersection d'une droite et d'un plan en résolvant un système d'équations les décrivant. Si le système admet une solution unique, la droite est sécante au plan. Si le système est impossible, la droite est strictement parallèle au plan. Si le système admet une infinité de solutions, la droite est contenue dans le plan.

5.7 Positions relatives de deux plans

Deux plans peuvent être confondus, strictement parallèles ou sécants.

Soient un plan π_1 passant par A et de vecteur normal $\vec{n_1}$ ainsi qu'un plan π_2 passant par B et de vecteur normal $\vec{n_2}$. Nous pouvons décrire de façon systématique leur position relative en utilisant le schéma suivant.



Considérons les équations cartésiennes de ces deux plans.

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ et } \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

On a

$$\begin{aligned} \pi_1 \text{ et } \pi_2 \text{ parallèles} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{n_1} \text{ et } \vec{n_2} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus, les plans π_1 et π_2 sont confondus si $d_1 = \lambda d_2$ et strictement parallèles si $d_1 \neq \lambda d_2$.

Exemple. *On donne trois plans* $\pi_1 : 6x - 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_2 : -3x + y - z + 1 = 0$ *et* $\pi_3 : 4x - 10y - 3z + 16 = 0$.

Les plans π_1 et π_2 sont strictement parallèles car $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $5 \neq -2 \cdot 1$.

Le plan π_3 est sécant à π_1, et donc à π_2, car $\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *ne sont pas colinéaires.*

Pour déterminer la droite i d'intersection de π_2 et π_3, nous cherchons deux points dont les coordonnées vérifient les équations des deux plans

$$\begin{cases} -3x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 10y - 3z + 16 = 0 \end{cases}.$$

Les points $A(1;2;0)$ et $B(-1;0;4)$ appartiennent à la droite i qui peut donc être décrite par

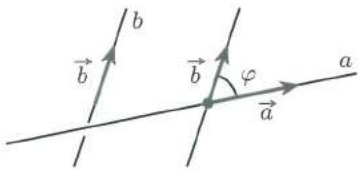
$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = -2k \end{cases}.$$

5.8 Angles entre droites et plans

Nous avons étudié la notion d'angle de deux vecteurs au chapitre 2. Nous allons appliquer le résultat obtenu au calcul de l'angle de deux droites, d'une droite et d'un plan, ainsi que de deux plans.

5.8.1 Angle de deux droites

On appelle **angles de deux droites** les angles formés par l'une de ces droites et la parallèle à l'autre menée par un point de la première.

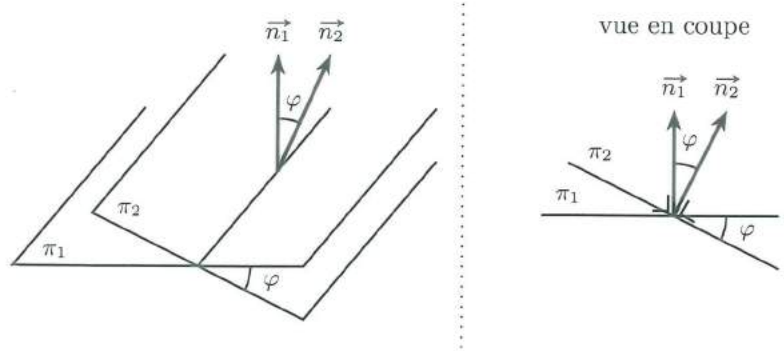


L'angle aigu φ de deux droites est l'angle entre les vecteurs directeurs de ces droites ou le supplémentaire de cet angle. Si les droites a et b ont pour vecteurs directeurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on a

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

5.8.2 Angle de deux plans sécants

Les angles de deux plans peuvent être calculés en considérant les vecteurs normaux à ces plans.



Si les plans π_1 et π_2 ont pour vecteurs normaux $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$, leur angle aigu φ est donné par

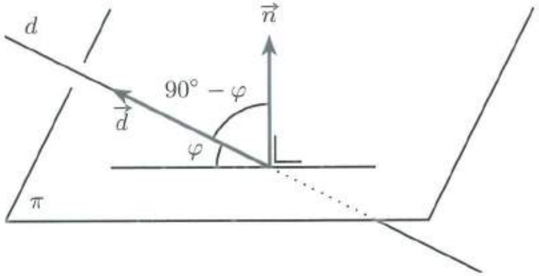
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\|\vec{n_2}\|}$$

Exemple. *L'angle aigu φ des plans $2x - y + 3z = 0$ et $x + 5y + 2z - 5 = 0$ est donné par*

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{14}\sqrt{30}} = \frac{3}{2\sqrt{105}} \Rightarrow \varphi \approx 81{,}58°$$

5.8.3 Angle d'une droite et d'un plan

Si une droite n'est pas perpendiculaire à un plan, on appelle **angle de la droite et du plan** l'un des angles de cette droite avec sa projection orthogonale sur le plan. Si la droite est perpendiculaire au plan, l'angle est droit.



L'angle aigu φ formé par la droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ et le plan π de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ vérifie donc

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{d}\|\|\overrightarrow{n}\|}$$

Exemple. *Soit le plan π d'équation cartésienne $3x - 2y + 2z - 1 = 0$ et la droite d'équations paramétriques* $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 + 3k \\ z = 4 - 5k \end{cases}$.

L'angle aigu φ formé par d et π vérifie

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{35}\,\sqrt{17}} = \frac{13}{\sqrt{35}\,\sqrt{17}}$$

Ainsi $\varphi \approx 32{,}20^\circ$.

5.9 Exercices relatifs au chapitre 5

Droite

1. Les points A, B et C ci-dessous sont-ils alignés ?

a) $A(3; 1; -1)$, $B(2; 0; 4)$ et $C(-3; 2; 5)$
b) $A(2; -1; 0)$, $B(1; 1; -2)$ et $C(4; -5; -11)$
c) $A(3; 1; \frac{1}{2})$, $B(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ et $C(9; 4; \frac{1}{2})$
d) $A(13; -22; 2)$, $B(-5; -10; 26)$ et $C(-38; 12; 60)$
e) $A(\frac{4}{3}; -1; -\frac{2}{3})$, $B(\frac{23}{6}; -\frac{11}{6}; \frac{8}{3})$ et $C(-\frac{55}{6}; \frac{5}{2}; -\frac{44}{3})$

2. Soient les droites $d_1 : \begin{cases} x = 5 - k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 + 3k \end{cases}$, $d_2 : \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 4x - 2z + 4 = 0 \end{cases}$

et $d_3 : \begin{cases} \dfrac{x-1}{5} = y + 2 \\ \dfrac{x-1}{5} = z + 1 \end{cases}$.

Les points $A(6; -10; -8)$, $B(3; 8; 9)$, $C(6; -1; 0)$ et $D(-6; 35; 36)$ appartiennent-ils aux droites d_1, d_2 ou d_3 ?

3. Trouver une représentation paramétrique et donner les équations cartésiennes de la droite

a) qui passe par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
b) qui passe par $A(2; 3; 5)$ et $B(1; 5; 7)$;
c) qui passe par $A(-3; 5; 2)$ et est parallèle à Oz ;
d) qui passe par $A(0; -2; -7)$ et est parallèle à Ox ;
e) qui passe par $A(8; 6; -12)$ et est parallèle à la droite (BC) où $B(4; 0; -2)$ et $C(5; -2; 3)$;
f) qui passe par $A(1; -2; 0)$ et est parallèle à la droite $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - k \\ z = 3k \end{cases}$.

4. On donne la droite $d : \begin{cases} x = 2 - 5k \\ y = -1 + k \\ z = 3k \end{cases}$. Trouver le point de d

a) qui a une abscisse égale à 12 ;

b) qui a une ordonnée égale à 5 ;

c) qui a une cote égale à -2 ;

d) dont l'abscisse et la cote sont égales ;

e) dont la cote est égale au double de l'ordonnée.

5. Déterminer les équations cartésiennes de la droite $d : \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 8 - 5\lambda \end{cases}$.

6. a) Soient les droites $p : \begin{cases} x = 4 - 3k \\ y = 6k \\ z = 8 - 5k \end{cases}$ et $q : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases}$.

Donner pour chacune d'elles un système d'équations cartésiennes du type $\dfrac{x-a}{d_1} = \dfrac{y-b}{d_2} = \dfrac{z-c}{d_3}$.

b) Soient les droites $r : \begin{cases} x - 2y = -13 \\ x + z = 2 \end{cases}$ et $s : \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.

Donner pour chacune d'elles les équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes du type $\dfrac{x-a}{d_1} = \dfrac{y-b}{d_2} = \dfrac{z-c}{d_3}$.

c) Une droite t est donnée par $t : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{2}$. Donner les équations paramétriques de cette droite.

7. Montrer que les systèmes d'équations suivants déterminent la même droite.

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 5 + 2r \\ y = 3 - 2r \\ z = 2 + r \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 9 - s \\ z = -1 + \frac{1}{2}s \end{cases}$$

8. Montrer que les descriptions suivantes déterminent la même droite.

$$\begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{4}$$

Intersections et positions relatives de deux droites

9. Indiquer si les paires de droites suivantes sont sécantes, strictement parallèles, confondues ou gauches. Dans le cas où elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

a) $\begin{cases} x = -2k \\ y = 3 + 5k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 4t + 4 \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 6 - 2k \\ y = 3 + 5k \\ z = -1 - k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 1 - 10t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 6 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 6t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = k + 3 \\ y = 3 - 2k \\ z = -1 - 2k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t - 3 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2y + z = 5 \end{cases}$ et $\begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 2 + 5k \\ y = 3 + 4k \\ z = 1 + 5k \end{cases}$ et $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-1}{6}$

10. Les droites d_1 et d_2 passant respectivement par A_1, B_1 et A_2, B_2 sont-elles sécantes, confondues, strictement parallèles ou gauches ? Dans le cas où elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

a) $A_1(1;0;1)$, $B_1(10;6;4)$ et $A_2(0;2;2)$, $B_2(4;2;2)$

b) $A_1(-4;2;1)$, $B_1(-1;1;3)$ et $A_2(0;5;-2)$, $B_2(9;2;4)$

c) $A_1(8;0;3)$, $B_1(-2;4;1)$ et $A_2(8;3;-2)$, $B_2(0;0;5)$
d) $A_1(2;-3;1)$, $B_1(3;-2;3)$ et $A_2(0;-5;-3)$, $B_2(5;0;7)$
e) $A_1(6;4;-4)$, $B_1(4;0;-2)$ et $A_2(7;0;-2)$, $B_2(11;-4;0)$

11. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des droites ci-dessous avec les plans Oxy, Oyz et Oxz [1].

a) $\begin{cases} x = 1+k \\ y = -3+k \\ z = 3-3k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5+5k \\ z = 9+3k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -5+5k \\ y = 6 \\ z = -2+k \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 4+2k \\ y = -7 \\ z = 1 \end{cases}$

12. On considère les droites $a : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, $b : \begin{cases} x = 5+\mu \\ y = -2+\mu \\ z = 3+\mu \end{cases}$ et $c : \begin{cases} x = 3+\nu \\ y = -7+\nu \\ z = 2+\nu \end{cases}$.

a) Montrer que les droites a et b sont orthogonales et gauches.

b) Montrer que les droites a et c sont perpendiculaires. Calculer ensuite leur point d'intersection.

13. Trouver les nombres réels p et q pour que les droites d et d' suivantes soient parallèles.

$d : \begin{cases} x = 1+p\lambda \\ y = 2+(1-q)\lambda \\ z = (2q+1)\lambda \end{cases}$ $d' : \begin{cases} x = -1+(p-3)\mu \\ y = 2\mu \\ z = -1+q\mu \end{cases}$

1. Ces points sont appelés respectivement première, deuxième et troisième trace de la droite (voir annexe A).

14. On considère la droite d_1 passant par $A(2;1;1)$ de vecteur directeur $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}$ ainsi que la droite d_2 passant par $B(-5;2;-7)$ de vecteur directeur $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 2-m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Étudier les positions relatives des droites d_1 et d_2 en fonction de m.

Plan

15. Montrer que les points suivants sont coplanaires.

a) $A(0;2;4)$, $B(1;-1;3)$, $C(-8;2;1)$ et $D(-6;-4;-1)$

b) $A(5;2;1)$, $B(-6;3;-2)$, $C(2;5;2)$ et $D(0;0;-2)$

16. Déterminer z pour que les points $A(1;1;9)$, $B(5;\frac{3}{2};14)$, $C(0;-3;0)$ et $D(-\frac{8}{3};\frac{8}{3};z)$ soient coplanaires.

17. a) Montrer que les quatre points $A(-4;0;3)$, $B(-2;3;0)$, $C(0;2;1)$ et $D(2;1;2)$ sont situés dans un même plan.

b) On donne les points $A(1;1;3)$, $B(3;1;-1)$, $C(2;1;2)$, $D(4;2;2)$ et $E(3;2;4)$. Sont-ils coplanaires ? Y en a-t-il quatre qui soient coplanaires ?

18. Les points $A(0;2;2)$, $B(4;\frac{3}{2};\frac{5}{2})$ et $C(\frac{4}{5};-\frac{2}{5};\frac{7}{5})$ appartiennent-ils au plan d'équation $2x+3y-3z-5=0$?

19. Les points $A(-2;7;8)$, $B(4;4;3)$ et $C(\frac{11}{6};-\frac{29}{6};15)$ appartiennent-ils au plan d'équation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$?

20. Trouver une représentation paramétrique et l'équation cartésienne du plan

a) qui passe par $A(1;-2;3)$ et qui admet pour vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$;

b) qui passe par O, $A(2;1;-1)$ et $B(1;3;-1)$;

c) qui passe par $A(-6;3;-2)$, $B(5;2;1)$ et $C(2;5;2)$;

d) qui passe par $A(1;1;\frac{1}{3})$, $B(2;5;\frac{4}{3})$ et $C(3;5;2)$;

e) qui passe par $A(5;2;-2)$ et qui est parallèle au plan Oxy ;

f) qui passe par $A(7;-4;6)$ et qui est parallèle au plan Oxz ;

g) qui passe par $A(\frac{9}{5};\frac{7}{5};-\frac{14}{5})$ et qui est parallèle au plan Oyz ;

h) qui passe par $A(-3;5;-4)$ et qui est parallèle au plan de la question b) ;

i) qui passe par O, par $A(-3;2;5)$ et qui est parallèle à l'axe Oz.

21. Trouver l'équation cartésienne du plan α passant par $A(4;2;1)$ et contenant la droite $d : \begin{cases} x = 2+k \\ y = 1-3k \\ z = 3+k \end{cases}$.

22. Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par le point A et parallèle au plan α dans les cas suivants.

a) $A(2;-5;3)$ et $\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A(2;2;-2)$ et $\alpha : x - 2y - 3z = 0$

23. Montrer que les descriptions paramétriques suivantes déterminent le même plan.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 7 + 4p + 2q \\ y = -4 - 6p + 4q \\ z = 2 - 2p \end{cases}$$

24. Trouver une représentation paramétrique des plans suivants.

a) $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ b) $2x - y + z - 4 = 0$

25. On donne deux droites d_1 et d_2. Montrer qu'elles se coupent en un point I et donner l'équation cartésienne du plan qu'elles déterminent.

a) $d_1 : \begin{cases} x = 5+k \\ y = 1 \\ z = -1-k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 5+2l \\ y = 9+4l \\ z = 7+2l \end{cases}$

b) $d_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ et $d_2 : \begin{cases} 3x - 2y + 7z + 32 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

26. Déterminer l'équation cartésienne du plan

a) qui passe par $A(3;4;1)$ et qui a pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$;

b) qui a pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et qui passe par $A(-2;6;7)$;

c) qui passe par $A(-6;10;16)$ et qui est perpendiculaire à la droite $\begin{cases} x = 6-8k \\ y = 4+4k \\ z = 8k \end{cases}$.

27. Déterminer l'équation cartésienne du plan

a) qui passe par $A(3;1;1)$ et qui est perpendiculaire à la droite (BC) où $B(1;0;5)$ et $C(3;-3;8)$;

b) qui passe par $A(1;-2;4)$ et qui est parallèle au plan d'équation $5x + 2y - z + 5 = 0$;

c) qui passe par $A(-3;3;2)$ et qui est parallèle au plan donné par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

d) qui passe par O et $A(1;1;1)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $x - y + z = 0$;

e) qui passe par $A(-1;-2;0)$ et $B(1;1;2)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

28. Trouver une représentation paramétrique de la droite passant par $A(2;3;5)$ et perpendiculaire au plan π d'équation $3x+2y-z=0$.

29. Trouver l'équation cartésienne du plan passant par $A(3;1;-3)$ et perpendiculaire à la droite $\begin{cases} x=1-3k \\ y=2+k \\ z=2+5k \end{cases}$.

30. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan π de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de ce plan.

Positions relatives de plans et de droites

31. Indiquer si les paires de plans suivants sont sécants, strictement parallèles ou confondus.

a) $3x-2y+5z-4=0$ et $3x+2y+5z=4$

b) $3x-2y+5z-4=0$ et $6x-4y+10z=7$

c) $3x-2y+5z-4=0$ et $-15x+10y-25z+20=0$

d) $3x-2y+5z-4=0$ et $\begin{cases} x=4+2k+5l \\ y=2+3k \\ z=-3l \end{cases}$

e) $3x-2y+5z-4=0$ et $\begin{cases} x=2+k-l \\ y=1+3k-2l \\ z=-k+l \end{cases}$

f) $\begin{cases} x=1+3k-2l \\ y=1-k+l \\ z=3+k-l \end{cases}$ et $\begin{cases} x=2+p+5q \\ y=2-2q \\ z=2+2q \end{cases}$

g) $\begin{cases} x=1+3k-2l \\ y=2-k+l \\ z=3+k-l \end{cases}$ et $\begin{cases} x=1+6p-2q \\ y=2-2p+2q \\ z=3+2p-q \end{cases}$

h) $\begin{cases} x=1+3k-2l \\ y=2+k+l \\ z=3+k-l \end{cases}$ et $\begin{cases} x=2+p+6q \\ y=2+p+2q \\ z=2+2q \end{cases}$

32. Indiquer si les paires de plans suivants sont sécants, strictement parallèles ou confondus.

a) $3x+y-2z=8$ et $6x-2y-z=3$

b) $4x-2y+5z=2$ et $-2x+y-\frac{5}{2}z=1$

c) $-x+2y+3z=3$ et $2x-4y-6z+6=0$

d) $2x-6y-5z=8$ et $6x-2y-4z-6=0$

e) $3x-8=0$ et $x=-3$

f) $z=2$ et $4y-5=0$

g) $6x+3z-4=0$ et $2x+z+1=0$

h) $-\frac{x}{5}+y-\frac{3z}{5}+9=0$ et $\frac{x}{3}-\frac{5}{3}y+z-15=0$

33. On donne les points $A(1;4;1)$, $B(-2;-8;3)$, $C(-5;-11;5)$, $D(3;5;-1)$, $E(3;-11;-1)$ et $F(0;-3;1)$. Montrer que les plans (ABC) et (DEF) sont parallèles.

34. On donne une droite d et un plan α. La droite d est-elle strictement parallèle au plan α, incluse dans α ou coupe-t-elle α ?

a) $d : \begin{cases} x=3+2k \\ y=5-2k \\ z=3+2k \end{cases}$ et $\alpha : 2x+y-z=0$

b) $d : \begin{cases} x-2y+z=4 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$ et $\alpha : 3x-2y+4z=0$

c) $d : \begin{cases} x=2-3k \\ y=3+k \\ z=1-k \end{cases}$ et $\alpha : 4x+y-11z=0$

d) $d : \begin{cases} x+y-3z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ et $\alpha : \begin{cases} x=5-k+2l \\ y=10+k-3l \\ z=5+k-l \end{cases}$

35. On donne les deux droites

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Soient P un point quelconque de g et Q un point quelconque de h. Quelle condition les paramètres k et t doivent-ils vérifier pour que la droite (PQ) soit parallèle au plan d'équation $z = 0$?

b) Cette condition étant vérifiée, quel est le lieu géométrique des milieux du segment $[PQ]$?

36. On considère deux droites g et h ainsi que deux plans α et β de l'espace. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

a) $(g \| h \text{ et } h \| \alpha) \Rightarrow g \| \alpha$ b) $(\alpha \| g \text{ et } \beta \| g) \Rightarrow \alpha \| \beta$

c) $(\alpha \| g \text{ et } \alpha \| \beta) \Rightarrow g \| \beta$ d) $(g \| \alpha \text{ et } h \| \alpha) \Rightarrow g \| h$

e) $(\alpha \| g \text{ et } \beta \| g) \Rightarrow (\alpha \cap \beta) \| g$ f) $(\alpha \| \beta \text{ et } g \nparallel \alpha) \Rightarrow g \nparallel \beta$

Intersection de plans et de droites

37. Déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite d et d'un plan α dans les cas suivants.

a) $d: \begin{cases} x = -4 - 5k \\ y = 8 + 6k \\ z = 3 - k \end{cases}$ et $\alpha: 2x + 3y - z - 5 = 0$

b) $d: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -1 - k \\ z = 2 + k \end{cases}$ et $\alpha: 2x + y + 5z = 0$

c) $d: \begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -1 + k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$ et $\alpha: x + 2y - 5z + 9 = 0$

d) $d: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -3 + k \\ z = -2 - k \end{cases}$ et $\alpha: 2x - y + 3z + 1 = 0$

e) $d: \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 + k \\ z = -k \end{cases}$ et $\alpha: 2x - y + 3z + 5 = 0$

f) $d: \begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 3 + k \\ z = 4 - k \end{cases}$ et $\alpha: \begin{cases} x = 3 + 3s - t \\ y = -2 - 5s + t \\ z = 7 + 3s - t \end{cases}$

g) $d: \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = 4 + 3k \\ z = -5 + 7k \end{cases}$ et $\alpha: \begin{cases} x = 1 + 3s - 5t \\ y = 2 + 7s + 2t \\ z = 6 + 4s + 3t \end{cases}$

h) $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + k \\ z = -2 + k \end{cases}$ et $\alpha: \begin{cases} x = -2 + s + t \\ y = t \\ z = -5 \end{cases}$

38. Trouver le point d'intersection entre la droite passant par les points $D(1; 2; 3)$ et $E(7; 6; 5)$ et le plan d'équation $21x + 14y + 6z = 42$.

39. On donne les points $A(3; 4; 0)$, $B(-3; 8; 1)$, $C(1; 2; -3)$, $D(11; 1; 1)$, $E(3; 3; -1)$, $F(8; 3; 1)$, $G(0; 5; -1)$, $P(-5; -2; -5)$ et $Q(0; 4; -3)$.

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (PQ) et du plan (ABC).

b) Montrer que la droite (DE) est incluse dans le plan (ABC).

c) Montrer que la droite (FG) est strictement parallèle au plan (ABC).

40. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des trois plans α, β et γ dans les cas suivants.

a) $\alpha: 3x + 4y - 5z + 3 = 0$ $\beta: 2x - y + 2z - 5 = 0$
$\gamma: x + y - 3z + 4 = 0$

b) $\alpha: x + 2y - 3z - 6 = 0$ $\beta: 5x + 4y - 5z - 21 = 0$
$\gamma: 3x - 2y + z - 2 = 0$

c) $\alpha: 12x - 4y - 2z - 1 = 0$ $\beta: 3x - 5y + z + 2 = 0$
$\gamma: 2x - y - 3z + 7 = 0$

d) $\alpha: \begin{cases} x = 6 + 3s - 2t \\ y = 6 + s - t \\ z = 2 + 2s - t \end{cases}$ $\beta: \begin{cases} x = 7 + 3p - q \\ y = 6 - p + q \\ z = p - 2q \end{cases}$
$\gamma: x + 3y - z = 22$

41. Montrer que les plans d'équation $3x - y + 9z + 4 = 0$, $x + y - z = 0$ et $x + 2y - 4z = 1$ ont une infinité de points en commun. Déterminer des équations paramétriques de leur droite d'intersection.

42. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans α et β dans les cas suivants.

a) $\alpha : x - 2y + z + 3 = 0$ $\quad\quad$ $\beta : x + y - 3z - 2 = 0$

b) $\alpha : \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 + n \\ z = 2 + n \end{cases}$ $\quad\quad$ $\beta : \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 + 2p \\ z = -p + q \end{cases}$

c) $\alpha : x - 2y + z = 0$
β passant par $P(2; 3; 1)$, $Q(-3; 0; 2)$ et $R(1; 2; 3)$

d) α passant par $A(6; 4; 7)$, $B(9; 2; 9)$ et $C(1; 7; 0)$
β passant par $P(2; 2; 4)$, $Q(6; 13; 4)$ et $R(1; 3; 7)$

43. Soit le plan d'équation $2x + 3y + 6z = 18$. Trouver les coordonnées des points d'intersection de ce plan avec les trois axes de coordonnées et les équations paramétriques de la droite d'intersection de ce plan avec les trois plans Oxy, Oxz et Oyz.

44. On donne les points $A(-6; 9; 5)$, $B(2; 1; 1)$, $P(7; 6; 3)$ et $Q(-3; 11; 13)$. Trouver les coordonnées du point C de la droite (PQ) tel que le triangle ABC soit isocèle de sommet C.

45. Trouver la projection orthogonale du point $P(3; 1; -1)$ sur le plan d'équation $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

46. Trouver une représentation paramétrique de la projection orthogonale de la droite d d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + k \\ z = 6 - 5k \end{cases}$ sur le plan d'équation $x - 2y + z = 1$.

47. Trouver les coordonnées du symétrique P' du point P relativement au plan α dans les cas suivants.

a) $P(2; -5; 8)$ et $\alpha : x - 2y + 3z = 8$

b) $P(0; -5; 5)$ et α passant par les points $A(4; -1; 3)$, $B(2; 1; 5)$ et $C(-1; -2; 0)$

48. On donne une droite d par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et le plan α d'équation $x - 2y + z = 3$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite symétrique de d relativement à α.

49. Un rayon lumineux issu du point $P(4; 5; -1)$ se réfléchit sur un miroir plan d'équation $x + 3y - 2z - 7 = 0$. Le rayon réfléchi passe par le point $Q(-7; 8; -9)$. Trouver les coordonnées du point d'incidence M.

Angle

50. Soient les points $A(1; 2; -2)$, $B(1; 1; 1)$, $C(3; 0; -3)$ et $D(-5; 12; 0)$. Calculer une valeur de l'angle des droites (AB) et (CD).

51. Calculer l'angle aigu des droites d et e dans les cas suivants.

a) $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $d : \begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = 4 - k \\ z = 6 - 3k \end{cases}$ $\quad\quad$ $e : \begin{cases} x = n \\ y = -2 - 2n \\ z = 4 + n \end{cases}$

52. Calculer l'angle aigu des plans α et β dans les cas suivants.

a) $\alpha : x + 2y - z = 0$ $\qquad \beta : 2x - 3y + 4z - 8 = 0$

b) $\alpha : x - 2y + 2z + 4 = 0$ $\qquad \beta : x + z + 3 = 0$

c) $\alpha : x - 2y + 3z = 41$ $\qquad \beta : 2x + 3y - z = 12$

d) $\alpha : x - y + 2z = 3$ $\qquad \beta : \begin{cases} x = 1 - 2k + n \\ y = 1 + k - 2n \\ z = 1 - k + 3n \end{cases}$

e) α passant par O, $A(1;2;3)$ et $B(5;4;6)$
β passant par O, $C(5;2;3)$ et $D(1;5;-4)$

53. Déterminer l'angle aigu que forme le plan d'équation $3x + 2y - 5z = 0$ avec chacun des axes de coordonnées.

54. Calculer l'angle aigu entre la droite d et le plan α dans les cas suivants.

a) $d : x - 1 = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$ $\qquad \alpha : 3x + 2y - 5z = 0$

b) $d : \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 5k \\ z = -3 + k \end{cases}$ $\qquad \alpha : 2x + 3y + 4z = 0$

55. Déterminer les équations cartésiennes des plans contenant la droite d'équation $2x = 2y = z$ et qui forment un angle de 45° avec le plan d'équation $x + y - z = 0$.

56. Déterminer les équations cartésiennes des plans contenant la droite (OE_3) et qui forment un angle de 60° avec le plan d'équation $2x + y - \sqrt{5}z = 0$.

Divers

57. On considère les points O, $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$ et $D(1;1;1)$. Montrer que la droite (OD) coupe le plan (ABC) au centre de gravité G du triangle ABC.

58. On donne le point $P(0;-1;2)$ et les deux droites

$$d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite d qui passe par P et qui coupe chacune des deux droites d_1 et d_2. Déterminer également les points d'intersection de cette droite avec d_1 et d_2.

59. Un insecte robotisé se déplace dans l'espace. On localise cet insecte par ses coordonnées $(x;y;z)$. On a programmé ce robot pour qu'il se déplace dans le plan π passant par les points $A(-5;14;9)$, $B(3;-2;5)$ et $C(-2;2;0)$.

a) Donner une équation cartésienne de π.

b) On constate que le robot se déplace le long de la droite
$d : \begin{cases} x = -\frac{3}{4}k \\ y = -2 + 2k \\ z = -1 + k \end{cases}$. Se déplace-t-il dans le plan π ?

c) Aïe ! Le robot s'est déréglé. On l'a d'abord localisé en $E(3;-4;11)$, puis il s'est rendu de E à $F(1;-2;7)$. S'il continue dans cette direction, pourra-t-il rejoindre le plan d'équation $5x + 4y + 8z + 6 = 0$?

Réponses aux exercices du chapitre 5

1. a) non b) non c) oui d) non e) oui

2. $A \notin d_1$, $A \notin d_2$ et $A \notin d_3$ $B \in d_1$, $B \notin d_2$ et $B \notin d_3$
$C \in d_1$, $C \notin d_2$ et $C \in d_3$ $D \in d_1$, $D \notin d_2$ et $D \notin d_3$

3. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x = 1 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $x - 2 = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-5}{-2}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} y = -2 \\ z = -7 \end{cases}$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $x - 8 = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z+12}{5}$

f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x = 1 \\ 3y + z + 6 = 0 \end{cases}$

4. a) $(12; -3; -6)$ b) $(-28; 5; 18)$ c) $(\frac{16}{3}; -\frac{5}{3}; -2)$ d) $(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$
e) $(12; -3; -6)$

5. $4 - x = \frac{y}{6} = \frac{8-z}{5}$

6. a) $p : \frac{x-4}{-3} = \frac{y}{6} = \frac{z-8}{-5}$ et $q : \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-2} = z - 1$

b) $r : \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 6 + k \\ z = 3 - 2k \end{cases}$, $\frac{x+1}{2} = y - 6 = \frac{z-3}{-2}$

$s : \begin{cases} x = k \\ y = 6 - 4k \\ z = 8 - 5k \end{cases}$, $x = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-8}{-5}$

c) $t : \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 1 + 7k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$

9. a) sécantes en $(0; 3; -1)$ b) strictement parallèles
c) confondues d) gauches
e) strictement parallèles f) sécantes en $(2; 3; 1)$

10. a) sécantes en $(4; 2; 2)$ b) strictement parallèles c) gauches
d) confondues e) sécantes en $(5; 2; -3)$

11. a) $(2; -2; 0)$, $(0; -4; 6)$ et $(4; 0; -6)$
b) $(2; -10; 0)$, pas de deuxième trace et $(2; 0; 6)$
c) $(5; 6; 0)$, $(0; 6; -1)$, pas de troisième trace
d) pas de première trace, $(0; -7; 1)$ et pas de troisième trace

12. b) $(3; -7; 2)$

13. $p = 9$ et $q = -2$

14. strictement parallèles si $m = 3$, sécantes si $m = -\frac{5}{3}$, gauches sinon

16. $z = \frac{26}{3}$

17. b) non ; A, B, D et E sont coplanaires

18. A non, B oui et C non

19. A oui, B non et C oui

20. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $x - y - z = 0$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $2x + y + 5z = 0$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $x + 2y - 3z - 6 = 0$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ et $8x + y - 12z - 5 = 0$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $z = -2$

f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $y = -4$

g) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{7}{5} \\ -\frac{14}{5} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x = \frac{9}{5}$

h) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $2x + y + 5z + 21 = 0$

i) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $2x + 3y = 0$

21. $5x + 4y + 7z - 35 = 0$

22. a) $3x - 5y - 4z - 19 = 0$ b) $x - 2y - 3z - 4 = 0$

24. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

25. a) $I(1;1;3)$ et $x - y + z - 3 = 0$
b) $I(-1;4;-3)$ et $6x + 51y - 30z - 288 = 0$

26. a) $5x - 2y + 5z - 12 = 0$ b) $y = 6$ c) $2x - y - 2z + 54 = 0$

27. a) $2x - 3y + 3z - 6 = 0$ b) $5x + 2y - z + 3 = 0$
c) $4x - 6y - z + 32 = 0$ d) $x - z = 0$ e) $2x - 2y + z - 2 = 0$

28. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

29. $3x - y - 5z - 23 = 0$

31. a) sécants b) strictement parallèles c) confondus
d) strictement parallèles e) sécants f) confondus
g) sécants h) sécants

32. a) sécants b) strictement parallèles c) confondus d) sécants
e) strictement parallèles f) sécants
g) strictement parallèles h) confondus

34. a) strictement parallèles b) coupe c) incluse d) coupe

35. a) $3k = t + 1$ b) droite d'équations $\begin{cases} x = \frac{3}{2} - 2k \\ y = \frac{3}{2} - 2k \\ z = 3k \end{cases}$

36. a) oui b) non c) oui d) non e) oui f) oui

37. a) $(\frac{4}{9}; \frac{8}{3}; \frac{35}{9})$ b) $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$ c) $(1;0;2)$
d) la droite est incluse dans le plan
e) la droite est parallèle au plan
f) $(1;2;5)$ g) $(-6;13;16)$ h) $(1;2;-5)$

38. $(\frac{22}{97}; \frac{144}{97}; \frac{266}{97})$

39. a) $(-\frac{15}{13}; \frac{34}{13}; -\frac{45}{13})$

40. a) $(1;1;2)$ b) $(\frac{13}{5}; \frac{7}{2}; \frac{6}{5})$ c) $(1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2})$ d) $(5;6;1)$

41. $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -2 + 3k \\ z = -1 + k \end{cases}$

42. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

43. $(9;0;0)$, $(0;6;0)$, $(0;0;3)$, $\begin{cases} x = 3k \\ y = 6 - 2k \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 9 - 3k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 - 2k \\ z = k \end{cases}$

44. $C(3;8;7)$

45. $(5;5;5)$

46. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

47. a) $P'(-2;3;-4)$ b) $P'(2;3;-1)$

48. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$

49. $M(-1;2;-1)$

50. 86,31°

51. a) 70,71° b) 83,74°

52. a) 52,66° b) 45° c) 60° d) 82,07° e) 80,79°

53. 29,12° 18,93° 54,20°

54. a) 36,6° b) 30,6°

55. $(2-\sqrt{6})x + (2+\sqrt{6})y - 2z = 0$ et $(2+\sqrt{6})x + (2-\sqrt{6})y - 2z = 0$

56. $3x - y = 0$ et $x + 3y = 0$

58. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A(0;\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$, $B(0;1;0)$

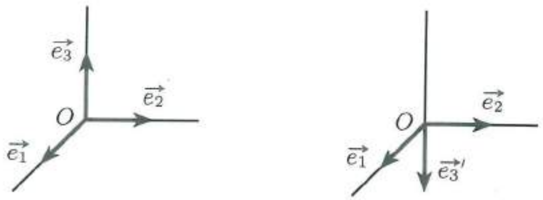
59. a) $8x + 5y - 4z + 6 = 0$ b) oui c) oui

6 Produit vectoriel et produit mixte

Ce chapitre est consacré à l'étude de deux nouvelles notions : le produit vectoriel et le produit mixte. À la différence du produit scalaire, qui est défini aussi bien dans le plan que dans l'espace, ces deux nouveaux produits sont propres à la géométrie dans l'espace. Le produit vectoriel permet de déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs. Le produit mixte permet pour sa part de calculer le volume d'un parallélépipède. Ces deux produits permettent aussi de résoudre différents problèmes métriques.

6.1 Base directe

Les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ étant deux vecteurs unitaires et orthogonaux de l'espace, il existe deux vecteurs $\vec{e_3}$ et $\vec{e_3}'$ tels que $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ et $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}')$ sont des bases orthonormées.



Dans la figure ci-dessus, la base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ est dite **directe** (ou orientée positivement). La base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}')$ est dite **rétrograde** (ou orientée négativement). L'orientation d'une base orthonormée est donnée par la règle du tire-bouchon décrite à la page 177.

Un repère orthonormé est direct (respectivement rétrograde) si la base qui lui est associée est directe (respectivement rétrograde).

Dans ce chapitre, les composantes des vecteurs seront données dans une base orthonormée $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ directe.

6.2 Produit vectoriel

On a vu au paragraphe 5.3 comment trouver l'équation cartésienne d'un plan donné par un point et deux vecteurs directeurs. On élimine les deux paramètres dans les équations paramétriques du plan et on obtient une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont les composantes d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan. Nous allons maintenant développer une autre méthode pour obtenir cette équation cartésienne, qui consiste à obtenir le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ à partir de deux vecteurs directeurs du plan.

Exemple. *On considère le plan passant par le point $A(1;2;3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Cherchons un vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal à ce plan, c'est-à-dire orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.*

On a donc

$$\begin{array}{ccc} \vec{u} \perp \vec{n} & \text{et} & \vec{v} \perp \vec{n} \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 & \text{et} & \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

On en déduit le système de deux équations à trois inconnues suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + 3b + c = 0 \\ 2a - b + 5c = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot 3 \end{array}\right| \begin{array}{c} \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 7a + 16c = 0 \\ 7b - 3c = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\frac{16}{7}c \\ b = \frac{3}{7}c \end{array}\right.$$

Comme on cherche un vecteur orthogonal non nul, on peut choisir une valeur quelconque non nulle pour c. Pour simplifier les expressions ci-dessus, on pose $c = 7$. On trouve alors $a = -16$ et $b = 3$.

Ainsi $\vec{n} = \begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan.

L'équation du plan est donc de la forme $-16x + 3y + 7z + d = 0$. Puisque A appartient au plan, on a $d = -11$. On obtient ainsi l'équation du plan $-16x + 3y + 7z - 11 = 0$.

De manière générale, voyons comment trouver un vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul orthogonal à deux vecteurs donnés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\begin{array}{ccc} \vec{u} \perp \vec{n} & \text{et} & \vec{v} \perp \vec{n} \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 & \text{et} & \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Cela donne le système de deux équations à trois inconnues suivant.

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 a + u_2 b + u_3 c = 0 \\ v_1 a + v_2 b + v_3 c = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \cdot v_2 \\ \cdot(-u_2) \end{array}\right| \begin{array}{c} \cdot(-v_1) \\ \cdot u_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (u_1 v_2 - v_1 u_2)a + (u_3 v_2 - v_3 u_2)c = 0 \\ (u_1 v_2 - u_2 v_1)b + (u_1 v_3 - u_3 v_1)c = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{u_3 v_2 - u_2 v_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1} c = \dfrac{u_2 v_3 - u_3 v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} c \\ b = -\dfrac{u_1 v_3 - u_3 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} c \end{array}\right.$$

Si le dénominateur est nul, on effectue une autre combinaison linéaire permettant d'éliminer c.

Comme on cherche un vecteur orthogonal et que a et b dépendent de c, on peut choisir une valeur quelconque non nulle pour c. Pour simplifier les expressions ci-dessus, on pose $c = u_1 v_2 - u_2 v_1$. On obtient alors

$$a = u_2 v_3 - u_3 v_2 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$b = -(u_1 v_3 - u_3 v_1) = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$c = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

qui sont les composantes du vecteur $\vec{n}$.

Ce résultat motive la définition suivante. Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \times \vec{v}$ donné par

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Exemple. *Calculons le produit vectoriel de* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et de* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 4 \cdot (-2) \\ -(2 \cdot 5 - 4 \cdot 3) \\ 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 8 \\ -(10 - 12) \\ -4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut aussi être calculé à l'aide du pseudo-déterminant suivant.

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e_1} & u_1 & v_1 \\ \vec{e_2} & u_2 & v_2 \\ \vec{e_3} & u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e_1} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e_2} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e_3} \\ &= \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple. *On cherche l'équation cartésienne du plan passant par le point* $A(2;-3;2)$ *et de vecteurs directeurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal au plan est $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

L'équation du plan est donc de la forme $13x + 2y - 7z + d = 0$.

Comme le point A appartient au plan, on trouve $d = -6$ *et l'équation du plan est* $13x + 2y - 7z - 6 = 0$.

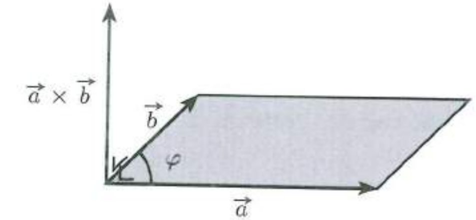
Exemple. *On donne un plan* $\alpha : x - 2y + 3z - 5 = 0$ *et deux points* $A(2;3;1)$ *et* $B(0;3;2)$. *Déterminons l'équation cartésienne du plan* β *perpendiculaire à* α *et contenant la droite* (AB). *Nous cherchons un vecteur normal au plan* β. *Ce vecteur doit être orthogonal aux vecteurs* $\vec{n_\alpha}$ *et* $\overrightarrow{AB}$.

Nous pouvons par exemple prendre $\vec{n_\beta} = \overrightarrow{AB} \times \vec{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et, en utilisant* $A \in \beta$, *en déduire* $\beta : 2x + 7y + 4z - 29 = 0$.

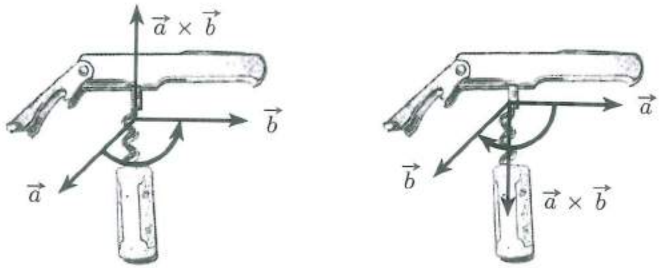
6.2.1 Propriétés

Le produit vectoriel de deux vecteurs possède les propriétés suivantes.

1. Le vecteur $\vec{a} \times \vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$.
2. $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi)$ où φ est l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



3. Le sens du vecteur $\vec{a} \times \vec{b}$ est donné par la règle du tire-bouchon (ou par la règle des trois doigts de la main droite).



4. $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ (anticommutativité)
5. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (distributivité)
6. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a} \times \vec{b})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (homogénéité)
7. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Remarques.

1. Dans une base orthonormée directe $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$, on a $\vec{e_3} = \vec{e_1} \times \vec{e_2}$.
2. La propriété 2 permet de calculer l'angle aigu entre deux droites ou entre deux plans.
3. L'aire du triangle construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est égale à la moitié de celle du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs.

   $$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}} = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

   On peut alors calculer l'aire de n'importe quel polygone dont on connaît les sommets en décomposant ce polygone en triangles. Des difficultés peuvent se présenter si le polygone n'est pas convexe.
4. Dans le plan, les vecteurs n'ont que deux composantes. Mais on peut les considérer dans l'espace en leur ajoutant une troisième composante nulle.

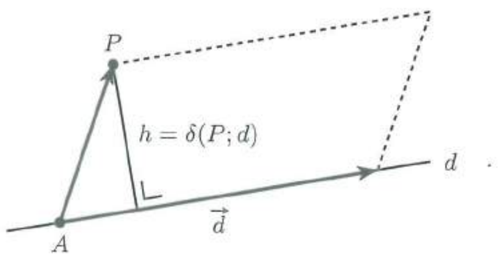
   $$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \right\| = |a_1b_2 - a_2b_1|$$

   Ce nombre est la valeur absolue du déterminant d'ordre 2 construit avec les composantes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On obtient donc l'aire du parallélogramme

   $$\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = |\operatorname{Det}(\vec{a};\vec{b})|$$
5. On rencontre aussi la notation $\vec{a} \wedge \vec{b}$ pour désigner $\vec{a} \times \vec{b}$.

6.2.2 Distance d'un point à une droite

On considère une droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$ et un point P quelconque. On cherche à déterminer la distance du point P à cette droite, notée $\delta(P;d)$.



L'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{d}$ et $\overrightarrow{AP}$ peut être exprimée de deux manières $\mathcal{A} = \|\vec{d}\| \cdot h = \|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}\|$.

Comme h est la distance entre P et d, on a finalement

$$\delta(P;d) = \frac{\|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{d}\|}$$

6.2.3 Équation du cylindre de révolution

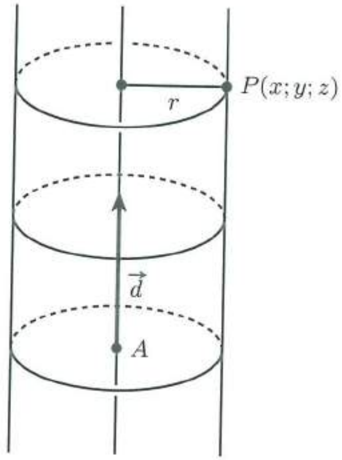
Un cylindre de révolution est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance donnée r d'une droite d appelée **axe du cylindre**.

Considérons un cylindre d'axe passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$. En utilisant le résultat du paragraphe précédent, un point P quelconque du cylindre vérifie la relation

$$\delta(P;d) = r = \frac{\|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{d}\|}$$

L'équation du cylindre est donc

$$\|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}\| = r \cdot \|\vec{d}\|$$



Exemple. *Trouver l'équation du cylindre de rayon 2 dont l'axe est la droite passant par $A(1;2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.*

On a $\vec{d} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-z-3 \\ -2x-2z+4 \\ x+2y-5 \end{pmatrix}$.

On en déduit

$$\|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}\|^2 = r^2 \cdot \|\vec{d}\|^2$$

$$(2y-z-3)^2 + (-2x-2z+4)^2 + (x+2y-5)^2 = 4 \cdot 9$$

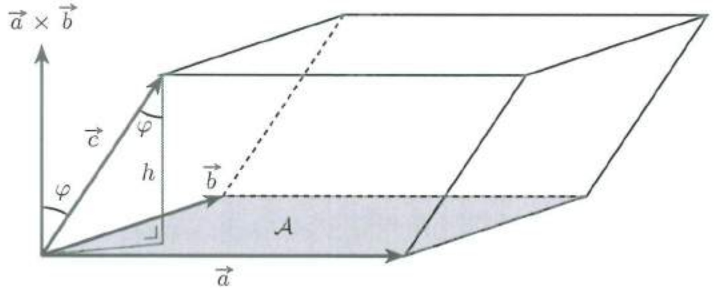
et on trouve finalement

$$5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy + 8xz - 4yz - 26x - 32y - 10z + 14 = 0$$

qui est l'équation cherchée.

6.3 Produit mixte

On désire calculer le volume du parallélépipède engendré par trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.



Notons φ l'angle des vecteurs $\vec{a} \times \vec{b}$ et $\vec{c}$ et $\mathcal{A}$ l'aire de la base du parallélépipède.

Si φ est aigu, on a $V = \mathcal{A} \cdot h = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot h = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos(\varphi)$.

Si φ est obtus, $\cos(\varphi) < 0$. Comme h est positif, on a

$$h = -\|\vec{c}\| \cos(\varphi) = \|\vec{c}\| \cdot |\cos(\varphi)|$$

Ainsi, pour tout angle φ, on a

$$\begin{aligned} V &= \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot |\cos(\varphi)| = \Big| \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos(\varphi) \Big| \\ &= \big| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \, \big| \end{aligned}$$

On observe qu'on calcule un tel volume à l'aide d'un produit vectoriel et d'un produit scalaire, ce qui motive la définition suivante.

Le nombre $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ est le **produit mixte** des trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

Il peut se calculer à l'aide de l'égalité

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \mathrm{Det}(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$$

En effet
$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \mathrm{Det}(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) \end{aligned}$$

Exemple. *Pour* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

on a $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -51.$

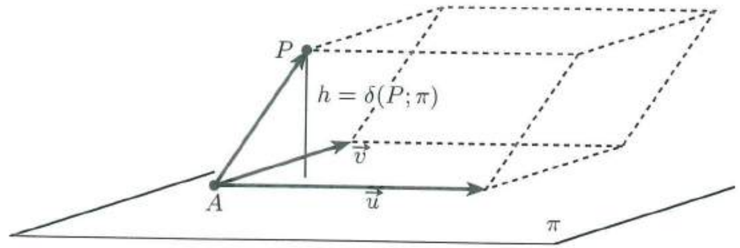
6.3.1 Propriétés

Le produit mixte possède les propriétés suivantes.

1. Le produit mixte change de signe si on permute deux vecteurs. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$
3. $(\lambda\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
4. $\big((\vec{a} + \vec{d}) \times \vec{b}\big) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{d} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
5. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ si et seulement si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.
6. Le volume du parallélépipède engendré par trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est $\big|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,\big| = |\mathrm{Det}(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})|$.

6.3.2 Distance d'un point à un plan

On considère un plan π passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point P quelconque. On veut calculer la distance du point P au plan π, notée $\delta(P; \pi)$.



Le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AP}$ peut être exprimé de deux manières.

$$V = \mathcal{A}_{\text{base}} \cdot h = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot h = |\operatorname{Det}(\vec{u}; \vec{v}; \overrightarrow{AP})|$$

Ainsi

$$\delta(P;\pi) = h = \frac{|\operatorname{Det}(\vec{u}; \vec{v}; \overrightarrow{AP})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Comme un vecteur normal au plan π est donné par $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, l'équation de ce plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$. On a donc $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et

$$\operatorname{Det}(\vec{u}; \vec{v}; \overrightarrow{AP}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \\ z_P - z_A \end{pmatrix}$$

$$= a(x_P - x_A) + b(y_P - y_A) + c(z_P - z_A)$$

$$= ax_P + by_P + cz_P - (ax_A + by_A + cz_A)$$

Le point A appartenant au plan, ses coordonnées vérifient l'équation du plan. Ainsi $ax_A + by_A + cz_A = -d$.

D'où $\operatorname{Det}(\vec{u}; \vec{v}; \overrightarrow{AP}) = ax_P + by_P + cz_P + d$.

On a donc finalement

$$\delta(P;\pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

On retrouve la formule établie au paragraphe 5.5.

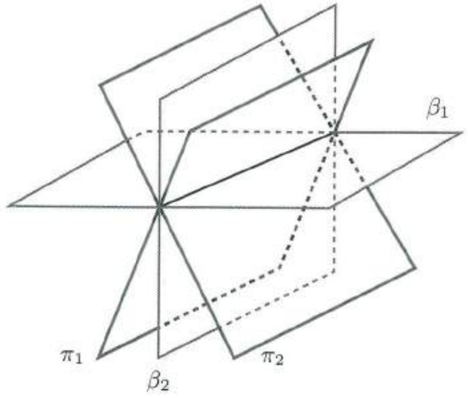
Exemple. *Calculer la distance du point $P(2;3;-1)$ au plan π d'équation $4x+5y-3z-1=0$.*

$$\delta(P;\pi) = \frac{|4\cdot 2 + 5\cdot 3 - 3\cdot(-1) - 1\,|}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}} = \frac{25}{\sqrt{50}} = \frac{25}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

6.3.3 Plans bissecteurs

Considérons deux plans sécants π_1 et π_2.

L'ensemble des points de l'espace situés à égale distance des plans π_1 et π_2 est constitué de deux plans β_1 et β_2 appelés **plans bissecteurs** des plans π_1 et π_2.



Nous cherchons à établir les équations des plans bissecteurs β_1 et β_2. Un point P appartient à l'un de ces deux plans si et seulement si $\delta(P;\pi_1) = \delta(P;\pi_2)$.

Si les plans π_1 et π_2 sont donnés respectivement par les équations $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ et si le point $P(x;y;z)$ appartient à l'un ou l'autre des plans bissecteurs β_1 et β_2, l'égalité $\delta(P;\pi_1) = \delta(P;\pi_2)$ devient

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1z + d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2z + d_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

Les équations des plans bissecteurs β_1 et β_2 sont donc

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

et

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

Exemple. *Les plans π_1 et π_2 sont donnés respectivement par les équations $2x-y-2z+5=0$ et $-3x+6y+2z-1=0$.*

Le point P appartient à l'un ou l'autre des plans bissecteurs β_1 ou β_2 si et seulement si

$$\frac{2x-y-2z+5}{3} = \pm\frac{-3x+6y+2z-1}{7}.$$

De $\dfrac{2x-y-2z+5}{3} = \dfrac{-3x+6y+2z-1}{7}$, *on déduit l'équation de*

$\beta_1 : 23x - 25y - 20z + 38 = 0.$

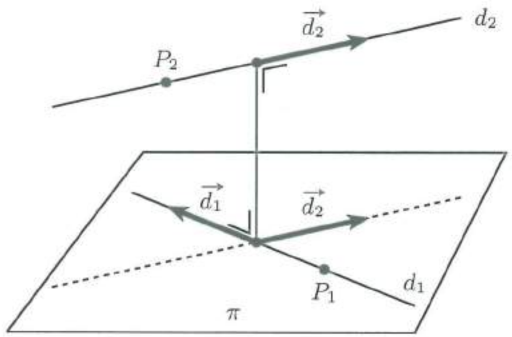
De $\dfrac{2x-y-2z+5}{3} = -\dfrac{-3x+6y+2z-1}{7}$, *on déduit l'équation de*

$\beta_2 : 5x + 11y - 8z + 32 = 0.$

Le lecteur vérifiera que les plans bissecteurs β_1 *et* β_2 *sont perpendiculaires. De manière générale, les plans bissecteurs sont perpendiculaires.*

6.3.4 Distance de deux droites gauches

On considère deux droites gauches d_1 passant par le point P_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{d_1}$ et d_2 passant par le point P_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{d_2}$.



On cherche à calculer la distance $\delta(d_1; d_2)$ de ces deux droites.

Soit π le plan défini par la droite d_1 et le vecteur directeur $\overrightarrow{d_2}$. Le calcul de la distance de d_1 à d_2 revient à celui de la distance du point P_2 au plan π.

$$\delta(d_1; d_2) = \frac{|\operatorname{Det}(\overrightarrow{d_1}; \overrightarrow{d_2}; \overrightarrow{P_1P_2})|}{\|\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}\|}$$

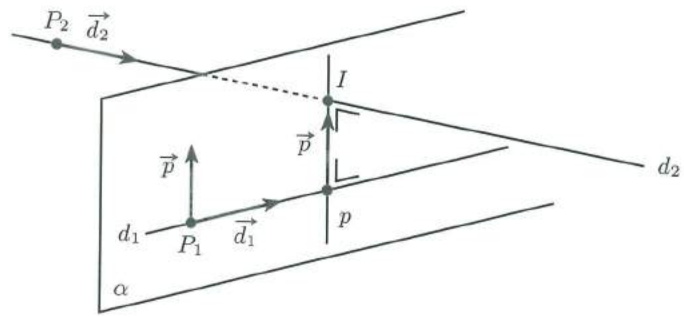
Exemple. *On considère la droite* d_1 *passant par* $P_1(2; -10; -3)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et la droite* d_2 *passant par* $P_2(-1; 2; 6)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ces deux droites sont gauches. Calculons leur distance.

$$\delta(d_1; d_2) = \frac{|\operatorname{Det}(\overrightarrow{d_1}; \overrightarrow{d_2}; \overrightarrow{P_1P_2})|}{\|\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}\|} = \frac{|-36|}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{36}{\sqrt{18}} = 6\sqrt{2}$$

Remarque. Il existe une unique perpendiculaire commune à deux droites gauches.

Exemple. *Reprenons les droites de l'exemple ci-dessus.*
Cherchons les équations paramétriques de la perpendiculaire commune p *aux deux droites gauches* d_1 *et à* d_2.



Un vecteur directeur de p *est* $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On détermine l'équation cartésienne du plan α *contenant les droites* d_1 *et* p *en considérant le point* P_1 *et les vecteurs directeurs* $\overrightarrow{d_1}$ *et* $\overrightarrow{p}$.

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-2 & 2 & -1 \\ y+10 & -1 & -4 \\ z+3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9(x-2) - 9(z+3) = 0$$

$\alpha : x + z + 1 = 0$

On calcule ensuite les coordonnées du point d'intersection du plan α *et de la droite* d_2 : $I(2; -1; -3)$.

On en déduit que la droite cherchée est $p : \begin{cases} x = 2 - k \\ y = -1 - 4k \\ z = -3 + k \end{cases}$.

6.4 Exercices relatifs au chapitre 6

1. Démontrer les propriétés 1 à 4 du produit vectoriel.

2. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Calculer

a) $\vec{a} \times \vec{b}$ b) $\vec{a} \times \vec{c}$ c) $\vec{b} \times \vec{c}$

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$ e) $2\vec{a} \times (-3\vec{b})$ f) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

g) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ h) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ i) $\vec{a} \times 5\vec{a}$

j) $(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{a})$

3. Le produit vectoriel est-il associatif ?

4. a) Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un vecteur $\vec{c}$ tel que $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$?

b) Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Pour quelle valeur de b existe-t-il des vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$? Déterminer alors les composantes des vecteurs $\vec{x}$ qui vérifient cette égalité.

5. Simplifier les expressions suivantes.

a) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})$

b) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$

c) $2\vec{a} \times (\vec{b} - 3\vec{c}) + (2\vec{c} + \vec{a}) \times (2\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})$

6. a) Démontrer la formule $\| \vec{a} \times \vec{b} \|^2 = \| \vec{a} \|^2 \cdot \| \vec{b} \|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.
Indication : utiliser les composantes.

b) En déduire $\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \| \cdot |\sin(\alpha)|$.

c) En déduire la propriété donnant l'aire du parallélogramme.

7. On considère le triangle ABC où $A(0;1;-1)$, $B(1;2;3)$ et $C(0;0;7)$.

a) Trouver les équations paramétriques de la droite passant par A et perpendiculaire au plan (ABC).

b) Trouver l'équation cartésienne du plan (ABC).

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

8. Trouver un vecteur normal au plan contenant les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les équations paramétriques de la droite d passant par le point $A(8;-4;2)$ et orthogonale aux droites $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = -1 + l \\ y = 2 + 3l \\ z = l \end{cases}$.

10. a) Trouver l'équation du plan donné par le point $A(2;-3;4)$ et les vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Trouver l'équation du plan donné par le point $A(4;\frac{1}{2};-8)$ et les vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Trouver l'équation du plan donné par les points $A(3;0;6)$, $B(6;-6;-4)$ et $C(-2;-4;4)$.

11. Trouver l'équation du plan passant par $A(-1;-2;0)$ et $B(1;1;2)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $x + 2y + 2z = 4$.

12. Déterminer l'équation cartésienne du plan β contenant la droite d d'équations $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-6}{4}$ et perpendiculaire au plan α d'équation $2x - 5y + z = 0$.

13. Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par le point P et perpendiculaire aux plans α et β dans les cas suivants.

a) $P(0;0;0)$, $\alpha : 3x - 2y + 5z = 0$ et $\beta : x - y - z = 0$

b) $P(2;-1;1)$, $\alpha : 3x + 2y - z + 4 = 0$ et $\beta : x + y + z - 3 = 0$

14. Déterminer les équations paramétriques de la droite n passant par le point $P(8;-4;4)$ et perpendiculaire à la droite $d : \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 - k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$.

15. On considère le plan π passant par $A(2;0;-3)$, $B(1;4;1)$ et $C(-3;-1;5)$.

a) Trouver les équations paramétriques de la droite perpendiculaire à π et passant par A.

b) Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) Trouver le symétrique du point $P(0;4;0)$ par rapport au plan π.

d) Calculer la distance de P au plan π.

16. Les quadrilatères $ABCD$ formés avec les points ci-dessous sont-ils des parallélogrammes ? Si oui, calculer leur aire.

a) $A(2;1;-2)$, $B(2;3;0)$, $C(6;6;5)$ et $D(6;4;3)$

b) $A(5;-1;-7)$, $B(-3;11;-1)$, $C(-7;14;7)$ et $D(1;2;1)$

c) $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;5)$ et $D(6;4;3)$

17. Calculer l'aire du triangle ABC dans les cas suivants.

a) $A(3;-2;3)$, $B(4;0;3)$ et $C(6;0;-3)$

b) $A(-1;2;-5)$, $B(5;4;0)$ et $C(11;8;3)$

c) $A(3;1)$, $B(4;-2)$ et $C(1;2)$

d) $A(4;4)$, $B(1;-2)$ et $C(8;2)$

18. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. Calculer le rapport de l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{a} - \vec{b}$ à celle du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

19. On considère les points $A(5;-6;0)$, $B(5;-2;1)$, $C(2;-6;1)$ et $D(6;2;6)$.

a) Calculer l'aire du triangle ABC et en déduire la distance de A à la droite (BC).

b) Trouver l'équation du plan perpendiculaire à la droite (OB) et passant par A.

c) Trouver l'intersection du plan (BCD) avec la droite perpendiculaire à ce plan et passant par A.

20. On considère les points $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;1)$, $D(2;3;-1)$ et $E(10;5;5)$.

a) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même plan π.

b) Calculer l'angle aigu α déterminé par la droite (CE) et la droite perpendiculaire à π passant par C.

21. On considère le tétraèdre $ABCD$ de sommets $A(1;-5;2)$, $B(3;-6;0)$, $C(-3;6;15)$ et $D(6;5;-3)$.

a) Calculer l'angle aigu que forment les faces ABC et ABD.

b) Calculer l'angle aigu que forme l'arête (AD) avec la face ABC.

22. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$?

23. On considère un vecteur $\vec{a}$ non nul. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{a} \times \overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

24. On considère trois points de l'espace A, B et C. Montrer que le vecteur $\vec{v} = (\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC} \times \overrightarrow{MA})$ ne dépend pas du point M.

25. On considère les points $A(1;2;3)$ et $B(4;-2;1)$. Trouver l'équation du cylindre d'axe (AB) et de rayon 5.

26. Calculer la distance du point P à la droite d donnée par un point A et un vecteur directeur $\vec{d}$ dans les cas suivants.

a) $P(1;2;2)$, $A(1;-1;2)$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $P(3;1;4)$, $A(1;0;0)$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

27. Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants.

a) $P(3;5;10)$ $\quad d: \dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y+4}{-6} = z-5$

b) $P(-5;4;-2)$ $\quad d: \begin{cases} x = 3-2k \\ y = 2+3k \\ z = -1+k \end{cases}$

c) $P(5;-2;1)$ $\quad d: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\8\\16\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}$

28. On considère trois points non alignés O, A et B. On construit le quadrilatère $AA'B'B$ tel que $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = \mu\overrightarrow{OB}$ avec $\lambda > 1$ et $\mu > 1$. Montrer que l'aire de ce quadrilatère est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB'} \times \overrightarrow{BA'}\|$.

29. a) Sachant que $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = 5$ et que l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut $\frac{\pi}{6}$, calculer $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$.

b) Sachant que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 26$ et $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 72$, calculer $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

c) Sachant que $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$ et que l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut $\frac{2\pi}{3}$, calculer $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2$ et $\|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})\|^2$.

30. Montrer qu'un cylindre de rayon r dont l'axe passe par l'origine admet une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+z^2-\dfrac{(ax+by+cz)^2}{a^2+b^2+c^2} = r^2$.

31. On considère les points $A(1;0;1)$, $B(3;-1;0)$, $C(0;0;7)$ et $D(1;0;0)$.

a) Calculer le volume du parallélépipède construit à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) Calculer le volume d'un des prismes à base triangulaire construit à l'aide de ces vecteurs.

c) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

d) Calculer la distance du point D au plan (ABC).

e) Trouver l'équation du plan (ABC) en utilisant le produit mixte.

32. On considère un tétraèdre dont les sommets sont $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$ et $D(-5;-4;8)$.

a) Calculer le volume de ce tétraèdre.

b) Calculer la longueur de la hauteur issue du sommet D.

c) Calculer l'angle en A du triangle ABC.

d) Calculer l'angle aigu que forment les faces ABC et ABD.

33. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$.

Calculer

a) $(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}$
b) $(\vec{a} \times \vec{c})\cdot\vec{a}$
c) $\big((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}\big)\cdot\vec{a}$
d) $\big(2\vec{a} \times (-3\vec{b})\big)\cdot\frac{1}{2}\vec{c}$
e) $\big((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}\big)\cdot(\vec{a} - \vec{b})$
f) $\big((\vec{a} \times \vec{b}) \times 3\vec{a}\big)\cdot(\vec{b} \times \vec{c})$

34. On suppose que $\mathrm{Det}(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ est connu et vaut λ. Exprimer les déterminants suivants en fonction de cette valeur.

a) $\mathrm{Det}(\vec{b};\vec{c};\vec{a})$
b) $\mathrm{Det}(2\vec{a};-\vec{b};\vec{c})$
c) $\mathrm{Det}(\vec{a}+2\vec{b};\vec{b}-\vec{c};\vec{c})$
d) $\mathrm{Det}(3\vec{a}-\vec{c};3\vec{b};3\vec{b}-2\vec{c})$
e) $\mathrm{Det}(2\vec{b}-5\vec{a};\vec{a}-3\vec{c};-5\vec{a})$
f) $\mathrm{Det}(2\vec{b}-5\vec{a};\vec{a}-3\vec{b};-5\vec{a})$

35. Les points A, B, C et D donnés ci-dessous sont-ils coplanaires ?

a) $A(0;0;0)$, $B(8;-2;4)$, $C(-3;1;-2)$ et $D(10;-3;6)$

b) $A(7;1;-3)$, $B(8;2;-2)$, $C(4;4;4)$ et $D(10;1;-5)$

c) $A(0;3;-2)$, $B(1;2;2)$, $C(-3;1;5)$ et $D(12;-3;5)$

36. Déterminer le nombre réel k pour que les points A, B, C et D donnés ci-dessous soient coplanaires.

a) $A(3;-1;4)$, $B(k;0;1)$, $C(k+2;4;-5)$ et $D(k+6;4;-1)$

b) $A(0;0;0)$, $B(2;5;-4)$, $C(2;k+5;-4)$ et $D(1;k+4;k-1)$

37. Vérifier que le polyèdre $ABCDEFGH$ est un parallélépipède et calculer son volume pour les points suivants.

a) $A(-1;-1;7)$, $B(-2;1;6)$, $C(0;1;6)$, $D(1;-1;7)$, $E(2;-2;3)$, $F(1;0;2)$, $G(3;0;2)$ et $H(4;-2;3)$

b) $A(1;0;3)$, $B(-1;4;2)$, $C(-2;2;-3)$, $D(0;-2;-2)$, $E(4;-2;0)$, $F(2;2;-1)$, $G(1;0;-6)$ et $H(3;-4;-5)$

38. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ pour les points suivants.

a) $A(2;1;0)$, $B(1;1;3)$, $C(4;-2;6)$ et $D(2;-3;0)$

b) $A(0;2;3)$, $B(-2;2;-1)$, $C(4;-2;2)$ et $D(3;6;0)$

c) $A(8;3;2)$, $B(1;2;3)$, $C(2;1;1)$ et $D(0;0;0)$

39. On considère un tétraèdre $ABCD$ de volume 5 avec $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$ et $C(2;-1;3)$. Trouver les coordonnées du sommet D sachant qu'il est situé sur l'axe Oy.

40. On considère un tétraèdre $ABCD$ de volume 1 avec $A(3;4;5)$, $B(1;2;1)$ et $C(-1;6;2)$. Trouver les coordonnées du sommet D sachant qu'il est situé sur la droite $d : \begin{cases} x = 2+k \\ y = 1-k \\ z = -1+2k \end{cases}$.

41. On considère trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ orthogonaux deux à deux tels que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ et $\|\vec{c}\| = 5$. Calculer $\mathrm{Det}(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$.

42. Soit une pyramide régulière de sommet S, de hauteur h et dont la base $ABCD$ est un carré de côté a. On choisira l'origine au centre du carré $ABCD$.

a) Calculer, en fonction de a et de h, les produits scalaires $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$.

b) En supposant que $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} = 0$, calculer l'aire totale A et le volume V de cette pyramide.

43. Calculer la distance du point P au plan (ABC) dans les cas suivants.

a) $P(3;2;-1)$, $A(0;0;0)$, $B(-1;-2;-3)$ et $C(2;-3;-1)$

b) $P(3;4;-2)$, $A(2;-3;-1)$, $B(-1;-1;1)$ et $C(0;1;4)$

44. Calculer la distance du point P au plan α dans les cas suivants.

a) $P(-8;7;0)$ et $\alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0$

b) $P(5;3;-12)$ et $\alpha : 13x + 16y - 4z + 7 = 0$

c) $P(15;-2;5)$ et $\alpha : 3x - 2y + z - 12 = 0$

d) $P(0;0;0)$ et $\alpha : x + y + z - \sqrt{3} = 0$

45. Calculer les longueurs des hauteurs du tétraèdre de sommets $A(2;4;6)$, $B(-4;-4;4)$, $C(5;0;3)$ et $D(-1;7;5)$.

46. Vérifier que les deux plans d'équations $3x + 12y - 4z - 18 = 0$ et $3x + 12y - 4z + 73 = 0$ sont parallèles et calculer leur distance.

47. Déterminer les équations cartésiennes des plans situés à une distance 6 du plan d'équation $9x + 2y - 6z - 8 = 0$.

48. Déterminer les équations cartésiennes des plans bissecteurs des plans α et β dans les cas suivants.

a) $\alpha : x + 2y - 2z - 1 = 0$ et $\beta : 2x - y + 2z + 1 = 0$

b) $\alpha : 3x + y - z + 25 = 0$ et $\beta : x - 7y - 7z + 13 = 0$

c) $\alpha : z + 2 = 0$ et $\beta : 3x - 2y + 6z - 20 = 0$

49. Déterminer les coordonnées des points situés sur la droite $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ et équidistants des plans d'équations $6x - y - 2z + 3 = 0$ et $3x + 4y - 4z - 9 = 0$.

50. Calculer la distance des deux droites a et b dans les cas suivants.

a) $a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $b : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $a : \dfrac{x-3}{-6} = y + 1 = \dfrac{z-4}{2}$ et $b : \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = -4 + k \\ z = -1 + k \end{cases}$

51. On donne deux droites gauches a et b. Déterminer les coordonnées du point A de a et du point B de b tels que la droite (AB) soit la perpendiculaire commune à a et à b. En déduire la plus courte distance δ entre les droites a et b dans les cas suivants.

a) $a : \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = -4 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$ et $b : \begin{cases} x = 3 - 6n \\ y = -1 + n \\ z = 4 + 2n \end{cases}$

b) $a : \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -k \\ z = 2 + k \end{cases}$ et $b : \begin{cases} x = 2 + n \\ y = 1 + 2n \\ z = 2 + n \end{cases}$

52. On donne les points $A(0; 12; 2)$, $B(-3; 6; 4)$, $C(1; 4; 4)$ et $D(-6; -5; 1)$. Déterminer les équations paramétriques d'une droite e sachant qu'elle passe par le point D et que la perpendiculaire commune aux droites (AB) et e passe par C.

Réponses aux exercices du chapitre 6

2. a) $\begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -6 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 72 \\ 24 \\ -48 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -36 \\ 52 \\ -28 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 6 \\ 40 \\ -4 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. non

4. a) non ($\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas orthogonaux)

b) -27 et $\vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 2k+5 \\ 3k-6 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

5. a) $-7\vec{a} \times \vec{b}$ b) $\vec{0}$ c) $4\vec{a} \times \vec{b} - 3\vec{a} \times \vec{c} + 2\vec{b} \times \vec{c}$

7. a) $\begin{cases} x = 12t \\ y = 1 - 8t \\ z = -1 - t \end{cases}$ b) $12x - 8y - z + 7 = 0$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{209}$

8. $\begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{cases} x = 8 - k \\ y = -4 \\ z = 2 + k \end{cases}$

10. a) $27x + 8y + 6z - 54 = 0$ b) $6y + 2z + 13 = 0$

c) $2x - 4y + 3z - 24 = 0$

11. $2x - 2y + z = 2$

12. $5x + 2y - 11 = 0$

13. a) $7x + 8y - z = 0$ b) $3x - 4y + z - 11 = 0$

14. $\begin{cases} x = 8 + 4k \\ y = -4 - 2k \\ z = 4 - 3k \end{cases}$

15. a) $\begin{cases} x = 2 + 12k \\ y = -4k \\ z = -3 + 7k \end{cases}$ b) $3\sqrt{209}$ c) $P'(\frac{24}{11}; \frac{36}{11}; \frac{14}{11})$ d) $\frac{\sqrt{209}}{11}$

16. a) 12 b) $\sqrt{8260}$ c) pas un parallélogramme

17. a) 7 b) 11 c) $\frac{5}{2}$ d) 15

18. 2

19. a) $\frac{13}{2}$ et $\frac{13}{5}$ b) $5x - 2y + z = 37$ c) $(\frac{185}{53}; -\frac{258}{53}; -\frac{32}{53})$

20. 39,65°

21. a) 45° b) 42,88°

22. Ils sont linéairement dépendants. De plus $\vec{a}$ et $\vec{b} - \vec{c}$ sont colinéaires.

23. Droite d'équation $\overrightarrow{OP} = t \cdot \vec{a}$

25. $20x^2 + 13y^2 + 25z^2 + 24xy + 12xz - 16yz - 124x - 28y - 130z - 440 = 0$

26. a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{21}$

27. a) 7 b) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ c) 15

29. a) 15 b) ± 30 c) 3,27

31. a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{\sqrt{158}}$ e) $6x + 11y + z = 7$

32. a) $\frac{154}{3}$ b) 11 c) 109,66° d) 88,74°

33. a) 44 b) 0 c) 44 d) -132 e) 88 f) -792

34. a) λ b) -2λ c) λ d) -18λ e) 30λ f) 0

35. a) oui b) oui c) non

36. a) 2 b) -1 ou 0

37. a) 18 b) 72

38. a) 8 b) 24 c) $\frac{1}{6}$

39. $D(0; -7; 0)$ ou $D(0; 8; 0)$

40. $D(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 2)$ ou $D(\frac{19}{10}; \frac{11}{10}; \frac{4}{5})$

41. ± 30

42. a) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = h^2$, $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = h^2 - \frac{1}{2}a^2$
b) $A = a^2(1 + \sqrt{3})$ et $V = \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$

43. a) $2\sqrt{3}$ b) $\frac{29\sqrt{21}}{21}$

44. a) 8 b) 8 c) $3\sqrt{14}$ d) 1

45. $h_A = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $h_B = \frac{84\sqrt{322}}{161}$, $h_C = \frac{6\sqrt{10}}{5}$, $h_D = 3$

46. 7

47. $9x + 2y - 6z - 74 = 0$ et $9x + 2y - 6z + 58 = 0$

48. a) $x - 3y + 4z + 2 = 0$ et $3x + y = 0$
b) $4x + 5y + 2z + 31 = 0$ et $5x - 2y - 5z + 44 = 0$
c) $3x - 2y - z = 34$ et $3x - 2y + 13z = 6$

49. $(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$ et $(-1; -1; -3)$

50. a) 1 b) $\frac{13}{3}$

51. a) $A(2; -3; 2)$, $B(3; -1; 4)$, $\delta = 3$ b) $A(1; 0; 2)$, $B(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2})$, $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

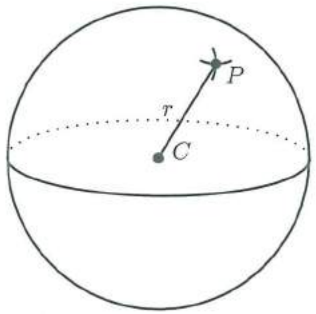
52. $\begin{cases} x = -6 + 5k \\ y = -5 + 10k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$

7 Équation de la sphère

Au chapitre 4, nous avons étudié le cercle et son équation dans le plan. Dans ce chapitre, nous allons reprendre une grande partie de ce qui a été fait dans le plan et l'adapter à l'étude de la sphère dans l'espace.

7.1 Généralités

La **sphère** Σ de centre $C(x_C; y_C; z_C)$ et de rayon r ($r > 0$) est l'ensemble des points $P(x; y; z)$ de l'espace situés à une distance r de C.



$$P \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{CP}\| = r \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} = r$$

En élevant au carré, on obtient l'équation de la sphère Σ

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$$

Exemple 1. *Déterminer l'équation de la sphère centrée en $C(-3; 2; -1)$ et de rayon $r = 3$.*

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

En développant, on obtient $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2z + 5 = 0$.

Exemple 2.
On considère la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-16x+12y-z+\frac{1}{4}=0$.
Cherchons son centre et son rayon.

On peut écrire cette équation de la manière suivante.

$$(x-8)^2-64+(y+6)^2-36+(z-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}=0$$

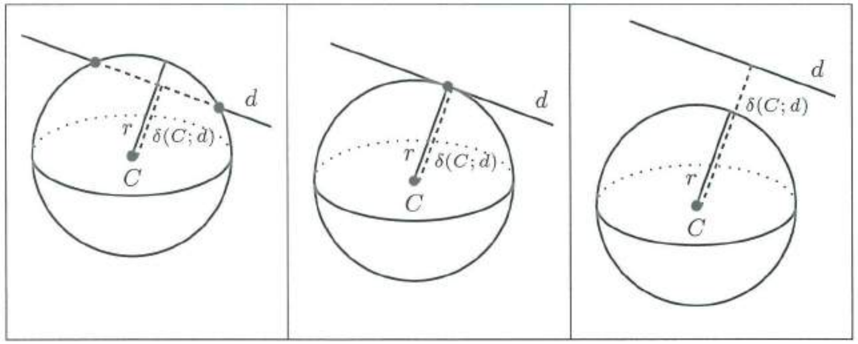
On obtient $(x-8)^2+(y+6)^2+(z-\frac{1}{2})^2=100$.
Il s'agit de l'équation de la sphère de centre $C(8;-6;\frac{1}{2})$ *et de rayon* 10.

7.2 Positions relatives

7.2.1 Positions relatives d'une droite et d'une sphère

On considère la sphère Σ de centre C et de rayon r ainsi qu'une droite d. Pour situer la droite d par rapport à la sphère Σ, on compare la distance $\delta(C;d)$ du centre C à la droite d avec le rayon r.

1. $\delta(C;d)<r \quad \Leftrightarrow$ la droite d est sécante à Σ (deux points d'intersection)
2. $\delta(C;d)=r \quad \Leftrightarrow$ la droite d est tangente à Σ (un point d'intersection)
3. $\delta(C;d)>r \quad \Leftrightarrow$ la droite d est extérieure à Σ (aucun point d'intersection)



Pour déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de d et Σ, on résout par substitution le système formé par les équations de la sphère et de la droite.

Exemple. *On considère la sphère* Σ *de centre* $C(3;-2;1)$ *et de rayon* r *ainsi que la droite* $d:\begin{cases}x=4-t\\y=8+2t\\z=5+2t\end{cases}$.
Discuter la position relative de d *et* Σ *en fonction de* r.

On calcule la distance du centre C *à la droite* d : $\delta(C;d)=\dfrac{\|\overrightarrow{AC}\times\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$

où $A(4;8;5)$ *est un point de* d *et* $\vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ *un vecteur directeur de* d.

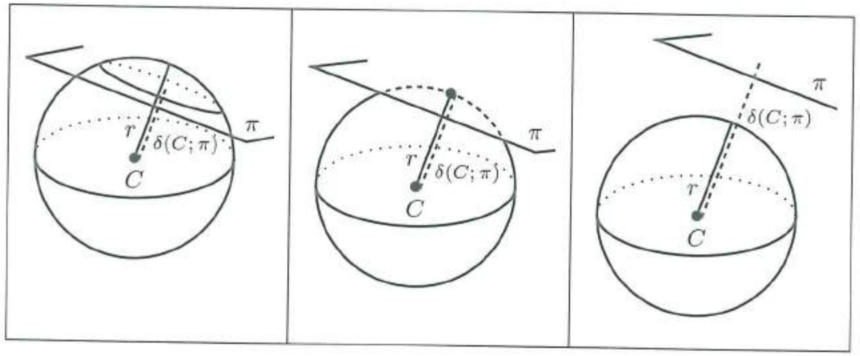
$$\delta(C;d)=\frac{\|\overrightarrow{AC}\times\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}-1\\-10\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{9}}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}-12\\6\\-12\end{pmatrix}\right\|}{3}=6$$

Si $r=6$, *la sphère* Σ *et la droite* d *sont tangentes.*
Si $r>6$, *la sphère* Σ *et la droite* d *sont sécantes.*
Si $r<6$, *la sphère* Σ *et la droite* d *sont extérieures.*

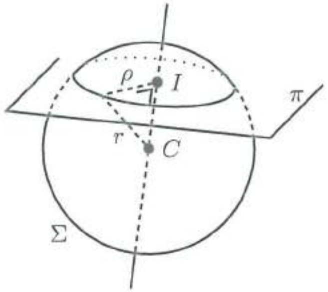
7.2.2 Positions relatives d'un plan et d'une sphère

On considère la sphère Σ de centre C et de rayon r ainsi qu'un plan π. Pour situer le plan π par rapport à la sphère Σ, on compare la distance $\delta(C;\pi)$ du centre C au plan π avec le rayon r.

1. $\delta(C;\pi)<r \quad \Leftrightarrow$ le plan π est sécant à Σ (infinité de points d'intersection formant un cercle)
2. $\delta(C;\pi)=r \quad \Leftrightarrow$ le plan π est tangent à Σ (un point d'intersection)
3. $\delta(C;\pi)>r \quad \Leftrightarrow$ le plan π est extérieur à Σ (aucun point d'intersection)



Exemple. *On considère la sphère* $\Sigma : (x-8)^2+(y+6)^2+(z-1)^2 = 100$. *Le plan* $\pi : 2x-5y+4z=5$ *coupe cette sphère en un cercle. Déterminer le centre* I *et le rayon* ρ *de ce cercle.*



On considère la droite passant par le centre de la sphère $C(8;-6;1)$ *et perpendiculaire au plan* π.

$$\begin{cases} x = 8+2t \\ y = -6-5t \\ z = 1+4t \end{cases}$$

L'intersection I *entre cette droite et le plan* π *donne le centre du cercle.*

$$2(8+2t)-5(-6-5t)+4(1+4t)=5 \quad \Rightarrow \quad 45t+50=5$$

$$\Rightarrow \quad t=-1 \quad \Rightarrow \quad I(6;-1;-3)$$

On a $\|\overrightarrow{CI}\|^2 = \| \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \|^2 = 45$.

Par le théorème de Pythagore, on obtient

$$\rho^2 = r^2 - \|\overrightarrow{CI}\|^2 = 100-45 = 55 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{55}$$

7.2.3 Positions relatives de deux sphères

On considère les sphères Σ_1 de centre C_1 et de rayon r_1 et Σ_2 de centre C_2 et de rayon r_2. Pour situer Σ_1 par rapport à Σ_2, on compare la distance $\|\overrightarrow{C_1C_2}\|$ entre les centres avec r_1+r_2 et $|r_1-r_2|$.

1. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| > r_1+r_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ Σ_1 est à l'extérieur de Σ_2 (aucun point d'intersection)
2. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = r_1+r_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ Σ_1 et Σ_2 sont tangentes extérieurement (un point d'intersection)

3. $|r_1-r_2| < \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < r_1+r_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ Σ_1 et Σ_2 sont sécantes (infinité de points d'intersection formant un cercle)
4. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = |r_1-r_2| \quad \Leftrightarrow \quad$ Σ_1 et Σ_2 sont tangentes intérieurement (un point d'intersection)
5. $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| < |r_1-r_2| \quad \Leftrightarrow \quad$ l'une des sphères est à l'intérieur de l'autre (aucun point d'intersection)

7.3 Plan tangent à une sphère

Exemple. *Soit la sphère d'équation* $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=30$. *Le point* $T(1;4;5)$ *appartient à cette sphère puisque ses coordonnées vérifient son équation.*

On veut trouver l'équation du plan π *tangent à la sphère en* T. *On considère un point* $P(x;y;z)$ *de* π.

Le plan π *passant par* T *et* P *étant tangent à la sphère, il est perpendiculaire à la droite passant par* C *et* T. *On a donc* $\overrightarrow{CT}\cdot\overrightarrow{TP}=0$.

En développant, on obtient

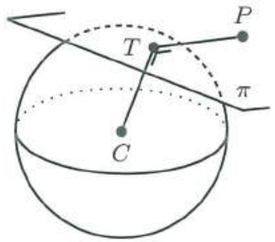
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \\ z-5 \end{pmatrix} = 0$$

$$-(x-1)+5(y-4)+2(z-5)=0$$

L'équation du plan π *est donc* $x-5y-2z+29=0$.

On considère un point T de la sphère Σ de centre C et de rayon r et on note π le plan tangent à la sphère en T. De manière générale, on a

$$P \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CT}\cdot\overrightarrow{TP}=0$$



7.4 Exercices relatifs au chapitre 7

1. Les équations ci-dessous représentent-elles une sphère ? Si oui, on en donnera le centre C et le rayon r.

   a) $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=9$

   b) $x^2+y^2+z^2+6x-10y-4z+22=0$

   c) $x^2+y^2+z^2-12x-2y+6z+56=0$

   d) $x^2+y^2+z^2+4x-14y-8z+69=0$

   e) $36x^2+36y^2+36z^2-108x+96y-144z+109=0$

2. Déterminer l'équation de la sphère

   a) de centre $C(0;2;-4)$ et de rayon 5 ;

   b) de centre $C(1;-2;-4)$ et passant par le point $P(3;2;-1)$;

   c) de diamètre $[AB]$ où $A(-1;0;5)$ et $B(7;4;-7)$;

   d) passant par les points $A(4;2;-3)$ et $B(-1;3;1)$ et ayant son centre sur la droite $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

   e) centrée à l'origine et tangente à la droite $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

   f) de centre $C(4;1;-5)$ et tangente au plan d'équation $x+2y+2z-4=0$;

   g) passant par les points $M(0;3;-4)$, $N(2;2;-3)$ et $P(10;1;-8)$ et de rayon $5\sqrt{2}$;

   h) passant par les points $M(-2;2;3)$, $N(0;4;1)$ et $P(-5;5;-1)$ et ayant son centre sur le plan d'équation $x+3y-2z-7=0$;

   i) passant par les points $E(5;7;-2)$, $F(3;1;0)$, $G(-5;12;3)$ et $H(-3;-2;-1)$;

   j) passant par les points $M(8;8;9)$, $N(-1;-1;9)$ et $P(11;5;9)$ et tangente au plan (Oxy).

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection d'une sphère Σ et d'une droite d dans les cas suivants.

   a) $\Sigma : x^2+y^2+z^2-2x-y+z-3=0$ $\quad d : \begin{cases} x=-3+2k \\ y=6-2k \\ z=-4+k \end{cases}$

   b) $\Sigma : x^2+y^2+z^2+x+2y+3z-9=0$ $\quad d : \begin{cases} x=-2-k \\ y=4+k \\ z=4+k \end{cases}$

   c) $\Sigma : x^2+y^2+z^2-3x+y+1=0$ $\quad d : \begin{cases} x=1 \\ y=2+k \\ z=3+2k \end{cases}$

4. Le système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100 \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$$

   détermine un cercle. Calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.

5. Trouver l'équation de la sphère passant par le point $P(2;-1;1)$ et qui contient le cercle déterminé par le système d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0 \\ 5x+2y-z-3=0 \end{cases} .$$

6. Déterminer l'équation de la sphère contenant les deux cercles Γ_1 et Γ_2 donnés par les systèmes d'équations

$$\begin{cases} x^2+z^2=25 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2+z^2=16 \\ y=3 \end{cases} .$$

7. On donne une sphère Σ et un point T. Après avoir vérifié que T appartient à Σ, trouver l'équation du plan tangent à Σ au point T.

   a) $T(7;4;4)$ $\quad \Sigma : (x+3)^2+(y-15)^2+(z-2)^2=225$

   b) $T(14;4;-6)$ $\quad \Sigma : (x-2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=289$

   c) $T(-2;12;-5)$ $\quad \Sigma : x^2+y^2+z^2-2x-10y+6z=27$

   d) $T(3;-1;\frac{8}{7})$ $\quad \Sigma : 49x^2+49y^2+49z^2-70x+42y-294z+34=0$

8. Trouver les équations des plans tangents à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y - 2z = 48$ aux points d'intersection de cette sphère avec les axes de coordonnées.

9. On donne une sphère Σ et un plan α. Déterminer les équations des plans parallèles à α et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.

   a) $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 216$
   $\alpha : 7x - 2y - z = 0$

   b) $\Sigma : (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 169$
   $\alpha : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$

   c) $\Sigma : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 8y + 2z = 87$
   $\alpha : x - y - z + 11 = 0$

10. On donne une sphère Σ et une droite d. Déterminer les équations des plans perpendiculaires à d et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.

   a) $\Sigma : (x+1)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 49$
   $d : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 2 - 6k \\ z = -3k \end{cases}$

   b) $\Sigma : x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 361$
   $d = (AB)$ où $A(-8; 5; 17)$ et $B(28; 7; 5)$

11. Soit la droite $d : \begin{cases} 8x - 11y + 8z = 30 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ et la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z = 15$. Déterminer les équations des plans contenant la droite d et tangents à la sphère Σ.

12. Montrer que les sphères d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = 81$ et $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$ sont tangentes et déterminer l'équation de leur plan tangent commun.

13. On donne la sphère $\Sigma : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 49$ et le plan $\alpha : 3x + 2y - 6z + 57 = 0$.

   a) Déterminer la distance minimale des points de la sphère Σ au plan α.

   b) Le point $Q(7; 3; c)$ (avec $c > 0$) se trouve sur la sphère Σ. Soit β le plan tangent à la sphère au point Q. Calculer l'angle aigu entre les plans α et β.

14. On donne la sphère $\Sigma : (x-7)^2 + (y-12)^2 + (z-6)^2 = 150$, le plan $\alpha : 3x + 4y = 19$ et la droite $d : \begin{cases} x = 5k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$.

   a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la droite d et du plan α.

   b) Vérifier que le point A appartient à la sphère Σ.

   c) Soit e la droite passant par le centre E de la sphère Σ et normale au plan α. Déterminer les coordonnées du point d'intersection P de la droite e et du plan α.

   d) Calculer le rayon r du cercle Γ d'intersection du plan α et de la sphère Σ.

   e) Déterminer les coordonnées des points B, C et D tels que $ABCD$ soit un carré inscrit dans le cercle Γ.

15. On donne les sphères Σ_1 de centre $C_1(7; 9; -3)$ et de rayon $2\sqrt{5}$ et Σ_2 d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z = 101$.

   a) Montrer que ces deux sphères sont sécantes.

   b) Déterminer le plan contenant le cercle d'intersection de ces deux sphères.

   c) Déterminer le centre et le rayon du cercle d'intersection des deux sphères.

Réponses aux exercices du chapitre 7

1. a) sphère : $C(2; 0; -1)$, $r = 3$ b) sphère : $C(-3; 5; 2)$, $r = 4$
c) rien d) point $C(-2; 7; 4)$ e) sphère : $C(\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}; 2)$, $r = \sqrt{5}$

2. a) $x^2+(y-2)^2+(z+4)^2 = 25$ b) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 = 45$
c) $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 56$
d) $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 45$ e) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{175}{3}$
f) $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = \frac{64}{9}$
g) $(x-5)^2 + (y-6)^2 + (z+8)^2 = 50$ ou
$(x - \frac{35}{11})^2 + (y - \frac{6}{11})^2 + (z + \frac{108}{11})^2 = 50$
h) $(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 9$
i) $(x+3)^2+(y-6)^2+(z+2)^2 = 65$ j) $(x-5)^2+(y-2)^2+(z-7)^2 = 49$

3. a) $(1; 2; -2)$, $(3; 0; -1)$ b) $(1; 1; 1)$, $(3; -1; -1)$
c) $(1; 0; -1)$, $(1; \frac{3}{5}; \frac{1}{5})$

4. $C(-1; 2; 3)$, $r = 8$

5. $(x + \frac{13}{2})^2 + (y + \frac{9}{2})^2 + (z - \frac{9}{2})^2 = \frac{387}{4}$

6. $x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 41$

7. a) $10x - 11y + 2z = 34$ b) $12x + 8y - 9z = 254$
c) $3x - 7y + 2z + 100 = 0$ d) $112x - 28y - 91z = 260$

8. $8x-y-z = 32$, $8x+y+z+96 = 0$, $4x+7y-z = 56$, $4x-7y-z = 42$,
$4x - y + 7z = 56$, $4x - y - 7z = 42$

9. a) $7x - 2y - z = 108$, $7x - 2y - z + 108 = 0$, $(14; -4; -2)$, $(-14; 4; 2)$
b) $12x+4y+3z = 209$, $12x+4y+3z+129 = 0$, $(15; 5; 3)$, $(-9; -3; -3)$
c) $x - y - z = 15$, $x - y - z + 9 = 0$, $(\frac{9}{2}; -6; -\frac{9}{2})$, $(-\frac{7}{2}; 2; \frac{7}{2})$

10. a) $2x - 6y + 3z = 11$, $2x - 6y + 3z + 87 = 0$, $(1; -1; 1)$, $(-3; 11; -5)$
b) $18x + y - 6z = 343$, $18x + y - 6z + 379 = 0$, $(18; 1; -3)$, $(-18; -1; 9)$

11. $3x - 4y + 2z = 10$ $2x - 3y + 4z = 10$

12. $2x + 6y - 3z = 63$

13. a) 1 b) 85,32°

14. a) $A(5; 1; 1)$ c) $P(1; 4; 6)$ d) $r = 5\sqrt{2}$
e) $B(5; 1; 11)$, $C(-3; 7; 11)$ et $D(-3; 7; 1)$

15. b) $x + 2y - z = 22$ c) centre $D(6; 7; -2)$ et rayon $\sqrt{14}$

Annexe A

Représentations graphiques dans l'espace

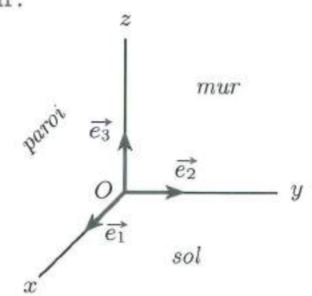
Jusqu'ici les figures étaient destinées à illustrer un objet ou à éclairer un raisonnement. L'objet des pages suivantes est la représentation graphique elle-même.

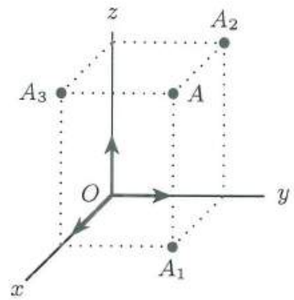
Les auteurs, conscients qu'ils sont loin d'être exhaustifs, renvoient le lecteur intéressé et désireux d'en savoir plus à la lecture d'ouvrages spécialisés, en particulier dans le domaine de la géométrie descriptive.

A.1 Représentation d'un point

Pour représenter graphiquement un objet de l'espace, nous le dessinons dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$.

Les plans Oxy, Oxz et Oyz sont appelés respectivement **sol**, **paroi** et **mur**.





Nous notons A_1, A_2 et A_3 les projections d'un point A parallèlement aux axes sur le sol, le mur et la paroi.

Un point est **visible** si ses trois coordonnées sont positives ou nulles.

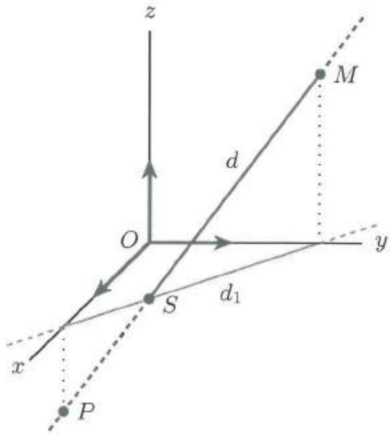
A.2 Représentation d'une droite

Les **traces** d'une droite d sont ses points d'intersection S avec le sol, M avec le mur et P avec la paroi.

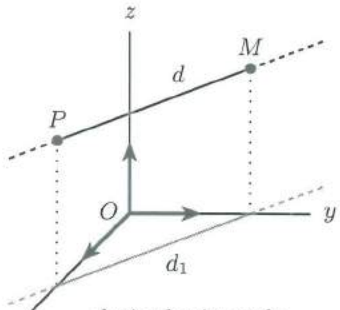
Nous notons d_1, d_2 et d_3 les **projections** de la droite d parallèlement aux axes sur les plans de base (d_1 projection sur le sol, d_2 projection sur le mur et d_3 projection sur la paroi).

Pour représenter graphiquement une droite nous supposons que le sol, le mur et la paroi sont opaques (ou semi-opaques) et nous ne dessinons en trait plein que sa **partie visible** et ses traces S, M et P. On représente les parties invisibles en traitillé.

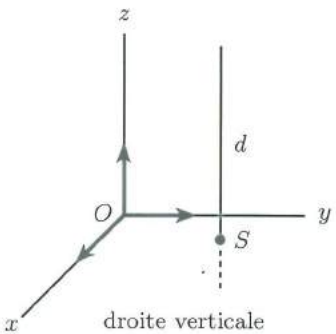
Lorsque la droite est donnée par ses équations, il convient de commencer par calculer les coordonnées de ses traces, puis de représenter ces points avant de les relier.



Une droite peut n'avoir que deux traces ou même qu'une seule. En voici des exemples.



droite horizontale
(parallèle au sol)



droite verticale
(parallèle à l'axe Oz)

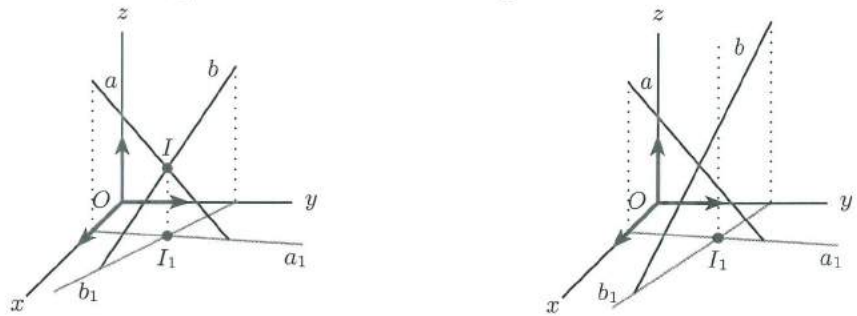
A.3 Positions relatives de deux droites

Deux droites a et b peuvent être confondues, strictement parallèles, sécantes ou gauches. Si la description précise des deux premières situations ne pose pas de problème particulier, il n'en va pas de même pour les deux dernières.

Envisageons donc deux droites a et b qui ne sont ni confondues, ni strictement parallèles. Leur représentation dans l'espace peut présenter alors une intersection apparente.

Notons encore a_1 et b_1 les projections parallèlement à l'axe Oz de a et de b sur le sol.

Si les droites a et b sont sécantes en I, alors le point d'intersection I_1 des droites a_1 et b_1, est situé à la verticale du point I.



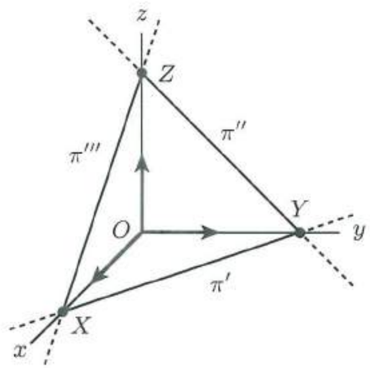
Si le point d'intersection I_1 des droites a_1 et b_1 n'est pas situé à la verticale du point d'intersection apparent, alors les droites a et b sont gauches.

A.4 Représentation d'un plan

Les traces π', π'' et π''' d'un plan π sont les droites d'intersection de ce plan avec le sol, le mur et la paroi.

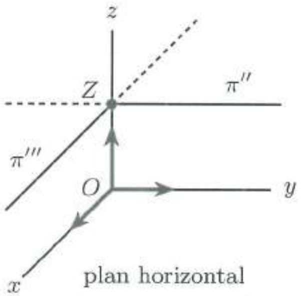
Si le plan π coupe les axes en X, Y et Z, π' passe par X et Y, π'' passe par Y et Z et π''' passe par X et Z.

On représente un plan par ses traces.

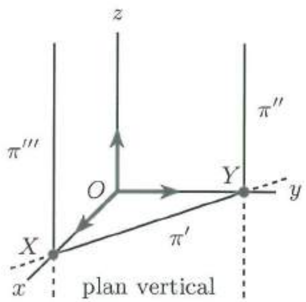


Exemple. *Considérons le plan* $\pi : 6x + 4y + 3z - 12 = 0$.
La droite π' *passe par* $X(2;0;0)$ *et* $Y(0;3;0)$.
La droite π'' *passe par* $Y(0;3;0)$ *et* $Z(0;0;4)$.
La droite π''' *passe par* $X(2;0;0)$ *et* $Z(0;0;4)$.

Un plan peut n'avoir qu'une ou deux intersections avec les axes. En voici deux exemples.



plan horizontal
(parallèle au sol)



plan vertical
(parallèle à l'axe Oz)

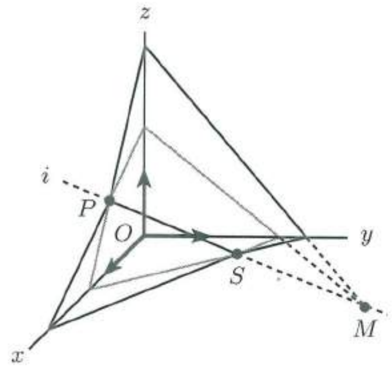
A.5 Positions relatives de deux plans

Deux plans α et β peuvent être confondus, strictement parallèles ou sécants. Dans ce dernier cas, leur intersection est une droite i.

Considérons deux plans sécants α et β donnés par leurs traces α', α'', α''' et β', β'', β'''. On construit leur droite d'intersection i de la manière suivante.

1. Construire $\{S\} = \alpha' \cap \beta'$, $\{M\} = \alpha'' \cap \beta''$ et $\{P\} = \alpha''' \cap \beta'''$.

2. La droite d'intersection des plans passe par les points S, M et P.



A.6 Exercices relatifs à l'annexe A

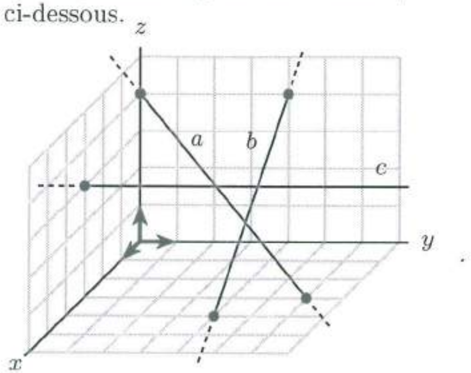
1. Placer les points suivants dans le repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ et donner les coordonnées des projections de ces points dans le sol, le mur et la paroi.

$A(1;1;1)$	$B(3;6;0)$	$C(3;6;2)$
$D(3;6;-4)$	$E(-2;5;1)$	$F(-3;-1;-2)$
$G(4;5;1)$	$H(4;-2;5)$	$I(-2;-2;-2)$

2. On donne une droite $d:\begin{cases} x=2+k \\ y=5+2k \\ z=-3-3k \end{cases}$.
   a) Calculer les traces de cette droite, puis dessiner la droite d dans le repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$.
   b) Déterminer une équation pour chacune des projections de d dans le sol, le mur et la paroi, puis dessiner ces projections.

3. Donner des équations paramétriques pour chacune des droites suivantes, puis dessiner ces droites ainsi que leurs projections dans le sol et dans le mur.
   a) La droite d passe par $A(6;2;1)$ et par $B(2;4;3)$.
   b) La droite d passe par $A(5;7;2)$ et par $B(2;2;2)$.
   c) La droite d passe par $A(-2;3;5)$ et par $B(5;-1;3)$.
   d) La droite d est verticale et passe par $A(2;3;5)$.

4. Donner des équations paramétriques des droites a, b et c représentées graphiquement ci-dessous.

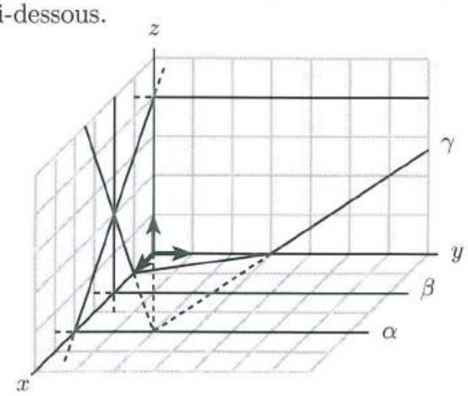


5. Représenter graphiquement
   a) un plan α parallèle à l'axe Ox ;
   b) un plan β parallèle au mur ;
   c) un plan π parallèle à la paroi.

6. Représenter graphiquement les plans suivants.

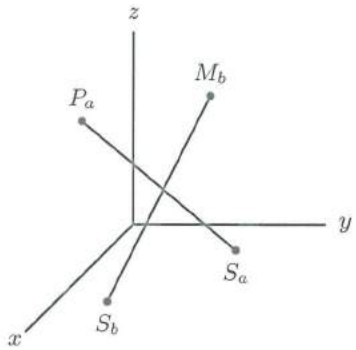
$\alpha: 2x+3y+2z-6=0$	$\beta: 2x+3y-z-6=0$
$\gamma: 6x+3y-2z=0$	$\delta: 2x+3y+2z+6=0$
$\varepsilon: 3y-2z-6=0$	$\varphi: x+2y-4=0$

7. Donner une équation cartésienne des plans α, β et γ représentés graphiquement ci-dessous.

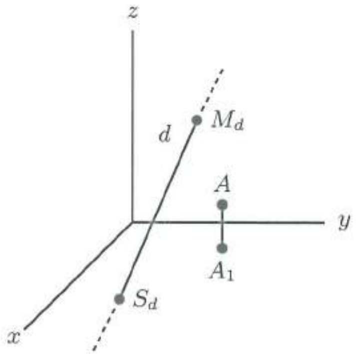


8. On considère le cube de sommets $OABCDEFG$ dont on connaît $A(5;0;0)$, $B(5;5;0)$ et $D(0;0;5)$, ainsi que le plan $\pi: x+y+z-8=0$. Représenter le polygone d'intersection du cube et du plan π, puis calculer les coordonnées des sommets de ce polygone.

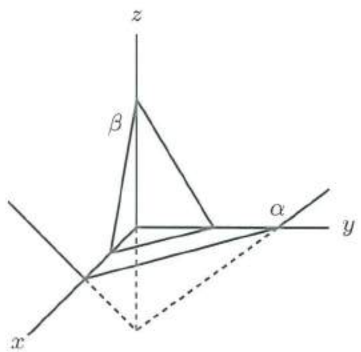
9. Les droites a et b se coupent-elles ?



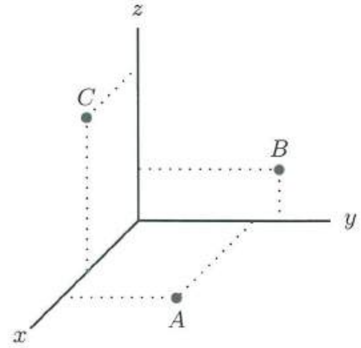
10. Représenter le plan π passant par le point A et contenant la droite d.



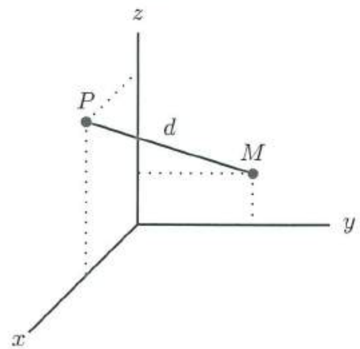
11. Représenter la droite d'intersection i des plans α et β.



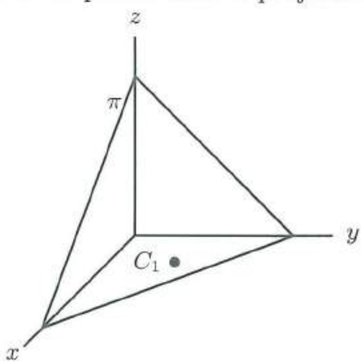
12. Représenter le plan π passant par les points A, B et C.



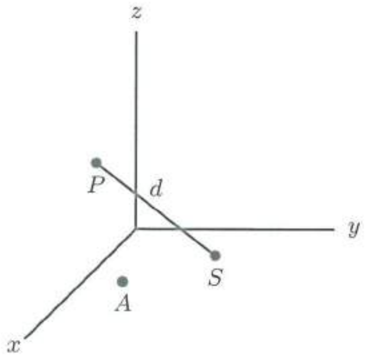
13. Construire la trace S de la droite d.



14. Construire le point C du plan π dont la projection sur le sol est C_1.



15. Construire les traces du plan π qui contient la droite d et le point A du sol, puis la droite horizontale h de π qui passe par P.



16. a) Représenter les traces du plan $\pi : x + 2y - z - 6 = 0$.

b) La droite d passant par le point $A(4; 3; 4)$ est parallèle au mur et contenue dans le plan π. Représenter cette droite ainsi que sa projection sur le sol.

c) Donner un vecteur directeur de d.

17. On considère la droite d qui passe par les points $A(4; 10; 0)$ et $B(1; 1; 3)$, ainsi que le plan $\pi : 2x + y + 2z - 12 = 0$.

a) Donner des équations paramétriques de la droite d, puis sa représentation graphique en mettant en évidence ses traces dans les trois plans de référence. Tracer également la projection de d dans le sol.

b) Représenter les traces du plan π.

c) Calculer l'angle aigu entre la droite d et le plan π.

d) On considère la droite d' parallèle à d et passant par $P(3; -1; 2)$. Calculer la distance entre les droites d et d'.

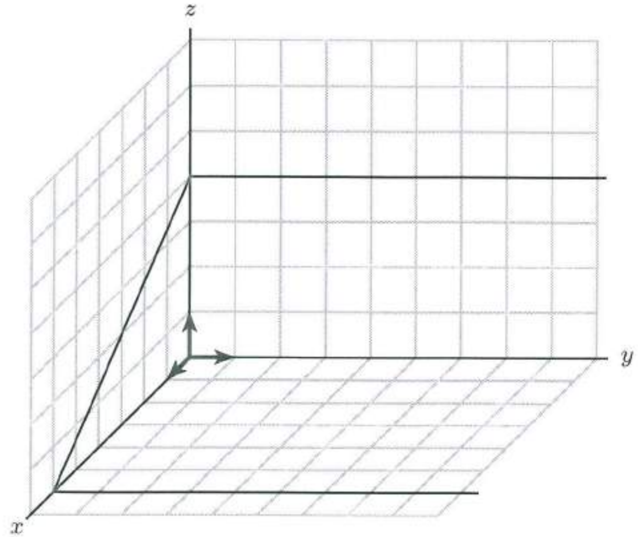
18. a) Déterminer une équation du plan π donné par ses traces.

b) Représenter le point $A(3; 4; 5)$.

c) Le plan π étant considéré comme opaque, représenter la partie visible de la droite verticale v passant par A.

d) On considère le point $B(5; 3; 3)$. Calculer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de la droite d qui passe par A et B avec le plan π.

e) La droite d est-elle parallèle au plan Oyz ?



19. On considère le dessin ci-dessous.

a) Déterminer les coordonnées des points B dans la paroi et C dans le sol.

b) Représenter le point $A(1; 4; 2)$.

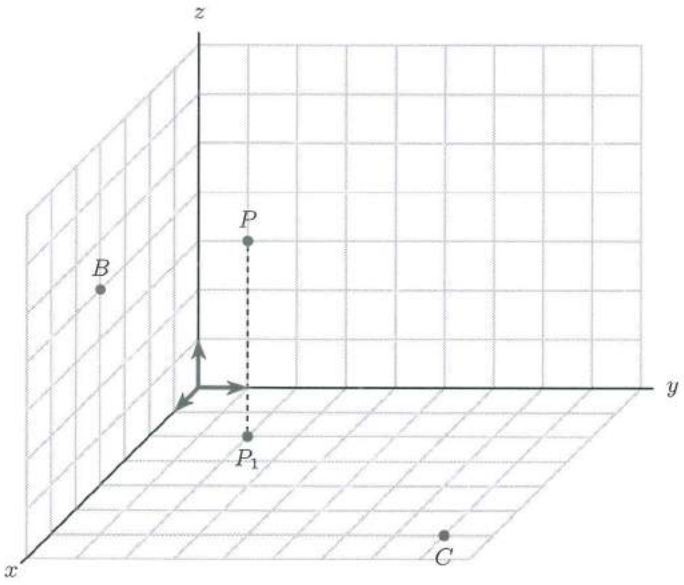
c) Déterminer l'équation cartésienne du plan α formé par les trois points A, B et C.

d) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan α avec les trois axes.

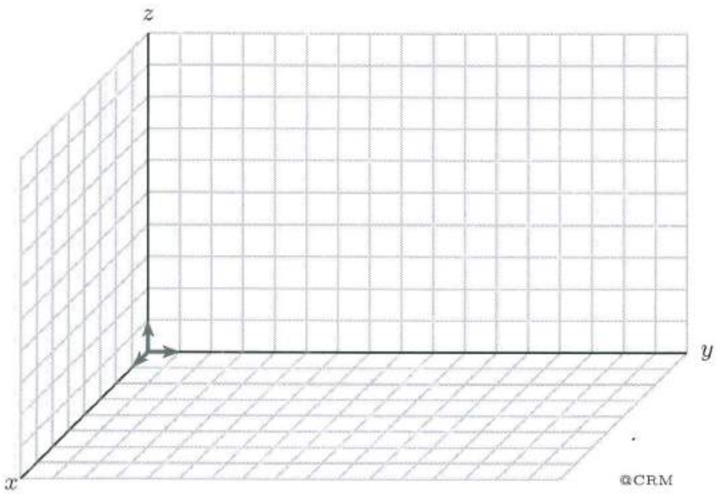
e) Représenter le plan α sur la figure ci-dessous.

f) On considère encore le point $P(2; 2; 4)$. Ce point est-il situé au-dessus, sur ou au-dessous du plan α ? Justifier la réponse.

g) Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de la droite (OP) avec le plan α.



La figure ci-dessous est disponible en grande taille sur le site de la CRM à l'adresse www.sspmp.ch/crm.



Réponses aux exercices de l'annexe A

1.

Point	Sol ($z=0$)	Mur ($x=0$)	Paroi ($y=0$)
$A(1;1;1)$	$A_1(1;1;0)$	$A_2(0;1;1)$	$A_3(1;0;1)$
$B(3;6;0)$	$B_1(3;6;0)$	$B_2(0;6;0)$	$B_3(3;0;0)$
$C(3;6;2)$	$C_1(3;6;0)$	$C_2(0;6;2)$	$C_3(3;0;2)$
$D(3;6;-4)$	$D_1(3;6;0)$	$D_2(0;6;-4)$	$D_3(3;0;-4)$
$E(-2;5;1)$	$E_1(-2;5;0)$	$E_2(0;5;1)$	$E_3(-2;0;1)$
$F(-3;-1;-2)$	$F_1(-3;-1;0)$	$F_2(0;-1;-2)$	$F_3(-3;0;-2)$
$G(4;5;1)$	$G_1(4;5;0)$	$G_2(0;5;1)$	$G_3(4;0;1)$
$H(4;-2;5)$	$H_1(4;-2;0)$	$H_2(0;-2;5)$	$H_3(4;0;5)$
$I(-2;-2;-2)$	$I_1(-2;-2;0)$	$I_2(0;-2;-2)$	$I_3(-2;0;-2)$

2. a) $S(1;3;0)$, $M(0;1;3)$ et $P(-\frac{1}{2};0;\frac{9}{2})$

   b) $d_1 : \begin{cases} x=1+k \\ y=3+2k \\ z=0 \end{cases}$, $d_2 : \begin{cases} x=0 \\ y=1+2k \\ z=3-3k \end{cases}$ et $d_3 : \begin{cases} x=1-k \\ y=0 \\ z=3k \end{cases}$

3. a) $d : \begin{cases} x=6-2k \\ y=2+k \\ z=1+k \end{cases}$, $S(8;1;0)$, $M(0;5;4)$ et $P(10;0;-1)$

   b) $d : \begin{cases} x=5+3k \\ y=7+5k \\ z=2 \end{cases}$, pas de S, $M(0;-\frac{4}{3};2)$ et $P(\frac{4}{5};0;2)$

   c) $d : \begin{cases} x=-2+7k \\ y=3-4k \\ z=5-2k \end{cases}$, $S(\frac{31}{2};-7;0)$, $M(0;-11;-2)$ et $P(\frac{13}{4};0;\frac{7}{2})$

   d) $d : \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=k \end{cases}$, $S(2;3;0)$, pas de M et pas de P

4. $a : \begin{cases} x=3k \\ y=6k \\ z=4-4k \end{cases}$ $\quad b : \begin{cases} x=4-k \\ y=4 \\ z=k \end{cases}$ $\quad c : \begin{cases} x=3 \\ y=k \\ z=3 \end{cases}$

7. $\alpha : x+z=4$, $\beta : x=2$ et $\gamma : 6x+2y-3z-6=0$

8. polygone à six côtés $HIJKLM$ avec $H(3;0;5)$, $I(5;0;3)$, $J(5;3;0)$, $K(3;5;0)$, $L(0;5;3)$ et $M(0;3;5)$

9. oui

16. c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

17. a) $d : \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 10 + 3k \\ z = -k \end{cases}$, $S(4;10;0)$, $M(0;-2;4)$ et $P(\frac{2}{3};0;\frac{10}{3})$

c) $17{,}55°$ d) $\frac{3\sqrt{110}}{11}$

18. a) $2x + 3z - 12 = 0$ d) $I(12;-\frac{1}{2};-4)$ e) non

19. a) $B(4;0;4)$ et $C(6;8;0)$ c) $\alpha : y + 2z - 8 = 0$
d) pas d'intersection avec Ox, $I_y(0;8;0)$ et $I_z(0;0;4)$
f) au-dessus g) $I(\frac{8}{5};\frac{8}{5};\frac{16}{5})$

Annexe B

Exercices de type maturité

B.1 Dans le plan

1. On donne les points $A(-7;-2)$, $B(9;6)$ et $\Omega(-1;6)$.

a) Déterminer l'équation implicite de la droite passant par A et B.

b) Déterminer l'équation du cercle ω tangent à la droite (AB) et de centre Ω, puis celle de l'autre tangente t au cercle ω issue de A.

c) Calculer les coordonnées d'un point C situé sur l'axe Oy et qui forme avec les points A et B un triangle d'aire 280 (on obtient deux solutions). Vérifier qu'une des solutions appartient à t.

d) On donne le cercle $\gamma : x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$ de centre D et de rayon r et la droite $e : x - 7y - 7 = 0$. Vérifier que Ω appartient à γ et A à e.

e) Démontrer les égalités $\|\overrightarrow{A\Omega}\|^2 = \|\overrightarrow{AE}\| \cdot \|\overrightarrow{AF}\| = \|\overrightarrow{AD}\|^2 - r^2$ où E et F sont les intersections de e avec γ. En déduire que la droite $(A\Omega)$ est tangente au cercle γ.

2. On donne les droites $d_1 : 3x - y - 8 = 0$ et $d_2 : x - 3y = 0$.

a) Déterminer les coordonnées des sommets du losange $ABCD$ situé dans le premier quadrant et construit de la manière suivante :

- le point A est le point d'intersection de d_1 et de d_2 ;
- le côté $[AD]$ est sur d_1 et le côté $[AB]$ est sur d_2 ;
- la longueur du côté est $2\sqrt{10}$.

b) Calculer l'aire du losange $ABCD$.

c) On considère le cercle γ de rayon $r = \sqrt{10} - \sqrt{2}$ tangent aux droites d_1 et d_2 et intérieur au losange $ABCD$. Déterminer les coordonnées du centre K de γ.

d) Montrer que γ est aussi tangent à la diagonale (BD).

3. On donne le point $A(-6; 4)$, le cercle $\Gamma : x^2 + y^2 - 24x - 10y = 0$ et la droite $t : 5x - 12y + 169 = 0$.

a) Montrer que t est tangente à Γ au point $T(7; 17)$.

b) Donner l'équation de l'autre tangente à Γ parallèle à t.

c) Montrer que le point $B(24; 10)$ appartient à Γ. Donner l'équation de la tangente à Γ en B et montrer qu'elle est perpendiculaire à t.

d) Soit d la droite (OA) où O est l'origine du repère. La droite d coupe t en K et Γ en O et L. Calculer les coordonnées de K et L.

e) Calculer la distance du point A à la droite t. En déduire l'équation des cercles de rayon 7 tangents à t et passant par A.

4. On donne les points $A(-13; 1)$ et $C(3; 13)$. On considère les cercles $\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

a) Déterminer le centre et le rayon de Γ_1 et de Γ_2, ainsi que leurs points d'intersection.

b) Donner l'équation de la droite (AC) et montrer qu'elle est tangente à Γ_1.

c) Déterminer les coordonnées du point B tel que le cercle Γ_1 soit inscrit dans le triangle ABC et calculer l'aire de ce triangle.

d) Donner les coordonnées du centre du cercle Γ_3 tel que :

- Γ_3 a le même rayon que Γ_1 et Γ_2 ;
- Γ_3 est tangent extérieurement à Γ_1 et Γ_2 ;
- la deuxième coordonnée du centre de Γ_3 est positive.

e) Donner le point d'intersection de Γ_1 et Γ_3 sans utiliser les équations de ces cercles.

B.2 Dans l'espace

5. On considère les points $D(-2; 4; 6)$ et $E(-14; -18; 10)$, le plan α d'équation $2x + y - 2z - 15 = 0$ et la droite d passant par les points $A(-3; -5; 7)$ et $B(0; 19; -8)$.

a) Calculer l'angle aigu φ formé par d et α.

b) Donner l'équation de la sphère Σ tangente au plan α en $P(6; y_P; 2)$ et à la droite d en $M(x_M; 3; z_M)$.

c) Déterminer les équations paramétriques de la droite t tangente à la sphère Σ en M et perpendiculaire à la droite d.

d) Un rayon lumineux issu de D frappe le plan α en un point R. Calculer les coordonnées de R sachant que le rayon réfléchi passe par E.

6. On considère les cinq points $A(2; 2; -1)$, $B(0; 0; 16)$, $D(-7; -6; 1)$, $P(12; 22; 11)$ et $Q(2; 4; 13)$ ainsi que le plan α d'équation $x - y = 0$.

a) Calculer l'angle aigu φ formé par la droite (AP) et le plan α.

b) Déterminer l'équation de la sphère Σ centrée sur (PQ) et passant par B et D.

c) Déterminer les équations paramétriques de la droite d', projection orthogonale de (PQ) sur le plan α.

d) D'un mobile se déplaçant sur (PQ), on tire sans interruption en direction du plan α, perpendiculairement à celui-ci. Une cible en forme de cercle Γ centré en A et passant par B est dessinée sur α. Décrire précisément de quels points de (PQ) on touchera la cible.

7. On considère les points $A(6; -2; 0)$, $B(-3; 2; 5)$, $C(9; 8; 4)$, $D(0; 0; 6)$ et $E(-6; 2; 1)$. On note α le plan passant par les points A, B et C.

a) Trouver l'équation du plan α.

b) Trouver l'angle aigu entre le plan α et la droite (DE).

c) Trouver les coordonnées du (ou des) point(s) S de la droite (DE) de sorte que le tétraèdre $ABCS$ ait un volume de 85.

d) On considère la sphère $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 6 = 0$. Le plan α coupe la sphère σ. Trouver le centre et le rayon du cercle d'intersection.

8. Soient une sphère Σ de centre $C(4;4;3)$ et de rayon $r = 7$, un plan α passant par $A(1;2;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi que les points $B(29;18;-31)$ et $D(-7;-2;1)$.

   a) Établir les équations de la sphère Σ et du plan α.

   b) La sphère coupe le plan en formant un cercle. Déterminer son centre N et son rayon r_0.

   c) Un rayon lumineux partant du point B en direction du point D rencontre le plan α en S avant d'être réfléchi par le plan α et de toucher la sphère en un point M. Déterminer ce point M.

   d) Déterminer le point L de la sphère qui est le plus éloigné du plan α.

9. On considère les points $A(-3;2;5)$, $B(-2;-2;-2)$, $C(-3;-1;1)$ et $D(3;-3;5)$.

   a) Calculer l'aire du triangle ABC.

   b) Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant les points A, B et C.

   c) Déterminer les équations paramétriques de la droite d normale au plan $\pi : 5x - 4y + 3z + 8 = 0$ et passant par le point D.

   d) Trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite d et du plan π.

   e) Calculer la distance du point D au plan π.

   f) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Σ de centre D et tangente au plan π.

   g) Trouver les coordonnées des points d'intersection de la droite
   $$d : \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -3 - 4\lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$
   et de la sphère $\Sigma : (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 50$.

10. On considère la sphère Σ_m de centre $C_m(-2;-m;-1)$ et de rayon 3 ainsi que la droite d passant par les points $P(-6;-4;0)$ et $Q(0;-1;3)$.

    a) On pose $m = 2$.

       1. Déterminer les points d'intersection T_1 et T_2 de la droite d avec la sphère Σ_2.
       2. Déterminer les équations des plans tangents à Σ_2 en ces deux points.
       3. Donner les équations paramétriques de la droite d'intersection de ces plans et calculer l'angle aigu φ que forment ces deux plans.
       4. Montrer que le plan $\alpha : 2x + y - 5z + 16 = 0$ coupe la sphère Σ_2. Donner le centre et le rayon du cercle $\alpha \cap \Sigma_2$.

    b) Déterminer les sphères Σ_m qui admettent $\beta : 2x + 2y + z = 0$ comme plan tangent.

    c) Pour quelle valeur de m le point C_m est-il le plus proche du point $M(-4;6;-8)$?

11. On considère les points $A(-2;-2;2)$, $B(3;13;2)$, $G(1;2;1)$, $S(11;-8;4)$ et le plan π contenant les points A, B et G.

    a) Trouver l'équation du plan π.

    b) Le triangle ABC admet G pour centre de gravité.

       1. Déterminer les coordonnées du sommet C et montrer que C appartient au plan π.
       2. Calculer l'aire du triangle ABC.

    c) On considère le tétraèdre de sommets A, B, C et S.

       1. Calculer le volume de ce tétraèdre.
       2. Déterminer les coordonnées du point H du plan (ABC) qui est le pied de la hauteur du tétraèdre issue du point S.
       3. Calculer l'angle aigu entre la face ABC et l'arête (BS) du tétraèdre.

    d) Trouver les équations paramétriques de la droite d'intersection du plan π et du plan d'équation $2x + y - 3z - 4 = 0$.

12. On considère les points $Q(1;-5;-9)$, $R(13;-11;9)$ et $S(5;3;1)$, le plan π d'équation $4x-7y+4z-3=0$ et la droite d donnée par les équations paramétriques

$$d: \begin{cases} x = 15+t \\ y = -1+5t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 11+t \end{cases}$$

a) 1. Déterminer les coordonnées du point P d'intersection de la droite d avec le plan π.

2. Le point Q appartient-il au plan π ?

b) Calculer l'angle aigu θ que forment la droite d et le plan π.

c) Trouver l'équation du plan α contenant le point Q et la droite d.

d) Trouver des équations paramétriques de la droite d'intersection des plans π et α.

e) On considère le triangle QRS.

1. Ce triangle est-il rectangle ? isocèle ? équilatéral ?

2. Calculer l'aire de ce triangle.

f) Calculer le volume du tétraèdre $PQRS$.

g) On considère la sphère Σ d'équation $x^2+y^2+z^2-14x+16y-13=0$.

1. Déterminer les coordonnées du centre et trouver le rayon de cette sphère.

2. Décrire la position relative de la sphère Σ par rapport au plan π.

13. On considère les points $A(1;2;0)$, $B(-2;3;-6)$, $C(0;5;2)$, $D(39;24;14)$ et $E(17;12;-2)$.

a) Trouver l'équation du plan (ABC).

b) 1. La droite (DE) est-elle parallèle au plan (ABC) ? Justifier la réponse par un calcul complet.

2. Si oui, calculer la distance entre la droite (DE) et le plan (ABC). Si non, trouver l'intersection entre la droite (DE) et le plan (ABC).

c) Calculer le volume du tétraèdre $ABCE$.

d) Trouver l'équation de la sphère centrée en E et tangente au plan (ABC).

14. On considère le triangle ABC de sommets $A(-7;-1;-1)$, $B(11;-4;5)$, $C(20;5;1)$, le plan $\alpha: 4x-5y-20z=0$ et la droite d passant par les points $D(5;4;2)$ et $E(7;1;-4)$.

a) Donner l'équation du plan π contenant les points A, B et C.

b) Trouver l'angle aigu que forme la droite d avec le plan π.

c) Donner une équation de la sphère S centrée en E et tangente au plan π.

d) Trouver le point d'ordonnée nulle situé sur l'intersection des deux plans π et α. Donner ensuite les équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans. Calculer l'angle aigu θ de ces deux plans.

e) Déterminer la distance entre les droites (AB) et (CD).

f) Soit le point H, projection orthogonale de $P(9;-12;-17)$ sur le plan π. Déterminer l'aire du triangle APH.

15. On considère le point $C(1;2;2)$ et les droites $a: \begin{cases} x=-2-\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $b: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

a) Montrer que les droites a et b sont sécantes.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites sécantes a et b.

c) Déterminer l'équation cartésienne du plan π_1 contenant les droites a et b.

d) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Σ de centre C et tangente à la droite a.

e) Trouver les coordonnées du point de tangence T de la droite a avec la sphère $\Sigma: (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$.

f) Déterminer l'équation cartésienne du plan π_2 perpendiculaire à la droite a et contenant le point C.

g) Déterminer les équations paramétriques de la droite d d'intersection des plans $\pi_1: 2x+2y+z+1=0$ et $\pi_2: -x+2y-2z+1=0$.

16. On considère les points $A(4;1;3)$ et $B(-3;0;1)$ et la droite d donnée par les équations paramétriques

$$d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 3t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$$

a) 1. Montrer que les droites (AB) et d sont gauches.
   2. Calculer la distance de ces deux droites.

b) Déterminer l'équation de la sphère Σ qui passe par les points A et B et dont le centre C appartient à la droite d.

c) La sphère Σ est considérée comme un modèle de la Terre dont l'équateur passe par les points A et B. Déterminer son axe de rotation et calculer la longueur du plus court chemin de A vers B sur cette sphère.

d) Trouver le centre, le rayon et une représentation cartésienne du plus petit cercle inclus dans Σ et passant par les points A et B.

17. On considère les points $A(-2;-1;0)$, $B(1;-4;6)$, $C(4;1;6)$, $D(1;3;1)$, $P(0;4;-6)$ et le plan $\alpha : x - 3y + z + 7 = 0$.

a) Trouver l'équation du plan β contenant les points A, B et C.

b) Déterminer l'angle aigu φ formé par la droite (AC) et le plan α.

c) Montrer que les droites (AB) et (CD) sont gauches.

d) Déterminer des équations paramétriques de la droite d'intersection des plans α et β.

e) 1. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Γ centrée en P et tangente au plan α.
   2. En déduire les coordonnées du point Q situé sur la sphère Γ et qui est diamétralement opposé au point de contact de la sphère Γ et du plan α.

Réponses aux exercices de l'annexe B

1. a) $x-2y+3=0$ b) $\omega : (x+1)^2+(y-6)^2 = 20$ et $t : 11x-2y+73=0$
   c) $C_1(0;\frac{73}{2})$ et $C_2(0;-\frac{67}{2})$ d) $E(0;-1)$ et $F(7;0)$

2. a) $A(3;1)$, $B(9;3)$, $C(11;9)$ et $D(5;7)$ b) 32
   c) $K(8-\sqrt{5};6-\sqrt{5})$

3. b) $5x - 12y - 169 = 0$ c) $12x + 5y - 338 = 0$
   d) $K(-13;\frac{26}{3})$ et $L(12;-8)$
   e) $\delta(A;t) = 7$, $(x-\frac{6}{13})^2+(y-\frac{87}{13})^2 = 49$ ou $(x+\frac{162}{13})^2+(y-\frac{17}{13})^2 = 49$

4. a) $C_1(-2;3)$, $r_1 = 5$, $C_2(2;3)$, $r_2 = 5$, $I_1(0;3-\sqrt{21})$ et $I_2(0;3+\sqrt{21})$
   b) $3x - 4y + 43 = 0$ c) $B(3;-\frac{11}{3})$ et aire : $\frac{400}{3}$
   d) $C_3(0;3+4\sqrt{6})$ e) $I(-1;3+2\sqrt{6})$

5. a) $44{,}65°$ b) $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-6)^2 = 36$
   c) $\begin{cases} x = -2 - 7k \\ y = 3 + 4k \\ z = 2 + 5k \end{cases}$ d) $R(4;3;-2)$

6. a) $16{,}18°$ b) $(x+8)^2+(y+14)^2+(z-15)^2 = 261$
   c) $\begin{cases} x = 3 + 7k \\ y = 3 + 7k \\ z = 13 - k \end{cases}$
   d) Depuis le segment d'extrémités $E_1(-3;-5;14)$ et $E_2(7;13;12)$

7. a) $2x-3y+6z-18 = 0$ b) $58{,}27°$ c) $S_1(-6;2;1)$ et $S_2(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{29}{4})$
   d) $\Omega(\frac{159}{49};-\frac{18}{49};\frac{85}{49})$, $r = \frac{2\sqrt{187}}{7}$

8. a) $\Sigma : (x-4)^2+(y-4)^2+(z-3)^2 = 49$, $\alpha : x+y+z-4 = 0$
   b) $N(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{2}{3})$, $r_0 = \frac{7\sqrt{6}}{3}$ c) $M(6;7;-3)$
   d) $L(4+\frac{7\sqrt{3}}{3};4+\frac{7\sqrt{3}}{3};3+\frac{7\sqrt{3}}{3})$

9. a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ b) $\pi : 5x - 4y + 3z + 8 = 0$
   c) $d: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$ d) $(-2;1;2)$ e) $5\sqrt{2}$
   f) $\Sigma : (x-3)^2+(y+3)^2+(z-5)^2 = 50$ g) $(8;-7;8)$ et $(-2;1;2)$

10. a) $T_1(-4;-3;1)$ et $T_2(-2;-2;2)$, $\beta_1 : -2x-y+2z-13=0$

$\beta_2 : z-2=0$, $\begin{cases} x=-k \\ y=-9+2k \\ z=2 \end{cases}$, $\varphi = 48{,}19°$

$S(-3;-\frac{5}{2};\frac{3}{2})$ et $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $(x+2)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=9$ et $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$

c) $m=-6$

11. a) $3x-y+5z=6$ b) $C(2;-5;-1)$, aire $=\frac{15}{2}\sqrt{35}$

c) volume $=\frac{275}{2}$, $H(\frac{44}{7};-\frac{45}{7};-\frac{27}{7})$, 24,33°

d) $\begin{cases} x=2t \\ y=19-19t \\ z=5-5t \end{cases}$

12. a) $P(19;19;15)$, $Q\in\pi$ b) 35,3° c) $16x-y-11z-120=0$

d) $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-5+4t \\ z=-9+4t \end{cases}$

e) rectangle, pas isocèle donc pas équilatéral, aire $=54\sqrt{5}$ f) 54

g) $\Omega(7;-8;0)$, $r=\sqrt{126}$, le plan coupe la sphère

13. a) $5x+3y-2z-11=0$ b) non, $I(-5;0;-18)$ c) 76

d) $(x-17^2)+(y-12)^2+(z+2)^2=342$

14. a) $2x-6y-9z-1=0$ b) 80,76°

c) $(x-7)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=\frac{1849}{121}$

d) $(5;0;1)$, $\begin{cases} x=5-75k \\ y=-4k \\ z=1-14k \end{cases}$, 19,31° e) 5,54 f) 77

15. b) $I(0;-2;3)$ c) $\pi_1 : 2x+2y+z+1=0$

d) $\Sigma : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ e) $T(-1;0;1)$

f) $\pi_2 : -x+2y-2z+1=0$ g) $d : \begin{cases} x=-6k \\ y=-\frac{1}{2}+3k \\ z=6k \end{cases}$

16. a) $\frac{42}{\sqrt{395}}$ b) $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=18$

c) $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-5t \\ z=-t \end{cases}$ et $2\sqrt{2}\pi$

d) centre $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};2)$ rayon $=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

cercle $\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=18 \\ x+y-4z+7=0 \end{cases}$

17. a) $5x-3y-4z+7=0$ b) 11,98° d) $\begin{cases} x= & 5t \\ y= & \frac{7}{3}+3t \\ z= & 4t \end{cases}$

e) $x^2+(y-4)^2+(z+6)^2=11$, $Q(-1;7;-7)$

Index