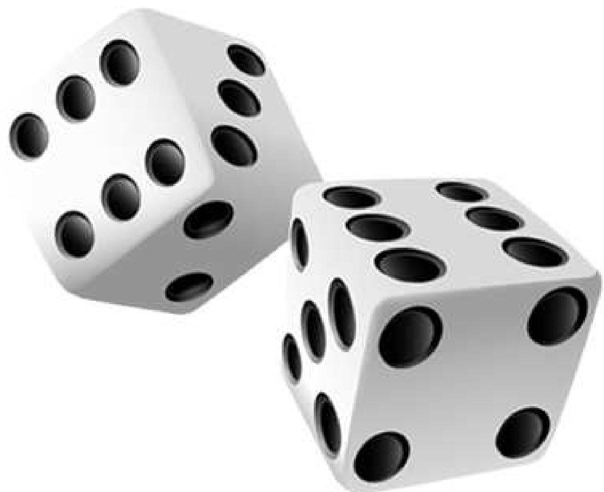
Mathématiques

COMBINATOIRE

PROBABILITES

3$^{\text{ème}}$ année Maturité
niveau renforcé



Gymnase de Burier

Table des matières

Avant-propos 4

1 Combinatoire 6

1.1 Exemples d'introduction . . . 6
1.2 Principes généraux . . . 10
1.2.1 Règle du produit . . . 10
1.2.2 Règle d'addition . . . 10
1.3 Factorielles . . . 12
1.4 Permutations . . . 14
1.5 Arrangements . . . 20
1.6 Combinaisons . . . 26
1.7 Coefficients binomiaux . . . 32
1.8 Triangle de Pascal . . . 34
1.9 Exercices . . . 36
1.10 Réponses . . . 44

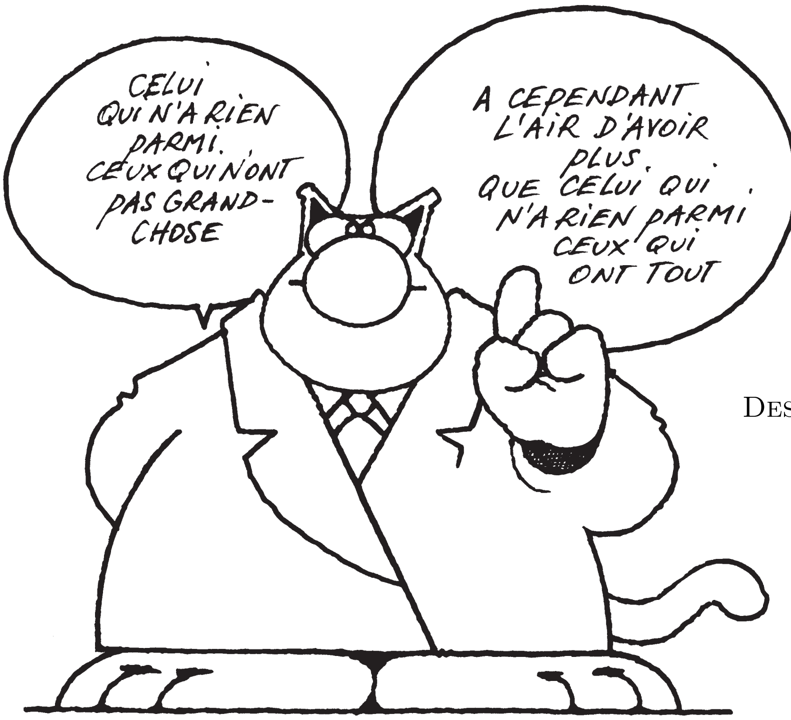
2 Probabilités 46

2.1 Notion intuitive de probabilité . . . 46
2.1.1 Phénomènes et expériences aléatoires . . . 46
2.1.2 Notion intuitive de probabilité . . . 50
2.2 Situation d'équiprobabilité . . . 54
2.3 Axiomes de probabilité . . . 60
2.4 Probabilité conditionnelle . . . 62
2.5 Evénements indépendants . . . 68
2.6 Expérience binomiale . . . 70
2.7 Exercices . . . 72
2.8 Réponses . . . 82

Avant-propos

Mesdames et messieurs, Je vous signale tout de suite que je vais parler pour ne rien dire. Oh ! je sais, vous pensez « S'il n'a rien à dire, il ferait mieux de se taire ! » Évidemment ! Mais c'est trop facile ! Vous voudriez que je fasse comme tous ceux qui n'ont rien à dire et qui le gardent pour eux ? Eh bien, non ! Mesdames et messieurs, moi, lorsque je n'ai rien à dire, je veux qu'on le sache ! Je veux en faire profiter les autres ! Et si, vous-mêmes, mesdames et messieurs, vous n'avez rien à dire, eh bien, on en parle, on en discute ! Je ne suis pas ennemi du colloque. Mais, me direz-vous, si on parle pour ne rien dire, de quoi allons-nous parler ? Eh bien, de rien ! De rien ! Car rien... ce n'est pas rien ! La preuve ? C'est qu'on peut le soustraire. Par exemple, rien moins rien égale moins que rien ! Si l'on peut trouver moins que rien, c'est que rien vaut déjà quelque chose ! On peut acheter quelque chose avec rien ! En le multipliant ! Une fois rien ... c'est rien ! Deux fois rien ... ce n'est pas beaucoup ! Mais trois fois rien !... Pour trois fois rien, on peut déjà acheter quelque chose... et pour pas cher ! Maintenant, si vous multipliez trois fois rien par trois fois rien : rien multiplié par rien égale rien, trois multiplié par trois égale neuf, cela fait donc rien de neuf !

Raymond Devos



Dessin ci-contre de Philippe Geluck

4e édition, La Tour-de-Peilz, juin 2020

Chapitre 1

Combinatoire

1.1 Exemples d'introduction

Exemple 1.1.

Pour un match, Rodger constate qu'il possède six tee-shirts, cinq shorts, huit paires de basket et quatre bandeaux différents. Combien de tenues différentes peut-il agencer si l'on admet qu'une tenue comporte un tee-shirt, un short, une paire de basket et un bandeau ?

Exemple 1.2.

24 équipes ont participé au tournoi final du championnat d'Europe 2012 de football. Si l'on admet que toutes les équipes peuvent terminer aux trois premières places, calculer le nombre de manières différentes d'attribuer ces trois places.

Exemple 1.3.

Une assemblée se compose de 60 filles et 40 garçons. On doit choisir un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier. La présidence doit être assumée par une fille, le secrétariat par un garçon et un élève ne peut exercer plus d'une charge à la fois.

De combien de manières peut-on le faire ?

Exemple 1.4.

Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres différents strictement inférieurs à 1'250 ?

Exemple 1.5.

Nicolas et Willy disputent un match de tennis à deux sets gagnants. Quel est le nombre de déroulements possibles du match ?

1.2 Principes généraux

1.2.1 Règle du produit

Soit une épreuve composée de n opérations $E_1, E_2, \cdots E_n$ successives qui sont **indépendantes les unes des autres** (le nombre d'issues possibles de E_{k+1} ne dépend pas des issues obtenues successivement dans $E_1, E_2, \cdots, E_k$).

Si l'opération E_k peut amener à m_k issues différentes, alors l'épreuve peut se réaliser de

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

manières différentes.

1.2.2 Règle d'addition

Soit une épreuve dont les issues peuvent être séparées en n sous-groupes d'issues $S_1, S_2, \ldots, S_n$ **incompatibles deux à deux** (sans possibilité commune).

Si le groupe S_k peut amener s_k issues différentes, alors l'épreuve peut se réaliser de

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

manières différentes.

Remarque 1.1.

1) La **règle du produit** est utilisée lorsque l'on compte le nombre de cas en parcourant l'arbre des issues possibles des branches principales jusqu'aux feuilles, les **branches d'un niveau donné devant avoir toutes le même nombre de sous-branches**.
2) La **règle d'addition** est utilisée lorsque l'on divise l'arbre des issues possibles en plusieurs sous–arbres et que l'on somme les nombres des issues des différents sous–arbres.
3) En général, la règle du produit correspond à la conjonction « et » et la règle d'addition à la conjonction « ou ».

Exemple 1.6.

Dans une classe comportant 12 garçons et 8 filles, on doit choisir une personne responsable du courrier et une autre personne déléguée de classe.

a) De combien de manières peut-on le faire ?

b) Parmi ces choix combien sont formés de deux élèves du même sexe ?

1.3 Factorielles

- $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \ldots$
- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$

Exemple 1.7.

Calculer.

a) $\dfrac{8!}{5!} =$

b) $\dfrac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{4!} =$

c) $\dfrac{100!}{98!} =$

d) $(n-3)! \cdot (n-2) =$

e) Ecrire $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ comme un produit de facteurs.

Remarque 1.2.

On calcule $n!$ avec la calculatrice en pressant sucessivement sur sur $\boxed{n}$, $\boxed{\text{2nd}}$, $\boxed{3}$ et $\boxed{=}$

1.4 Permutations

Par définition, une **Anagramme** d'un mot est un mot de même longueur qui mélange les lettres du mot donné.

Exemple 1.8.

Déterminer le nombre d'anagrammes de PARIS.

Exemple 1.9.

Déterminer le nombre d'anagrammes de ALMA.

Exemple 1.10.

Déterminer le nombre d'anagrammes de GENEVE.

Exemple 1.11.

Déterminer le nombre d'anagrammes de VILLENEUVE.

Formule des permutations

Placer n objets à n places	
Permutations simples	**Permutations avec répétitions**
Exemples de référence a) Classements possibles de 5 personnes. b) Anagrammes de GYMNASE.	**Exemples de référence** a) Manières d'aligner trois billes rouges et 4 billes vertes. b) Anagrammes de FILOZOFI.
Formule $P_n =$	**Formule** $\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_r) =$

1.5 Arrangements

Exemple 1.12.

Mélissa (3 ans) possède 3 animaux en peluche : un ours, un kangourou et une souris. Elle aime les placer sur un canapé à 5 places.

De combien de manières différentes peut-elle le faire ?

Exemple 1.13.

Une course de chevaux compte 15 partants.

Combien y a-t-il de possibilités de jouer un quarté (pronostiquer l'ordre d'arrivée des 4 premiers de la course) ?

Exemple 1.14.

Les plaques d'immatriculation d'un pays sont formées d'exactement quatre lettres de l'alphabet latin.

Combien de voitures peut-on immatriculer dans ce pays ?

Exemple 1.15.

Un bulletin de sport-toto compte 13 matches. Un joueur doit cocher « 1 » s'il pense que l'équipe jouant à domicile va gagner, « 2 » s'il pense que c'est l'autre qui va gagner et « x » s'il pense que les deux équipes vont faire match nul.

Combien de bulletins différents de sport-toto peut-on remplir ?

Formule des arrangements

Choix successifs (en tenant compte de l'ordre) de k éléments (distincts ou non) parmi n	
Arrangements simples	**Arrangements avec répétitions**
Exemple de référence Codes de quatre lettres différentes	**Exemple de référence** Codes de quatre lettres (non nécessairement distinctes)
Formule $A_k^n =$	**Formule** $\overline{A}_k^n =$

Remarque 1.3.

Avec la calculatrice, on calcule A_k^n à l'aide de la touche **nPr** soit en pressant successivement sur : $\boxed{n}$, $\boxed{\text{2nd}}$, $\boxed{9}$, $\boxed{k}$ et $\boxed{=}$.

1.6 Combinaisons

Exemple 1.16.

Dans une classe de 10 élèves, combien a-t-on de choix de 3 personnes pour organiser une fête ?

Exemple 1.17.

Combien de mains différentes (choix de 5 cartes) y a-t-il dans un jeu de poker ?

Exemple 1.18.

Une grille de loto compte 45 numéros. Un joueur doit en cocher 6.

Combien y a-t-il de façons de remplir cette grille ?

Exemple 1.19.

Un magasin propose des appareils de trois marques A, B et C. Un employé vend 4 appareils. Il doit indiquer à son patron dans son rapport, pour chaque marque, le nombre d'appareils vendus (par exemple, vente de 2 appareils A et 2 appareils C ou vente de 1 appareil A, 1 appareil B et 2 appareils C).

De combien de manières différentes l'employé peut-il faire son rapport ?

Exemple 1.20.

Un restaurateur propose 4 menus différents. Chaque soir, il note le nombre de menus de chaque sorte qui ont été servis. Aujourd'hui, 50 menus ont été commandés.

De combien de manières différentes les 4 sortes de menus peuvent-ils être répartis ?

Formule des combinaisons

Choix de k objets parmi n objets, les objets choisis ayant tous le même rôle, l'ordre de choix n'étant pas considéré	
Combinaisons simples (sans répétition)	**Combinaisons avec répétitions**
Exemple de référence Nombre de manières de choisir un groupe de 3 personnes pour la préparation d'un voyage d'étude parmi une classe de 20 élèves	**Exemple de référence** Nombre de possibilités lors du lancer simultané de 3 dés identiques
Formule $C_k^n =$	**Formule** $\overline{C}_k^n =$

Remarque 1.4.

1) $C_k^n = \dfrac{A_k^n}{k!}$
2) Avec la calculatrice, on calcule C_k^n à l'aide de la touche **nCr** soit en pressant successivement sur : $\boxed{n}$, $\boxed{\text{2nd}}$, $\boxed{8}$, $\boxed{k}$ et $\boxed{=}$.

1.7 Coefficients binomiaux

$C_k^n = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ est appelé un **coefficient binomial**, noté également $\dbinom{n}{k}$.

Propriétés des coefficients binomiaux

1) C_k^n représente le nombre de choix simultanés de k objets parmi n (choix d'un sous-groupe de k objets distincts sans tenir compte de l'ordre).

2)
$$C_k^n = C_{n-k}^n$$
A chaque choix simultané de k objets parmi n correspond le choix simultané des $n-k$ objets restants.

3)
$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$$
L'ensemble des choix simultanés de k objets parmi n objets $O_1, O_2, \ldots, O_n$ peut être divisé en deux groupes :
- Les C_k^{n-1} choix simultanés qui ne contiennent pas l'objet O_n (donc les choix de k objets parmi $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$)
- Les C_{k-1}^{n-1} choix simultanés qui contiennent l'objet O_n (donc les choix, outre de O_n, de $k-1$ objets parmi $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$)

Exemple 1.21.

Dans un groupe de 20 personnes dont Jacques, calculer le nombre de commissions de trois personnes contenant Jacques et le nombre de commissions de trois personnes ne contenant pas Jacques.

1.8 Triangle de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_0^1 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_0^3 & & C_1^3 & & C_2^3 & & C_3^3 & & \\
 & C_0^4 & & C_1^4 & & C_2^4 & & C_3^4 & & C_4^4 & \\
C_0^5 & & C_1^5 & & C_2^5 & & C_3^5 & & C_4^5 & & C_5^5
\end{array}
$$

binôme de Newton

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = a+b = 1 \cdot a + 1 \cdot b$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$
- $\ldots$
- $(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \cdots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^{n-k}b^k$

Exemple 1.22.

Développer.

$(3-2x)^5 =$

1.9 Exercices

1.1

a) Déterminer le nombre d'entiers positifs à quatre chiffres que l'on peut former avec les chiffres 1, 2, 3 et 4.

b) Parmi les entiers du point a), combien ont des chiffres distincts ?

c) Parmi les entiers du point a), combien sont-ils inférieurs à 2'200 ?

1.2

Une personne a quatre pantalons, six chemises et trois pulls. Combien de combinaisons différentes « pantalon, chemise et pull » peut-elle porter ? Combien de combinaisons différentes « pantalon, chemise et pull » peut-elle porter si chaque pull peut être mis avec exactement 2 pantalons et chaque chemise avec exactement deux pulls ?

1.3

Dans un certain état, les plaques d'immatriculation des automobiles commencent par une lettre de l'alphabet suivie de cinq chiffres (0, 1, 2, ... , 9). Calculer combien de plaques d'immatriculation sont réalisables si :

a) le premier chiffre suivant la lettre ne peut être 0 ;

b) la première lettre ne peut pas être O ou I et le premier chiffre ne peut pas être 0.

1.4

On place les douze tomes d'une encyclopédie sur un rayon de bibliothèque.

a) Combien existe-t-il de classements différents ?

b) Combien existe-t-il de classements où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre ?

c) Combien existe-t-il de classements où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

1.5

Un questionnaire comporte cinq questions à choix multiple ; pour chacune des questions, on propose trois réponses possibles.

a) Combien y a-t-il de manières de répondre au questionnaire si l'on doit cocher une seule réponse par question (il y a donc une seule réponse juste par question)

b) Combien y a-t-il de manières de répondre au questionnaire si l'on doit cocher une ou deux réponses par question (il peut donc y avoir une ou deux réponses justes par question).

1.6

Un **palindrome** est un nombre entier (ou un mot, voire une phrase) qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche sans le modifier ; par exemple, 21312 est un palindrome.

a) Déterminer le nombre de palindromes formés de 2 chiffres, 3 chiffres, 4 chiffres, 5 chiffres, 10 chiffres.

b) Le 20.02.2002 était une date palindrome ; le 11.02.2011 également. Quelles sont les deux dates palindromes suivantes ?

1.7

Dans l'alphabet Braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points qui sont disposés dans un tableau de trois lignes et deux colonnes. Chaque point peut être en relief ou non. Combien de signes distincts peut-on composer ?

1.8

On forme un nombre en utilisant les chiffres 2, 3, 5, 6, 7 ou 9 autant de fois que l'on veut.

a) Combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?

b) Parmi ceux-ci combien sont inférieurs à 550 ? pairs ? multiples de 5 ?

1.9

15 pilotes participent à une suite de grand prix ; on compte parmi eux 4 motos Yamaha, 9 motos Honda et 2 motos Suzuki.

a) Lors d'une course, combien y a-t-il de podiums (classements des 3 premiers) possibles ?

b) On s'intéresse aux vainqueurs des trois premières courses de la saison (un pilote peut gagner plusieurs courses).

   i) Combien y a-t-il de cas où ce sont trois pilotes de marques différentes qui gagnent les trois courses ?

   ii) Combien y a-t-il de cas où une course au moins est gagnée par un pilote Suzuki ?

1.10

De combien de façons différentes peut-on aligner 5 billes rouges, 2 billes bleues et 3 billes vertes ?

1.11

Combien d'anagrammes du mot TOULOUSE peut-on écrire si les consonnes doivent occuper les $1^{\text{ère}}$, $4^{\text{ème}}$ et $7^{\text{ème}}$ positions ?

1.12

On jette vingt fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

a) Combien y a-t-il de séquences différentes ?

b) Parmi celles-ci, combien contiennent exactement une fois pile ? quatre fois pile ? dix fois pile ? vingt fois pile ?

1.13

On dispose de 26 jetons gravés avec les lettres de l'alphabet. En tirant successivement au hasard trois jetons sans remise, on obtient un mot de trois lettres.

a) Quel est le nombre d'issues possibles ?

b) Dénombrer les événements suivants :

   i) On obtient un mot formé de trois consonnes.

   ii) On obtient un mot formé de trois voyelles.

   iii) On obtient le mot BAC.

   iv) On obtient une anagramme du mot BAC.

1.14

De combien de manières différentes peut-on aligner 5 dés à jouer de couleurs différentes ?

1.15

a) Le client d'une banque se rappelle que 2, 4, 7 et 9 sont les chiffres d'un code d'accès à quatre chiffres pour un distributeur automatique de billets. Si le client a oublié l'ordre des chiffres, calculer le nombre maximum d'essais nécessaires pour obtenir le code correct.

b) Même problème que la question 1 avec les chiffres 2, 4 et 7 en sachant que l'un de ces trois chiffres se trouve deux fois dans le code d'accès à quatre chiffres.

1.16

On considère les huit chiffres du nombre 73'293'372.

a) Combien de nombres peut-on écrire avec ces huit chiffres ?

b) Combien de nombres impairs peut-on écrire avec ces huit chiffres ?

c) Combien de nombres composés de trois chiffres 3 consécutifs peut-on former avec ces huit chiffres ?

1.17

On lance quatre fois de suite un dé tétraédrique (en forme de pyramide à base triangulaire) dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4. En notant les quatre chiffres successifs obtenus sur la face cachée du dé, on obtient un nombre à quatre chiffres.

a) Combien de nombres peut-on obtenir ?

b) Parmi les nombres obtenus, combien de nombres :

   i) comportent quatre chiffres différents ?

   ii) ne comportent aucun chiffre 2 ?

   iii) comportent exactement une fois le chiffre 1 ?

1.18

Un programme d'ordinateur est formé de bits. Un bit est soit « 0 » soit « 1 ». On considère un mot de longueur 15 bits.

a) Combien de mots différents peut-on construire ?

b) Combien de mots sont formés de sept fois « 0 » et huit fois « 1 » ?

c) Combien de mots commencent-ils et se terminent-ils par « 1 » ?

d) Combien de mots sont-ils composés de deux « 1 » exactement qui ne sont pas consécutifs (il y a donc treize « 0 »)

1.19

Pour remercier onze personnes d'un travail bénévole qu'elles viennent d'accomplir, le responsable souhaite offrir à chacun un disque ou un livre.

a) S'il dispose de cinq exemplaires d'un même disque et six exemplaires d'un même livre, de combien de manières peut-il effectuer son choix ?

b) Même question que 1 s'il dispose de quatre exemplaires d'un premier disque, deux exemplaires d'un deuxième disque et cinq exemplaires d'un même livre.

1.20

On considère un groupe de 10 randonneurs, dont Pierre, Paul et Jacques. Les 10 randonneurs marchent les uns derrière les autres (ils forment une colonne de marcheurs).

a) Combien y a-t-il de colonnes possibles ?

b) Dans combien de colonnes Pierre, Paul et Jacques se suivent-ils (dans un ordre quelconque) ?

c) Quel est le nombre de colonne pour lesquelles ni Pierre, ni Paul, ni Jacques ne sont en tête ou en queue ?

1.21

On doit choisir parmi une classe de 13 élèves des délégués pour la représenter dans le conseil de l'école.

a) On veut choisir deux délégués. Pour choisir ces deux représentants, on place dans une urne le nom des 13 élèves, l'on tire un premier nom, puis l'on choisit un deuxième nom parmi les noms restants. Combien de tirages sont possibles ?

   Déduire du nombre de tirages possibles le nombre de choix des deux délégués.

b) On veut choisir maintenant trois délégués. Pour choisir ces trois représentants, on tire de l'urne un premier nom, puis l'on choisit un deuxième nom parmi les noms restants et un troisième parmi les restants. Combien de tirages sont possibles ?

   Déduire du nombre de tirages possibles le nombre de choix des trois délégués.

c) En utilisant le lien entre le nombre de tirages et le nombre de choix de délégués vus aux points précédents, déterminer le nombre de choix de quatre délégués et le nombre de choix de cinq délégués.

1.22

A partir d'un groupe de 10 candidats formés de 6 hommes et 4 femmes, de combien de manières différentes peut-on choisir (chaque personne ne peut occuper qu'une seule fonction) :

a) Un comité formé d'un président, d'un caissier et d'un secrétaire ?

b) Un comité de trois personnes formé d'au moins une femme ?

c) Une commission de trois personnes comportant une personne qui préside la commission et formée d'exactement une femme ?

1.23

Douze personnes ont à leur disposition trois voitures de 6, 4 et 2 places.

a) De combien de manières différentes peut-on répartir ces douze personnes dans les trois voitures ?

b) De combien de manières différentes peut-on répartir ces douze personnes dans les trois voitures s'il y a quatre conducteurs parmi les douze personnes et qu'il faut choisir un conducteur par voiture (lorsqu'il y a deux conducteurs dans une voiture, le choix du conducteur doit être pris en compte) ?

1.24

a) De combien de manières peut-on partager un groupe de dix personnes en deux groupes, un de sept personnes, l'autre de 3 personnes ?

b) Même question avec un partage en trois groupes : un de cinq, un de deux et un de trois.

c) Même question avec deux groupes de cinq personnes.

1.25

12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

1.26

Un tiroir contient 4 couteaux, 7 fourchettes et 1 cuillère, mais ces ustensiles sont rangés dans le plus grand désordre.

a) On choisit successivement trois de ces services sans remettre le service choisi dans le tiroir. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :

   i) dans cet ordre la cuillère, une fourchette et un couteau ?

   ii) un couteau lors troisième tirage ?

   iii) la cuillère ?

   iv) au moins deux fourchettes ?

b) On saisit dans le tiroir, simultanément, trois des ustensiles. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :

   i) la cuillère, une fourchette et un couteau ;

   ii) trois fourchettes ou trois couteaux ;

   iii) la cuillère ?

1.27

Un électricien peu honnête désire vendre son stock de 30 ampoules dont 27 sont en parfait état et 3 sont défectueuses.

a) Vérifier que l'électricien peut réaliser 4'060 emballages contenant 3 ampoules.

b) Combien, parmi ces emballages, ne contiennent que 2 ampoules en parfait état ?

c) Combien, parmi ces emballages, contiennent au moins une ampoule défectueuse ?

L'électricien vend à un client deux emballages de 3 ampoules choisies au hasard parmi les 30 ampoules.

d) Combien a-t-il de possibilités de le faire ?

e) Parmi ces possibilités, combien comportent 6 ampoules en parfait état ?

1.28

Un paquet de 12 cartes est composé de 4 rois , 4 dames et 4 valets. On tire simultanément 5 cartes. Quel est le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :

a) 2 rois, 2 dames et 1 valet ?

b) Les quatre rois ?

c) Le roi de cœur ?

d) Au moins un roi rouge ?

1.29

De combien de manières peut-on asseoir 3 hommes et 3 femmes autour d'une table ronde, si (on ne tient compte que de la position relative des six personnes les unes par rapport aux autres).

a) Aucune restriction n'est imposée ?
b) 2 femmes particulières ne doivent pas être assises l'une à côté de l'autre ?
c) Chaque femme doit être placée entre deux hommes ?

1.30

De combien de manières peut-on asseoir 9 personnes dans une rangée de 9 sièges ?

1.31

On dispose d'une commode comportant treize tiroirs.

a) Combien y a-t-il de possibilités de répartir toutes les cartes d'un jeu de 36 cartes dans ces treize tiroirs ?
b) Même question si les 36 cartes sont toutes identiques.

1.32

On dispose de 5 outils identiques et de 7 casiers susceptibles de les recevoir. On suppose que chaque casier peut à la rigueur contenir les 5 outils. Déterminer :

a) Le nombre de façons de placer les 5 outils dans les 7 casiers de manière quelconque.
b) Le nombre de façons de placer les 5 outils dans les 7 casiers sans en avoir deux ou plus dans le même casier.

1.33

Lors du jeu YATZI, on lance simultanément cinq dés traditionnels d'aspects identiques.

a) Combien de résultats différents peut-on obtenir ?
b) Parmi ces résultats, combien a-t-on de FULL (trois mêmes et deux autre mêmes) ?
c) Parmi ces résultats, combien a-t-on de résultats pour lesquels seuls deux nombres apparaissent ?

1.34

Au kiosque à fleurs, on ne vend que des oeillets, des roses, des marguerites et des lys. Chaque samedi, Eugène achète pour sa femme un bouquet de 7 fleurs. Il fait en sorte que ce bouquet soit différent de tous les précédents. Pendant combien de semaines Eugène peut-il se rendre dans ce kiosque ?

1.35

Un film est projeté 3 soirs de suite. Si 15 personnes décident d'aller voir ce film (chacune une fois), combien de possibilités peut-on envisager

a) Si chaque personne choisit indépendamment des autres le soir qui lui convient ?
b) Si chaque soir exactement 5 de ces personnes vont voir le film ?

Exercices de révision

1.36

Calculer le nombre de palindromes (mots dont l'ordre des lettres est le même quand on le lit de gauche à droite ou de droite à gauche) à 5 chiffres qui contiennent :

a) Exactement une fois le chiffre 0.

b) Aucun chiffre 1.

c) Au moins deux fois le chiffre 0.

d) Au moins deux fois le chiffre 1.

1.37

On compose un numéro de quatre chiffres en tapant successivement quatre fois de suite sur le clavier d'un téléphone (formé des touches numérotées de 0 à 9).

a) Combien de numéros ne comportent-ils aucun 8 et aucun 9 ?

b) Combien de numéros sont-ils formés de deux 9 exactement ?

c) Combien de numéros sont-ils formés de quatre chiffres distincts, dont trois impairs et un pair ?

d) Combien de numéros sont-ils formés de (exactement) deux chiffres différents ?

1.38

Une équipe sportive d'un gymnase est composée de 12 garçons et de 18 filles. Parmi les garçons, 10 étudient l'anglais, alors que parmi les filles, 14 étudient l'anglais. On offre à deux élèves de l'équipe un voyage gratuit en Angleterre pour assister à la finale du tournoi de Wimbledon en choisissant simultanément deux personnes dans l'équipe. Combien de choix :

a) Peut-on faire en tout ?

b) Comportent deux élèves de même sexe qui étudient les deux l'anglais ?

c) Comportent deux élèves dont l'un au moins étudie l'anglais ?

d) Comportent deux élèves qui étudient l'anglais dont au moins un garçon ?

1.39

Chaque jour de la semaine (7 jours), un amoureux offre une fleur à sa belle. Il achète cette fleur dans un magasin qui ne vend que des iris, des oeillets et des roses. Il fait en sorte que chaque semaine soit différente de toutes les précédentes.

a) Pendant combien de semaines ce Romeo peut-il acheter des fleurs dans ce magasin ?

b) Combien y aura-t-il de semaines au cours desquelles la jeune fille recevra :

   i) au moins une rose ?

   ii) exactement 3 roses ?

   iii) 3 roses, 2 iris et 2 oeillets ?

1.40

On a posé la question suivante dans une classe : « de combien de manières différentes peut-on placer 5 tours sur un échiquier (64 cases) de manière à ce qu'elles ne s'attaquent pas mutuellement ? » . Les réponses (avec le raisonnement correspondant) ont été les suivantes :

a) On choisit 5 colonnes, puis 5 lignes, soit $C_5^8 \cdot C_5^8 = 3'136$.

b) On choisit 5 lignes : C_5^8. Il y a $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ possibilités de disposer les tours sur les 5 lignes choisies. Donc $C_5^8 \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) = 376'320$.

c) On met une tour sur l'échiquier : 64 possibilités ; on place ensuite une seconde tour : 49 possibilités et ainsi de suite : $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 = 45'158'400$.

d) Pour mettre 8 tours sur l'échiquier, il y a 8! possibilités ; on choisit 5 tours dans chacune de ces positions : $8! \cdot C_5^8 = 2'257'920$.

Ces raisonnements sont-ils corrects ? Modifier légèrement les raisonnements non corrects de sorte qu'ils deviennent corrects. Vérifier que les quatre raisonnements fournissent la même réponse.

1.41

a) Neuf athlètes sont engagés dans une compétition internationale de gymnastique. Il y a trois Russes, quatre Chinois et deux Bulgares. Le classement publié n'indique que la nationalité des athlètes, sans leur nom.

   Combien y a-t-il de classements possibles si la Russie a un concurrent placé dans les trois meilleurs et deux dans les trois derniers ?

b) Dans un groupe de 20 personnes, on organise un loto comportant cinq séries ; lors de chaque série, le vainqueur gagne 100 francs.

   De combien de manières les 500 francs de prix peuvent-ils être répartis entre les personnes du groupe (une personne peut gagner plusieurs fois 100 francs) ?

c) Douze antennes indiscernables les unes des autres sont alignées. Quatre d'entre elles sont défectueuses. Deux antennes défectueuses ne doivent pas être voisines sous peine d'interrompre les communications.

   Combien existe-t-il de configurations permettant la communication ?

1.10 Réponses

1.1 a) 256 ; b) 24 ; c) 80.

1.2 72 et 24.

1.3 a) $2'340'000$; b) $2'160'000$.

1.4 a) $479'001'600$; b) $39'916'800$; c) $79'833'600$.

1.5 a) 243 ; b) $7'776$.

1.6 a) 9 ; 90 ; 90 ; 900 ; $90'000$; b) 21 février 2012 (21022012) et 2 février 2020 (02022020).

1.7 64

1.8 a) 216 ; b) 84 ; 72 ; 36.

1.9 a) $2'730$; b) i) 432 ; ii) $1'178$.

1.10 $2'520$

1.11 180

1.12 a) $1'048'576$; b) 20 ; $4'845$; $184'756$; 1.

1.13 a) $15'600$; b) i) $6'840$; ii) 120 ; iii) 1 ; iv) 6.

1.14 $933'120$

1.15 a) 24 ; b) 36.

1.16 a) $1'680$; b) $1'260$; c) 180.

1.17 a) 256 ; b) i) 24 ; ii) 81 ; iii) 108.

1.18 a) $32'768$; b) $6'435$; c) $8'192$; d) 91.

1.19 a) 462 ; b) $6'930$.

1.20 a) $3'628'800$; b) $241'920$; c) $1'693'440$.

1.21 a) 78 ; $156 = 2 \cdot 78$; b) 286 ; 1’716 $= 6 \cdot 286$; c) 715 ; 1’287.

1.22 a) 720 ; b) 100 ; c) 180.

1.23 a) $13'860$; b) $12'096$.

1.24 a) 120 ; b) $2'520$; c) 126.

1.25 66

1.26 a) i) 28 ; ii) 440 ; iii) 330 ; iv) 840 ; b) i) 28 ; ii) 39 ; iii) 55.

1.27 a) 4'060 ; b) 1'053 ; c) 1'135 ; d) 5'937'750 ; e) 2'960'100.

1.28 a) 144 ; b) 8 ; c) 330 ; d) 540.

1.29 a) 120 ; b) 72 ; c) 12

1.30 $362'880$

1.31 a) $13^{36} \cong 1.26462 \cdot 10^{40}$ b) $69'668'534'468$.

1.32 a) 462 ; b) 21.

1.33 a) 252 ; b) 30 ; c) 60.

1.34 120

1.35 a) $14'348'907$; b) $756'756$

1.36 a) 81 ; b) 648 ; c) 90 ; d) 180

1.37 a) $4'096$; b) 486 ; c) $1'200$; d) 630.

1.38 a) 435 ; b) 136 ; c) 420 ; d) 185.

1.39 a) 2187 ; b)1) 2059 ; ii) 560 ; iii) 210

1.40 B correct.

1.41 a) 135 ; b) $42'504$; 3) 126

Chapitre 2

Probabilités

2.1 Notion intuitive de probabilité

2.1.1 Phénomènes et expériences aléatoires

- **Phénomène aléatoire** : phénomène qui, lorsqu'il est observé dans des conditions déterminées, ne conduit pas toujours au même résultat
- **Expérience aléatoire** : expérience faisant intervenir un phénomène aléatoire dont on peut déterminer au préalable l'ensemble des résultats possibles

Exemple 2.1.

a) *Lancer d'un dé*
b) *Lancer de deux pièces de monnaie*
c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*

Univers

- **Univers** : ensemble U de tous les cas (ou issues) possibles
- On note $|U|$ le nombre d'issues contenues dans U

Exemple 2.2.

Décrire l'univers U des expériences aléatoires suivantes :

a) *Lancer d'un dé*

b) *Lancer de deux pièces de monnaie*

c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*

Evénements

- Un **événement** A est un **sous-ensemble de cas possibles**, donc un sous-ensemble de U.
- L'événement est dit **élémentaire** s'il n'est formé que d'une **seule issue**.
- U est l'événement **certain**
- $\emptyset$ est l'événement **impossible**
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** s'ils n'ont aucune issue commune, donc si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 2.3.

a) *Lancer d'un dé*
Soit l'événement A : *obtenir un nombre premier*
Enumérer A.

b) *Lancer de deux pièces de monnaie*
Soit l'événement B : *obtenir au moins une pièce avec un côté face*
Enumérer B.

c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*
Soit l'événement C : *avoir une durée de vie supérieure à 5 ans*
Enumérer C.

2.1.2 Notion intuitive de probabilité

- La probabilité d'un événement est un nombre sans unité compris entre 0 et 1 (100%) exprimant les « chances » que l'événement se réalise.

Exemple 2.4.

a) *Lancer d'un dé équilibré*
Quelle est la probabilité de l'événement A : *obtenir un nombre premier* ?

b) *Lancer de deux pièces de monnaie équilibrées*
Quelle est la probabilité de l'événement B : *obtenir au moins une pièce avec un côté face* ?

c) *Durée de vie (en mois) d'un smartphone*
Quelle est la probabilité de l'événement C : *avoir une durée de vie supérieure à 5 ans* ?

2.2 Situation d'équiprobabilité

- On se trouve dans une **situation d'équiprobabilité** si l'on peut décrire l'expérience aléatoire à l'aide d'un univers U dont tous les cas ont les mêmes « chances » de se réaliser.

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A vaut :

$$\boxed{p(A) \quad = \quad \frac{\text{nombre de cas contenus dans } A}{\text{nombre de cas contenus dans } U} \quad = \quad \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}}$$

Exemple 2.5.

On tire au hasard deux cartes d'un jeu de 36 cartes.

Quelles sont les probabilités des événements suivants :

A : *tirer deux cartes noires*

B : *tirer une figure (valets, dames, rois) exactement*

Propriétés dans une situation d'équiprobabilité

Soient A et B deux événements.

1) **Valeur d'une probabilité**

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

En particulier, $p(U) = 1$, où U est l'univers des cas possibles

2) **Probabilité d'un événement contraire**

Soit $\overline{A} = U - A$ l'événement comportant les cas non compris dans l'événement A.

$$p(A) = 1 - p\left(\overline{A}\right)$$

3) **Probabilité d'une union d'événements**
Cas particulier : Si A et B sont des événements **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Cas général : Si A et B sont des événements quelconques

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Exemple 2.6.

On tire au hasard deux boules dans une urne contenant 5 boules rouges et 7 boules blanches indistinguables au toucher. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : *Tirer au moins une boule rouge*

B : *Tirer deux boules de même couleur*

Calculer ensuite $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$, puis vérifier la règle de la probabilité de l'union de deux événements.

2.3 Axiomes de probabilité

Soit une expérience aléatoire d'univers U.

A chaque événement A, une probabilité associe un nombre réel $p(A)$ satisfaisant les axiomes suivants (dits **axiomes de Kolmogorov**) :

1) $p(A) \geq 0$

2) $p(U) = 1$

3) Si A et B sont **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$)
alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriétés d'une probabilité

On retrouve les propriétés vues dans une situation d'équiprobabilité

1) **Valeur de la probabilité d'un événement**
$0 \leq p(A) \leq 1$

2) **Probabilité de l'événement contraire**
$p(A) + p(\overline{A}) = 1$
$p(A) = 1 - p(\overline{A})$

3) **Probabilité d'une union de deux événements**
Pour deux événements A et B quelconques
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemple 2.7.

Une course de chevaux compte trois partants : A, B et C.

Les pronostiqueurs estiment que A a deux fois plus de chances de gagner que B et que B a trois fois plus de chances de gagner que C.

Selon les pronostiqueurs, quelle est la probabilité que C gagne ?

2.4 Probabilité conditionnelle

Exemple 2.8.

On considère un échantillon de 1500 élèves, dont 900 filles, qui ont effectué des études gymnasiales (avec obtention ou non d'une maturité)

On constate que 80 % des garçons ont obtenu leur maturité en trois ans, alors que cette proportion est de 90 % chez les filles.

a) On choisit un élève au hasard
Quelle est la probabilité que ce soit un élève qui a obtenu sa maturité en trois ans ?

Quelle est la probabilité que ce soit un garçon qui a obtenu sa maturité en trois ans ?

b) On a choisi un élève qui a obtenu sa maturité en trois ans.
Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Probabilité conditionnelle de « A sachant B »

Soient A et B deux événements avec $p(B) \neq 0$.

- La **probabilité conditionnelle de *A* sachant que *B* est réalisé** (plus simplement, probabilité de A sachant B), notée $p(A\,/\,B)$, est définie par :

$$p(A\,/\,B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Remarque 2.1.

Cas particulier : si U est formé d'**issues équiprobables**, on a :

$$p(A\,/\,B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\text{cas communs à } A \text{ et à } B}{\text{cas contenus dans } B}$$

Exemple 2.9.

Nicolas a deux enfants. Je sais qu'il a au moins un garçon.

Quelle est la probabilité qu'il ait deux garçons ?

Exemple 2.10.

Lors du lancer de deux dés équilibrés, calculer la probabilité que la somme des deux dés valent 8 sachant que les deux dés indiquent des numéros différents.

Propriétés d'une probabilité conditionnelle

1) La probabilité conditionnelle vérifie les propriétés d'une probabilité non conditionnelle ; en particulier :
   - $0 \leq p(A\,/\,B) \leq 1$
   - $p(A\,/\,B) = 1 - p(\overline{A}\,/\,B)$
2) **Formule de Bayes**

   $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B\,/\,A) = p(B) \cdot p(A\,/\,B)$

Exemple 2.11.

Une urne contient 2 boules noires et 3 boules rouges. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge :

a) En utilisant l'équiprobabilité.
b) En utilisant un arbre.

Exemple 2.12.

Une usine fabrique des pièces mécaniques. Chacune des pièces subit un contrôle de qualité qui décide d'accepter ou d'éliminer la pièce contrôlée. Lors de la fabrication, la probabilité qu'une pièce soit de bonne qualité est de 90 % ; de plus, lors du contrôle de qualité, la probabilité d'une erreur de jugement (pièce de bonne qualité éliminée ou pièce défectueuse acceptée) est de 5 % quelle que soit la pièce contrôlée.

Pour une pièce prise au hasard dans la production de la fabrique, calculer la probabilité qu'elle soit de bonne qualité si elle a été acceptée lors du contrôle.

2.5 Evénements indépendants

Un événement A est dit **indépendant** d'un événement B si le fait de savoir que l'événement B est réalisé ne modifie pas la probabilité que A se réalise :

A est indépendant de B si $p(A\,/\,B) = p(A)$

Propriété de l'indépendance

- Si A est indépendant de B, alors B est indépendant de A
- A et B indépendants $\iff$ $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Exemple 2.13.

On tire une carte dans un jeu de poker.

a) Soient les événements suivants :
A : *obtenir un as*
C : *obtenir un cœur*
Les événements A et C sont-ils indépendants ?

b) Soient les événements suivants :
R : *obtenir un roi*
F : *obtenir une figure (valet, dame ou roi)*
Les événements R et F sont-ils indépendants ?

2.6 Expérience binomiale

Exemple 2.14.

On lance un dé équilibré 8 fois de suite.

a) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six

b) Calculer la probabilité d'obtenir 5 fois six exactement.

Expérience binomiale

On répète n fois, dans les mêmes conditions et de manière indépendante, une épreuve à deux issues (notées 0 et 1) dont la probabilité d'obtenir 1 vaut p .

Probabilité d'obtenir k fois « 1 » (et donc $n - k$ fois « 0 »)

$$p(k \text{ fois « 1 »}) = C_k^n \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

où C_k^n est le coefficient binomial $\dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Remarque 2.2.

Le coefficient binomial C_k^n compte dans l'arbre d'une expérience binomiale le nombre de branches qui comptent k fois « 1 » et $(n-k)$ fois « 0 »

2.7 Exercices

2.1

Une école de 200 élèves compte 80 filles, 50 porteurs de lunettes dont 30 filles.

a) On choisit une fille au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle porte des lunettes.

b) On choisit un porteur de lunettes au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

c) On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon sans lunettes ?

d) On choisit deux élèves au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une fille sans lunettes et un garçon à lunettes ?

2.2

Pour connaître les intentions de vote d'une population, on a interrogé 100 personnes et on leur a demandé pour lequel des partis A, B et C elles voteraient. On regroupe les résultats dans le tableau suivant :

	A	B	C
Hommes	13	21	19
Femmes	20	8	19

a) On choisit au hasard une personne dans ce groupe. Quelle est la probabilité que la personne vote pour le parti A ?

b) On choisit au hasard une femme. Quelle est la probabilité qu'elle vote pour le parti A ?

c) On choisit au hasard un homme. Quelle est la probabilité qu'il vote pour le parti B ou C ?

d) On choisit au hasard une personne qui vote pour le parti B. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

e) On choisit au hasard une femme. Quelle est la probabilité qu'elle ne vote pas pour le parti B ?

f) On choisit au hasard un personne qui ne vote pas pour le parti A. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?

2.3

Un sac contient trois objets rouges, quatre objets bleus et cinq objets jaunes. On tire simultanément trois objets au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : Les trois objets tirés sont jaunes,
B : Il y a un objet de chaque couleur ;
C : Aucun objet n'est rouge ;
D : Il y a au moins un objet rouge ;
E : Il y a au moins un objet bleu ;
F : Il y a au plus un objet bleu.

2.4

On tire simultanément au hasard 8 cartes d'un jeu de 32 cartes (on a retiré les six d'un jeu de 36 cartes). Calculer la probabilité des événements :
A : Parmi les 8 cartes, il y a l'as de cœur ;
B : Il n'y a aucun as parmi les 8 cartes ;
C : Il y a au moins un as parmi les 8 cartes.

2.5

Un paquet de 12 cartes est composé de 4 rois , 4 dames et 4 valets. On tire au hasard simultanément 5 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : On tire 2 rois, 2 dames et 1 valet ;
B : On tire les quatre rois ;
C : Le roi de cœur se trouve dans le tirage.

2.6

On obtient un nombre de trois chiffres en jetant un dé équilibré trois fois de suite.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : On obtient un nombre formé de trois chiffres différents ;
B : On obtient un nombre qui se termine par 6 ;
C : On obtient un nombre qui contient exactement un chiffre 6 ;
D : On obtient un nombre dont la somme des chiffres vaut 15 ;
E : On obtient un nombre dont la somme des chiffres vaut au moins 15.

2.7

On sort d'un jeu les quatre as et les quatre rois. On tire ensuite au hasard simultanément deux cartes parmi ces huit cartes.

a) Quelle probabilité a-t-on de tirer deux as ?
b) Quelle probabilité a-t-on de tirer deux as rouges ?
c) Quelle probabilité a-t-on de tirer un as au moins ?
d) Quelle probabilité a-t-on de tirer un roi et un as rouge ?
e) Quelle probabilité a-t-on de tirer deux cartes de couleurs différentes ?

2.8

On dispose d'un sac contenant 10 lettres différentes, soit 6 consonnes et 4 voyelles. Pour former un mot de quatre lettres, on tire successivement quatre fois une lettre du sac en remettant dans le sac à chaque fois la lettre tirée.
Calculer la probabilité d'obtenir un mot qui :

a) ne contient aucune voyelle ;
b) contient au moins une consonne ;
c) contient deux consonnes et deux voyelles ;
d) contient au moins une voyelle et au moins une consonne.

2.9

On lance un dé pipé à six faces. Les nombres pairs ont la même probabilité d'apparition. Les nombres impairs ont la même probabilité d'apparition. La probabilité d'obtenir l'un des nombres pairs est égale aux 75% de celle d'obtenir l'un des nombres impairs.
Quelle est la probabilité des événements :
A : On obtient 1 ?
B : On obtient 1 ou 6 ?

2.10

Les 8 faces d'un dé octaédrique sont numérotées de 1 à 8 et on a observé que :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) \text{ et } p(6) = p(7) = p(8) = 2 \cdot p(1)$$

On lance ce dé irrégulier. Quelle est la probabilité des événements :
A : On obtient 2 ?
B : On obtient 8 ?
C : On obtient l'un des chiffres 3 , 5 ou 8 ?

2.11

Arnaud, Buck et Charles participent à une course de natation. Arnaud et Buck ont la même probabilité de gagner et chacun d'eux a deux fois plus de chances de gagner que Charles. Calculer la probabilité pour que Buck ou Charles gagne la course.

2.12

En 1983, la Suisse avait une population de 6'410'000 habitants dont 947'000 étrangers. La même année les tribunaux prononcent 22'055 condamnations dont 6'615 concernaient des étrangers. On tire au hasard une personne dans la population. Quelle probabilité y a-t-il que la personne choisie :

a) ait été condamnée si elle est suisse ?
b) ait été condamnée si elle est étrangère ?
c) soit suisse et ait été condamnée ?
d) soit étrangère et ait été condamnée ?
e) soit suisse si l'on sait qu'elle a été condamnée ?
f) soit étrangère si l'on sait qu'elle a été condamnée ?

2.13

Un urne contient 10 boules blanches et 7 noires. On en extrait simultanément 2 boules.

a) Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes ?
b) Quelle est la probabilité que les deux boules soient blanches ?
c) Quelle est la probabilité que les deux boules soient noires ?
d) Les deux boules tirées sont de même couleur ; quelle est la probabilité qu'elles soient toutes les deux noires ?

2.14

On répartit sur les faces d'un dé vert et d'un dé rouge (les deux dés sont parfaitement équilibrés) les numéros de 1 à 12 de la manière suivante :

- sur chacune des 6 faces du dé vert, on a noté un des numéros suivants : 1, 3, 7, 8, 10, 11 ;
- sur chacune des 6 faces du dé rouge, on a noté un des numéros suivants : 2, 4, 5, 6, 9, 12.

a) On lance les deux dés simultanément. Calculer la probabilité :
   i) d'obtenir deux nombres pairs ;
   ii) d'obtenir au moins un nombre pair ;
   iii) d'obtenir un nombre pair et un nombre impair.

b) Jean décide de jouer avec le dé vert et Pierre avec le dé rouge. Jean et Pierre lancent chacun leur dé ; le joueur qui a obtenu le plus grand numéro a gagné la partie.
   i) Calculer la probabilité que Jean gagne la partie.
   ii) Sachant que Jean a gagné la partie, calculer la probabilité qu'il ait obtenu un 10.

2.15

Les billets d'une loterie sont émis par séries de dix. Chaque série contient trois billets gagnants.

a) Une personne achète trois billets d'une même série. Quelle est la probabilité que l'un des billets au moins soit gagnant ?

b) A présent, chaque billet acheté provient d'une série différente de dix billets. On achète trois billets. Quelle est la probabilité que l'un des trois billets au moins soit gagnant ? Quelle est la probabilité qu'un billet exactement soit gagnant ?

c) On signale qu'un billet coûte 2 francs. Si le billet est gagnant, on obtient un prix de 5 francs. On se propose de jouer de la façon suivante sur une même série de dix billets : on achète un billet ; s'il est perdant, on arrête. S'il est gagnant, on en rachète un et ainsi de suite (le joueur sait qu'il n'y a que 3 billets gagnants dans une série de 10).
   i) Décrire l'ensemble des événements à l'aide d'un arbre avec les probabilités correspondantes.
   ii) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 francs de plus après avoir joué qu'avant ?

2.16

On dispose d'un paquet de douze cartes contenant les quatre valets, les quatre dames et les quatre rois (les figures) de pique, carreau, trèfle et cœur (les familles). On tire simultanément trois cartes de ce paquet. Calculer la probabilité d'obtenir :

a) trois valets ;

b) trois figures différentes ;

c) trois cartes de trois familles différentes ;

d) trois rois sachant que l'on a tiré trois mêmes figures ;

e) la dame de pique sachant que l'on a tiré deux rois exactement.

2.17

Une boîte A contient 8 pièces dont 3 sont défectueuses et une boîte B en contient 5 dont 2 sont défectueuses. On tire au hasard une pièce dans chaque boîte.

a) Calculer la probabilité qu'aucune des pièces ne soit défectueuse.

b) Calculer la probabilité qu'une seule pièce soit défectueuse.

c) Si une seule pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de la boîte A ?

2.18

Trois marques A, B et C de biberons se partagent le marché avec des parts respectives de 43 %, 34 % et 23 %. Chaque marque propose des modèles avec tétine simple (S) ou à trois vitesses (V) : 35 % des tétines de la marque A sont simples, ainsi que 25 % de la marque B et 47 % de la marque C. Un jeune père paniqué achète au hasard un biberon. Il constate que ce biberon a une tétine simple. Quelle est la probabilité qu'il soit de marque C ?

2.19

Deux urnes notées U_1 et U_2 contiennent 3 boules rouges, 2 boules vertes pour U_1 et 1 boule rouge, 1 boule verte pour U_2.
On tire une boule de U_1, puis on met les boules restantes dans U_2. On tire alors une boule de U_2. Calculer la probabilité :

a) que cette boule soit rouge,

b) que cette boule soit rouge sachant que la première boule tirée était rouge,

c) que la première boule tirée ait été rouge si, au second tirage, on a tiré une boule rouge.

2.20

Dans un atelier, il y a trois machines. Pendant une journée, la première tombe en panne avec une probabilité de 5 %, la deuxième avec une probabilité de 10 % et la troisième avec une probabilité de 15 %. Quelle est la probabilité :

a) d'avoir au cours d'une journée exactement une machine en panne ?

b) d'avoir au cours d'une journée exactement deux machines en panne ?

c) de n'avoir au cours d'une journée aucune machine en panne ?

2.21

Pour faire une enquête dans un quartier d'une ville, on envoie par la poste à 10 personnes un questionnaire à remplir.
On estime à 30 % la probabilité que le questionnaire soit retourné. Calculer la probabilité de recevoir en retour :

a) 10 questionnaires ;

b) au plus un questionnaire ;

c) plus de 7 questionnaires.

2.22

Marco est un joueur de basket-ball qui réussit 90 % de ses lancers francs.
Calculer la probabilité qu'il réussisse :

a) ses 10 prochains lancers francs ;

b) exactement 5 des 10 prochains lancers francs ;

c) au moins 7 de ses 10 prochains lancers francs.

2.23

On suppose qu'un réacteur d'avion tombe en panne avec une probabilité $1-p$ avec $0 < p < 1$ et que les réacteurs d'un avion sont indépendants les uns des autres.
On considère qu'un avion peut continuer à voler lorsqu'une majorité de ses réacteurs fonctionnent.

a) Déterminer, en fonction de p, la probabilité qu'un avion à trois réacteurs puisse voler.

b) Même question avec cinq réacteurs.

c) Pour quelles valeurs de p un avion à cinq réacteurs est-il plus sûr qu'un avion à trois réacteurs ?

2.24

Un test sanguin assure avec une fiabilité de 95 % la détection d'une certaine maladie lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, le test indique aussi un résultat positif pour 1 % des personnes saines. Si 0,5 % de la population porte effectivement cette maladie, quelle est la probabilité qu'une personne soit malade lorsque le test est positif ?

2.25

Dans un village de 150 habitants, 100 ont été vaccinés contre la grippe. Lors d'une épidémie, on constate que 10 personnes ont été malades alors qu'elles avaient été vaccinées et que 10 autres ont aussi été malades alors qu'elles n'avaient pas été vaccinées.

a) Calculer la probabilité qu'une personne vaccinée attrappe la grippe.

b) Calculer la probabilité qu'un habitant de ce village attrappe la grippe.

c) Calculer la probabilité qu'une personne ait été vaccinée si elle a la grippe.

2.26

a) Chez un marchand de fruits, un avocat sur 10 en moyenne est pourri. Une cliente en achète 10.

   i) Calculer la probabilité qu'elle ait au moins un avocat pourri.

   ii) Calculer la probabilité qu'elle ait exactement un avocat pourri.

b) Les avocats de ce marchand proviennent de trois pays A, B et C à raison de respectivement 50 %, 30 % et 20 %. Il constate que 1 % des avocats fournis par le pays A sont pourris, 5 % pour B et 10 % pour C. Une cliente achète un avocat.

   i) Calculer la probabilité qu'il soit pourri.

   ii) Il est pourri. Calculer la probabilité qu'il provienne du pays A.

2.27

Trois machines A, B et C produisent respectivement 50 %, 30 % et 20 % des pièces d'une usine. Chacune de ces machines fabrique respectivement 3 %, 4 % et 5 % de pièces défectueuses. On tire au hasard une pièce fabriquée par cette usine : elle est défectueuse. Calculer la probabilité que cette pièce ait été produite par la machine A.

2.28

Lors d'un test d'adresse, on dispose de 3 fléchettes que l'on doit lancer en direction d'une cible. On réussit le test (et on arrête de lancer) dès qu'une fléchette a atteint le centre de la cible ou que deux fléchettes ont atteint la cible. Une personne se présente au test. Pour celle-ci, on estime la probabilité d'atteindre le centre de la cible avec une fléchette à 0,25 alors que la probabilité d'atteindre la cible ailleurs qu'au centre est estimée à 0,50 (la probabilité de rater la cible est donc estimée à 0,25).

a) Quelle est la probabilité de réussir le test ?

b) Si cette personne réussit le test, quelle est la probabilité qu'une seule fléchette ait atteint la cible ?

c) Trois personnes pour lesquelles on estime les probabilités comme pour celle ci-dessus se présentent au test. Quelle est la probabilité

   i) qu'aucune d'entre elles ne le réussisse ?

   ii) qu'au moins l'une d'entre elles ne le réussisse pas ?

Exercices de révision

2.29

[Problème de baccalauréat, Gymnase du Bugnon, 2014]
Un boulanger fait une étude sur sa clientèle. Il constate que 30 % de ses clients sont des enfants, 20 % des adolescents, le reste étant composé d'adultes.
Un dixième des adolescents qui entrent dans la boulangerie repartent avec une baguette à la main. La proportion d'acheteurs de baguette est, quant à elle, de 80 % chez les adultes et de 65 % chez les enfants.

a) Etablir l'arbre représentant la situation.

b) Un client entre dans la boulangerie. Montrer que la probabilité qu'il achète une baguette est de 61,5 % .

c) Un client est reparti sans acheter de baguette. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un adolescent ?

d) Un groupe de sept enfants entre dans la boulangerie. Quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux achètent une baguette ?

e) Combien de clients la boulangerie doit-elle accueillir pour que la probabilité qu'au moins une baguette se vende soit supérieure à 99,9 % ?

Le boulanger s'intéresse de plus près aux achats des adultes qui constituent une grande part de sa clientèle. Il constate que les deux articles les plus achetés par ces derniers sont les baguettes et les croissants. Il estime que 56 % des adultes repartent avec à la fois une baguette et un croissant, alors que seulement 3 % des adultes repartent sans croissant, ni baguette.

f) Etablir le diagramme de Venn représentant la situation.

g) Quelle est la probabilité qu'un adulte achète un croissant sans acheter de baguette ?

h) Quelle est la probabilité qu'un adulte achète une baguette, sachant qu'il achète un croissant ?

2.30

[Problème de baccalauréat, Gymnase du Bugnon, 2013]
Un client désirant louer une voiture auprès de la société Bonoto doit formuler sa requête en précisant deux critères :

- la puissance du véhicule : deux catégories possibles A ou B ;
- l'équipement : avec climatisation ou sans climatisation.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de clients a permis d'établir que 60 % des clients louent une voiture de catégorie A et que, parmi eux, 20 % choisissent la climatisation. Par ailleurs, 24 % des clients optent pour une voiture de catégorie B climatisée.

a) Etablir l'arbre traduisant la situation.

b) Un client loue une voiture de catégorie B. Quelle est la probabilité qu'elle soit climatisée ?

On choisit un client au hasard :

c) Montrer que la probabilité qu'il choisisse une voiture climatisée est égale à 36 %.

d) Quelle est la probabilité que la voiture choisie soit de catégorie A sachant qu'elle est climatisée ?

On choisit à présent au hasard trois clients simultanément :

e) Déterminer la probabilité que les trois clients aient loué une voiture climatisée.

f) Déterminer la probabilité que deux clients exactement aient choisi une voiture climatisée.

g) Déterminer la probabilité qu'au moins un client ait loué une voiture climatisée.

2.31

[Problème de baccalauréat, Gymnase de Chamblandes, 2014]
Les parties A et B sont indépendantes.
Une urne contient 6 boules vertes numérotées de 1 à 6, 3 boules rouges numérotées de 1 à 3 et 7 boules bleues numérotées de 1 à 7.

A) On tire successivement trois boules de cette urne, sans remise.

   a) Combien y a-t-il de tirages ordonnés contenant 3 boules de la même couleur ?

   b) Combien de tirages ordonnés donnent une somme de 4, en additionnant la valeur des trois boules ?

   c) Combien de tirages ordonnés donnent une somme supérieure ou égale à 5, en additionnant la valeur des trois boules ?

B) Toutes les boules sont ensuite replacées dans l'urne.

   On tire une boule de cette urne. Si elle est verte, on lance un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Si elle est rouge, on lance un dé à 12 faces numérotées de 1 à 12. Si elle est bleue, on lance un dé à 20 faces, numérotées de 1 à 20.

   d) Quelle est la probabilité que le dé montre le nombre 5 ?

   e) Sachant que le dé a montré 5, quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

f) Si on répète cinq fois l'expérience en remettant à chaque fois la boule dans l'urne, quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois le nombre 5 ?

g) Un daltonien réalise l'expérience une fois. Comme il ne voit pas la différence entre le rouge et le vert, si la boule tirée est de l'une de ces deux couleurs, il choisit au hasard entre le dé à 6 faces et celui à 12 faces. Quelle est alors la probabilité que le dé montre le nombre 5 ?

2.32

[Problème de baccalauréat, Gymnase de la Cité, 2013]
Nous disposons d'un dé cubique bien équilibré et de deux boîtes B_1, B_2 contenant des boules indiscernables au toucher. La boîte B_1 contient 3 boules rouges et 2 boules noires, tandis que la boîte B_2 contient 6 boules rouges et 4 boules noires.
On jette le dé. Si le dé indique un nombre strictement supérieur à 4, on extrait de la boîte B_1 *simultanément* 3 boules. Dans le cas contraire on extrait *successivement et avec remise* 3 boules de la boîte B_2. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) Les trois boules sont rouges ;

b) Les trois boules sont de la même couleur ;

c) Au moins une boule est rouge ;

d) Deux boules sont noires et une boule est rouge ;

e) Le dé indique un nombre strictement supérieur à 4 sachant que les trois boules sont rouges.

2.33

[Problème de baccalauréat, Gymnase de Chamblandes, 2012]
Un jeu est constitué de questions qui portent sur les thèmes « Musique » et « Cinéma ». Le quart des questions portent sur le thème « Musique », les autres portent sur le thème « Cinéma ». La probabilité que Julien réponde correctement à une question « Musique » est de 60 %, alors que la probabilité qu'il réponde correctement à une question « Cinéma » est de 70 %. On pose à Julien une question choisie au hasard. Si Julien répond correctement à cette question, on lui pose une deuxième question qui porte sur le même thème ; une deuxième réponse juste lui permet de doubler son gain. Représenter la situation par un arbre et calculer la probabilité que :

a) Julien réponde correctement à la première et à la deuxième question.

b) Julien réponde correctement à la deuxième question s'il a répondu correctement à la première.

c) Les deux questions aient porté sur la musique sachant que Julien a doublé son gain ?

Ce jeu est proposé chaque matin avant 8 heures à la radio. Julien y participe 5 jours de suite.

d) Calculer la probabilité que Julien ne réponde pas correctement à la première question trois des cinq jours.

e) Calculer la probabilité que Julien ne réponde pas correctement à la première question au moins l'un des cinq jours.

2.34

Le jeu de la boule noire se joue à deux. Avant chaque partie, on place dans une urne 5 boules blanches et 2 boules noires. Les joueurs tirent alors alternativement une boule de l'urne, jusqu'à ce que l'un des deux tire une boule noire. Ce joueur perd la partie et le jeu s'arrête. Une partie peut se jouer avec ou sans remise.
Paul et Jeanne décident de jouer au jeu de la boule noire. Paul effectue le premier tirage.

a) On suppose qu'ils jouent sans remise.
   i) Quelle probabilité chaque joueur a-t-il de gagner la partie ?
   ii) Si Paul perd, quelle est la probabilité que ce soit à son troisième tirage ?
b) On suppose qu'ils jouent avec remise. Trouver la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de voir la partie se terminer en n tirages ou moins est plus grande que 0,99.

2.8 Réponses

2.1 a) 3/8 ; b) 3/5 ; c) 1/2 ; d) 10/199.

2.2 a) 33 % ; b) 42,55 % ; c) 75,47 % ; d) 27,59 % ; e) 82,98 % ; f) 59,70 %.

2.3 A : 4,55 % ; B : 27,27 % ; C : 38,18 % ; D : 61,82 % ; E : 74,55 % ; F : 76,36 %.

2.4 A : 25 % ; B : 29,55 % ; C : 70,45 %.

2.5 A : 18,18 % ; B : 1,01 % ; C : 41,67 %.

2.6 A : 55,56 % ; B : 16,67 % ; C : 34,72 % ; D : 4,63 % ; E : 9,26 %.

2.7 a) 21,43 % ; b) 3,57 % ; c) 78,57 % ; d) 28,57 % ; e) 57.14 %

2.8 a) 12.96 % ; b) 97.44 % ; c) 34.56 % ; d) 84.48 % .

2.9 19.05 % ; 33.33 %.

2.10 $\frac{1}{11}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{4}{11}$.

2.11 $\frac{3}{5}$.

2.12 a) 0.28 % ; b) 0.70 % ; c) 0.24 % ; d) 0.10 % ; e) 70.01 % ; f) 29,99 % .

2.13 a) 51,47 % ; b) 33,09 % ; c) 15,44 % ; d) 31,82 %.

2.14 a) i) 22.22 % ; ii) 77.78 % ; iii) 55.56 % ; b) i) 52.78 % ; ii) 26.32 %.

2.15 a) 70.83 % ; b) 65.7 %, 44.1 % ; c) ii) 6.67 %.

2.16 a) 1.82 % ; b) 29.09 % ; c) 49.09 % ; d) 33.33 % ; e) 12.5 % .

2.17 a) 37.5 % ; b) 47.5 % ; c) 47.37 % .

2.18 31.46 %.

2.19 a) 56.67 % ; b) 50 % ; c) 52.94 %.

2.20 a) 24.73 % ; b) 2.53 % ; c) 72.68 %.

2.21 a) 0.00059 % ; b) 14.93 % ; c) 0.16%.

2.22 a) 34.87 % ; b) 0.15 % ; c) 98.72 %.

2.23 a) $-2p^3 + 3p^2$; b) $6p^5 - 15p^4 + 10p^3$; c) $p > 0.5$.

2.24 32.31 %.

2.25 a) $\dfrac{1}{10}$; b) $\dfrac{2}{15}$; c) $\dfrac{1}{2}$.

2.26 a) i) 65.13 % ; ii) 38.74 % ; b) i) 4 % ; ii) 12.5 %.

2.27 40.54 %.

2.28 a) $\dfrac{57}{64}$; b) $\dfrac{7}{19}$; c) i) 0.13 % ; ii) 29.35 %.

2.29 c) 46.75 % ; d) 4.66 % ; e) 8 clients ; g) 17 % ; h) $\dfrac{56}{73}$.

2.30 b) 60 % ; c) 36 % ; d) 33.33 % ; e) 4.67 % ; f) 24.88 % ; g) 73.79 %.

2.31 a) 336 ; b) 54 ; c) 3300 ; d) 10 % ; e) 15.63 % ; f) 0.81 % ; g) 9.22 %.

2.32 a) 17.73 % ; b) 22 % ; c) 95.73 % ; d) 29.2 % ; e) 18.80 %.

2.33 a) 45.75 % ; b) 67.78 % ; c) 19.67 % ; d) 15.64 % ; e) 85.99 %.

2.34 a) i) Paul : $\dfrac{3}{7}$; Jeanne : $\dfrac{4}{7}$; ii) $\dfrac{1}{6}$; b) 14 tirages.

Bibliographie

[1] E. W. Swokowski et J. A. Cole *: Algèbre*, Editions LEP, 1998.

[2] Monographie de la commission romande de mathématique 26 *: Fundamentum de mathématique : Probabilités*, Editions du Tricorne, 2005.

[3] Gérard Frugier *: Exercices ordinaires de probabilités* , Ellipses, Editions Marketing, 1992.

[4] G. Ouellet, *: Statistiques et probabilités*, Editions Le Griffon d'Argile, 1998.

[5] C. Simard, *: Notions de statistiques*, Groupe Modulo, Montréal 2015.