Commission romande de mathématique

FUNDAMENTUM de mathématique

ANALYSE

MONOGRAPHIES DE LA COMMISSION
ROMANDE DE MATHÉMATIQUE

Société suisse des professeurs
de mathématique et de physique

Ouvrages publiés par la Commission Romande de Mathématique

S. Pahud

Géométrie expérimentale I, II et III (Livre de l'élève)

Géométrie expérimentale I, II et III (Notes méthodologiques à insérer)

Ouvrages collectifs de la CRM

N° 18 Géométrie 2

N° 20 Algèbre linéaire

N° 21 Méthodes numériques (M.-Y. Bachmann, H. Cattin, P. Épiney, F. Haeberli et G. Jenny)

N° 23 Géométrie vectorielle et analytique plane

N° 24 Géométrie vectorielle et analytique de l'espace

N° 25 Analyse

N° 26 Probabilités

N° 27 Notions élémentaires

Cahiers de la CRM

N° 1	Suites de nombres réels	Alex Willa
N° 2	Cryptologie	Nicolas Martignoni
N° 3	Équations algébriques et nombres complexes	Martin Cuénod
N° 4	Séries numériques et série de Taylor	Alex Willa
N° 5	Arrêt sur image	Daniel Poncet-Montange

CRM, CRP et CRC

Formulaires et Tables (Mathématique, Physique, Chimie)

Site web de la CRM

http://www.sspmp.ch/crm/

Diffusion Pahud & Cie

http://www.diffusionpahud.ch/

http://www.tricorne.org/

ISBN 978–2–8293–0165–0

Auteurs

Le présent ouvrage est le fruit d'un travail collectif de la Commission Romande de Mathématique (CRM), qui est actuellement composée de Mesdames et Messieurs

Patrick HOCHULI (Gymnase français, Bienne), président de la CRM

Chantal ARLETTAZ (Gymnase Auguste Piccard, Lausanne)

Fabien AUGSBURGER (Collège de Gambach, Fribourg)

* Bernard AYMON (Collège de l'Abbaye, Saint-Maurice)

Jean-Marc LEDERMANN (Lycée Denis-de-Rougemont, Neuchâtel)

Nicolas MARTIGNONI (Haute École pédagogique, Fribourg)

Ewa MIAZZA (Collège Voltaire, Genève)

Didier MÜLLER (Lycée Cantonal, Porrentruy)

Sandrine OSTERMANN (Gymnase de Chamblandes, Pully)

Jean PIQUEREZ (C.E.C. Mme de Staël, Genève)

Patrick TURTSCHY (Lycée Blaise-Cendrars, La Chaux-de-Fonds)

Alex WILLA (Collège des Creusets, Sion)

Ont également collaboré à l'élaboration de cet ouvrage,
les anciens membres de la CRM

* Martin CUÉNOD (Collège Calvin, Genève)

* Charles KRATZER (Gymnase de Chamblandes, Pully)

* Marc-André NICOLLERAT (Gymnase du Bugnon, Lausanne)

Les rédacteurs du texte sont désignés par un astérisque.

PRÉFACE

C'est lors d'une réunion de travail de la Commission Romande de Mathématique (CRM), à la fin 1973, qu'a été lancée l'idée d'élaborer un plan du "Fundamentum de mathématique", en vue d'éditer une série de monographies couvrant l'ensemble des matières enseignées dans les gymnases romands. L'enthousiasme fut grand, mais la gestation fut toutefois longue, car une œuvre collective aussi importante ne se réalise pas du jour au lendemain.

Le choix des matières, l'ampleur que devait prendre chacune de celles-ci, les objectifs véritables du "Fundamentum" ont donné lieu à de multiples échanges de vue et fait l'objet d'un long travail entrepris en commun, nécessitant rapprochement et compréhension mutuelle de la part de tous.

Ce n'est qu'en 1981 que le plan du "Fundamentum" fut arrêté et que son premier tome "Analyse 1" put sortir de presse. La forme de présentation des ouvrages était née: chaque sujet est présenté par un "chapeau théorique" succinct suivi de nombreux exercices.

De 1981 à 1992 ont été ensuite publiés "Analyse 2", "Notions élémentaires", "Géométrie 1", "Géométrie 2", "Algèbre", "Algèbre linéaire", "Géométrie vectorielle et analytique plane" et "Géométrie vectorielle et analytique de l'espace". Cette série et les monographies "Probabilités et statistiques" et "Méthodes numériques" couvrent ainsi l'ensemble des programmes habituels et actuels de mathématique des gymnases romands.

Il est clair que dans le domaine de l'enseignement, qui évolue sans cesse, aucun objectif ne peut être définitivement atteint, aucune publication ne peut être considérée comme fixée pour toujours. C'est pourquoi les livres constituant le "Fundamentum" sont périodiquement réexaminés lors de leurs rééditions et certains d'entre eux sont parfois remaniés ou complétés. Ainsi suite aux expériences faites dans les classes, "Notions élémentaires" et "Géométrie 1" ont déjà été remis sur le métier et ont fait l'objet de rééditions partiellement refondues et augmentées.

Lorsqu'il s'est agi d'envisager une refonte complète des Fundamentum "Analyse 1" et "Analyse 2", la CRM a décidé de réécrire totalement l'ouvrage et de réunir en un seul volume les notions d'analyse étudiées par tout élève du gymnase, quel que soit son profil.

Le président remercie ses collègues de la CRM pour la toujours cordiale atmosphère de travail et l'excellence des échanges de vue.

Marcel-Yves Bachmann
juin 1997

AVANT-PROPOS

La CRM a le plaisir de publier un dixième tome de la série "Fundamentum de mathématique", intitulé "Analyse".

Ce nouvel ouvrage répond à un double objectif:

1) améliorer et actualiser les deux volumes "Analyse 1" et "Analyse 2" dont le formalisme utilisé pour présenter les notions est apparu à l'usage beaucoup trop lourd et la disposition des exercices pas toujours cohérente ni progressive;

2) adapter l'ouvrage aux conditions de la nouvelle maturité et notamment à l'introduction d'un cours de mathématique commun à tous.

En outre il a été décidé de grouper en un seul volume les notions d'analyse étudiées au gymnase.

Ce volume du Fundamentum diffère quelque peu des autres ouvrages de la série. Issu d'une réflexion et d'un travail en commun de tous les membres de la CRM, cet ouvrage est conçu comme un résumé de cours dont les développements sont seulement esquissés. Il y a ici une méthodologie sous-jacente d'une part dans la manière volontairement "naïve" et simplifiée de présenter les notions, d'autre part dans l'organisation des sujets exposés. Cette option ne restreint en rien la liberté de choix de l'utilisateur qui peut envisager l'ouvrage comme un recueil d'exercices et de problèmes. Ainsi, "Analyse" répond à l'un des objectifs premiers de notre collection: contribuer à une meilleure coordination entre les gymnases romands en offrant un instrument de travail conforme aux savoir-faire contenus dans le "Plan d'étude-cadre" (PEC).

La CRM remercie vivement Charles Kratzer pour la composition du texte et les Éditions du Tricorne à Genève qui ont voué tous leurs soins à la réalisation de ce livre.

Commission romande de mathématique
juin 1997

NOTES AUX UTILISATEURS

Les rédacteurs rendent le lecteur attentif aux points suivants.

1) Les éléments de théorie proposés au début de chaque paragraphe peuvent être remplacés par des exposés différents sur le plan méthodologique. Il sera toujours possible d'utiliser le vaste champ d'exercices correspondants.

2) Le fait d'avoir conçu l'ouvrage prioritairement pour les élèves du cours "normal" de mathématique ne signifie pas que tous les exercices soient accessibles ou même destinés à tous les élèves. Certains exercices, par leur difficulté, ne sont abordables que par des élèves qui ont choisi un niveau "avancé" de mathématique. Il conviendra donc de faire un choix judicieux parmi les nombreux exercices et problèmes proposés.

3) On a renoncé à désigner explicitement les exercices qui pourraient être considérés comme plus difficiles. La variété des cheminements théoriques et méthodologiques possibles rend en effet ce choix arbitraire. On a néanmoins regroupé sous le titre "exercices récapitulatifs" des exercices et des problèmes nécessitant des développements plus importants.

4) On a donné les réponses aux exercices et problèmes chaque fois qu'elles pouvaient s'exprimer simplement. Dans le cas contraire (démonstration par exemple), on y a renoncé.

TABLE DES MATIÈRES

§ 1. PREMIÈRES NOTIONS

§ 2. LIMITES, CONTINUITÉ ET ASYMPTOTES

§ 3. DÉRIVÉE

§ 4. APPLICATION DES DÉRIVÉES

§ 5. Intégrale

§ 6. Fonction logarithme Fonction exponentielle

§ 1. PREMIÈRES NOTIONS

Dans ce paragraphe, nous rappelons et complétons un certain nombre de notions et leurs notations. Le lecteur trouvera de plus amples informations dans *Monographie n° 27 Notions élémentaires.*

1. Préambule

L'**analyse mathématique** peut se définir comme l'étude des nombres réels et des relations (fonctions) que l'on peut établir entre eux.

De nombreux phénomènes peuvent être décrits mathématiquement en recourant à des fonctions. L'étude de ces phénomènes est éclairée par l'étude des fonctions correspondantes.

A titre d'exemple: Galilée (1564 – 1642) établit la relation entre le temps écoulé et la distance parcourue par un objet en chute libre. Cette relation peut être modélisée par la fonction $s(t) = 5t^2$ si le temps t est compté en secondes et la distance $s(t)$ en mètres.

2. Fonction réelle

2.1 Définitions

> Soit A et B deux sous-ensembles de l'ensemble des nombres réels.
> Une **fonction réelle** de A vers B est une relation qui fait correspondre à chaque élément x de A un unique élément y de B.
> On appelle A la **source** et B le **but** de f.
>
> Le nombre y est noté $f(x)$ et s'appelle la **valeur** de f en x, ou l'**image** de x par la fonction f.
> Le nombre x est une **préimage** de y par f.
> La fonction f s'écrit souvent
>
> $$\begin{aligned} f:\ & A \to B \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble de toutes les valeurs de f est noté $\mathrm{Im}(f)$.

Ensemble de définition

La donnée d'une formule $y = f(x)$ permet de définir une fonction

$$\begin{aligned} f:\ \mathrm{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble D_f , appelé l'**ensemble de définition** de f, est le plus grand sous-ensemble de tous les réels x pour lesquels il existe un unique $f(x)$.

Alors f est une fonction réelle de D_f vers $\mathbb{R}$

Exemples

a) La relation associant à un nombre son inverse définit la fonction

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

b) La formule $y = \sqrt{1-x^2}$ définit la fonction

$$\begin{aligned} f:\ [-1;1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

c) La correspondance $x \mapsto x^2$ définit la fonction

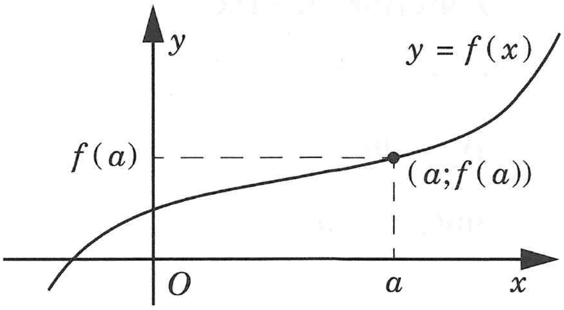
$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Egalité de deux fonctions

Deux fonctions sont **égales** si elles ont même source, même but et si $f(x) = g(x)$ pour tout x de leur source.

2.2 Représentation graphique d'une fonction

Dans le plan muni d'un repère, on représente une fonction en dessinant l'ensemble des points de coordonnées $(a\,;\,f(a))$. Cet ensemble de points constitue la **représentation graphique** de f ou le **graphe** de f.



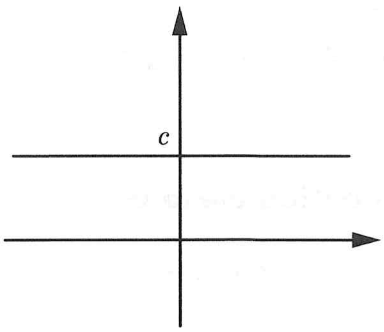
2.3 Quelques fonctions élémentaires

Fonction constante

$f\colon\ x \mapsto c\ \ (c \in \mathbb{R})$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = \{c\}$

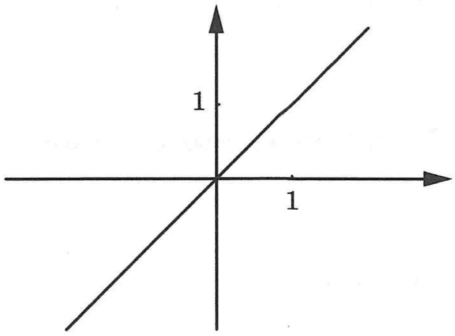


Fonction identité

$f\colon\ x \mapsto x$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

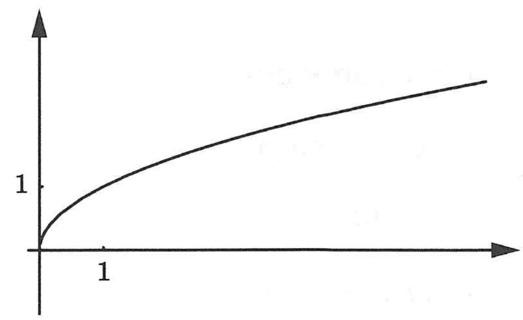


Fonction racine carrée

$f\colon\ x \mapsto \sqrt{x}$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}_+$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$

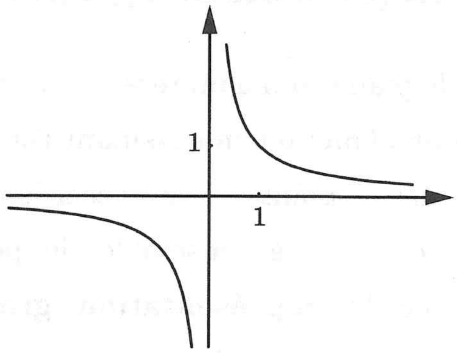


Fonction inverse

$f:\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R}^*$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$

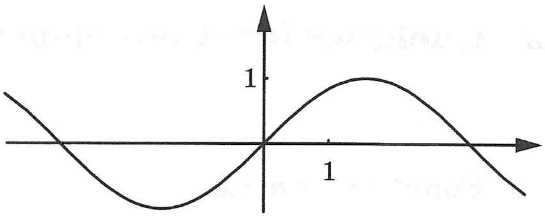


Fonction sinus

$f:\ x \mapsto \sin(x)$

$D_f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = [-1\,;1]$

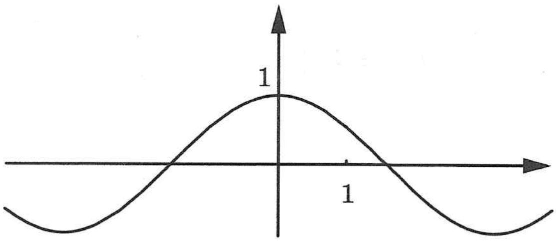


Fonction cosinus

$f:\ x \mapsto \cos(x)$

$D_f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = [-1\,;1]$

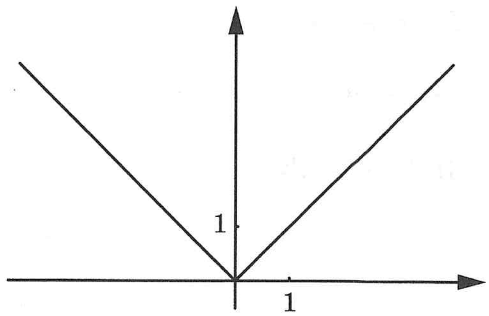


Fonction valeur absolue

$f:\ x \mapsto |x|$

$D_f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$

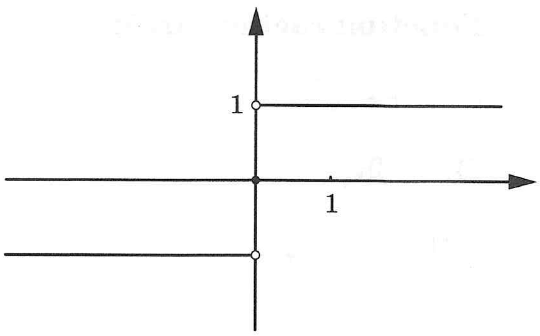


Fonction signe

$f:\ x \mapsto \mathrm{sgn}(x)$

$D_f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = \{-1\,;0\,;1\}$

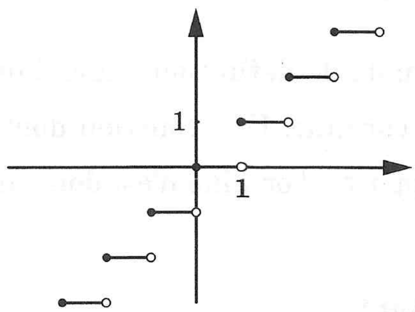


Fonction partie entière

$f\colon x \mapsto E(x)$

$D_f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}$



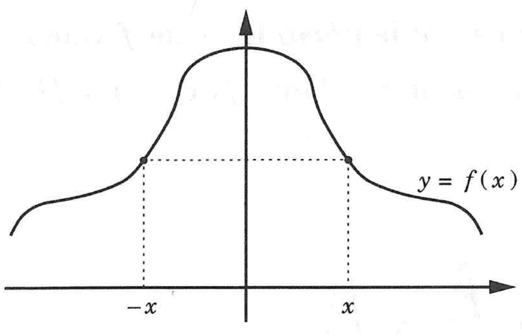
3. Caractéristiques d'une fonction

3.1 Zéro d'une fonction

Un nombre a est un **zéro** d'une fonction f si $f(a) = 0$. L'ensemble des zéros de f correspond à l'ensemble des points où le graphe rencontre l'axe Ox.

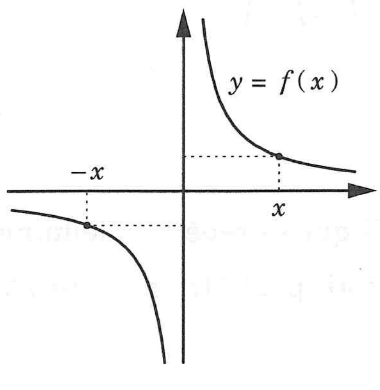
La recherche des zéros d'une fonction f intervient dans l'étude du signe de $f(x)$.

3.2 Parité d'une fonction



Si $f(-x) = f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de f, on dit que f est une **fonction paire**.

Le graphe d'une telle fonction est symétrique par rapport à l'axe Oy.



Si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de f, on dit que f est une **fonction impaire**.

Le graphe d'une telle fonction est symétrique par rapport à l'origine.

Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction paire ou impaire est symétrique par rapport à l'origine. Une fonction dont l'ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à l'origine n'est donc ni paire, ni impaire.

Exemples

$f: x \mapsto x^2$ est une fonction paire

$g: x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction impaire

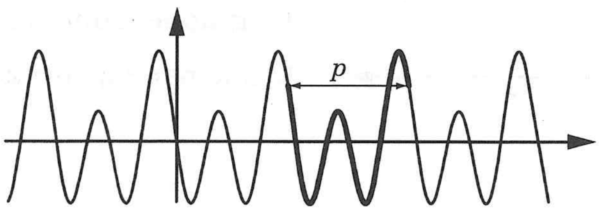
$h: x \mapsto x+1$ est une fonction ni paire, ni impaire

$r: x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction ni paire, ni impaire.

3.3 Périodicité d'une fonction

Une fonction f est **périodique** s'il existe un nombre $p > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout x de l'ensemble de définition de f, on ait $f(x+kp) = f(x)$.

Lorsque f n'est pas constante, on définit la **période** p de f comme le plus petit nombre réel strictement positif p tel que $f(x+p) = f(x)$.



Remarque

Le graphe d'une fonction périodique est un motif qui se répète indéfiniment par translation horizontale d'amplitude p. Un tel motif peut être pris sur n'importe quel intervalle de la forme $[\, x_0 \,;\, x_0+p \,[$.

Exemple

$f: x \mapsto \cos(x)$ est périodique de période 2π.

3.4 Croissance et décroissance d'une fonction

Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si l'implication

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

est vraie pour tout x_1, x_2 dans I.

Une fonction f est **strictement croissante** sur un intervalle I si l'implication

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

est vraie pour tout x_1, x_2 dans I.

Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si l'implication

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

est vraie pour tout x_1, x_2 dans I.

Une fonction f est **strictement décroissante** sur un intervalle I si l'implication

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

est vraie pour tout x_1, x_2 dans I.

Remarques

Les fonctions croissantes conservent l'ordre.
Les fonctions décroissantes inversent l'ordre.
Parcouru de gauche à droite, le graphe d'une fonction strictement croissante "monte".

Exemples

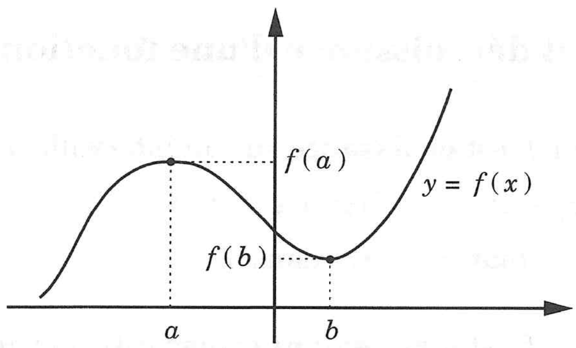
$f: x \mapsto \sin(x)$ est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$

$g: x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

$h: x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3.5 Maximum et minimum d'une fonction

Soit $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle



Le nombre $f(a)$ est un **maximum local** d'une fonction f s'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que pour tout $x \in I \cap A$ on ait $f(x) \leq f(a)$.

On dit aussi que f admet un maximum en a.

Le nombre $f(b)$ est un **minimum local** d'une fonction f s'il existe un intervalle ouvert I contenant b tel que pour tout $x \in I \cap A$ on ait $f(x) \geq f(b)$.

On dit aussi que f admet un minimum en b.

Le nombre $f(a)$ est un **maximum absolu** d'une fonction f si pour tout $x \in A$ on a $f(x) \leq f(a)$.

Le nombre $f(b)$ est un **minimum absolu** d'une fonction f si pour tout $x \in A$ on a $f(x) \geq f(b)$.

Un **extremum** d'une fonction est soit un maximum soit un minimum.

Exemples

Le nombre $f(0) = 1$ est le minimum absolu de la fonction $f: x \mapsto x^2 + 1$.

La fonction cosinus admet un maximum en 0.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet un minimum en 0.

La fonction $f\colon x \mapsto x^3$ ne possède ni minimum, ni maximum sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f\colon [-1\,;2] \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto x^2$ admet un maximum local en -1 et le nombre $f(2) = 4$ est le maximum absolu de f.

4. Opérations sur les fonctions

Soit $f\colon A \to \mathbb{R}$ et $g\colon B \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles.

La **somme** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f + g\colon A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

La **différence** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f - g\colon A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

Le **produit** de la fonction f par le nombre réel c est une nouvelle fonction notée $c \cdot f\colon A \to \mathbb{R}$ définie par

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

Le **produit** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f \cdot g\colon A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Le **quotient** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $\frac{f}{g}\colon A \cap B \cap \{x \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

La **composée** des fonctions f et g prises dans cet ordre est une nouvelle fonction notée $g \circ f\colon \{x \mid x \in A \text{ et } f(x) \in B\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

5. Réciproque d'une fonction

5.1 Bijection

La fonction $f: A \to B$ est dite **bijective** si tout y de B possède une unique préimage x dans A.

De manière équivalente la fonction $f: A \to B$ est dite **bijective** si les deux conditions suivantes sont vérifiées

1) $B = \mathrm{Im}(f)$
2) Quels que soient les nombres x_1 et x_2 de A, $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Remarque

Si une fonction n'est pas bijective, on peut la rendre bijective en restreignant sa source et son but. Ainsi, la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective, mais la fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1 ; 1]$ est bijective.

5.2 Réciproque

Soit $f: A \to B$ une fonction bijective. On appelle **réciproque** de f, notée ${}^{r}f$ ou f^{-1}, la fonction ${}^{r}f : B \to A$ définie par

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = {}^{r}f(y)$$

A chaque fonction bijective $f: A \to B$, on peut donc associer une fonction ${}^{r}f : B \to \mathrm{A}$; $x \underset{{}^{r}f}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$ telle que

$$({}^{r}f \circ f)(x) = x \text{ pour tout } x \in A \text{ et}$$
$$(f \circ {}^{r}f)(y) = y \text{ pour tout } y \in B$$

Exemples

a) La fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax+b$ est bijective si $a \neq 0$.

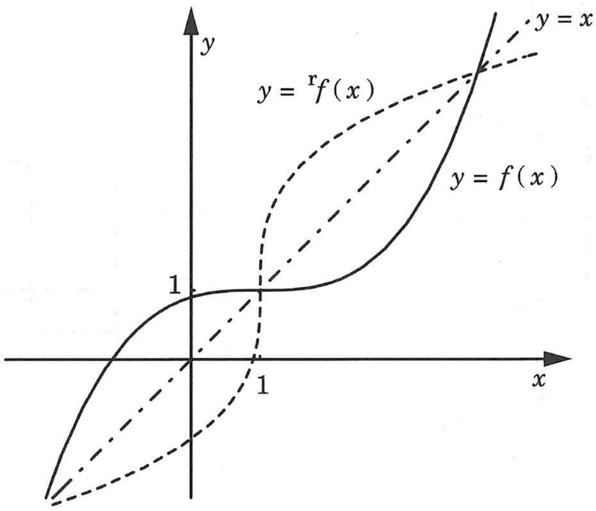
Sa réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}$

b) La fonction $\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1 ; 1]$ est bijective et sa réciproque $\sin^{-1} : [-1 ; 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ se note en général arcsin .

5.3 Représentation graphique de la réciproque

Déterminer la réciproque d'une fonction revient à exprimer x en fonction de y , ce qui consiste graphiquement à échanger les rôles de x et de y .

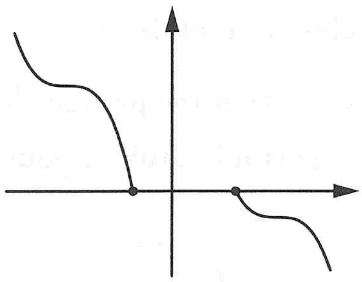
Dans un repère orthonormé, le graphe de la fonction réciproque ${}^{r}f$ est donc le symétrique du graphe de la fonction f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

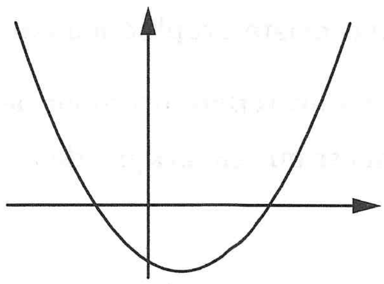


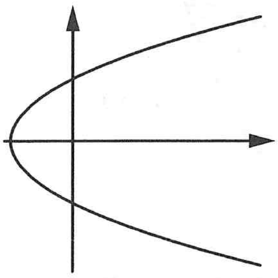
EXERCICES

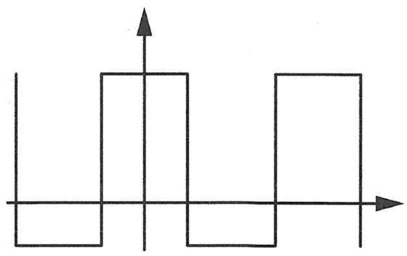
Fonction réelle

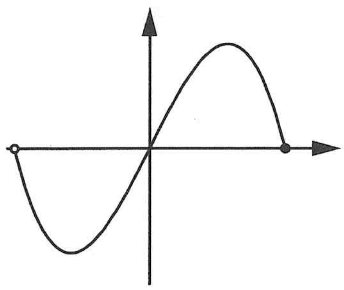
1.1 Parmi les courbes esquissées ci-dessous, déterminer celles qui représentent le graphe d'une fonction

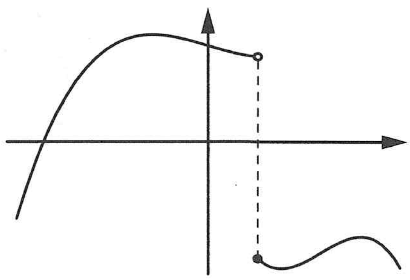
1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

1.2 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et c une constante.

1) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(f(x))$ a un sens.

2) Même question pour $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(c \cdot x)$, $f(x+c)$ et $f(x)+c$.

3) Pour quelles valeurs de c existe-t-il un nombre x tel que $f(c \cdot x) = f(x)$?

4) Pour quelle valeur de c a-t-on $f(c \cdot x) = f(x)$ pour tout x ?

1.3 Déterminer l'ensemble de définition et esquisser le graphe des fonctions suivantes

1) $f(x) = 3$
2) $f(x) = -\frac{3}{2}x$
3) $f(x) = -2x+3$
4) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3$
5) $f(x) = -x^2 + x + 15$
6) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
7) $f(x) = \frac{|x|}{x}$
8) $f(x) = \frac{1}{x}$
9) $f(x) = \sqrt{x^2}$
10) $f(x) = \sqrt{x}$
11) $f(x) = |x-1|$
12) $f(x) = ||x-1| - 1|$
13) $f(x) = |||x-1| - 1| - 1|$
14) $f(x) = |x-1| + |x+2|$
15) $f(x) = |x^2 + x - 6|$
16) $f(x) = x^2 - |x| - 6$

1.4 Quel est l'ensemble de définition des fonctions suivantes ?

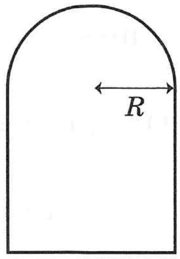
1) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
2) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$
3) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$
4) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$
5) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$
6) $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-1)(x^2-7x+10)}$
7) $f(x) = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-5}$
8) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)(x-5)}$
9) $f(x) = \frac{5}{6 - \sqrt{63x^2 - 17x - 10}}$

1.5 Soit g et h les fonctions définies par

$$g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 1 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs de x a-t-on $h(x) \le x$?
2) Même question pour $h(x) \le g(x)$, $g(x) \le x$ et $g(g(x)) = g(x)$.
3) Déterminer la fonction $g \circ h - h$.

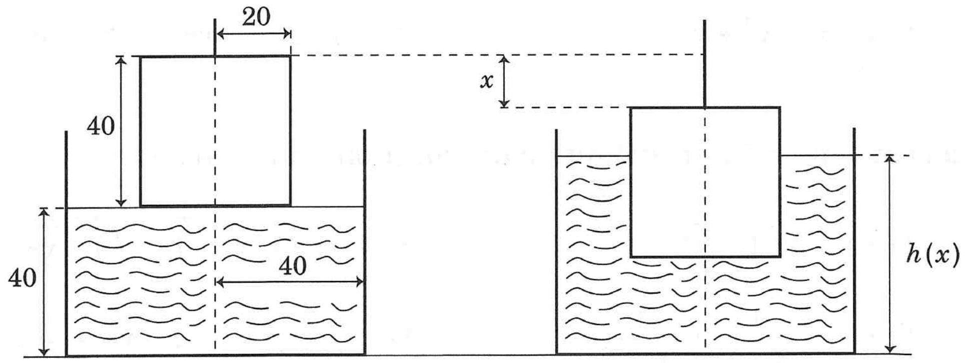
1.6 On considère un enclos de périmètre 40 m en forme de rectangle prolongé par un demi-disque de rayon R.



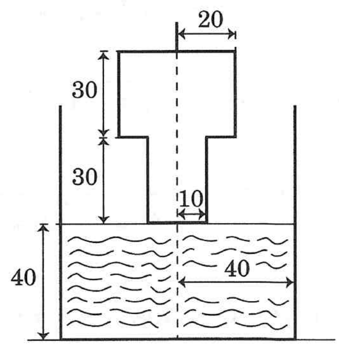
Exprimer l'aire A de cet enclos en fonction de R. Déterminer ensuite l'ensemble de définition de la fonction $R \mapsto A(R)$.

1.7 Un bocal cylindrique de 40 cm de rayon contient de l'eau. Le niveau initial de l'eau est $h(0) = 40$ cm.

1) Un cylindre de rayon 20 cm et de hauteur 40 cm est placé de telle manière que sa base touche la surface de l'eau. On abaisse alors le cylindre de x cm et on note $h(x)$ le niveau correspondant de l'eau. Déterminer $h(x)$ et tracer le graphe de h.



2) Même question si l'on remplace le cylindre par deux cylindres superposés de même axe, chacun de hauteur 30 cm, et de rayons respectifs 10 cm et 20 cm.



1.8 A l'aide d'une feuille de hauteur x et d'aire $2\ \text{m}^2$, on veut confectionner une affiche. Les marges du haut et du bas seront de 21 cm, celles des côtés de 14 cm.

Exprimer l'aire A de la partie imprimable de l'affiche en fonction de x. Déterminer l'ensemble de définition de $A(x)$.

1.9 Une grande roue a un diamètre de 10 m et son axe horizontal se situe à 6 m du sol. Un point de la roue accomplit un tour complet en 3 minutes à vitesse angulaire constante.

Au temps $t = 0$, le point de la roue est au plus bas de sa trajectoire. Déterminer en fonction du temps la hauteur h de ce point par rapport au sol.

Caractéristiques d'une fonction

1.10 Résoudre les inéquations d'inconnue x

1) $|x-3| \le 1$ 2) $|x-a| \le \varepsilon$

3) $|x^2-1| \le \frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{1+x^2} \le a$ $(a > 0)$

5) $|x-a| \ge \varepsilon$ 6) $|x^2-4| \ge 4$

1.11 Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont paires et celles qui sont impaires

1) $f(x) = x^2$ 2) $f(x) = x^3$

3) $f(x) = \frac{x^3-x+1}{x^2}$ 4) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+x}$

5) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3+x}$ 6) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2+2}$

7) $f(x) = \frac{x^5-x^3-x}{x^6-1}$ 8) $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^4+1}$

9) $f(x) = 5x^7 - x^3 + \frac{1}{x}$ 10) $f(x) = \frac{x^5-x}{x^3-1}$

1.12 La fonction f est périodique de période 2 . De plus, $f(x) = -|x|$ pour $x \in [-1\,;1[$. Calculer $f(436,2)$ et $f(-171,8)$.

1.13 La fonction f est paire et périodique de période 2 . De plus $f(x) = x+1$ pour $x \in [-1\,;0]$. Calculer $f(436,2)$ et $f(-171,8)$.

1.14 Les fonctions suivantes sont-elles périodiques ? Si oui, donner leur période.

1) $f(x) = 1 - \sin(7x)$ 2) $f(x) = |\sin(3x)|$

3) $f(x) = \tan(2x)$ 4) $f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(4x)$

5) $f(x) = x \cdot \sin(3x)$ 6) $f(x) = \cos^3(5x)$

7) $f(x) = \sin(x^2)$ 8) $f(x) = \sin^2(3x)$

1.15 Montrer que le graphe de $f(x) = \dfrac{x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 17}{x^2 + 4x + 6}$ admet une symétrie d'axe $x = -2$.

1.16 Montrer que le graphe de $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ admet une symétrie d'axe $x = -\dfrac{b}{2a}$.

1.17 Montrer que le graphe de $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ admet une symétrie de centre $C(-1\,;4)$.

1.18 Montrer que le graphe de $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x+4}$ admet un centre de symétrie d'abscisse -2 .

1.19 Calculer les coordonnées du centre de symétrie du graphe de $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$.

1.20 Montrer que le graphe d'une fonction f admet une symétrie d'axe $x = a$ si et seulement si la fonction g définie par $g(x) = f(a+x)$ est paire.

1.21 Montrer que le graphe d'une fonction f admet une symétrie de centre $C(a\,;b)$ si et seulement si la fonction g définie par $g(x) = f(a+x) - b$ est impaire.

1.22 Définir une fonction $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ qui n'admet ni maximum, ni minimum.

1.23 Donner les minimums et maximums de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ sur les intervalles suivants

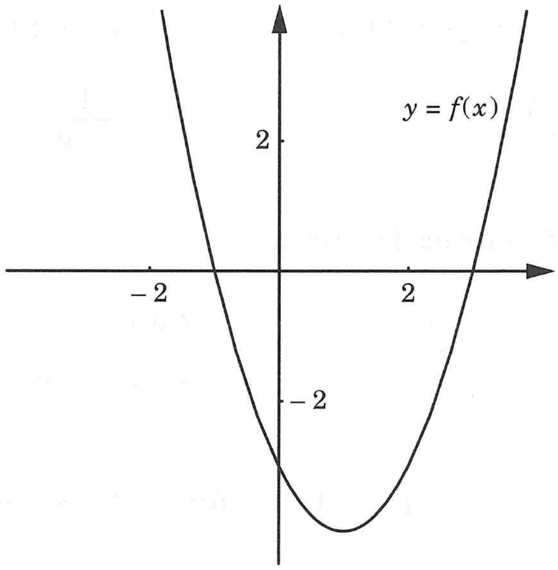
1) $]-\infty\,;+\infty[$ 2) $]0\,;+\infty[$ 3) $]-1\,;1[$

4) $[-1\,;1]$ 5) $]0\,;1]$ 6) $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

7) $]-2\,;1]$ 8) $[-2\,;1[$

Opérations sur les fonctions

1.24 On donne le graphe d'une fonction f.



Esquisser le graphe de la fonction g définie par

1) $g(x) = f(x) - 2$ 2) $g(x) = f(x+3)$

3) $g(x) = \frac{1}{2}\cdot f(x)$ 4) $g(x) = f(2x)$

5) $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ 6) $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

7) $g(x) = f(|x|)$ 8) $g(x) = |f(x)|$

9) $g(x) = f(-x)$ 10) $g(x) = -(f(x))$

1.25 Soit f et g deux fonctions paires et c une constante.
Que peut-on dire de la parité de $f+g$, $f\cdot g$ et $c\cdot f$?

1.26 Si f est une fonction paire et g une fonction impaire, que peut-on dire de la parité de $f+g$, $f \cdot g$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ g \circ f$?

1.27 Soit f et g deux fonctions croissantes et c une constante.
Que peut-on dire de la croissance de $f+g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$ et $g \circ f$?

1.28 Soit f et g deux fonctions périodiques de période $p > 0$ et c une constante.
Que peut-on dire de la périodicité de $f+g$, $f \cdot g$ et $c \cdot f$?

1.29 Donner une preuve ou un contre-exemple de chacune des égalités suivantes

1) $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$ 2) $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$

3) $\dfrac{1}{f \circ g} = \left(\dfrac{1}{f}\right) \circ g$ 4) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\dfrac{1}{g}\right)$

1.30 Composer deux à deux les fonctions

$f_1(x) = 2x$ $f_2(x) = x^2 + x$

$f_3(x) = x+1$ $f_4(x) = 2x-1$

1.31 Calculer $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$ dans les cas suivants

1) $f(x) = (x-2)^3$ $g(x) = x^3$

2) $f(x) = x^n$ $g(x) = x^m$

3) $f(x) = \dfrac{1}{3} - \sqrt{2}\,x$ $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$

4) $f(x) = \dfrac{2x-7}{9x+3}$ $g(x) = \dfrac{3x-2}{4x+1}$

1.32 On considère les six fonctions

$f_0(x) = x$ $f_1(x) = \dfrac{x-1}{x}$ $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ $f_4(x) = \dfrac{x}{x-1}$ $f_5(x) = 1-x$

Dresser un tableau qui donne les composées deux à deux de ces fonctions.

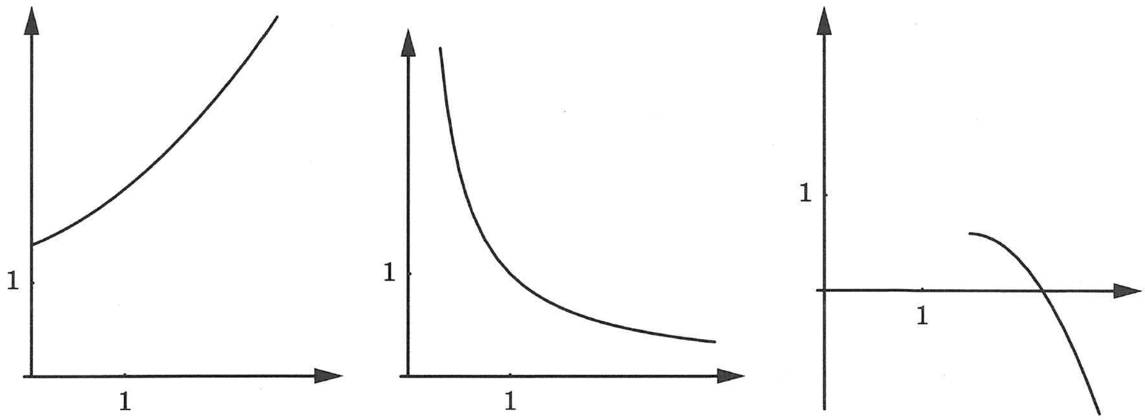
1.33 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(x+1)^n + (x-1)^n}{(x+1)^n - (x-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Ecrire f comme composée des fonctions g et h définies par $g(x) = x^n$ et $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Réciproque d'une fonction

1.34 Esquisser le graphe de la réciproque des fonctions bijectives suivantes



1.35 Montrer que les fonctions suivantes sont bijectives, puis donner leur réciproque

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3 - 2x$

3) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

4) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

5) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x-2}$

6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$

1.36 Restreindre la source et le but pour rendre bijectives les fonctions suivantes, puis donner leur réciproque

1) $f(x) = x^2$

2) $f(x) = x^2 + x - 6$

3) $f(x) = -x^2 + 4x$

4) $f(x) = \cos(x)$

5) $f(x) = \tan(x)$

6) $f(x) = \sin(2x)$

SOLUTIONS DES EXERCICES

1.1 1) oui 2) oui 3) non 4) non 5) oui 6) oui

1.2 1) $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;-1\}$

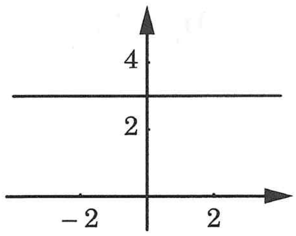
2) $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$ $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{c}\}$ $\mathbb{R} \setminus \{-1-c\}$ $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

3) $x = 0$ pour tout réel c

4) $c = 1$

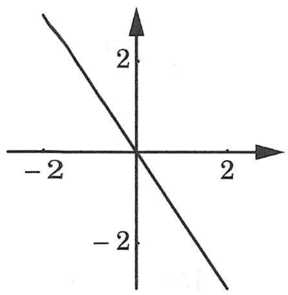
1.3 1)

$D_f = \mathbb{R}$



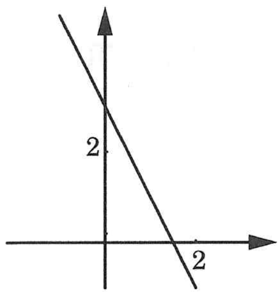
2)

$D_f = \mathbb{R}$



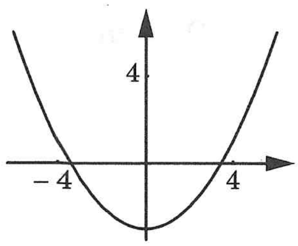
3)

$D_f = \mathbb{R}$



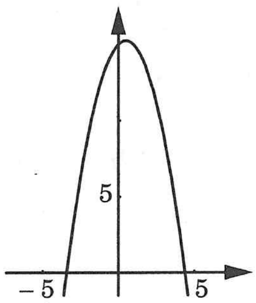
4)

$D_f = \mathbb{R}$



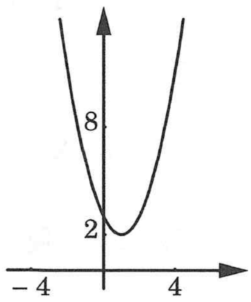
5)

$D_f = \mathbb{R}$



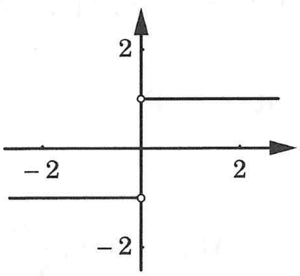
6)

$D_f = \mathbb{R}$



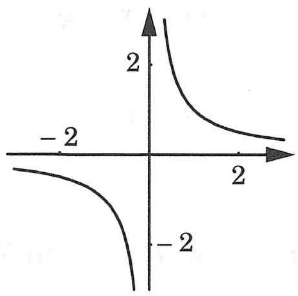
7)

$D_f = \mathbb{R}^*$

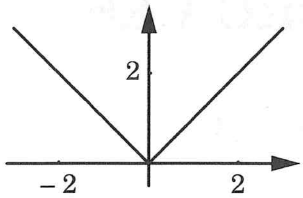


8)

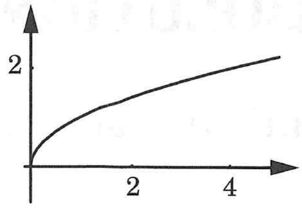
$D_f = \mathbb{R}^*$



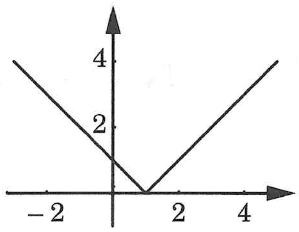
9) $D_f = \mathbb{R}$



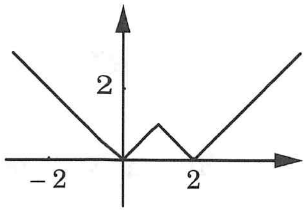
10) $D_f = \mathbb{R}_+$



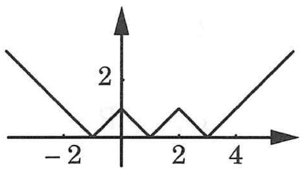
11) $D_f = \mathbb{R}$



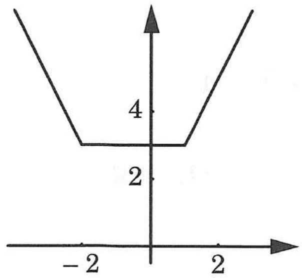
12) $D_f = \mathbb{R}$



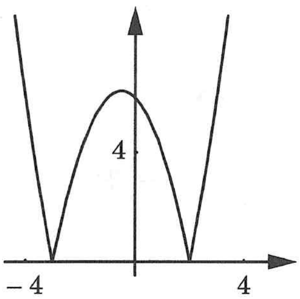
13) $D_f = \mathbb{R}$



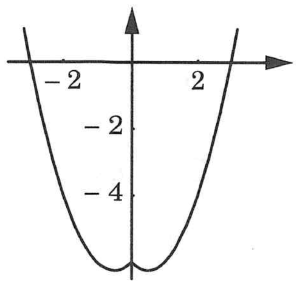
14) $D_f = \mathbb{R}$



15) $D_f = \mathbb{R}$



16) $D_f = \mathbb{R}$



1.4 1) $[-1;1]$ 2) $[-1;1]$ 3) $\mathbb{R} \setminus \{1;2\}$ 4) $\{-1;1\}$

5) $\varnothing$ 6) $\mathbb{R} \setminus \{-1;1;2;5\}$ 7) $[5;+\infty[$

8) $[-2;1] \cup [5;+\infty[$ 9) $]-\infty;-\frac{2}{7}] \cup [\frac{5}{9};+\infty[\setminus \{1;-\frac{46}{63}\}$

1.5 1) $x \in \mathbb{Q}_+ \cup [1;+\infty[$

2) $x \in \mathbb{Q} \cup]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$; $x \in [0;1]$; $x \in \{-1;0;1\}$

3) $g(h(x)) - h(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1.6 $A(R) = 40R - \left(\frac{\pi}{2}+2\right)R^2$ $\qquad D_A =]0;\frac{40}{\pi+2}[$

1.7 1) $h(x) = \begin{cases} 40 + \dfrac{x}{3} & \text{si } x \in [\,0\,;30\,] \\ 50 & \text{si } x \in]\,30\,;40\,] \end{cases}$

2) $h(x) = \begin{cases} 40 + \dfrac{x}{15} & \text{si } x \in [\,0\,;\dfrac{225}{8}\,] \\ \dfrac{65}{2} + \dfrac{x}{3} & \text{si } x \in]\,\dfrac{225}{8}\,;40\,] \end{cases}$

1.8 $A(x) = (x - 0{,}42) \cdot \left(\dfrac{2}{x} - 0{,}28\right)$ $\qquad D_A =]\,0{,}42\,;\dfrac{2}{0{,}28}\,[$

1.9 $h(t) = 6 - 5\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} \cdot t\right)$

1.10 1) $S = [\,2\,;4\,]$

2) $S = [\,a - \varepsilon\,;a + \varepsilon\,]$

3) $S = [\,-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,;-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,] \cup [\,\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,]$

4) $S =]\,-\infty\,;-\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\,] \cup [\,\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\,;+\infty\,[$ si $a \in]\,0\,;1\,[$;

$S = \mathbb{R}$ sinon

5) $S =]\,-\infty\,;a - \varepsilon\,] \cup [\,a + \varepsilon\,;+\infty\,[$

6) $S =]\,-\infty\,;-2\sqrt{2}\,] \cup \{\,0\,\} \cup [\,2\sqrt{2}\,;+\infty\,[$

1.11 1) paire

2) impaire

3) ni paire, ni impaire

4) impaire

5) impaire

6) paire

7) impaire

8) ni paire, ni impaire

9) impaire

10) ni paire, ni impaire

1.12 $f(436{,}2) = f(0{,}2) = -0{,}2$; $f(-171{,}8) = f(0{,}2) = -0{,}2$

1.13 $f(436{,}2) = f(0{,}2) = -0{,}2 + 1 = 0{,}8$; $f(-171{,}8) = f(0{,}2) = 0{,}8$

1.14 1) période $\frac{2\pi}{7}$ 2) période $\frac{\pi}{3}$

3) période $\frac{\pi}{2}$ 4) période π

5) non périodique 6) période $\frac{2\pi}{5}$

7) non périodique

1.19 $(2\,;3)$

1.22 Par exemple $f(x) = x$ si $x \in]0\,;1[\,;\ f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$

1.23 1) min $f(0) = 1$ 2) — 3) min $f(0) = 1$

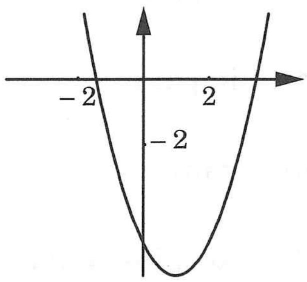
4) min $f(0) = 1$; max $f(-1) = f(1) = 2$

5) max $f(1) = 2$ 6) min $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$; max $f(1) = 2$

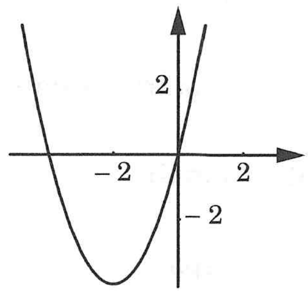
7) min $f(0) = 1$; max $f(1) = 2$

8) min $f(0) = 1$; max $f(-2) = 5$

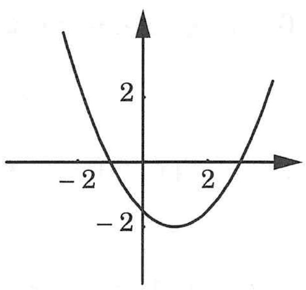
1.24 1)



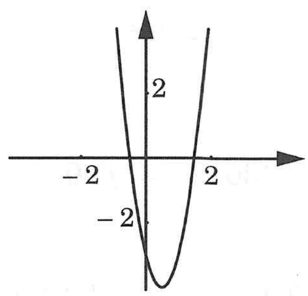
2)



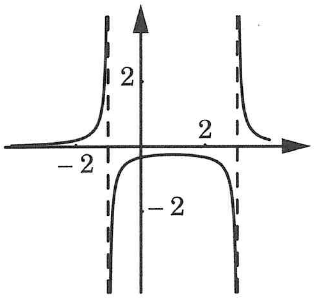
3)



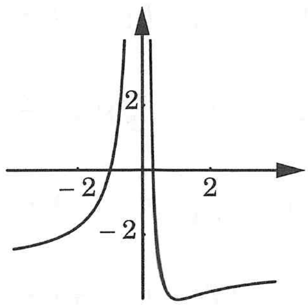
4)



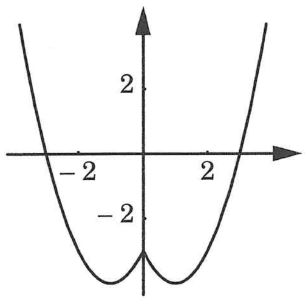
5)



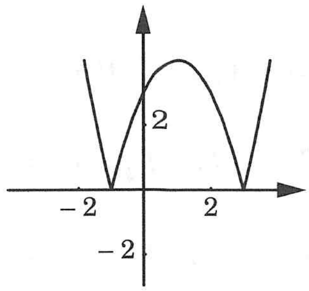
6)



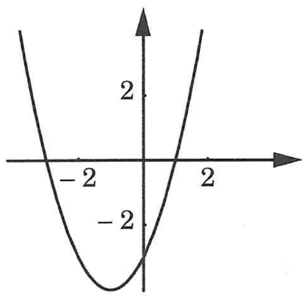
7)



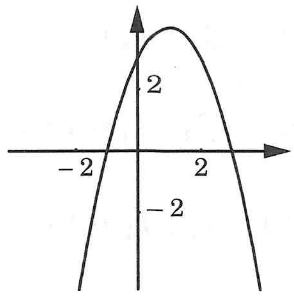
8)



9)



10)



1.25 Elles sont toutes paires

1.26 $f+g$ n'est ni paire, ni impaire ; $f \cdot g$ et $g \circ g$ sont impaires ; $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ f$ et $f \circ g \circ f$ sont paires

1.27 $f+g$ est croissante ; $c \cdot f$ est croissante si $c \geq 0$ et est décroissante si $c \leq 0$; $f \cdot g$ n'est en général ni croissante, ni décroissante

1.28 $f+g$, $f \cdot g$ et $c \cdot f$ sont périodiques. La période peut être inférieure à p voire indéfinie.

1.29 1) égalité fausse ; contre-exemple $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ et $h(x) = 2$

2) égalité vraie

3) égalité vraie

4) égalité fausse ; contre-exemple $f(x) = x+1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

1.30 1) $(f_1 \circ f_1)(x) = 4x$

2) $(f_1 \circ f_2)(x) = 2x^2 + 2x$

3) $(f_1 \circ f_3)(x) = 2x + 2$

4) $(f_1 \circ f_4)(x) = 4x - 2$

5) $(f_2 \circ f_1)(x) = 4x^2 + 2x$

6) $(f_2 \circ f_2)(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$

7) $(f_2 \circ f_3)(x) = x^2 + 3x + 2$

8) $(f_2 \circ f_4)(x) = 4x^2 - 2x$

9) $(f_3 \circ f_1)(x) = 2x + 1$

10) $(f_3 \circ f_2)(x) = x^2 + x + 1$

11) $(f_3 \circ f_3)(x) = x + 2$

12) $(f_3 \circ f_4)(x) = 2x$

13) $(f_4 \circ f_1)(x) = 4x - 1$

14) $(f_4 \circ f_2)(x) = 2x^2 + 2x - 1$

15) $(f_4 \circ f_3)(x) = 2x + 1$

16) $(f_4 \circ f_4)(x) = 4x - 3$

1.31 1) $(f \circ g)(x) = (x^3 - 2)^3$ $\qquad (g \circ f)(x) = (x - 2)^9$

2) $(f \circ g)(x) = x^{m \cdot n}$ $\qquad (g \circ f)(x) = x^{m \cdot n}$

3) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{3} - \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{1 - x}$ $\qquad (g \circ f)(x) = \dfrac{1}{\dfrac{2}{3} + \sqrt{2}\, x}$

4) $(f \circ g)(x) = (-11) \cdot \dfrac{2x+1}{39x-15}$ $\qquad (g \circ f)(x) = \dfrac{-12x-27}{17x-25}$

1.32

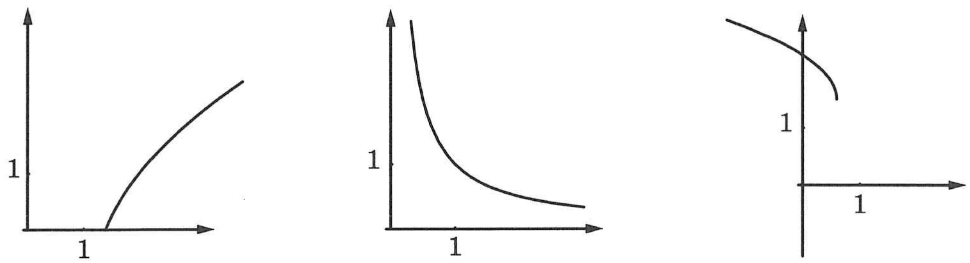
$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0

$\circ$	f
g	$f \circ g$

1.33 1) $\mathbb{R}^*$ si n est pair, $\mathbb{R}$ si n est impair

2) $f = h \circ g \circ h$; l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ si n est pair et $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ si n est impair

1.34



1.35 1) ${}^{r}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; ${}^{r}f(x) = \dfrac{x}{3}$

2) ${}^{r}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; ${}^{r}f(x) = \dfrac{3-x}{2}$

3) ${}^{r}f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$; ${}^{r}f(x) = \dfrac{1}{x}$

4) ${}^{r}f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$; ${}^{r}f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

5) ${}^{r}f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$; ${}^{r}f(x) = \dfrac{3-2x}{4-2x}$

6) ${}^{r}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; ${}^{r}f(x) = \sqrt[3]{x}$

1.36 Par exemple

1) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \; ; \; {}^{r}f(x) = \sqrt{x}$

2) $f: [-\frac{1}{2} ; +\infty[\;\to\; [-\frac{25}{4} ; +\infty[\; ; \; {}^{r}f(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{25}{4}}$

3) $f: [2 ; +\infty[\;\to\;]-\infty ; 4] \; ; \; {}^{r}f(x) = 2 + \sqrt{4 - x}$

4) $f: [0 ; \pi] \to [-1 ; 1] \; ; \; {}^{r}f(x) = \arccos(x)$

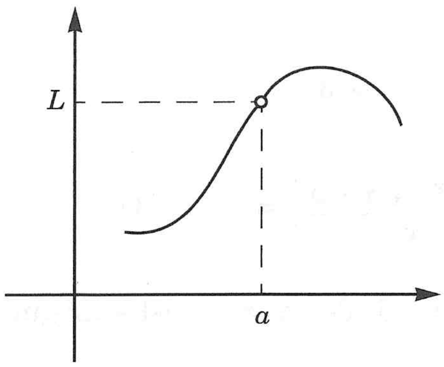
5) $f:]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\;\to\; \mathbb{R} \; ; \; {}^{r}f(x) = \arctan(x)$

6) $f: [-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}] \to [-1 ; 1] \; ; \; {}^{r}f(x) = \frac{\arcsin(x)}{2}$

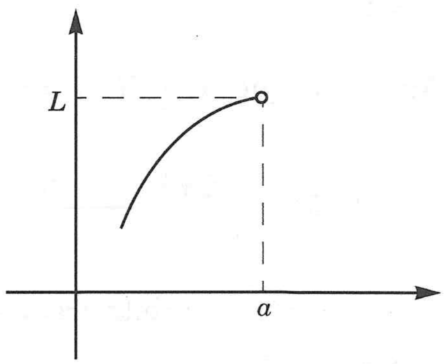
§ 2. Limites, continuité et asymptotes

1. Limites

La notion de limite est particulièrement utile pour déterminer le comportement du graphe d'une fonction au voisinage d'un «trou» ou d'un «bord» de son ensemble de définition.



«trou»



«bord»

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf éventuellement en a.

> Le nombre L est **limite de f en a** si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a, avec $x \neq a$.
>
> On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
>
> On dit encore que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a.
>
> Formellement
>
> Le nombre L est **limite de f en a** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
> $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

ou de manière équivalente si

$x \in \,]a-\delta\,;a+\delta[\, \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in \,]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[\,.$

Remarque

Si elle existe, la limite de la fonction f en a est unique.

1.2 Exemples

a) On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+3}{x-3}$ qui n'est pas définie en $x = 3$.

Montrons que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$. En effet, si $x \neq 3$

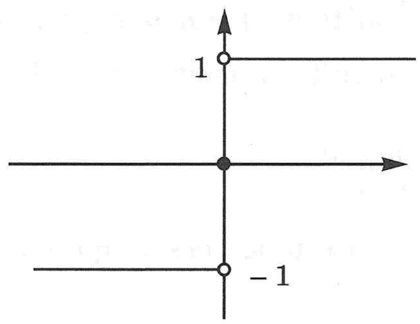
$$|f(x)-5| = \left| \frac{2x^2-7x+3}{x-3} - 5 \right| = 2 \left| \frac{x^2-6x+9}{x-3} \right| = 2\,|x-3|$$

Ainsi $f(x)$ est arbitrairement proche de 5 dès que x est suffisamment proche de 3 .

Formellement, ε étant un nombre strictement positif donné, en choisissant $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, on a

$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x)-5| < \varepsilon\,.$

b) La fonction sgn n'a pas de limite en 0 . Considérons en effet le graphe de cette fonction



Si x est proche de 0 en étant strictement positif, $f(x)$ est égal à 1 , alors que si x est proche de 0 en étant strictement négatif, $f(x)$ est égal à -1 . On ne peut donc pas rendre $f(x)$ arbitrairement proche d'un nombre L en prenant x suffisamment proche de 0 avec $x \neq 0$.

1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\,a\,;d\,[$. Le nombre L est **limite à droite de f en a** si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a avec $x > a$.

On note $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = L$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\,g\,;a\,[$. Le nombre L est **limite à gauche de f en a** si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a avec $x < a$.

On note $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} a} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = L$.

Exemple

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \operatorname{sgn}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \operatorname{sgn}(x) = -1$.

Propriété

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \underset{>}{\to} a} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x \underset{<}{\to} a} f(x) = L}$$

1.4 Limites de fonctions élémentaires

$\lim\limits_{x \to a} c = c$	$\lim\limits_{x \to a} x = a$
$\lim\limits_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$	$\lim\limits_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$
$\lim\limits_{x \to a} \lvert x \rvert = \lvert a \rvert$	$\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$

1.5 Propriétés des limites

Soit f et g des fonctions admettant une limite en a et soit λ un nombre réel.

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} [\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Remarques

a) Pour toute fonction rationnelle f, on a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ si a appartient à l'ensemble de définition de f.

b) Dans certains cas, une transformation de l'expression $f(x)$ permet de calculer la limite d'une fonction en un «trou» de son ensemble de définition.

Par exemple $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+1) = 3$.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a, sauf éventuellement en a.
Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent, alors $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

Théorème «des deux gendarmes»

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a, sauf éventuellement en a. Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.

Exemple

On a $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. En effet, comme $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$, on a $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, donc $-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$. Puisque $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, le théorème «des deux gendarmes» montre que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Limites particulières

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

2. Continuité

2.1 Définitions

Une fonction f est **continue en a** si elle est définie sur un intervalle ouvert contenant a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Une fonction f est **continue sur un intervalle ouvert** I si elle est continue en tout point de l'intervalle I.

Une fonction f est **continue sur un intervalle fermé** $[\,a\,;b\,]$ si elle est continue en tout point de l'intervalle $]\,a\,;b\,[$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = f(b)$.

Une fonction est continue sur une réunion d'intervalles si elle est continue sur chaque intervalle.

Le graphe d'une fonction continue sur un intervalle peut être tracé «sans lever le crayon».

2.2 Continuité de fonctions élémentaires

Les fonctions f données ci-dessous sont continues sur leur ensemble de définition

$f(x) = c$	$f(x) = x$
$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f(x) = \|x\|$	$f(x) = \sqrt{x}$

2.3 Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g des fonctions continues en a et soit λ un nombre réel

$f + g$ est continue en a

$f - g$ est continue en a

$\lambda \cdot f$ est continue en a

$f \cdot g$ est continue en a

$\dfrac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$

Si f est une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

Remarque

Les fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques, racine n-ième sont continues sur leur ensemble de définition.

2.4 Limites de fonctions composées

L'existence de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et de $\lim\limits_{t \to L} g(t)$ ne suffit pas en général à déterminer $\lim\limits_{x \to a} g(f(x))$. Toutefois, on a les résultats

> Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et si de plus g est continue en L, alors
> $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x \to a} f(x)) = g(L)$

> Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et si de plus $f(x) \neq L$ sur un intervalle ouvert contenant a, sauf éventuellement en a, alors
> $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{t \to L} g(t)$

Exemples

a) Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{3\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) - 1} = \sqrt{3 \cdot 1 - 1}$ $= \sqrt{2}$ en remarquant que la fonction $\sqrt{x}$ est continue.

b) Comme $\lim\limits_{x \to 0} 3x = 0$ et $3x \neq 0$ si $x \neq 0$, on peut écrire

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

2.5 Propriétés des fonctions continues

Continuité de la réciproque

> Soit I un intervalle et $f\colon I \to J$ une fonction bijective et continue. Alors, la réciproque ${}^{r}f$ est continue sur l'intervalle J.

Théorème de Bolzano

> Si f est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, alors la fonction f a au moins un zéro dans $[a\,;b]$.

Théorème de la valeur intermédiaire

> Si f est continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$, alors pour tout nombre γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Application

Déterminer à 0,01 près un zéro de la fonction $f(x) = x^3 + x - 1$.

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, et que $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes différents, il existe un zéro de f compris entre 0 et 1. Calculons successivement :

$f(0{,}5) = -\,0{,}375 < 0$ et $f(1) > 0$; donc f s'annule dans $]\,0{,}5\,;1\,[$.

$f(0{,}7) = 0{,}043 > 0$ et $f(0{,}5) < 0$; donc f s'annule dans $]\,0{,}5\,;0{,}7\,[$.

$f(0{,}6) = -\,0{,}184 < 0$ et $f(0{,}7) > 0$; donc f s'annule dans $]\,0{,}6\,;0{,}7\,[$.

$f(0{,}68) = -\,0{,}005568 < 0$ et $f(0{,}7) > 0$; donc f s'annule dans $]\,0{,}68\,;0{,}7\,[$.

Il y a donc un zéro x_0 compris entre 0,68 et 0,70, ce qui se note parfois $x_0 = 0{,}69 \pm 0{,}01$.

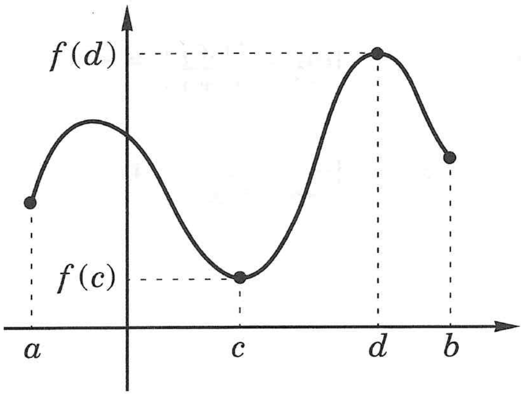
Théorème de Bolzano-Weierstrass

> L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.

Corollaire

> Une fonction continue sur un intervalle fermé $[\,a\,;b\,]$ admet un maximum absolu et un minimum absolu sur cet intervalle.

Illustration



$f([\,a\,;b\,]) = [\,f(c)\,;\,f(d)\,]$.
De plus, $f(c)$ est le minimum absolu et $f(d)$ le maximum absolu de la fonction sur $[\,a\,;b\,]$.

3. Extensions de la notion de limite

3.1 Limites infinies

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf éventuellement en a.

> On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand dès que x est suffisamment proche de a, avec $x \neq a$,
>
> On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ si $\lim\limits_{x \to a} (-f(x)) = +\infty$.

On définit de manière semblable

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = -\infty$.

3.2 Propriétés des limites infinies

Les propriétés des limites (page 32) ne se généralisent pas sans autre aux limites infinies. Cependant, un certain nombre d'entre elles restent valables. Par exemple

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} [\,f(x) + g(x)] = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L < 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} [\, f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemples

a) $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{5}{x-1} \right) = \text{''}\, \frac{5}{0_+} \,\text{''} = +\infty$$

b) $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{5}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} \right) = \text{''}\, \frac{5}{0_+} + \frac{3}{0_+} \,\text{''} = \text{''}(+\infty) + (+\infty)\text{''} = +\infty$$

c) $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{3}{2 - \dfrac{5}{x-1}} = \text{''}\, \frac{3}{2 - \dfrac{5}{0_-}} \,\text{''} = \text{''}\, \frac{3}{2 + (+\infty)} \,\text{''} = \text{''}\, \frac{3}{+\infty} \,\text{''} = 0$$

Remarque

Lorsqu'un calcul de limite conduit à des «expressions» du type ci-dessous

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$

appelées **formes indéterminées**, on ne peut pas conclure de manière immédiate ; il est en général nécessaire de transformer l'expression $f(x)$.

Exemples

a) Forme indéterminée $\text{''}\, 0 \cdot \infty \,\text{''}$

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 - 5x + 3) \cdot \frac{1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x-3)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \to 1} (2x - 3) = -1$$

b) Forme indéterminée "$\infty - \infty$"

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{x(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

3.3 Limites à l'infini

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\, a\, ; +\infty\, [$. On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment grand ou de manière équivalente, si $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\, ; a\,]$. On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = L$.

Les propriétés des limites (page 32) peuvent être étendues sans autre aux limites à l'infini.

Cas particuliers

Le comportement à l'infini des fonctions polynômes ne dépend que de leur monôme de plus haut degré.

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n)}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \pm\infty & \text{si } n > m \end{cases}}$$

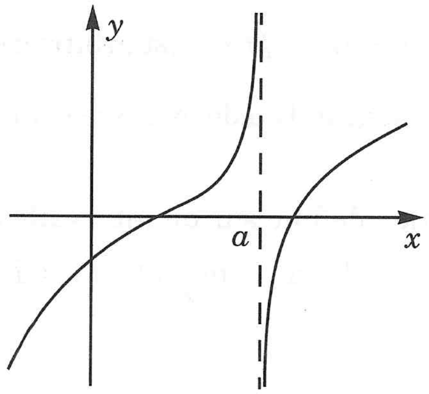
4. Asymptotes

4.1 Asymptotes verticales

Définition

> La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de la fonction f si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} |f(x)| = +\infty$ ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} |f(x)| = +\infty$.

Illustration



Remarque

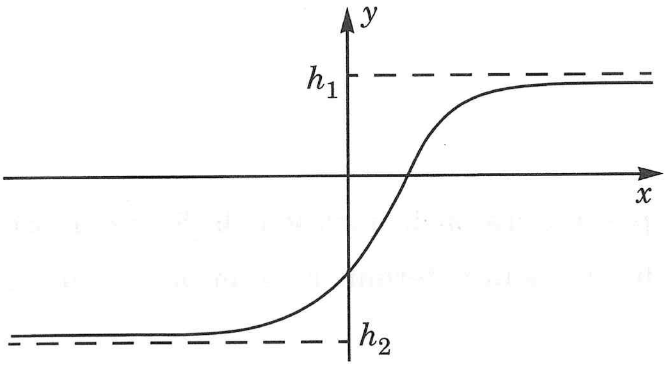
Soit f une fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$. Les asymptotes verticales de f sont à chercher parmi les droites d'équation $x = a$ où a est un zéro du polynôme $d(x)$.

4.2 Asymptotes affines

Définitions

> La droite d'équation $y = h_1$ est une **asymptote horizontale** de la fonction f vers $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = h_1$.
>
> La droite d'équation $y = h_2$ est une **asymptote horizontale** de la fonction f vers $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = h_2$.

Illustration



Remarque

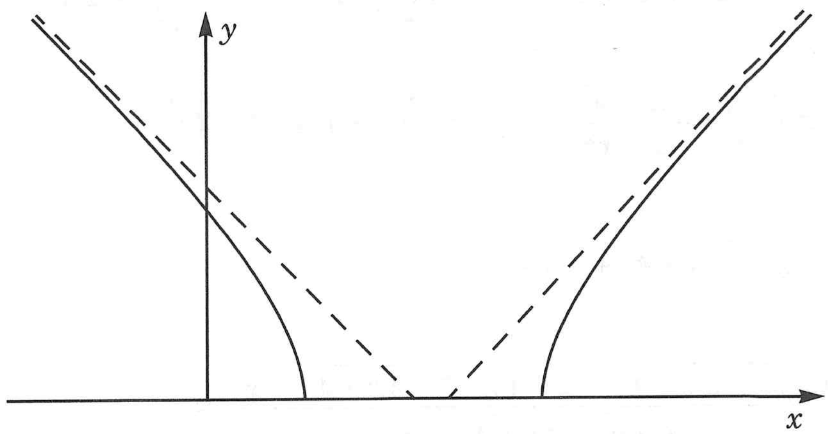
Une fonction rationnelle f définie par $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ admet une asymptote horizontale si et seulement si $\deg(n(x)) \leq \deg(d(x))$. Si f admet une asymptote horizontale, celle-ci est la même à gauche et à droite:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Définitions

> La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** de la fonction f vers $+\infty$ si $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = 0$.
>
> La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** de la fonction f vers $-\infty$ si $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} \delta(x) = 0$.

Illustration



Le signe de $\delta(x)$ permet de déterminer la position relative du graphe et de l'asymptote.

Remarque

Si $f(x)$ ne peut pas s'écrire facilement sous la forme $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = 0$, on peut déterminer m et h en calculant les limites suivantes

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)}$$

La situation est analogue pour $x \to -\infty$.

5. Exercices résolus

5.1 Calculer les limites

a) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 7}{2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{2}x = -\infty .$$

b) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4} .$$

c) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{3 + 7x^3 - 5x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{7x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{7x} = 0 .$$

d) $$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 2x) = \lim_{x \to -\infty} \left(|x|\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 2x\right) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x\left(-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 2\right)\right) = \text{"}(-\infty)\cdot(-1+2)\text{"} = -\infty .$$

e) $$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x)\cdot(\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x)}{(\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x)} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x + 4}{|x|\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 + \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1} = \frac{-2}{-2} = 1\,.$$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x) = \text{"}(+\infty) + (+\infty)\text{"} = +\infty\,.$

5.2 Déterminer les asymptotes verticales de $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$.

Les zéros du dénominateur étant 1 et -2, les asymptotes verticales possibles de f sont les droites d'équations $x = 1$ et $x = -2$.

On a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x+2} = -\dfrac{1}{3}$,

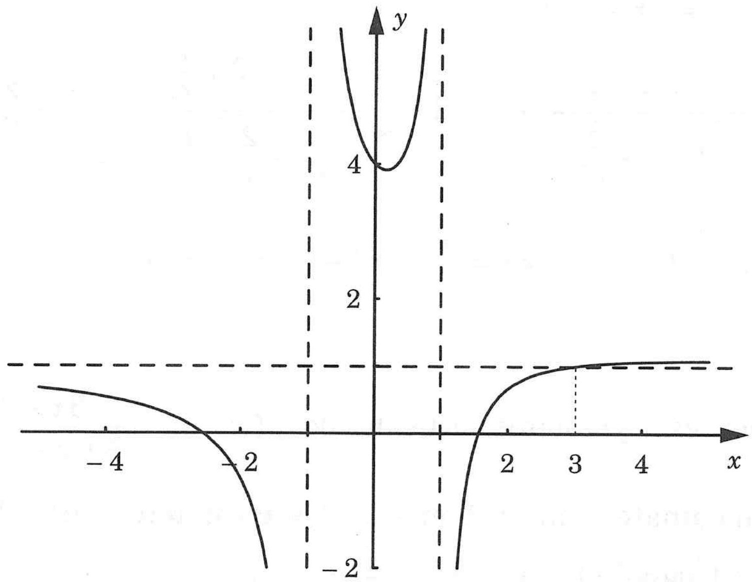
donc la droite d'équation $x = 1$ n'est pas une asymptote verticale de f ; le graphe de f possède un «trou» de coordonnées $\left(1\,; -\frac{1}{3}\right)$.

En revanche, comme $\lim\limits_{x \to -2} |f(x)| = \text{"}\dfrac{12}{0_+}\text{"} = +\infty$, la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale de f.

5.3 Déterminer les asymptotes affines de $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 4}{x^2 - 1}$.

Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, la fonction f admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale vers $-\infty$ et vers $+\infty$. La position du graphe relativement à l'asymptote horizontale est donnée par le signe de $\delta(x) = f(x) - 1 = \dfrac{x-3}{x^2-1}$.

x		-1		1		3	
$\delta(x)$	$-$		$+$		$-$	0	$+$
Position du graphe de f relativement à l'asymptote	dessous		dessus		dessous	coupe	dessus

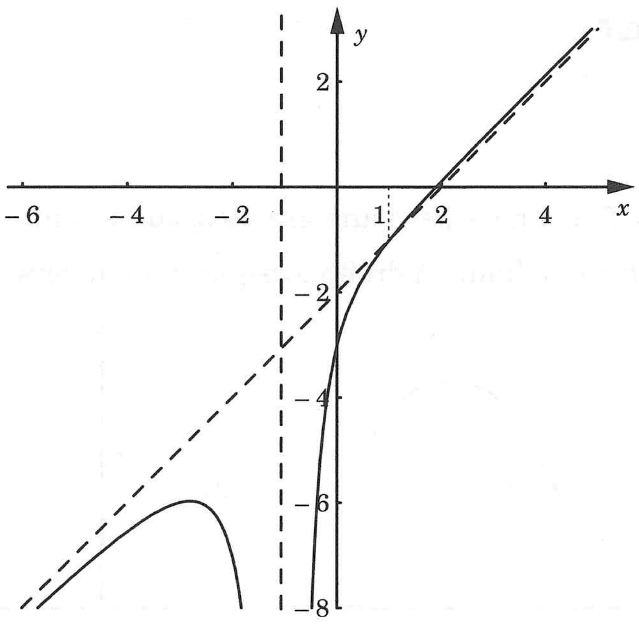


5.4 Déterminer les asymptotes affines de $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x - 3}{(x+1)^2}$.

La division euclidienne du numérateur de $f(x)$ par son dénominateur permet d'écrire $x^3 - 2x - 3 = (x-2)(x+1)^2 + (x-1)$, donc $f(x) = x - 2 + \delta(x)$ où $\delta(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$.

Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \delta(x) = 0$, la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ vers $-\infty$ et vers $+\infty$. La position du graphe relativement à l'asymptote oblique est donnée par le signe de $\delta(x)$

x		-1		1	
$\delta(x)$	$-$		$-$	0	$+$
Position du graphe de f relativement à l'asymptote	dessous		dessous	coupe	dessus



5.5 Calculer les équations des asymptotes de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2px + q}$.

On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2+2px+q}}{x} = \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}}{x}$,

donc $m_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}\right) = -1$

et $m_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}}\right) = 1$.

On en déduit $h_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - m_1 x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2px+q} + x) =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2+2px+q} + x)(\sqrt{x^2+2px+q} - x)}{\sqrt{x^2+2px+q} - x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2px+q}{\sqrt{x^2+2px+q} - x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2p+\frac{q}{x}}{\frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}} - 1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2p+\frac{q}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{q}{x^2}} - 1}\right) = -p\ .$$

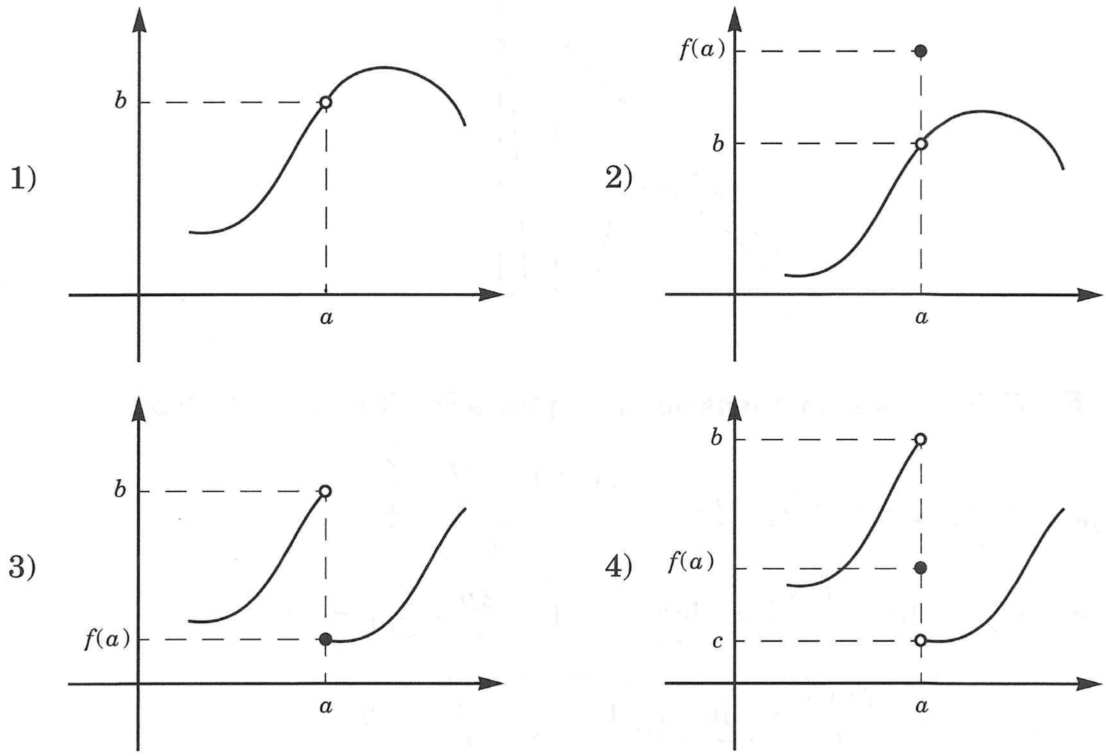
Des calculs semblables montrent que $h_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - m_2 x) = p$.

La fonction admet donc une asymptote oblique vers $-\infty$, d'équation $y = -x - p$, et une asymptote oblique vers $+\infty$, d'équation $y = x + p$.

Exercices

Limites

2.1 Les fonctions f, données par leurs graphes, admettent-elles une limite, une limite à gauche, une limite à droite lorsque x tend vers a ?



2.2 Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{2x^2 + x - 3}$

4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 2x + 2}{x + 1}$

6) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$

7) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$

8) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

9) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - x}{x + 2}$

10) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$

11) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 6}{(x + 2)^2}$

12) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + x^3 - 2}{x^3 + x^2 - 2}$

13) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

2.3 Trouver une fonction f non définie en a telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

1) $a = 2, \quad b = 3$

2) $a = -1, \quad b = 7$

3) $a = 0, \quad b = -5$

4) $a = 4, \quad b = -1$

2.4 Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|2x-3| - |2x+3|}{x}$

2.5 Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$ si $a > 0$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x - 1}$

6) $\lim\limits_{t \to \sqrt{5}} \dfrac{t - \sqrt{5}}{t^2 - 5}$

7) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{\sqrt{2x-1} - 3}$

8) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1} - 2}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1} - 1}$

10) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{2-x}}$

11) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{16+h} - 4}{h}$

12) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}$

2.6 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions données ci-dessous, puis déterminer la limite de ces fonctions pour x tendant vers x_0

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$ $\quad x_0 = 2$

2) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x+7}}{x - 2}$ $\quad x_0 = 2$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+24} - \sqrt{10x+15}}{x-1}$ $\qquad x_0 = 1$

4) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1} - 1}$ $\qquad x_0 = 0$

2.7 Calculer, si elles existent, la limite, la limite à droite et la limite à gauche des fonctions suivantes pour x tendant vers x_0

1) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\qquad x_0 = 0$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{|x|}$ $\qquad x_0 = 0$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{|x|}$ $\qquad x_0 = 0$

4) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad x_0 = 2$

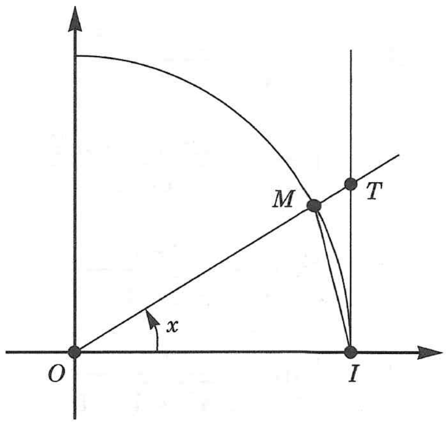
2.8 On considère le cercle de centre O et de rayon 1.
En comparant les aires des triangles OIM et OIT avec celle du secteur circulaire OIM, montrer que

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x) \text{ si } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

En déduire que

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

puis montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$



2.9 En amplifiant les fractions par $1 + \cos(x)$, montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

2.10 Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$ $\qquad$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{\sin^2(x)}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(7x)}{\sin(3x)}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x}$ $\quad a \neq 0$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x - 1)}{x - 1}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

9) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{2x^2 + x}$

2.11 En utilisant des formules de trigonométrie, calculer les limites

1) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(a + h) - \sin(a)}{h}$

2) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(a + h) - \cos(a)}{h}$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x) - \sin(a)}{\cos(x) - \cos(a)}$

2.12 Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2(x)}{x \cdot \tan(x)}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

4) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} ((1 + \sin(x)) \cdot \tan^2(x))$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{x}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2(2x)}{1 - \cos(3x)}$

7) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \sin(x)}$

8) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(x)}{x}$

2.13 Utiliser le théorème «des deux gendarmes» pour déterminer

1) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2.14 Montrer que si $0 \leq f(x) \leq 3$ pour tout x, alors $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot f(x)) = 0$.

2.15 Soit f une fonction telle que $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ si $|x| \leq 1$ et telle que $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ si $|x| > 1$. Calculer $\lim_{x \to -1} f(x)$, $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to 1} f(x)$.

2.16 Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$ si $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$.

2.17 Sur la parabole d'équation $y = x^2$, on choisit un point M distinct de l'origine O . La médiatrice du segment $[OM]$ coupe l'axe Oy en N . Vers quelle valeur tend l'ordonnée de N lorsque M s'approche de l'origine ?

2.18 Calculer la valeur limite de la solution la plus proche de zéro de l'équation $a x^2 + 3x + 1 = 0$ lorsque le coefficient a tend vers 0 .

2.19 Calculer $\lim_{\substack{x \to n \\ >}} (x \cdot \mathrm{E}(x))$ et $\lim_{\substack{x \to n \\ <}} (x \cdot \mathrm{E}(x))$ avec $n \in \mathbb{Z}$, E étant la fonction partie entière.

2.20 Est-ce que $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ et $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x))$ peuvent exister alors que les deux limites $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ n'existent pas ?

2.21 L'existence de $\lim_{x \to a} f(x)$ et de $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ entraîne-t-elle l'existence de $\lim_{x \to a} g(x)$?

2.22 La limite $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ peut-elle exister si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe alors que $\lim_{x \to a} g(x)$ n'existe pas ?

2.23 En supposant que $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x))$ existent, peut-on déduire que $\lim_{x \to a} g(x)$ existe ?

Continuité

2.24 Déterminer une solution approchée à 0,01 près des équations suivantes dans l'intervalle prescrit

1) $\cos(x) - x = 0$ $\qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2) $\sqrt{x} = \cos(x)$ $\qquad 0 \leq x \leq \pi$

3) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\qquad -2 \leq x \leq 0$

4) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\qquad 0 \leq x \leq 1$

5) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\qquad 1 \leq x \leq 5$

6) $\tan(x) + x = 0$ $\qquad \frac{\pi}{2} < x < \pi$

2.25 Démontrer le théorème de la valeur intermédiaire (page 36).

2.26 On considère deux nombres a et b tels que $a < b$, ainsi que la fonction f donnée par $f(x) = x + (x-a)(x-b)$. Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour démontrer qu'il existe une valeur x_0 telle que $f(x_0) = \dfrac{a+b}{2}$.

2.27 Soit f une fonction continue de $[a\,;b]$ vers $[a\,;b]$. Prouver qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = c$.

2.28 On dit qu'on peut prolonger une fonction f par continuité en a s'il existe une fonction g continue en a telle que $f(x) = g(x)$ si $x \neq a$.
Peut-on prolonger les fonctions f suivantes par continuité en a ?

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ $\qquad a = -1$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)^2}$ $\qquad a = -1$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{3 - x}$ $\qquad a = 3$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x - 1}$ $\qquad a = 1$

5) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\qquad a = 0$

6) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{|x|}$ $\qquad a = 0$

2.29 Dans un récipient sphérique de 10 cm de rayon, on verse 2 litres et demi d'eau. Quel est le niveau de l'eau dans la sphère ?

On admettra que le volume V d'une calotte sphérique de rayon r et de hauteur h est donné par la formule $V = \frac{1}{3}\pi\, h^2(3r - h)$.

2.30 Un cylindre couché de 150 cm de diamètre intérieur a une contenance de 6'000 litres. Sur une règle verticale, on doit marquer des graduations qui indiquent les niveaux correspondants à 1'000 litres, 2'000 litres, 3'000 litres, 4'000 litres et 5'000 litres. A quelle hauteur faut-il placer les traits de graduation ?

Indication: calculer d'abord l'angle sous lequel est vu le niveau du liquide depuis l'axe du cylindre.

2.31 Durant 5 ans, chaque premier janvier, on verse 1'000 francs sur un compte bancaire.

1) Sachant que le taux d'intérêt annuel est de 4 % , calculer le montant total à disposition sur ce compte le 31 décembre de la dernière année.

2) Quel devrait être le taux d'intérêt annuel pour obtenir 5'800 francs avec les mêmes versements ?

Extensions de la notion de limite

2.32 Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 6}{(x+2)^2}$ $\qquad$ 2) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$

3) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x + 1}{x^2 - 4}$ $\qquad$ 4) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

5) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$ $\qquad$ 6) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$

7) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{|x^2-4|}$ 8) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x^2-1|}{x^2-2x+1}$

2.33 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions données ci-dessous. Calculer les limites de ces fonctions (éventuellement à droite ou à gauche) aux points où elles ne sont pas définies ainsi qu'en $+\infty$ et $-\infty$.

1) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^6-1}{x^4-1}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8}$ 4) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-5x}{x^4-5x^3}$

2.34 La vitesse de la lumière (environ 3×10^8 m/s) est désignée par c . En théorie de la relativité, on emploie la formule de contraction des longueurs de Lorentz

$$L(v) = L_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

où $L(v)$ est la longueur d'un objet en mouvement à une vitesse v et L_0 sa longueur au repos.

Einstein a montré aussi que la masse $m(v)$ d'un objet est liée à sa vitesse v par

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Calculer $\lim\limits_{v \underset{<}{\to} c} L(v)$ et $\lim\limits_{v \underset{<}{\to} c} m(v)$.

2.35 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes

1) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x}$ 2) $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$

3) $f(x) = \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1}$ 4) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15}$

5) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-15}{(x+3)^2}$ 6) $f(x) = \dfrac{-3x+2}{4x+4}$

7) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^3}$ 8) $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

2.36 Calculer, si elles existent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$
2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$
3) $f(x) = 2x - \cos(x)$
4) $f(x) = \dfrac{2x - \cos(x)}{x - 1}$
5) $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
6) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
7) $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{2x}{x^2 + 1}\right)$
8) $f(x) = 5x + \sqrt{3x^2 + 1}$
9) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$
10) $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$
11) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4}$
12) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$
13) $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{4x^2 + 2x - 5}}{x + 3}$
14) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

2.37 Utiliser le théorème «des deux gendarmes» pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ (où E désigne la fonction partie entière).

Asymptotes

2.38 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes (en précisant la position du graphe par rapport aux asymptotes), puis esquisser le graphe de chacune des fonctions f données ci-dessous

1) $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$
2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$
3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 8}$
5) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$
6) $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{(x + 1)^2}$
7) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{3}{x}$
8) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$
9) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$
10) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$

11) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$ 12) $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4}$

13) $f(x) = 5x-3+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

2.39 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes des fonctions f données par

1) $f(x) = x\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ 2) $f(x) = x+\sqrt{x^2-1}$

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$ 4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{(x-3)^2}}$

2.40 Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les asymptotes de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x^n+3}{x^2-9}$.

2.41 Déterminer, suivant les valeurs du réel m , les asymptotes des fonctions f données par

1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2mx-m+2}$ 2) $f(x) = \dfrac{mx^3}{x^2+2mx-m+2}$

2.42 Trouver, dans chacun des cas suivants, une fonction rationnelle avec

1) une asymptote oblique d'équation $y = 3x-5$;

2) une asymptote horizontale d'équation $y = -2$;

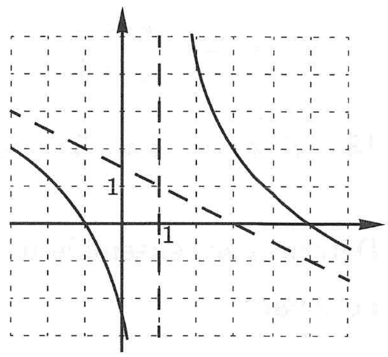
3) une asymptote verticale d'équation $x = 7$;

4) une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et des asymptotes verticales d'équations $x = 3$ et $x = -10$;

5) une asymptote verticale d'équation $x = 5$ et une asymptote oblique d'équation $y = -2x+5$.

2.43 Déterminer les coefficients réels a, b, c et d de la fonction rationnelle f donnée par $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ dont le graphe passe par le point $A(2\,;-2)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -3$ et $y = -2x+1$.

2.44 Trouver l'expression d'une fonction rationnelle f dont le graphe a la même allure que celui représenté sur le dessin ci-contre.



2.45 Trouver une fonction rationnelle f dont le graphe passe par le point $A(-5\,;20)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -2$, $x = 1$ et $y = 3x - 7$.

2.46 Trouver une fonction rationnelle dont le graphe passe par le point $A(3\,;-2)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $15x - 5y - 12 = 0$ et $x = 4$.
Choisir la solution la plus simple pour cette fonction, c'est-à-dire celle pour laquelle les degrés du numérateur et du dénominateur sont les plus petits possibles. Exprimer le résultat sous la forme d'une seule fraction.

2.47 De l'eau salée contenant 5 grammes de sel par litre s'écoule à raison de 10 litres par heure dans une grande cuve contenant initialement 10 litres d'eau pure.

1) Calculer le volume total d'eau et la quantité de sel de la cuve au bout de t heures.

2) Quelle est la concentration en sel après une longue période de temps ?

2.48 Sur l'hyperbole d'équation $xy = 1$, on considère un point quelconque M d'abscisse x strictement positive et on note P sa projection orthogonale sur l'axe Ox. Soit encore le point $A(2\,;2)$.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$ où $S(x)$ est l'aire du triangle AMP exprimée en fonction de la variable x.

Exercices récapitulatifs

2.49 Calculer, si elles existent, les limites suivantes

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^4 - \frac{3}{x}}{x^5 - x + \frac{1}{x}}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{\sin^2(x)}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x}}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x-1} \quad n \in \mathbb{N}^*$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{|x|-1}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (x^2 - 1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$

9) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{\sin(\pi x)}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

11) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}}$

12) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

2.50 Déterminer les asymptotes verticales, horizontales et obliques des fonctions suivantes

1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x-1}$

3) $f(x) = x + \sqrt{x}$

4) $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5) $f(x) = 3x + \sqrt{x^2+1}$

6) $f(x) = \dfrac{x(x+|x|)+1}{x-3}$

7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{x^3+2}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2.51 On considère les fonctions réelles f, g et h données par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$, $g(x) = 3x-1$ et $h(x) = x^2$.

Donner les asymptotes verticales et affines des fonctions suivantes

1) f 2) ${}^{r}f$ 3) $f \circ h$

4) $h \circ f$ 5) $f \circ g$ 6) $g \circ f$

7) $f \circ f$ 8) $g \cdot f$

2.52 Calculer, si elles existent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{3x^2 + 8x + 15}$ 2) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x$ 4) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$

2.53 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes (en précisant la position relative du graphe par rapport aux asymptotes), puis esquisser le graphe de chacune des fonctions f données ci-dessous

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x}{x^2 - 5x + 6}$ 2) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 6}$

Exercices d'application

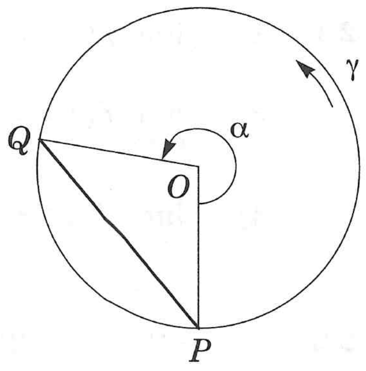
Pour chacun des exercices suivants, on demande de trouver une équation qui permette de résoudre le problème posé. On situera ensuite, par exemple à l'aide d'une représentation graphique, la solution cherchée dans un intervalle. Finalement on calculera une estimation de cette solution à 0,005 près.

2.54 L'aire d'un triangle rectangle vaut 12 cm^2. La hauteur issue de l'angle droit partage l'hypoténuse en deux parties de longueurs respectives 2 cm et x cm. Calculer x.

2.55 Un stère de bois (cube de 1 m de côté) est adossé à une grande maison. A quelle distance x de la maison faut-il poser le pied d'une échelle de 10 m pour qu'elle s'appuie tant contre la façade que contre l'angle du stère ?

2.56 Je place la somme A à intérêts composés dans le but d'obtenir la somme B. Si le taux d'intérêt est de t % par an, j'obtiens B en 11 ans. Si le taux est de $1\ \%$ plus élevé, j'obtiens B en 9 ans. Calculer t.

2.57 Une planète se déplace à vitesse constante v_1 sur une orbite circulaire γ de centre O. Au point P, on imagine qu'un vaisseau spatial quitte la planète et voyage à vitesse constante v_2 en ligne droite dans le plan de l'orbite de la planète. Si $v_1 = 4v_2$, calculer l'angle α pour que la planète puisse récupérer le vaisseau en un point Q de son orbite.



2.58 Un triangle ABC isocèle de sommet A a pour périmètre 16 cm . Le rayon de son cercle inscrit est de 1 cm. Calculer la longueur de la base $[BC]$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

2.1 1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ 2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = c$

2.2 1) -2 2) -1 3) $\frac{1}{5}$ 4) 4 5) 2

6) 4 7) 0 8) 0 9) $\frac{3}{2}$ 10) 3

11) — 12) $\frac{7}{5}$ 13) 2 14) n

2.3 Par exemple

1) $f(x) = \dfrac{3x-6}{x-2}$ 2) $f(x) = \dfrac{7x+7}{x+1}$

3) $f(x) = \dfrac{-5x}{x}$ 4) $f(x) = \dfrac{4-x}{x-4}$

2.4 1) 2 2) $\frac{1}{4}$ 3) -1 4) -4

2.5 1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

5) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ 6) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ 7) 3 8) $\dfrac{-2}{3}$

9) 2 10) $\frac{5}{3}$ 11) $\frac{1}{8}$ 12) $-2\sqrt{3}$

2.6 1) $D_f = [-2\,;+\infty[\, \setminus \{2\}$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{4}$

2) $D_f = [-7\,;+\infty[\, \setminus \{2\}$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\frac{1}{6}$

3) $D_f = [-\frac{3}{2}\,;+\infty[\, \setminus \{1\}$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\frac{9}{10}$

4) $D_f = \mathbb{R}^*$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

2.7 1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 2$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -2$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 1$

2.10 1) 2 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{1}{20}$ 4) $\frac{1}{2}$ 5) $\frac{7}{3}$

6) a 7) 1 8) 1 9) -1 10) 1

2.11 1) $\cos(a)$ 2) $-\sin(a)$ 3) $-\cot(a)$

2.12 1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) 2 4) $\frac{1}{2}$

5) — 6) $\frac{8}{9}$ 7) — 8) 0

2.13 1) 0 2) 0

2.15 $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2.16 0

2.17 $\frac{1}{2}$

2.18 $-\frac{1}{3}$

2.19 n^2 et $n(n-1)$

2.20 oui

2.21 oui

2.22 non

2.23 oui si $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$; non sinon

2.24 1) $0{,}74$ 2) $0{,}64$ 3) $-1{,}64$

4) $0{,}14$ 5) $4{,}50$ 6) $2{,}03$

2.28 1) $g(x) = x-1$ 2) non

3) $g(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}+2}$ 4) $g(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}}$

5) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 6) non

2.29 11,30 cm

2.30 Les traits de graduation doivent être placés à

33,50 cm ; 55,13 cm ; 75 cm ; 94,87 cm et 116,50 cm

2.31 1) 5'633 francs 2) 5 %

2.32 1) $+\infty$ 2) — 3) $+\infty$ 4) $-\infty$

5) $+\infty$ 6) $-\infty$ 7) $+\infty$ 8) $+\infty$

2.33 1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

2) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{3}{2}$;

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\,;4\}$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\,;5\}$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

2.34 $\lim\limits_{\substack{v \to c \\ <}} L(v) = 0$; $\lim\limits_{\substack{v \to c \\ <}} m(v) = +\infty$

2.35 1) $+\infty$ et $-\infty$ 2) 0 et 0 3) $+\infty$ et $-\infty$

4) $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$ 5) 2 et 2 6) $-\frac{3}{4}$ et $-\frac{3}{4}$

7) 0 et 0 8) 2 et 2

2.36 1) $\frac{1}{2}$ et $+\infty$ 2) 2 et -2 3) $+\infty$ et $-\infty$

4) 2 et 2 5) 1 et 1 6) 0 et 0

7) 2 et 2 8) $+\infty$ et $-\infty$ 9) $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$

10) 0 et $-\infty$ 11) 1 et -1 12) 0 et -2

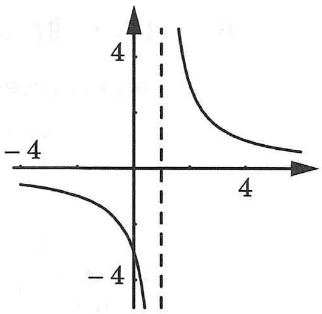
13) 0 et 4 14) $\frac{1}{2}$ et —

2.37 1 et 1

2.38 1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

asymptotes $x = 1$ et $y = 0$

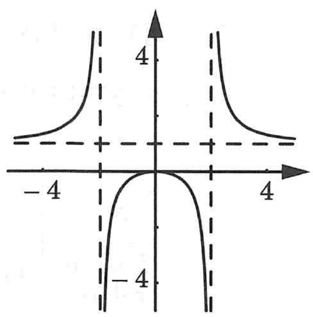
x		1	
$\delta(x)$	$-$		$+$
Position relative	dessous		dessus



2) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$;

asymptotes $x = -2$, $x = 2$ et $y = 1$

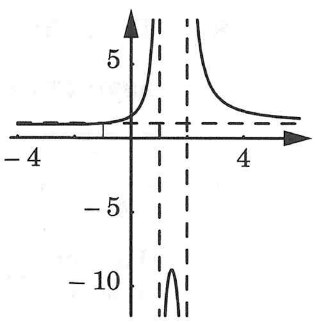
x		-2		2	
$\delta(x)$	$+$		$-$		$+$
Position relative	dessus		dessous		dessus



3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\}$;

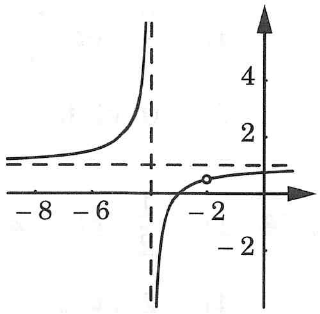
asymptotes $x = 1$, $x = 2$ et $y = 1$

x		-1		1		2	
$\delta(x)$	$-$	0	$+$		$-$		$+$
Position relative	dessous	coupe	dessus		dessous		dessus



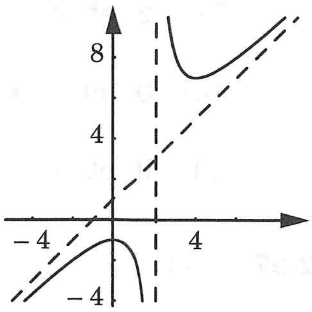
4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;-4\}$;
asymptotes $x = -4$ et $y = 1$

x		-4		-2	
$\delta(x)$	$+$		$-$		$-$
Position relative	dessus		dessous		dessous



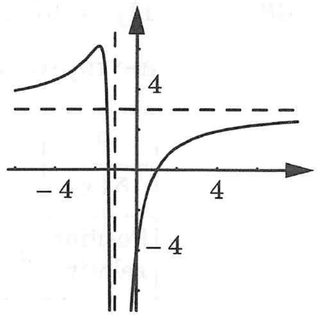
5) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
asymptotes $x = 2$ et $y = x + 1$

x		2	
$\delta(x)$	$-$		$+$
Position relative	dessous		dessus



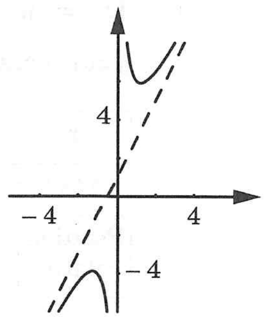
6) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
asymptotes $x = -1$ et $y = 3$

x		$-\frac{7}{5}$		-1	
$\delta(x)$	$+$	0	$-$		$-$
Position relative	dessus	coupe	dessous		dessous



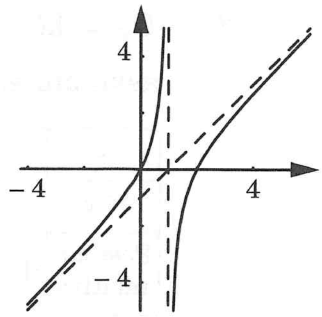
7) $D_f = \mathbb{R}^*$;
asymptotes $x = 0$ et $y = 2x + 1$

x		0	
$\delta(x)$	$-$		$+$
Position relative	dessous		dessus



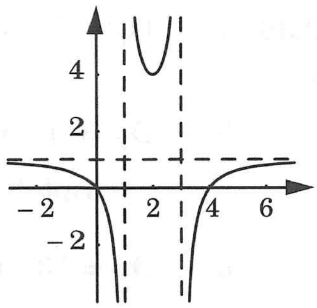
8) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
asymptotes $x = 1$ et $y = x - 1$

x		1	
$\delta(x)$	$+$		$-$
Position relative	dessus		dessous



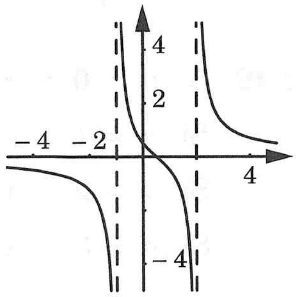
9) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\,;3\}$;
asymptotes $x = 1$, $x = 3$ et $y = 1$

x		1		3	
$\delta(x)$	$-$		$+$		$-$
Position relative	dessous		dessus		dessous



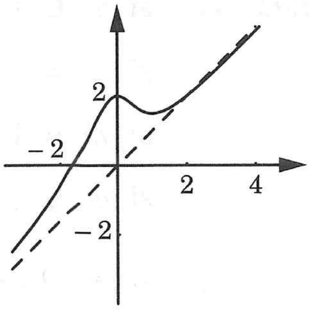
10) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;2\}$;
asymptotes $x = -1$, $x = 2$ et $y = 0$

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
$\delta(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
Position relative	dessous		dessus	coupe	dessous		dessus



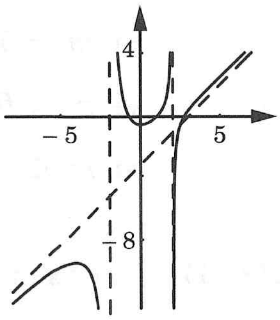
11) $D_f = \mathbb{R}$;
asymptote $y = x$

x		2	
$\delta(x)$	$+$	0	$-$
Position relative	dessus	coupe	dessous



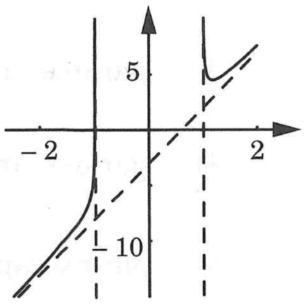
12) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$;
asymptotes $x = -2$, $x = 2$ et $y = x - 3$

x		-2		2		$\frac{5}{2}$	
$\delta(x)$	$-$		$+$		$-$	0	$+$
Position relative	dessous		dessus		dessous	coupe	dessus



13) $D_f =]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$;
asymptotes $x = -1$, $x = 1$ et $y = 5x - 3$

x		-1		1	
$\delta(x)$	$+$				$+$
Position relative	dessus				dessus



2.39 1) $D_f =]-\infty\,;-1[\ \cup\ [0\,;+\infty[$. Asymptotes $x = -1$ et $y = x - \frac{1}{2}$

2) $D_f =]-\infty\,;-1]\ \cup\ [1\,;+\infty[$. Asymptote vers $-\infty$: $y = 0$, Asymptote vers $+\infty$: $y = 2x$.

3) $D_f =]3\,;+\infty[$. Asymptotes $x = 3$ et $y = 0$ vers $+\infty$.

4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Asymptotes $x = 3$ et $y = 0$.

2.40 Si $n = 0$: $x = -3$, $x = 3$ et $y = 0$;
Si $n = 1$: $x = 3$ et $y = 0$;
Si $n = 2$: $x = -3$, $x = 3$ et $y = 1$;
Si $n = 3$: $x = -3$, $x = 3$ et $y = x$;
Si $n > 3$: $x = -3$, $x = 3$.

2.41 1) si $m \in\ ]-\infty\,;-2[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$: $x = -m \pm \sqrt{m^2+m-2}$ et $y = 1$;
si $m = -2$: $x = 2$ et $y = 1$;
si $m = 1$: $x = -1$ et $y = 1$;
si $m \in\ ]-2\,;1[$: $y = 1$.

2) si $m \in]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$: $x = -m \pm \sqrt{m^2+m-2}$ et $y = mx - 2m^2$;
si $m = -2$: $x = 2$ et $y = -2x-8$;
si $m = 1$: $x = -1$ et $y = x-2$;
si $m = 0$: $y = 0$;
si $m \in\ ]-2\,;1[$: $y = mx - 2m^2$.

2.42 1) par exemple $f(x) = 3x - 5 + \frac{1}{x}$;

2) par exemple $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$;

3) par exemple $f(x) = \frac{1}{x-7}$;

4) par exemple $f(x) = \frac{1}{x^2+7x-30}$;

5) par exemple $f(x) = -2x + 5 + \frac{1}{x-5}$;

2.43 $a = -2$, $b = -5$, $c = 8$ et $d = 3$

2.44 Par exemple $f(x) = \dfrac{-x^2+4x+5}{2x-2}$

2.45 Par exemple $f(x) = 3x - 7 + \dfrac{756}{x^2+x-2}$

2.46 Par exemple $f(x) = \dfrac{15x^2-72x+91}{5x-20}$

2.47 1) volume total : $10+10t$ litres ; quantité de sel : $50t$ grammes

2) 5 g/litre

2.48 $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \dfrac{1}{2}$

2.49

1) 0	2) 1	3) 1	4) $\dfrac{1}{2}$
5) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$	*6)* n	7) 2	8) 0
9) $\dfrac{-2}{\pi}$	10) —	11) $+\infty$	12) —

2.50 1) $x = -1$ et $y = 0$;

2) $x = 1$, $y = \sqrt{2}$ vers $+\infty$ et $y = -\sqrt{2}$ vers $-\infty$;

3) —

4) $x = 0$, $y = x$ vers $+\infty$;

5) $y = 4x$ vers $+\infty$, $y = 2x$ vers $-\infty$;

6) $x = 3$, $y = 2x+6$ vers $+\infty$ et $y = 0$ vers $-\infty$

7) $y = -1$ vers $+\infty$ et $y = x$ vers $-\infty$;

2.51

1) $x = 4$ et $y = 2$	2) $x = 2$ et $y = 4$
3) $x = \pm 2$ et $y = 2$	4) $x = 4$ et $y = 4$
5) $x = \dfrac{5}{3}$ et $y = 2$	6) $x = 4$ et $y = 5$
7) $x = \dfrac{15}{2}$ et $y = -\dfrac{3}{2}$	8) $x = 4$ et $y = 6x+19$

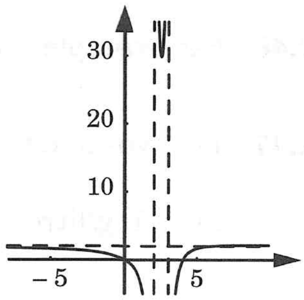
2.52 1) $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ 2) 0 et 0

3) 1 et 1 4) 1 et -1

2.53 1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\,;3\}$;

asymptotes $x = 2$, $x = 3$ et $y = 2$

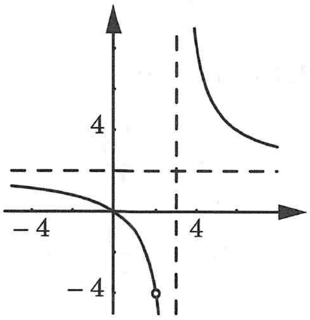
x		2		3		6	
$\delta(x)$	$-$		$+$		$-$	0	$+$
Position relative	dessous		dessus		dessous	coupe	dessus



2) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\,;3\}$;

asymptotes $x = 3$ et $y = 2$

x		2		3	
$\delta(x)$	$-$		$-$		$+$
Position relative	dessous		dessous		dessus



2.54 5,342 cm

2.55 9,940 m ou 1,110 m .

2.56 $t = 4{,}385\ \%$

2.57 283,6°

2.58 2,39 cm ou 7,42 cm

§ 3. DÉRIVÉE

1. Présentation

1.1 Vitesse instantanée

Un corps en chute libre, lâché sans vitesse initiale, parcourt en t secondes la distance $s(t)$ donnée en mètres par $s(t) = \frac{g}{2}t^2$ (où $g \cong 9,81 \text{ m/s}^2$).

La **vitesse moyenne** entre les temps t_0 et t_0+h $(h \neq 0)$ est donnée par le rapport de la distance parcourue au temps mis à la parcourir, à savoir

$$\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = \frac{g}{2} \cdot \frac{2t_0h+h^2}{h} = \frac{g}{2} \cdot (2t_0+h)$$

On définit la **vitesse instantanée** $v(t_0)$ au temps t_0 par la limite suivante

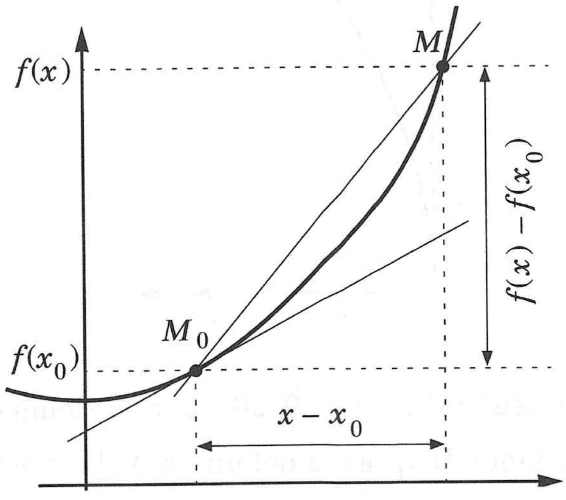
$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g}{2} \cdot (2t_0+h) = gt_0$$

1.2 Tangente

On a représenté ci-contre le graphe d'une fonction au voisinage d'un point M_0. On considère la droite (appelée sécante) passant par les points $M_0(x_0\,;f(x_0))$ et $M(x\,;f(x))$.

La pente de cette sécante est égale à

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



En faisant tendre x vers x_0, le point M s'approche de M_0 et la sécante (M_0M) pivote et tend vers une droite limite appelée la **tangente** en M_0.

Lorsque la tangente n'est pas verticale, on définit la pente m de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point M_0 par la limite

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

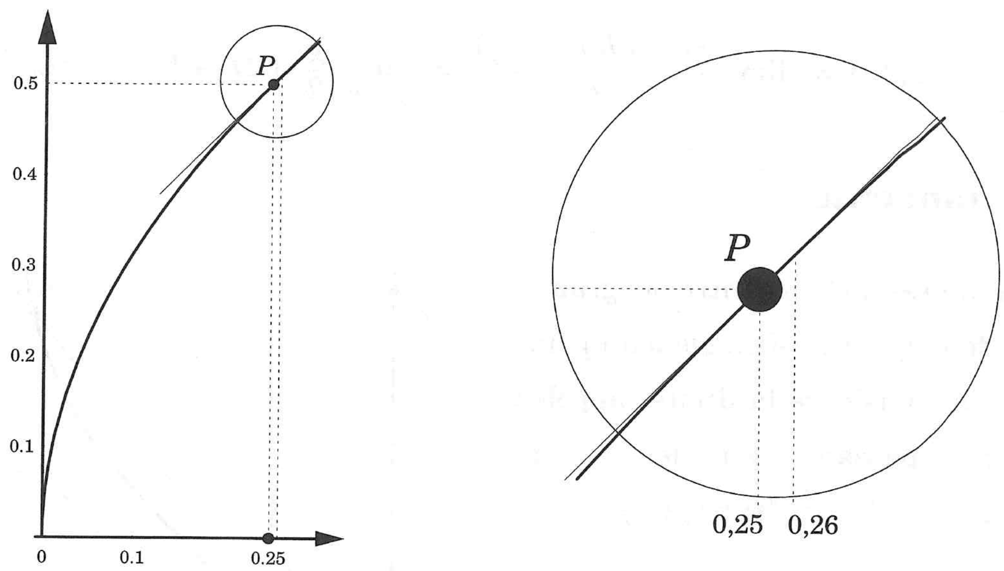
Cette limite se notera $f'(x_0)$

L'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point $(x_0\,; f(x_0))$ est donnée par

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$$

1.3 Approximation

Dans le but de donner une estimation de $\sqrt{0,26}$, on a esquissé le graphe de la fonction $f\colon\ x \mapsto \sqrt{x}$ au voisinage du point $P\,(\,0{,}25\,;0{,}5\,)$, ainsi que la tangente au graphe en P .



On peut estimer $\sqrt{0,26}$ par l'ordonnée du point d'abscisse $0,26$ situé sur la tangente. D'après la définition de la tangente, on a
$f(0,26) \cong f(0,25) + 0,01 \cdot f'(0,25)$.

On peut montrer que $f'(0,25) = 1$ (page 72)

On a alors $\sqrt{0,26} \cong \sqrt{0,25} + 0,01 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{0,25}} = \dfrac{1}{2} + 0,01 \cdot 1 = 0,51$

Une valeur plus précise est $0,5099019$

2. Définitions

2.1 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.

Définitions

La fonction f est **dérivable** en x_0 si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Ce nombre réel, noté $f'(x_0)$, est appelé **nombre dérivé** de f en x_0

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

En posant $h = x - x_0 = \Delta x$ et $f(x) - f(x_0) = \Delta f$, on obtient la définition équivalente suivante

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Le quotient $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ s'appelle le **taux de variation** de f entre x_0 et $x_0 + h$.

Sa limite $f'(x_0)$ lorsque h tend vers 0 s'appelle le **taux instantané de variation** de f en x_0.

Nombre dérivé à gauche (à droite)

La notion de limite à gauche (respectivement à droite) permet de définir le nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction en un point.

On a alors l'équivalence suivante

$$\boxed{f'(x_0) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Exemples

a) Soit $f(x) = ax+b$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0} = a$$

b) Soit $f(x) = \sqrt{x}$.

$$f'(0,25) = \lim_{x \to 0,25} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0,25}}{x-0,25} = \lim_{x \to 0,25} \frac{x-0,25}{(x-0,25)(\sqrt{x}+\sqrt{0,25})} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{0,25}} = 1$$

$$f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

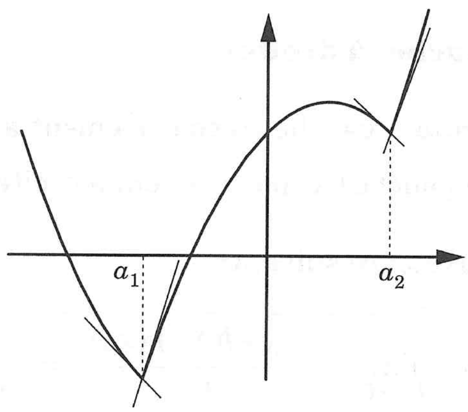
donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

c) Soit $f(x) = |x|$.

Comme $\lim_{x \to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas, la fonction f n'est pas dérivable en 0 . En revanche, elle est dérivable à droite et à gauche en 0 ; la dérivée à gauche en ce point vaut -1 et la dérivée à droite vaut 1 .

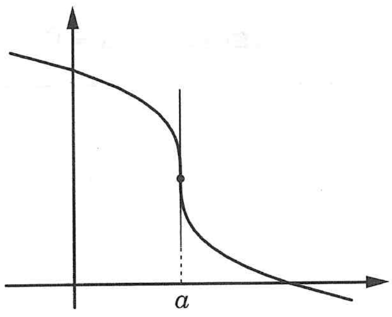
Point anguleux, point à tangente verticale, point de rebroussement

> Le graphe d'une fonction f admet un **point anguleux** $(a\,;f(a))$ si f est continue en a et si $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f'(x)$

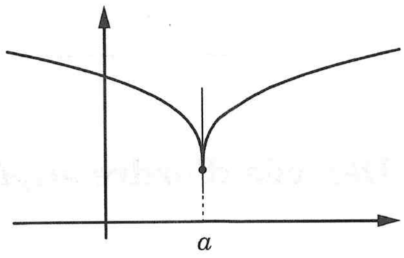


Le graphe d'une fonction f admet une **tangente verticale** au point $(a\,;f(a))$ si f est continue en a et si $\lim\limits_{x \to a} |f'(x)| = +\infty$.

Ce point est un **point de rebroussement** si de plus $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ n'existe pas.



tangente verticale
pas de point de rebroussement



tangente verticale
point de rebroussement

2.2 Fonction dérivée

Définition

Une fonction f est **dérivable** sur une partie A de $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout point de A. On définit la **fonction dérivée** de f par

$$f' : A \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

Dérivées de fonctions élémentaires

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
$x^n \qquad n \in \mathbb{N}^*$	$n \cdot x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$

$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\lvert x \rvert$	$\operatorname{sgn}(x)$ $\quad x \neq 0$

2.3 Dérivée d'ordre supérieur

Définition

> On appelle **dérivée seconde** de f la fonction dérivée de f' ; on la note f'' . On a donc $f''(x) = (f')'(x)$

> Plus généralement, on appelle **dérivée d'ordre n** de f la fonction $f^{(n)}$ définie par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$

3. Propriétés des fonctions dérivables

Toute fonction dérivable en a est continue en a .

La réciproque est fausse. La fonction valeur absolue est continue en 0, mais non dérivable en ce point.

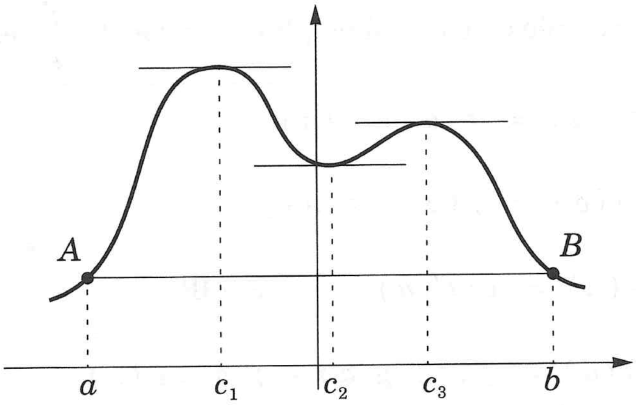
Si la fonction f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors $f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse. La fonction $f(x) = x^3$ n'a pas d'extremum en 0 bien que $f'(0) = 0$

Théorème de Rolle

> Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$, dérivable sur l'intervalle $]\,a\,;b\,[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un nombre c dans $]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

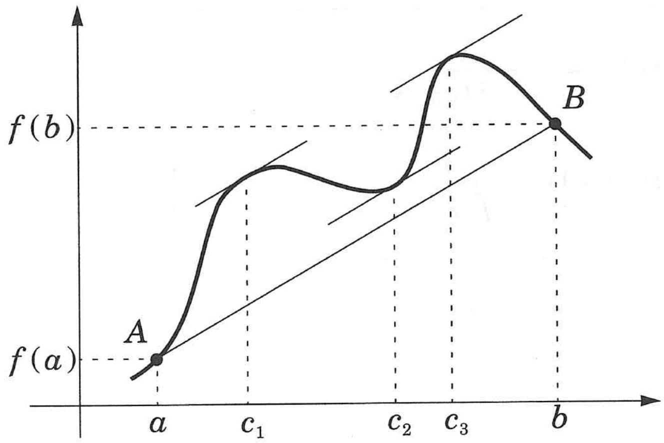
En d'autres termes, entre les points A et B de même ordonnée, il existe au moins un point du graphe à tangente horizontale.



Théorème des accroissements finis

> Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur l'intervalle $]\,a\,;b\,[$, alors il existe au moins un nombre c dans $]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En d'autres termes, entre les points A et B, il existe au moins un point du graphe où la tangente est parallèle à la sécante AB.



Corollaire

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

4. Règles de dérivation

Si f et g sont deux fonctions dérivables en a et si $c \in \mathbb{R}$, alors $f+g$, $f-g$, $c \cdot f$ et $f \cdot g$ sont dérivables en a. Si de plus $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Si f est une fonction dérivable en a et si g est une fonction dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est une fonction dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Soit une fonction f bijective et continue sur un intervalle contenant a. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors ${}^{r}f$ est dérivable en $b = f(a)$ et

$$({}^{r}f)'(b) = \frac{1}{f'({}^{r}f(b))}$$

$$({}^{r}f)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

4.1 Dérivées de fonctions particulières

Pour autant que les expressions ci-dessous aient un sens, on a

$f(x)$	$f'(x)$
$x^q \qquad q \in \mathbb{Q}$	$q\,x^{q-1}$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$\dfrac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

5. Primitives d'une fonction

5.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (ou plus généralement sur une partie de $\mathbb{R}$). Une fonction dérivable F est une **primitive de f sur I** si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemples

$f(x) = x$ $\qquad F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \pi$

$g(x) = \sin(x)$ $\qquad G(x) = -\cos(x) + 3$

$h(x) = 0$ $\qquad H(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent par une constante.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On désigne usuellement par $\int f(x)\,dx$ l'ensemble des primitives de f sur I. On l'appelle **intégrale indéfinie** de f.

Intégrer une fonction f sur un intervalle I, c'est chercher toutes les primitives de f sur I.

Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors toute primitive de f est de la forme $F(x)+c$, avec $c \in \mathbb{R}$. On convient d'écrire

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c\,,\quad c \in \mathbb{R}$$

5.2 Primitives des fonctions élémentaires

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
1	$x+c \qquad c\in\mathbb{R}$
$x^q \qquad q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{q+1}}{q+1}+c \qquad c\in\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)+c \qquad c\in\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c \qquad c\in\mathbb{R}$

5.3 Propriétés élémentaires

Soit f et g deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle I

$$\int \lambda\cdot f(x)\,dx = \lambda\cdot\int f(x)\,dx \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

$$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,dx = G(f(x))+c\,,\quad c\in\mathbb{R}$$

où G est une primitive de g

En particulier si $q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, $\int f^q(x)\cdot f'(x)\,dx = \dfrac{1}{q+1} f^{q+1}(x)+c\,,\ c\in\mathbb{R}$.

Exemples

a) $\int (3x^2 - 2x + 1)\,dx = \int 3x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 1\,dx = x^3 - x^2 + x + c$

b) $\int (1-x)^5\,dx = -\int (1-x)^5\,(-1)\,dx = -\frac{1}{6}(1-x)^6 + c$

c) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{1/2}\cdot(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(x^2-1)^{3/2}\right) + c =$
$\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + c$

5.4 Mouvement uniformément accéléré

Une pierre est lancée verticalement vers le haut à partir d'un point situé à x_0 mètres au dessus du sol. Sa vitesse initiale est de v_0 m/s . Trouver la position de la pierre après t secondes.

Solution

On définit un axe vertical orienté vers le haut. Relativement à cet axe, l'accélération est $a(t) = -g$. Comme l'accélération est la dérivée de la vitesse $(a(t) = v'(t))$, on a $v(t) = \int a(t)\,dt = -gt + c_1$. Au temps $t = 0$, on a $v(0) = v_0$, donc $v(t) = -gt + v_0$.

Comme la vitesse est la dérivée de la position $(v(t) = x'(t))$, on obtient

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int (-gt + v_0)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + c_2 .$$

Puisque $x(0) = x_0$, $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$.

EXERCICES

Présentation

3.1 Quelle est la vitesse d'impact au sol d'un corps lâché sans vitesse initiale d'une hauteur de 25 m ?

3.2 Sur la courbe d'équation $y = x^3$, on considère les points P , Q et H d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2} + h$, $h \neq 0$.

1) Calculer la pente de la sécante (PQ) .

2) Calculer, en fonction de h , la pente de la sécante (PH), H étant un point voisin de P .

3) Calculer la pente de la tangente à la courbe au point P .

4) Refaire l'exercice avec la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.

3.3 Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ au point $(2 ; 4)$?

3.4 La période T d'un pendule de longueur l est donnée par $T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ où $g \cong 9,81 \text{ m/s}^2$. On donne $l = 1$ m . Calculer $T'(1)$ et en déduire une valeur approchée de $T(1,01)$.

3.5 Deux mobiles se déplacent sur l'axe Ox. Les horaires (qui donnent la position en fonction du temps) sont donnés par $x_1(t) = (t-1)^2$ pour le premier et par $x_2(t) = 1 + 4t - t^2$ pour le second. Déterminer, graphiquement et par le calcul, les dates t où les mobiles se rencontrent, et celle où ils ont la même vitesse.

3.6 Un mobile se déplace le long de l'axe Ox . Sa position $x(t)$ en fonction du temps est donnée par

1) $x(t) = t^2 - 4t + 3$ 2) $x(t) = 5 + 7t - t^2$ 3) $x(t) = t^3 - 9t + 2$

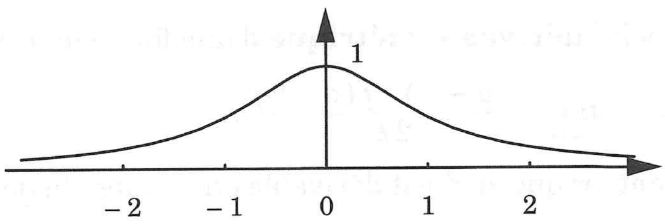
Déterminer dans chaque cas les intervalles de temps durant lesquels le mobile se déplace « vers la droite ».

3.7 La distance parcourue sur la piste par un avion qui s'apprête à décoller est donnée par $d(t) = t^2$, où t est mesuré en secondes à partir du moment où les freins sont desserrés et $d(t)$ est mesuré en mètres à partir du point de départ. En supposant que la vitesse au décollage de l'avion est de 200 km/h, quelle distance va-t-il parcourir avant de décoller ?

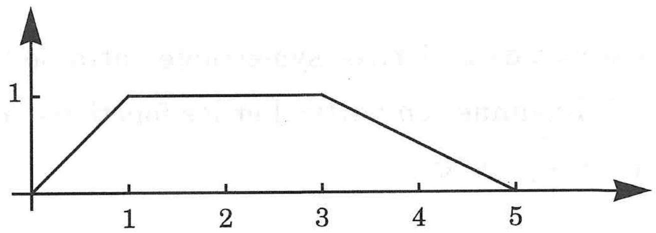
Définitions

3.8 On donne le graphe d'une fonction. Esquisser le graphe de sa dérivée

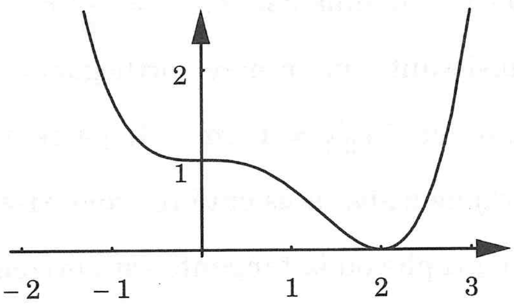
1)



2)



3)



3.9 A partir de la définition, calculer le nombre dérivé de la fonction f au point a

1) $f(x) = x + 3 \qquad a = 2$ 2) $f(x) = x + 3 \qquad a \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2 + 3x + 1 \qquad a = -3$ 4) $f(x) = x^2 + 3x + 1 \qquad a \in \mathbb{R}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1} \qquad a = 1$ 6) $f(x) = \sqrt{x} \qquad a = 4$

7) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ $\quad a \neq -1$ $\qquad$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad a > 0$

3.10 Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en a ?

1) $f(x) = |x-2|$ $\qquad a = 2$

2) $f(x) = x\sqrt{|x|}$ $\qquad a = 0$

3) $f(x) = \sqrt{1+\sin(2x)}$ $\qquad a = -\dfrac{\pi}{4}$

4) $f(x) = |x^2-1|-2$ $\qquad a = -1$

3.11 On appelle **dérivée symétrique** d'une fonction f en a le nombre

$$f^s(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}.$$

1) Montrer que si f est dérivable en a, alors la dérivée symétrique existe et $f^s(a) = f'(a)$.

2) L'existence de la dérivée symétrique entraîne-t-elle celle de la dérivée en a ? Examiner en particulier les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ en 0.

3.12 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{6}(x^3-9x)$. Dessiner le graphe de f en choisissant un repère orthogonal $(O\,;\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2})$ tel que $\|\overrightarrow{e_1}\| = 2$ cm et $\|\overrightarrow{e_2}\| = 1$ cm. Représenter, avec leurs tangentes, les points du graphe d'abscisses entières comprises entre -5 et 5, ainsi que les points du graphe où la tangente est horizontale.

3.13 Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant les définitions

1) $f(x) = x^3$ $\qquad$ 2) $f(x) = 4x^2+5x+6$

3) $f(x) = x^3+3x$ $\qquad$ 4) $f(x) = x^4$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

7) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ 8) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3.14 Démontrer que, si elle existe, la dérivée

1) d'une fonction paire est une fonction impaire;

2) d'une fonction impaire est une fonction paire;

3) d'une fonction périodique est une fonction périodique.

3.15 En quel point de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 8x$ la tangente est-elle parallèle à l'axe Ox ?

3.16 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

3.17 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3.18 Sachant que le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est un demi-cercle, calculer la dérivée de f en $a \in \left]-1\,;1\right[$ et étudier la dérivabilité de f en -1 et 1.

3.19 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$ telle que $f^2(x) \leq x^4$ pour tout x appartenant à I. Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

3.20 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Sous quelle(s) condition(s) la fonction $|f|$ est-elle dérivable ?

3.21 Soit trois fonctions f, g et h telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x réel.

1) Démontrer que, si $f(a) = g(a) = h(a)$ et si $f'(a) = h'(a)$, alors g est dérivable en a et $f'(a) = g'(a) = h'(a)$.

2) Montrer que si la condition $f(a) = g(a) = h(a)$ n'est pas remplie, alors on ne peut pas conclure.

3.22 Le fait que $f+g$ est dérivable en a implique-t-il que f et g sont dérivables en a ?

Propriétés des fonctions dérivables

3.23 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3-27}$ sur l'intervalle $[0;3]$. Montrer qu'il existe un point du graphe de f où la pente de la tangente est égale à 1.

3.24 On donne la fonction g par $g(x) = |x|-1$. Alors $g(-1) = g(1) = 0$, mais g' ne s'annule pas dans $[-1;1]$. Est-ce un contre-exemple au théorème de Rolle ?

3.25 Supposons que lors d'une course, deux chevaux passent la ligne d'arrivée au même instant et avec la même vitesse. Peut-on dire qu'à un même moment de la course ils ont eu la même accélération ?

Règles de dérivation

3.26 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x) = 2x^2-4x+3$

2) $f(x) = x^3+5x^2-2x+4$

3) $f(x) = 3x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{3}{4}x^2-x+17$

4) $f(x) = \frac{4-3x}{2x-1}$

5) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

6) $f(x) = \frac{2x^2-5x+4}{5x^2-8x-10}$

7) $f(x) = \frac{3x+5}{x^3+2x^2+x-10}$

8) $f(x) = \frac{5}{2x^2-1}$

9) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

10) $f(x) = \tan(x)\cdot\cos(x)$

11) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

12) $f(x) = \frac{\sin(x)-1}{2\sin(x)+1}$

13) $f(x) = \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\cos(x)+x\sin(x)}$

14) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)\cdot\sin(x)}$

15) $f(x) = (2\cos(x) - 3) \cdot (4\sin(x) - 1)$

3.27 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x) = (3 - x)^5$

2) $f(x) = (2x^2 - 3)^2$

3) $f(x) = (x^2 + a^2)^5$

4) $f(x) = (2x^2 + 3x + 4)^3$

5) $f(x) = \sin^2(x)$

6) $f(x) = \sin(2x)$

7) $f(x) = 2\sin(x) + \cos(3x)$

8) $f(x) = \tan(ax + b)$

9) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(2x)$

10) $f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(3x)$

11) $f(x) = \sin^3(4x)$

12) $f(x) = \tan^2(5x)$

13) $f(x) = \dfrac{(3x - 2)^2 - 1}{3x - 2}$

14) $f(x) = \dfrac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2}$

15) $f(x) = (x + 5)^2(x - 1)(2x + 3)^3$

16) $f(x) = (2x + 1)^2 \cdot (1 - 3x)^3$

17) $f(x) = (3x^2 + 4)^5 \cdot (2x^2 - 3x)^6$

18) $f(x) = \dfrac{\cos^2(2x)}{\tan(x)}$

19) $f(x) = \sin\left(\left(\frac{2x - 1}{x}\right)^2\right)$

20) $f(x) = \cos(x) \cdot (\sin^2(x) + 2)$

3.28 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

3) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

7) $f(x) = \sqrt{8x^2 - 2x + 3}$

8) $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$

9) $f(x) = \sqrt{(4x^2 - 2x)^3}$

10) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

11) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x^2)^2}$ 12) $f(x) = (1+\sqrt[3]{x})^3$

13) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$ 14) $f(x) = (a+x)\sqrt{a-x}$

15) $f(x) = \sqrt{4\sin(x)\cdot\cos(x)}$ 16) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

17) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 18) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

3.29 En notant f', g' et h' les dérivées des fonctions f, g et h, calculer la dérivée des fonctions k suivantes

1) $k = f\cdot g\cdot h$ 2) $k = \sqrt{g\cdot h}$

3) $k = \dfrac{f\cdot g}{h^3}$ 4) $k = \dfrac{f}{(g\cdot h)^2}$

5) $k = \dfrac{f\cdot\sqrt{g}}{h}$ 6) $k = f\circ g\circ h$

3.30 Pour les fonctions f suivantes, donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a

1) $f(x) = 5x^2-6x+2$ $a = 1$

2) $f(x) = \sqrt{x}$ $a = 4$

3) $f(x) = \dfrac{3x-2}{5x+1}$ $a = 0$

3.31 Pour quels réels a et b la courbe d'équation $y = x^3+ax^2+bx$ admet-elle au point $(1;1)$ une tangente horizontale ?

3.32 Pour quels réels a et b la courbe d'équation $y = x^3+ax^2+bx$ admet-elle pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y = x+4$?

3.33 Quels sont les points de la courbe d'équation $y = x^3+x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ?

3.34 Quels sont les points de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ en lesquels la tangente passe par le point $(-3\,;1)$?

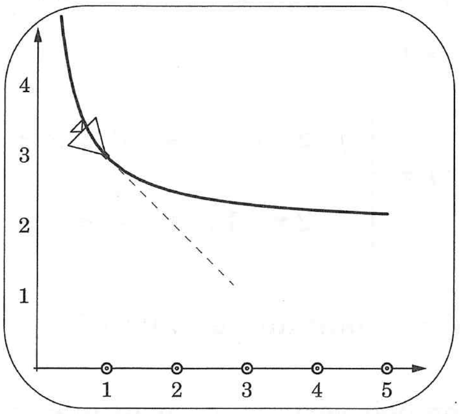
3.35 Pour les fonctions f suivantes, déterminer les équations des tangentes au graphe de f issues du point P

1) $f(x) = x^2$ $\qquad P(1\,;0)$

2) $f(x) = x^3$ $\qquad P(0\,;-2)$

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$ $\qquad P(0\,;0)$

3.36 Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure, on peut voir des avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire d'équation $y = \frac{2x+1}{x}$ et qui tirent des balles selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3, 4 et 5



1) Une cible sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en $P(1\,;3)$? en $Q(\frac{3}{2}\,;\frac{8}{3})$?

2) Déterminer les positions de l'avion permettant d'atteindre chacune des cibles.

3.37 Pour quelles valeurs de a la courbe d'équation $y = x^3 + a\,x^2 + x$ n'admet-elle aucun point à tangente horizontale ?

3.38 On considère la fonction $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$. Déterminer les conditions à imposer aux coefficients a, b, c et d pour que le graphe de f n'ait pas de tangente horizontale .

3.39 On donne la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax-2}{8-bx}$. Calculer a et b de telle manière que le graphe de f passe par le point $\left(1\,;\frac{1}{3}\right)$ et que la tangente au graphe de f au point $(2\,;f(2))$ ait une pente égale à $\frac{7}{2}$.

3.40 Dans chacun des cas suivants, déterminer les abscisses en lesquelles les graphes des fonctions f et g admettent des tangentes parallèles

1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ $\qquad g(x) = x - 4$

2) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ $\qquad g(x) = -\dfrac{1}{4}x^2$

3) $f(x) = \cos(x)$ $\qquad g(x) = \sin(x)$

3.41 Soit une fonction f dérivable sur $[0\,;1]$ telle que $f(0) = f(1)$ et la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

1) Montrer que g est continue sur $[0\,;1]$.

2) Quelle condition doit vérifier f' pour que la fonction g soit dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$?

3) Soit $f(x) = \sin(\pi x)$. Tracer le graphe de g.

3.42 Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(n)}(x)$ pour les fonctions suivantes

1) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

2) $f(x) = -\dfrac{1}{1+x}$ $\qquad$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

4) $f(x) = \sin(x)$ $\qquad$ 5) $f(x) = \sqrt{x}$

3.43 Calculer la dérivée et la dérivée seconde de chacune des fonctions suivantes

1) $x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$
2) $y(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$
3) $y(t) = \sin(\omega t + \varphi)$
4) $C(q) = \frac{1}{3} q^3 - 2q^2 + 8q$
5) $q(p) = 250 - 10p - 2p^2$
6) $S(m) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + m\beta_i)^2$

3.44 Déterminer la fonction f sachant que

1) $f(x) = a x^2 + bx + c$, $f(0) = 3$, $f(3) = 1$, $f'(4) = 1$
2) $f(x) = x^3 + a x^2 + bx + 4$, $f'(-1) = 3$, $f''(-1) = 6$
3) $f(x) = -x^3 + a x^2 + bx + c$, $f(2) = -1$, $f'(2) = f''(2) = 0$
4) $f(x) = x^3 + a x^2 + bx + c$, $f'(-1) = f'(2) = 0$, $f(1) = 3$

3.45 Déterminer la valeur à attribuer au réel m pour que la tangente à la courbe d'équation $y = x^2 + mx + 5$ au point où elle coupe Oy soit parallèle à la droite d'équation $3x - 2y = 0$.

3.46 Déterminer la valeur à attribuer au réel m pour que la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{x^2 + mx - 10}{x^2 - 2x - 3}$ au point où elle coupe Oy soit parallèle à la droite d'équation $20x + 9y = 0$.

3.47 Déterminer les équations des tangentes à la courbe d'équation $y = \frac{x^2 - 8x + 12}{\sqrt{x+9} - 4}$ aux points où celle-ci coupe les axes de coordonnées.

3.48 Déterminer si le graphe de f admet une tangente verticale, un point de rebroussement ou un point anguleux en $(0 ; 0)$

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
2) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$
3) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$
4) $f(x) = 7\sqrt[4]{x^2}$

5) $f(x) = |x^2 + 4x|$ 6) $f(x) = |\sin(x)|$

3.49 Soit la fonction g donnée par $g(x) = f(x) \cdot (x-a)^{p/q}$, f étant une fonction dérivable en a , p un entier pair et q un entier impair avec $0 < p < q$. Si $f(a) \neq 0$, montrer que le graphe de g possède un point de rebroussement en $x = a$.

3.50 On considère les points P et Q de la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 7$ dont les abscisses sont respectivement égales à 2 et à 6 . Déterminer l'équation de la tangente à la parabole qui est parallèle à la droite (PQ) .

3.51 Quels sont les points de la courbe γ en lesquels la tangente à γ est de pente m ?

1) $\gamma : y = x^3$ $m = 12$

2) $\gamma : xy = 1$ $m = -3$

3) $\gamma : x = y^2$ $m = 4$

3.52 Déterminer les coefficients a, b et c de telle manière que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par le point $(5 ; 8)$ et admette au point $(2 ; 2)$ une tangente de pente -4 .

3.53 Déterminer les coefficients a, b, c et d de telle manière que la cubique d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passe par les points $(-2 ; 11)$ et $(-3 ; 10)$ et qu'en chacun de ces points la tangente à la courbe soit horizontale .

3.54 Déterminer le nombre a de telle manière que les courbes γ_1 et γ_2 soient tangentes et calculer les coordonnées du point de contact

1) $\gamma_1 : y = ax^2$ $\gamma_2 : y = 6x - 3$

2) $\gamma_1 : y = x^3 - ax + \frac{1}{4}$ $\gamma_2 : y = 0$

3) $\gamma_1 : y = \sqrt{x} + a$ $\gamma_2 : y = \frac{x}{2} + 3$

3.55 En quels points la tangente à la courbe γ est-elle parallèle à la droite d ?

1) $\gamma : y = \dfrac{x-3}{x+1}$ $\quad d : y = 9x - 21$

2) $\gamma : xy = 2x^2 - 2y$ $\quad d : 6x + y - 34 = 0$

3.56 Prouver que $f(x) = \cos^6(x) + \sin^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x)$ est une fonction constante.

3.57 Soit f une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 4. Prouver que $f(b) - f(a) = \dfrac{b-a}{6}\left(f'(a) + 4f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f'(b)\right)$.

3.58 La tangente au point A d'abscisse a à l'hyperbole γ d'équation $xy = 1$ coupe l'axe Oy en I et l'axe Ox en J. Démontrer que A est le milieu du segment $[IJ]$.

3.59 Démontrer que si f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 telle que $f'(a) = f(a) = 0$, alors $f(x)$ est divisible par $(x-a)^2$.

3.60 On considère deux points A et B de la parabole d'équation $y = ax^2$. Démontrer que la pente de la sécante (AB) à la parabole est égale à la moyenne arithmétique des pentes des tangentes à la parabole en A et en B.

3.61 On considère deux points A et B de la parabole d'équation $y = ax^2$. Prouver que l'abscisse du point d'intersection des tangentes à la parabole en A et en B est la moyenne arithmétique des abscisses de A et de B.

3.62 Prouver que toutes les paraboles d'équation $y = ax^2 + 5x - 7$ (où a est un paramètre non nul) sont tangentes entre elles.

3.63 Soit m et n deux entiers supérieurs à 0 et a, b deux réels tels que $a < b$. Prouver que la dérivée de $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$ s'annule en un point de $]a ; b[$.

3.64 Soit f et g deux fonctions telles que $f(a) = g(a)$. L'**angle entre deux courbes** d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$ est l'angle aigu entre les droites tangentes aux deux courbes en ce point.

On considère la courbe γ d'équation $xy = x^2 + 1$. Déterminer l'équation de la droite d passant par l'origine et coupant orthogonalement γ. Montrer que d est bissectrice des asymptotes de γ.

3.65 Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer l'angle de la courbe $y = f(x)$ avec l'axe Ox en chaque point d'intersection

1) $f(x) = x$ 2) $f(x) = x^2$

3) $f(x) = x^2 - 1$ 4) $f(x) = x^3 - 3x$

5) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ 6) $f(x) = x^3 - 6x$

7) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ 8) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

3.66 Déterminer l'angle des courbes ci-dessous en leurs points d'intersection

1) $y = x^2$ $y = x^3$

2) $y = x^2$ $y = \dfrac{x^2}{4} + 3$

3) $y = \sin(x)$ $y = \cos(x)$

4) $y = \sin(2x)$ $y = \dfrac{1}{2}\tan(x)$

5) $y = x^2 - 2x$ $x = 2y$

6) $x^2 = 4y$ $y = -x^2 + 10x - 15$

7) $y = x^3 - 4x$ $y = x^3 - 2x^2$

3.67 Quelles valeurs faut-il donner au réel a pour que les graphes des fonctions f et g ci-dessous se coupent à angle droit ?

1) $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \frac{1}{2} - a x^2$

2) $f(x) = a x^2$ $\qquad g(x) = \frac{1 - x^2}{a}$

3) $f(x) = 2x^2 - a$ $\qquad g(x) = \frac{x^2}{a}$

3.68 Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe d'équation $x^3 + 8y = 0$ avec sa tangente au point d'abscisse 2 .

3.69 Déterminer les nombres réels a et b pour que les courbes d'équations $y = x^2 - 6x$ et $y = x^3 + a x^2 + b x$ soient tangentes au point d'abscisse 4 .

3.70 Calculer l'angle sous lequel se coupent la parabole d'équation $y^2 = x$ et l'hyperbole d'équation $xy = 1$.

3.71 Montrer que la courbe d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $x + 4y = 18$ se coupent à angle droit en l'un de leurs points d'intersection.

3.72 A l'aide de dérivées, calculer une valeur approchée de $\sqrt{4,01}$, $10,002^4$, $99,9^5$, $\sqrt[3]{1002}$ et $\sin(46°)$. Comparer avec les valeurs données par une calculette.

3.73 Un disque a 3 cm de rayon. Son rayon augmente de $0,04$ cm . A l'aide d'une dérivée, donner une valeur approchée de l'augmentation que subit l'aire de ce disque.

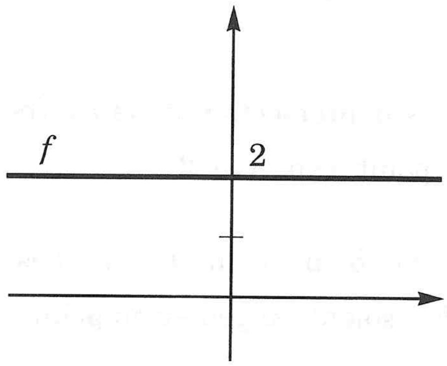
3.74 Le rayon de la base circulaire d'un cylindre droit, de hauteur donnée, passe de 4 cm à $3,96$ cm . A l'aide d'une dérivée, donner une approximation de la variation de son volume.

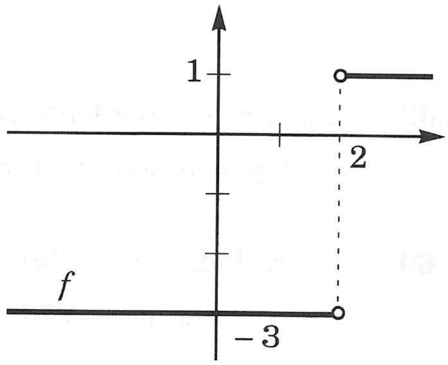
3.75 Si l'on parcourt 1 km en $60 + t$ secondes, montrer qu'une bonne approximation de la vitesse moyenne, pour t petit, est de $60 - t$ kilomètres par heure.

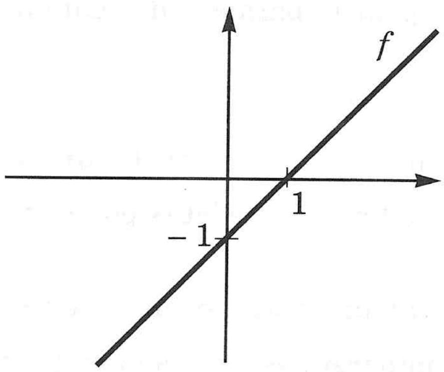
Calculer l'erreur de l'approximation si t prend les valeurs 1, -1, 5, -5, 10 ou -10.

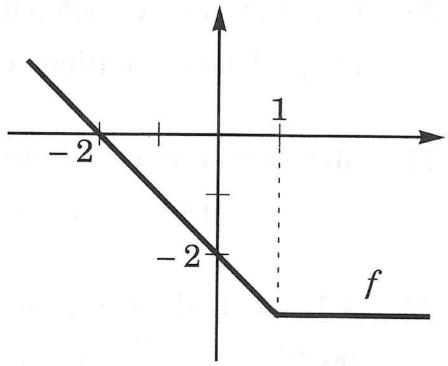
Primitives d'une fonction

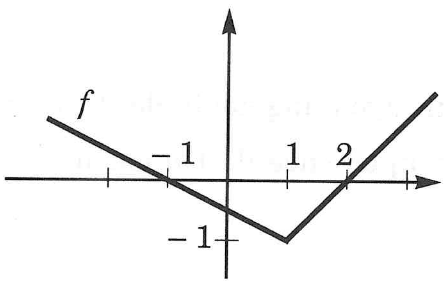
3.76 Esquisser le graphe d'une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants

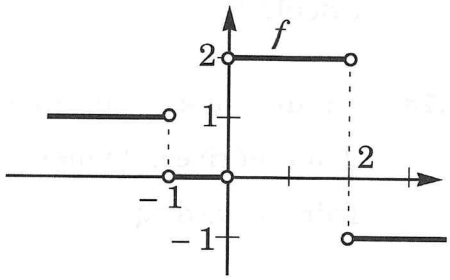
1) 

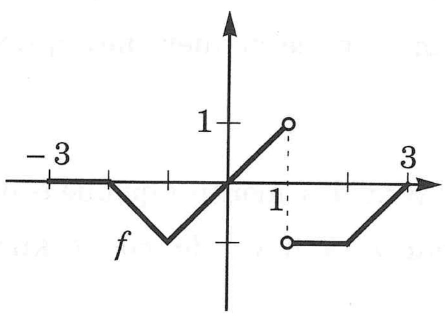
2) 

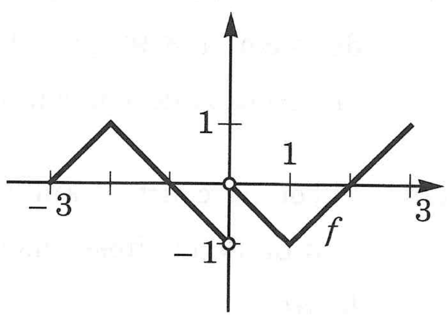
3) 

4) 

5) 

6) 

7) 

8) 

3.77 Vérifier les égalités suivantes

1) $\int \frac{7}{\sqrt{x^9}}\, dx = \frac{-2}{x^3\sqrt{x}} + c$

2) $\int \frac{6x}{(2-x^2)^2}\, dx = \frac{2x^2-1}{2-x^2} + c$

3) $\int \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^3}}\, dx = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} + c$

4) $\int \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + c$

3.78 Calculer

1) $\int 3\, dx$

2) $\int 5x\, dx$

3) $\int (2x+1)\, dx$

4) $\int (5x-4)\, dx$

5) $\int (2x^2-3x+2)\, dx$

6) $\int 5x^3\, dx$

7) $\int -3x^4\, dx$

8) $\int (3x^5+2x^4-1)\, dx$

9) $\int (1+\tan^2(x))\, dx$

10) $\int \tan^2(x)\, dx$

3.79 Calculer

1) $\int \frac{dx}{x^2}$

2) $\int \frac{2\, dx}{x^3}$

3) $\int \frac{-7\, dx}{x^5}$

4) $\int \sqrt{x}\, dx$

5) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

3.80 Calculer

1) $\int \cos(3x)\, dx$

2) $\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx$

3) $\int (x+3)^3\, dx$

4) $\int (2x-1)^2\, dx$

5) $\int (7x-2)^5 \, dx$

6) $\int (3x^2+x)^3(6x+1) \, dx$

7) $\int (4x^2+3)^4 x \, dx$

8) $\int \sin^2(x) \cdot \cos(x) \, dx$

9) $\int \dfrac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)} \, dx$

10) $\int \sqrt{x+3} \, dx$

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

12) $\int \dfrac{(x+1) \, dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

3.81 Calculer en utilisant judicieusement des formules trigonométriques

1) $\int \cos^2(x) \, dx$

2) $\int \sin^2(x) \, dx$

3) $\int \cos^3(x) \, dx$

4) $\int \sin^4(x) \, dx$

3.82 Calculer

1) $\int (3x^2-2x+3) \, dx$

2) $\int \dfrac{3x^4-3x^2-7}{4x^2} \, dx$

3) $\int 7\sqrt[4]{x^3} \, dx$

4) $\int (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}) \, dx$

5) $\int (2\sin(x)-3\cos(x)) \, dx$

6) $\int \cos(2x) \, dx$

7) $\int \left(\dfrac{5}{\cos^2(x)}+5\cos(x)\right) dx$

8) $\int \left(8\sin(x)+\dfrac{4}{\sqrt{2x}}\right) dx$

9) $\int (3x^2-7)^2 \, dx$

10) $\int \sqrt{x}\,(x^2-5) \, dx$

11) $\int (3x-5)^6 \, dx$

12) $\int \dfrac{12}{(4-3x)^4} \, dx$

13) $\int \sqrt[3]{(3x-8)^2} \, dx$

14) $\int \dfrac{6}{\cos^2(3x)} \, dx$

15) $\int x\sqrt{x^2+1} \, dx$

16) $\int \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-1}} \, dx$

3.83 Déterminer la fonction f sachant que

1) $f'(x) = 3x^2-4$, $f(5) = 54$

2) $f'(x) = 5 - x$, $f(-2) = -f(2)$

3) $f''(x) = 2x$, $f'(2) = 8$, $f(-2) = -8$

4) $f''(x) = (x+1)(x-2)$, $f(1) = 8$, $f(-1) = -4$

5) $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(9) = 2$, $f(1) = 2f(4)$

3.84 Déterminer la primitive F des fonctions ci-dessous, en tenant compte des conditions imposées

1) $f(x) = 3x^2 - 6x$, $F(2) = 3$

2) $f(x) = \dfrac{18}{x^2} + \sqrt{x}$, $F(9) = 16$

3) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ 6 - x & \text{si } x > 4 \end{cases}$, $F(0) = 1$

3.85 Déterminer une fonction f dont on connaît la dérivée seconde, en tenant compte des conditions imposées

1) $f''(x) = x^2 - 3x + 1$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$

2) $f''(x) = \dfrac{10}{\sqrt[3]{x}}$, $f(0) = -1$, $f(1) = 8$

3) $f''(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$, $f(6) = 19$, $f'(0) = 0$

3.86 Déterminer la fonction f sachant qu'elle admet pour asymptote la droite d'équation $x - 2y + 8 = 0$ et que $f''(x) = \dfrac{-8}{x^3}$.

3.87 Un objet qui tombe en chute libre près de la surface de la terre est soumis à une accélération constante g , pour autant que l'on néglige la résistance de l'air. Déterminer sa position au temps t si l'on sait qu'au temps 0 , sa position est x_0 et sa vitesse v_0 .

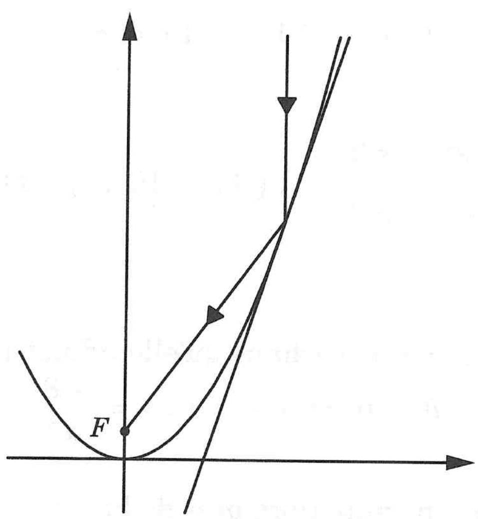
3.88 Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ et telles que f' et g' sont continues sur $]\,a\,;b\,[$. Si l'on admet que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$, montrer qu'il existe un nombre $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que la tangente au graphe de la fonction f en $(c\,;f(c))$ est parallèle à la tangente au graphe de la fonction g en $(c\,;g(c))$.

Exercices d'application

3.89 Un véhicule effectue sur l'axe Ox un mouvement rectiligne à vitesse constante v_0. En notant $\omega(t)$ sa vitesse angulaire apparente au temps t pour un observateur placé en $A(0\,;1)$, calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t)$.

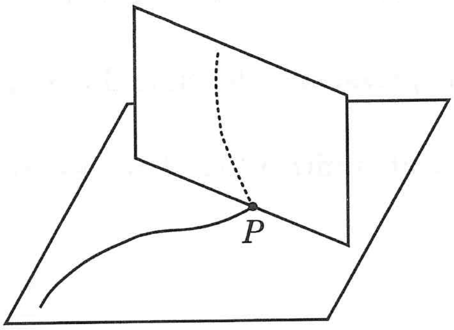
3.90 Deux longs trains A et B circulent sur des lignes parallèles. Les positions horaires des locomotives sont données par les équations $A(t) = t^3 + 2t$ et $B(t) = \dfrac{7t^2}{2} + 8$. Déterminer les temps les plus propices pour un cascadeur voulant sauter d'un wagon du train B à un wagon du train A.

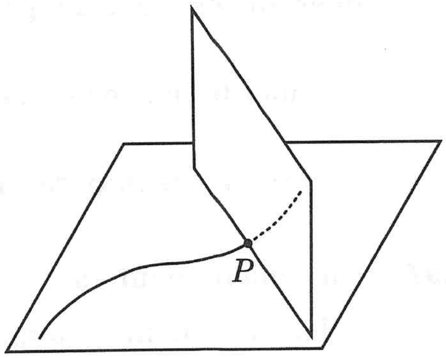
3.91 La courbe $y = x^2$ représente un miroir parabolique. Montrer que tout rayon arrivant parallèlement à l'axe Oy est réfléchi en un même point $F\left(0\,;\dfrac{1}{4}\right)$, appelé foyer.



3.92 Une courbe est tracée sur une feuille de papier et un point P est choisi sur la courbe. Tenons un miroir perpendiculairement à la feuille en P et faisons-le tourner jusqu'à ce que la courbe et son image forment une ligne non anguleuse en P (voir les deux figures). Expliquer pourquoi le miroir est alors perpendiculaire à la tangente à la courbe en P.

a) faux b) juste





3.93 Sur la piste de décollage, t secondes après le départ, un Boeing 747 contient $25'000 - 80t + 2t^2 + 0,2t^3$ gallon (1 gallon $\cong 3,8$ litres) de carburant ($0 \leq t \leq 8$). Quelle est la consommation instantanée en gallon par seconde 2 secondes après le départ ?

3.94 Le nombre P de personnes infectées t jours après le début d'une épidémie de grippe est donné par la formule $P(t) = 30t^2 + 100t$. Calculer, en nombre de personnes par jour, la vitesse d'extension de cette épidémie le cinquième jour.

3.95 Le coût $C(t)$ du carburant, en centimes par kilomètre, peut être calculé comme le produit $C = fp$, f étant la consommation moyenne de la voiture en litres par kilomètre et p le prix du carburant en centimes par litre. Si f et p dépendent du temps t (le moteur de la voiture s'use, les prix de l'essence fluctuent), le coût C aussi.

1) Calculer le taux instantané de variation du coût $C(t)$.

2) Donner une interprétation de chacun des termes apparaissant dans ce taux.

3.96 Lorsque l'on change rapidement d'altitude une différence de pression s'installe entre l'intérieur et l'extérieur du tympan, différence qui peut "boucher" les oreilles. Trois variables interviennent dans ce phénomène:

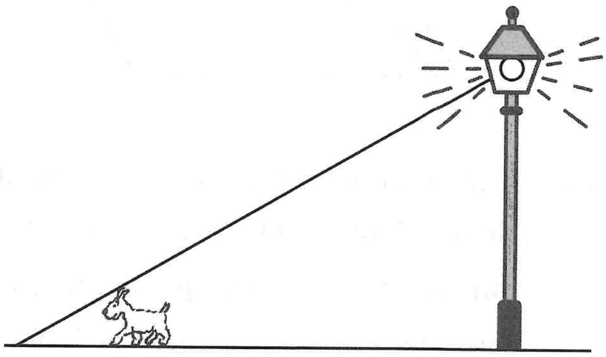
le temps t, l'altitude h et la pression atmosphérique p.

Supposons qu'un véhicule descende une route de montagne à raison de 2 m de dénivellation par seconde et que la variation de la pression atmosphérique est de $0,12$ grammes par centimètre carré, par mètre descendu.

Calculer le taux de variation de la pression en fonction du temps t.

Remarque: ce taux de variation peut suffire à "boucher" les oreilles.

3.97 Un chien haut de 50 cm s'éloigne d'un lampadaire d'une hauteur égale à $2,50$ m à la vitesse de 75 cm par seconde. A quelle vitesse se déplace l'ombre de son oreille droite ?



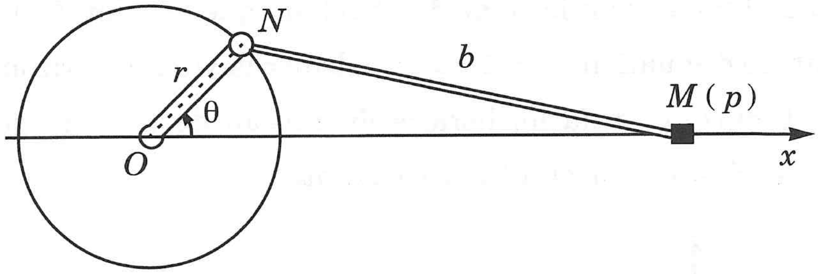
3.98 Le prix des œufs valable pour les grossistes, en francs par douzaine, est donné par l'expression $P(q) = \dfrac{847 \cdot 10^6}{(q - 10'000)^2}$ où q désigne la quantité d'œufs disponibles sur le marché chaque mois. Supposons que l'approvisionnement au 1er juillet 1997 est donné par $q = 21'000$ et qu'il chute de $3\,\%$ par mois. Quel est, en centime par mois, le taux instantané d'augmentation du prix correspondant ?

3.99 Pour une personne dont la taille est x cm $(75 \leq x \leq 185)$, le nombre moyen p de pulsations cardiaques peut être estimé par $p(x) = \dfrac{938}{\sqrt{x}}$ battements par minute.

1) Comparer le taux instantané de variation de p pour $x = 162,5$ cm avec le taux de variation de p entre $162,5$ et $163,5$ cm.

2) Selon ce modèle, les enfants ont-ils un taux instantané de variation de pulsations plus élevé que celui des adultes ?

3.100 Soit le système bielle-manivelle suivant



1) Calculer, en fonction de r , b et θ , l'abscisse p de M.
   Application numérique: $r = 1$, $b = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

2) On pose $r = 1$ et $b = 2$. Le point N tourne à une vitesse constante de 1 tour par seconde.

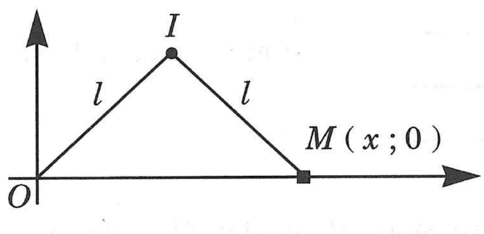
   Calculer la position p de M sur l'axe Ox en fonction du temps t , exprimé en secondes (au temps $t = 0$, l'angle $\theta = 0$).

   Déterminer la vitesse moyenne de M entre les temps 0 s et $0,5$ s .

   Déterminer la vitesse instantanée au temps $0,25$ s .

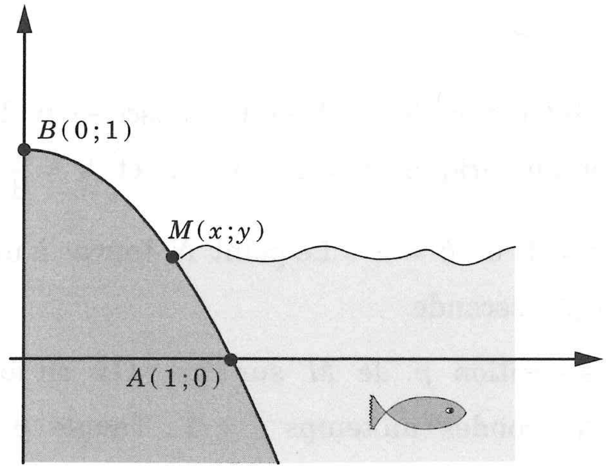
3.101 La figure ci-dessous représente deux tiges articulées ayant chacune pour longueur l . Le point O est fixe, alors que le point M se déplace à droite sur l'axe Ox avec une vitesse de 1 m/s . Calculer la composante verticale de la vitesse du point I en fonction de x .

Application numérique: $x = 6$ et $l = 5$.

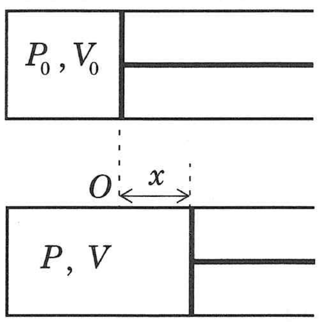


3.102 Deux récipients recueillent l'eau d'un orage. L'un est de forme cylindrique, de base circulaire ayant un diamètre de $37,5$ cm . L'autre est de forme conique (cône renversé) de base circulaire égale à celle du cylindre et d'une hauteur égale à 75 cm . Le niveau d'eau monte de 5 cm par heure dans le réservoir cylindrique. A quelle vitesse monte le niveau d'eau dans le réservoir conique lorsque celui-ci est rempli aux deux tiers ?

3.103 La figure ci-dessous représente une coupe d'un bord de mer lorsque le niveau de l'eau atteint le point M. Sachant que le point M se déplace sur la parabole d'équation $y = 1 - x^2$, calculer la vitesse horizontale du point M au temps t si la loi horaire du niveau de la mer est donnée par $y(t) = \sin^2(\omega t)$, ω étant une constante.



3.104 La pression P et le volume V de l'air situé à gauche d'un piston cylindrique vérifient la loi physique $P \cdot V^{3/2} = \alpha$, α étant une constante donnée. Notons x l'abscisse (en centimètres) du piston à partir d'une position de départ O où la pression est égale à 1 atmosphère et le volume à 1 dm^3.



$P_0 = 1$ atmosphère

$V_0 = 1 \text{ dm}^3$

diamètre de la base du piston : $2r = 10$ cm

1) Calculer la pression P en fonction de x et son taux de variation moyen entre $x = 0$ et $x = 0,5$. Calculer son taux de variation instantané pour tout x.

2) Le piston effectue un va-et-vient d'amplitude A (de chaque côté de sa position initiale O). Calculer l'amplitude maximale A pour que le taux de variation instantané de la pression ne dépasse en aucun cas 4 atm/cm.

3.105 Soit $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable. Alors que la dérivée de f est la limite du rapport des variations absolues $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, on appelle **élasticité** de f et on note $E_x(f)$ la limite du rapport des variations relatives

$$E_x(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta y}{y}}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

Cette notion est utilisée en finance et en économie.

1) Etablir la formule $E_x(f) = f'(x) \cdot \dfrac{x}{f(x)}$.

2) Donner une interprétation géométrique de $E_x(f)$ faisant appel aux pentes de la tangente au graphe de f en $M(x; f(x))$ et de la droite (OM).

3) Que peut-on dire de la tangente au graphe de f en un point x_0 où $E_{x_0}(f) = 1$?

4) Soit $g(x) = x \cdot f(x)$. Prouver que $g'(x) = 0 \Leftrightarrow E_x(f) = -1$.

5) Soit $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Montrer que $g'(x) = 0 \Leftrightarrow E_x(f) = 1$

3.106 Calculer l'élasticité de chacune des fonctions f suivantes

1) $f(x) = \sqrt{x}$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$

3) $f(x) = \dfrac{a}{x}$ 4) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

3.107 On considère la fonction f donnée par $f(x) = x^2 + x + 1$

1) Trouver les points en lesquels l'élasticité vaut 1.

2) Trouver les points en lesquels l'élasticité est nulle.

3) Marquer en couleur sur le graphe de f les points dits **élastiques**, c'est-à-dire ceux dont l'abscisse x vérifie $|E_x(f)| > 1$.

3.108 La dépense d d'un consommateur selon son revenu Y est donnée par $d = 0,8\,Y + 64$. Calculer l'élasticité $E_Y(d)$ de sa dépense lorsque son revenu est de $5'400$ francs.

3.109 La quantité annuelle Q de repas pris au restaurant par un consommateur est donnée par $Q = -5p + 270$, p étant le prix du repas. Sa demande $d = Q \cdot p$ est-elle élastique ($|E_p(d)| > 1$) quand $p = 9$?

3.110 La fonction de demande q d'un certain produit est donnée par la relation $p = 40 - 5q$ entre le prix p et la quantité q.

1) Calculer l'élasticité $E_p(q)$ de la demande lorsque le prix p est fixé à 5 francs.

2) Calculer, en fonction du prix p, la dépense $d = q \cdot p$ que le consommateur est prêt à consentir pour acheter ce produit. Tracer le graphe de la fonction $d(p)$.

3) Calculer l'élasticité $E_p(d)$ de la dépense lorsque le prix p est de 5 francs. En déduire l'évolution de la dépense du consommateur en cas de petite modification de prix.

4) Pour une fonction de demande arbitraire $q(p)$ d'élasticité $E_p(q)$, démontrer que la dérivée de la dépense d par rapport au prix est donnée par $d' = (1 + E_p(q))\,q$. En déduire que $E_p(d) = 1 + E_p(q)$

3.111 Un consommateur dispose d'un revenu de Y francs. Il dépense $a(Y)$ pour son alimentation, $h(Y)$ pour ses habits, $l(Y)$ pour son logement et $t(Y)$ pour ses transports.

Si son revenu Y vaut 6'000 francs, il en dépense le 60 % pour son alimentation, le 14 % pour ses habits, le 15 % pour son logement et le reste pour ses transports ; l'élasticité de chaque poste est alors donnée par les nombres $E_Y(a) = 0,6$, $E_Y(h) = 1,3$, $E_Y(l) = 0,1$ et $E_Y(t) = 1$.

1) Calculer l'élasticité $E_Y(d)$ de sa dépense totale d lorsque son revenu vaut 6'000 francs.

2) On suppose que son revenu s'accroît de 5 %. Estimer ses nouvelles dépenses de consommation poste par poste, ainsi que le montant e disponible pour l'épargne.

3.112 Une courbe de Engel représente la relation entre la quantité Q demandée d'un bien X et le revenu Y du consommateur, le prix du bien étant constant.

1) Montrer que si l'élasticité $E_Y(Q)$ de la consommation du bien X par rapport au revenu est supérieure à 1, le consommateur accroît la part de son revenu consacré à X lorsque son revenu augmente. Que conclure si l'élasticité vaut 1 ? et si l'élasticité est inférieure à 1 ?

2) Que vaut $E_Y(Q)$ si la courbe de Engel est une droite passant par l'origine ?

Solutions des exercices

3.1 $22,15 \;\; \text{m/s}$

3.2 1) $\dfrac{13}{4}$ 2) $h^2 + \dfrac{3}{2}h + \dfrac{3}{4}$ 3) $\dfrac{3}{4}$

4) $-\dfrac{4}{3}$ $\dfrac{-4}{2h+1}$ -4

3.3 $y = 4x - 4$

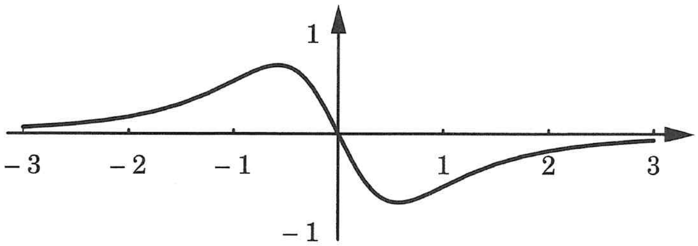
3.4 $1,005 \cdot \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}$

3.5 Les mobiles se rencontrent aux dates 0 et 3. Ils ont même vitesse lorsque $t = \dfrac{3}{2}$.

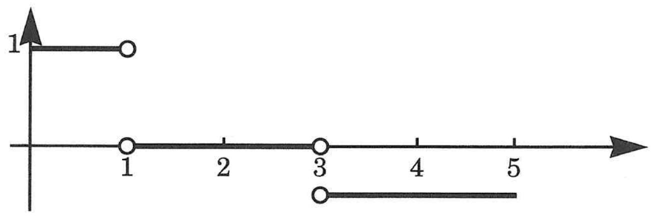
3.6 1) $[\,2\,;+\infty\,[$ 2) $]-\infty\,;\dfrac{7}{2}\,]$ 3) $]-\infty\,;-\sqrt{3}\,]\cup[\,\sqrt{3}\,;+\infty\,[$

3.7 $771,6 \;\; \text{m}$

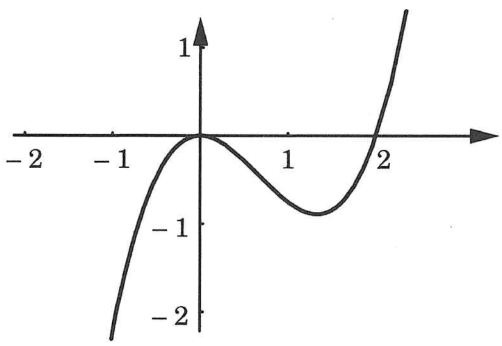
3.8 1)



2)



3)



3.9 1) $f'(2) = 1$ 2) $f'(a) = 1$ 3) $f'(-3) = -3$

4) $f'(a) = 2a + 3$ 5) $f'(1) = \frac{-2}{9}$ 6) $f'(4) = \frac{1}{4}$

7) $f'(a) = \frac{3}{(a+1)^2}$ 8) $f'(a) = \frac{-1}{2\sqrt{a^3}}$

3.10 1) non 2) oui 3) non 4) non

3.11 2) non

3.13 1) $f'(x) = 3x^2$ 2) $f'(x) = 8x + 5$ 3) $f'(x) = 3x^2 + 3$

4) $f'(x) = 4x^3$ 5) $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ 6) $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

7) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 8) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3.15 Au point $(2\,;-8)$

3.17 2) f n'est pas dérivable en 0 .

3.18 $f'(a) = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$. La fonction n'est dérivable ni en 1 , ni en -1 .

3.19 $f'(0) = 0$

3.20 $|f|$ est dérivable en 0 si $f'(x) = 0$ lorsque $f(x) = 0$.

3.22 Non

3.24 Non

3.25 Oui

3.26 1) $4x - 4$ 2) $3x^2 + 10x - 2$

3) $15x^4 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ 4) $\frac{-5}{(2x-1)^2}$

5) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ 6) $\frac{9x^2 - 80x + 82}{(5x^2 - 8x - 10)^2}$

7) $\frac{-6x^3 - 21x^2 - 20x - 35}{(x^3 + 2x^2 + x - 10)^2}$ 8) $\frac{-20x}{(2x^2-1)^2}$

9) $\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$ 10) $\cos(x)$

11) $\frac{1}{1+\cos(x)}$ 12) $\frac{3\cos(x)}{(2\sin(x)+1)^2}$

13) $\dfrac{x^2}{(\cos(x) + x \cdot \sin(x))^2}$ 14) $\dfrac{-4\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

15) $8\cos^2(x) - 8\sin^2(x) - 12\cos(x) + 2\sin(x)$

3.27 1) $-5(3-x)^4$ 2) $8x(2x^2-3)$

3) $10x(x^2+a^2)^4$ 4) $3(4x+3)(2x^2+3x+4)^2$

5) $2\sin(x)\cdot\cos(x)$ 6) $2\cos(2x)$

7) $2\cos(x) - 3\sin(3x)$ 8) $a(1+\tan^2(ax+b))$

9) $3\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos(2x) - 2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin(2x)$

10) $2\cos(2x)\cdot\cos(3x) - 3\sin(2x)\cdot\sin(3x)$

11) $12\sin^2(4x)\cdot\cos(4x)$ 12) $\dfrac{10\tan(5x)}{\cos^2(5x)}$

13) $\dfrac{3(9x^2-12x+5)}{(3x-2)^2}$ 14) $\dfrac{(x-1)^2\cdot(x+5)}{(x+1)^3}$

15) $(x+5)\cdot(2x+3)^2\cdot(12x^2+39x-21)$

16) $-5(6x+1)\cdot(2x+1)\cdot(1-3x)^2$

17) $4(3x^2+4)^4\cdot(2x^2-3x)^5\cdot(33x^3-36x^2+24x-18)$

18) $\dfrac{\cos(2x)\cdot(2\cos^2(2x)-\cos(2x)-2)}{\sin^2(x)}$

19) $2\,\dfrac{2x-1}{x^3}\cdot\cos\left(\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2\right)$ 20) $-3\sin^3(x)$

3.28 1) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 2) $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

3) $\dfrac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$ 4) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

5) $\dfrac{-1}{4\sqrt[4]{x^5}}$ 6) $\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

7) $\dfrac{8x-1}{\sqrt{8x^2-2x+3}}$ 8) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

9) $3(4x-1)\cdot\sqrt{4x^2-2x}$ 10) $\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$

11) $\dfrac{-4x}{3\sqrt[3]{1-x^2}}$

12) $\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$

13) $\dfrac{5}{2(x+1)^2 \cdot f(x)}$

14) $\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$

15) $\dfrac{\sqrt{2}\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$

16) $\dfrac{-1}{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}$

17) $\dfrac{1}{(1-x)^2 \cdot f(x)}$

18) $\dfrac{4x^2+1}{x^2 \cdot \sqrt{(1+x^2)^3}}$

3.29 1) $f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$

2) $\dfrac{g \cdot h' + g' \cdot h}{2\sqrt{g \cdot h}}$

3) $\dfrac{f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h - 3f \cdot g \cdot h'}{h^4}$

4) $\dfrac{f' g h - 2 f g' h - 2 f g h'}{(g h)^3}$

5) $\dfrac{2f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h - 2f \cdot g \cdot h'}{2h^2\sqrt{g}}$

6) $(f' \circ g \circ h) \cdot (g' \circ h) \cdot h'$

3.30 1) $4x - y - 3 = 0$ 2) $x - 4y + 4 = 0$ 3) $13x - y - 2 = 0$

3.31 $a = -3$; $b = 3$

3.32 $a = -2$; $b = -6$

3.33 Aux points $(0;0)$ et $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{8}\right)$

3.34 Aux points $(-1;-1)$ et $\left(3;\dfrac{1}{3}\right)$

3.35 1) $y = 0$ et $y = 4x - 4$ 2) $y = 3x - 2$

3) $y = 4x$ et $y = 3x$

3.36 1) en P : oui ; en Q : non

2) les points de la courbe dont les abscisses sont $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$; 1 ; $\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$

3.37 Pour $a \in \left]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right[$

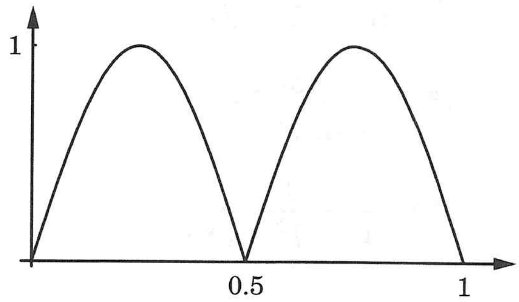
3.38 $b^2 < 3ac$

3.39 $(a;b) = (3;5)$ ou $(a;b) = \left(\dfrac{34}{9};\dfrac{8}{3}\right)$

3.40 1) $x = 1$ 2) $x = \pm 2$

3) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

3.41 2) $f'(0) = f'(1)$ 3)



3.42 1) $f^{(n)}(x) = a_n \cdot n!$ 2) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$

3) $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

4) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ \cos(x) & \text{si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -\sin(x) & \text{si } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -\cos(x) & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$

5) $\frac{(-1)^n \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot x^{n-\frac{1}{2}}}$

3.43 1) $x'(t) = at + v_0$ $x''(t) = a$

2) $y'(t) = \frac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2}$ $y''(t) = \frac{2t(3-t^2)}{(t^2+1)^3}$

3) $y'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$ $y''(t) = -\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

4) $C'(q) = q^2 - 4q + 8$ $C''(q) = 2q - 4$

5) $q'(p) = -10 - 4p$ $q''(p) = -4$

6) $S'(m) = 2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\alpha_i + m\beta_i)$ $S''(m) = 2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2$

3.44 1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 3$ 2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 4$

3) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 7$ 4) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{19}{2}$

3.45 $m = \frac{3}{2}$

3.46 $m = 0$

3.47 $y = \dfrac{4}{4-\sqrt{11}}(x-2)$; $y = \dfrac{-4}{4-\sqrt{15}}(x-6)$ et $y = 6x - 12$

3.48 1) Tangente verticale 2) Point de rebroussement

3) Point de rebroussement 4) Point de rebroussement

5) Point anguleux 6) Point anguleux

3.50 $y = 4x - 9$

3.51 1) $(-2\,;-8)$ et $(2\,;8)$ 2) $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\,;-\sqrt{3}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right)$

3) $\left(\dfrac{1}{64}\,;\dfrac{1}{8}\right)$

3.52 $a = 2$; $b = -12$ et $c = 18$

3.53 $a = -2$; $b = -15$; $c = -36$ et $d = -17$

3.54 1) $a = 3$; point de contact $(1\,;3)$

2) $a = \dfrac{3}{4}$; point de contact $\left(\dfrac{1}{2}\,;0\right)$

3) $a = \dfrac{5}{2}$; point de contact $\left(1\,;\dfrac{7}{2}\right)$

3.55 1) $\left(-\dfrac{1}{3}\,;-5\right)$ et $\left(-\dfrac{5}{3}\,;7\right)$ 2) $(-1\,;2)$ et $(-3\,;-18)$

3.64 L'équation de d est $y = (1+\sqrt{2})x$

3.65 1) $45°$ 2) $0°$

3) $\pm\, 63,43°$ 4) $80,54°$ et $-71,57°$

5) $\pm\, 80,54°$ et $\pm\, 85,24°$ 6) $-80,54°$ et $85,24°$

7) $-45°$ 8) $\pm\, 38,66°$

3.66 1) $0°$ et $8,13°$ 2) $30,96°$

3) $70,53°$ 4) $36,87°$ et $71,57°$

5) $90°$ et $45°$ 6) $35,54°$ et $45°$

7) $75,96°$ et $6,91°$

3.67 1) $a = 1$ 2) $a = \pm\sqrt{3}$ 3) impossible

3.68 $(2\,;-1)$ et $(-4\,;8)$

3.69 $a = -7$ et $b = 10$

3.70 $71,57°$

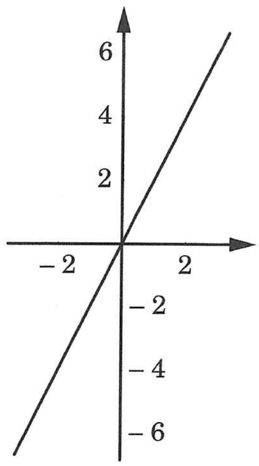
3.72 $2,0025$; $10'008$; $995 \cdot 10^7$; $\dfrac{3'002}{300}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 + \dfrac{\pi}{180}\right)$

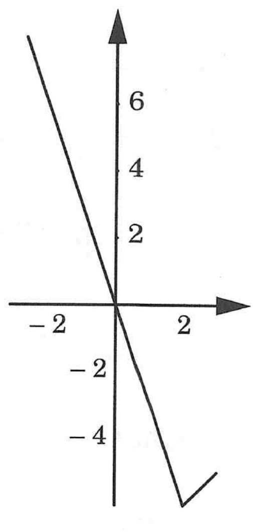
3.73 $0,24\,\pi$ cm^2

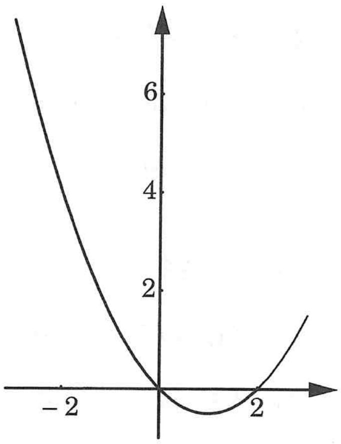
3.74 $0,32\,\pi\,h$ cm^3 où h est la hauteur du cylindre

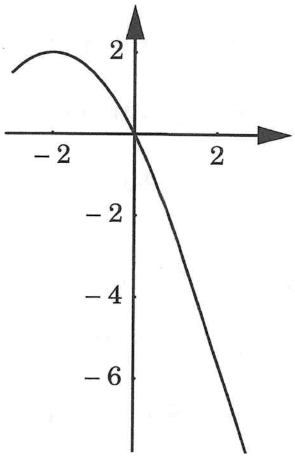
3.75 Erreur en km/h : $0,016$; $0,017$; $0,385$; $0,455$; $1,429$; 2.

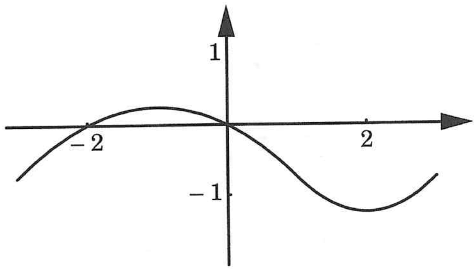
3.76

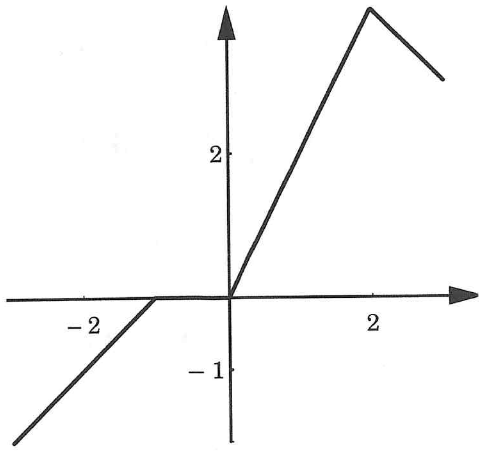
1) 

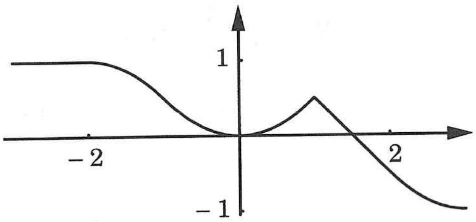
2) 

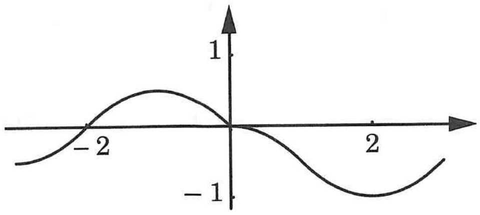
3) 

4) 

5)


6)


7)


8)


3.78 1) $3x + c$ 2) $\frac{5}{2}x^2 + c$

3) $x^2 + x + c$ 4) $\frac{5}{2}x^2 - 4x + c$

5) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$ 6) $\frac{5}{4}x^4 + c$

7) $-\frac{3}{5}x^5 + c$ 8) $\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - x + c$

9) $\tan(x) + c$ 10) $\tan(x) - x + c$

3.79 1) $\frac{-1}{x} + c$ 2) $\frac{-1}{x^2} + c$

3) $\frac{7}{4x^4} + c$ 4) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

5) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$ 6) $2\sqrt{x} + c$

7) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

3.80 1) $\frac{1}{3}\sin(3x) + c$ 2) $-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

3) $\frac{1}{4}(x+3)^4 + c$ 4) $\frac{1}{6}(2x-1)^3 + c$

5) $\frac{1}{42}(7x-2)^6+c$ 6) $\frac{1}{4}(3x^2+x)^4+c$

7) $\frac{1}{40}(4x^2+3)^5+c$ 8) $\frac{1}{3}\sin^3(x)+c$

9) $\frac{1}{3}\tan^3(x)+c$ 10) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}+c$

11) $\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+c$ 12) $\sqrt{x^2+2x}+c$

3.81 1) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)+c$ 2) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)+c$

3) $\frac{1}{3}\sin(x)\cdot(3-\sin^2(x))+c$ 4) $\frac{12x-8\sin(2x)+\sin(4x)}{32}+c$

3.82 1) x^3-x^2+3x+c 2) $\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4x}+c$

3) $4\sqrt[4]{x^7}+c$ 4) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+c$

5) $-2\cos(x)-3\sin(x)+c$ 6) $\frac{1}{2}\sin(2x)+c$

7) $5\tan(x)+5\sin(x)+c$ 8) $-8\cos(x)+4\sqrt{2x}+c$

9) $\frac{9}{5}x^5-14x^3+49x+c$ 10) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}-\frac{10}{3}\sqrt{x^3}+c$

11) $\frac{1}{21}(3x-5)^7+c$ 12) $\frac{4}{3(4-3x)^3}+c$

13) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x-8)^5}+c$ 14) $2\tan(3x)+c$

15) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c$ 16) $2\sqrt{x^2-x-1}+c$

3.83 1) $f(x) = x^3-4x-51$

2) $f(x) = 5x-\frac{x^2}{2}+2$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3+4x+\frac{8}{3}$

4) $f(x) = \frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{37}{6}x+\frac{35}{12}$

5) $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 4x + 8$

3.84 1) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 2) $F(x) = -\frac{18}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

3) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ -\frac{x^2}{2} + 6x - 9 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

3.85 1) $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + 3x + 2$ 2) $f(x) = 9\sqrt[3]{x^5} - 1$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{13}{3} & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^3}{12} + x - 5 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

3.86 $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x - 8}{2x}$

3.87 $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

3.89 0

3.90 $t = 2$ et $t = \frac{1}{3}$

3.93 69, 6 gallon /s

3.94 400 personnes par jour

3.95 $f' \cdot p + f \cdot p'$

3.96 0, 24 gramme par cm^2 par seconde

3.97 $\frac{15}{16}$ m/s

3.98 $3,81 \cdot 10^{-3}$ centime par mois

3.100 1) $p = r\cos(\theta) + \sqrt{b^2 - r^2\sin^2(\theta)}$. Application: $p = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$

2) $p(t) = \cos(2\pi t) + \sqrt{4 - \sin^2(2\pi t)}$

vitesse moyenne: -4 unités /s

Vitesse instantanée: -2π unités /s

3.101 Vitesse: $\dfrac{-x}{2\sqrt{4l^2 - x^2}}$. Application: $-\dfrac{3}{8}$ m/s

3.102 $6,55$ cm/h

3.103 $x'(t) = -\omega \sin(\omega t) \cdot \operatorname{sgn}(\cos(\omega t))$

3.104 1) $P(x) = \dfrac{80\sqrt{10}}{\sqrt{(40 + \pi x)^3}}$

taux de variation moyen: $-0,0561$ atm/cm

taux instantané de variation: $-120\pi\sqrt{10} \cdot (40 + \pi x)^{-5/2}$ atm/cm

2) $9,62$ cm

3.105 3) la tangente au graphe passe par l'origine

3.106 1) $\dfrac{1}{2}$ 2) 3 3) -1 4) -2

3.107 1) $x = -1$, $x = 1$ 2) $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 0$ 3) $x < -1$ ou $x > 1$

3.108 $0,98540$

3.109 Non. La diminution relative de sa demande d est inférieure à l'augmentation relative du prix p

3.110 1) $-\dfrac{1}{7}$ 2) $d = \dfrac{40p - p^2}{5}$

3) $\dfrac{6}{7}$. Si le prix p augmente de x %, la dépense d augmente de $\dfrac{6}{7}x$ %

3.111 1) $0,667$

2) a : $3'708$ h : $894,6$ l : $904,5$ t : 693 e : $99,90$

3.112 1) si $E_Y(Q) = 1$, la part du revenu consacré à X reste constante

si $0 < E_Y(Q) < 1$, la part du revenu consacré à X diminue

2) 1

§ 4. APPLICATION DES DÉRIVÉES

1. Calculs de limites par la règle de l'Hospital

La règle ci-dessous est fort utile dans le cas de formes indéterminées du type $"\frac{0}{0}"$ ou $"\frac{\infty}{\infty}"$.

> Soit a et L deux réels, f et g deux fonctions dérivables dans un intervalle ouvert contenant a telles que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.
>
> Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$
>
> Si $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Remarque

La règle de l'Hospital s'applique également aux calculs de limites du type $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}}$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}}$, $\lim\limits_{x \to +\infty}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}$.

Exemples

a) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^7 - 1} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x \to 1} \frac{5\,x^4}{7\,x^6} = \frac{5}{7}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2 + \sin^2(x)} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos(x)\sin(x)}{2x + 2\sin(x)\cos(x)} = "\frac{0}{0}" =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2(x) - 2\cos^2(x)}{2 + 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)} = -\frac{1}{2}$$

2. Croissance et concavité

Le signe de la dérivée d'une fonction renseigne sur sa croissance et sa décroissance.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors

a) f croissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

b) f décroissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Maximum et minimum: test de la dérivée première

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant un nombre a tel que $f'(a) = 0$.

1) Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle $]g\,;a[$ et si $f'(x) < 0$ sur un intervalle $]a\,;d[$, alors f admet un maximum en a.

2) Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle $]g\,;a[$ et si $f'(x) > 0$ sur un intervalle $]a\,;d[$, alors f admet un minimum en a.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

La fonction f est **convexe** (resp. **concave**) sur I si, pour tout $a \in I$, le graphe de f est au-dessus (resp. au-dessous) de la tangente en $M(a\,;f(a))$.

Formellement

La fonction f est **convexe** sur I si,
pour tout $x \in I$ et $a \in I$, on a $f(x) \geq f(a) + (x-a) \cdot f'(a)$

La fonction f est **concave** sur I si,
pour tout $x \in I$ et $a \in I$, on a $f(x) \leq f(a) + (x-a) \cdot f'(a)$

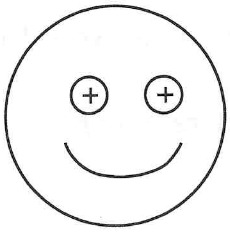
Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I. Alors

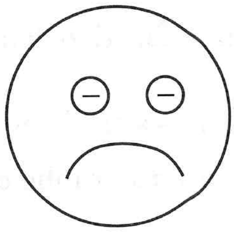
a) f convexe sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$.

b) f concave sur $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$, pour tout $x \in I$.

Le visage de la dérivée seconde renseigne sur la courbure



convexe



concave

Maximum et minimum: test de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois continûment dérivable (f'' continue) sur un intervalle ouvert I contenant un nombre a tel que $f'(a) = 0$.

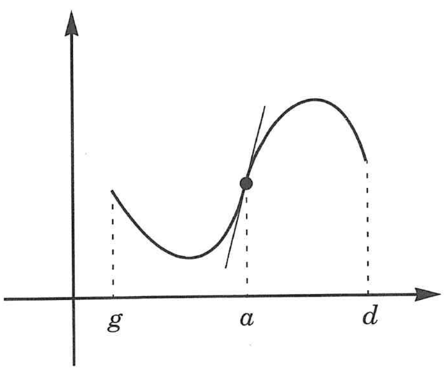
1) Si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum en a .

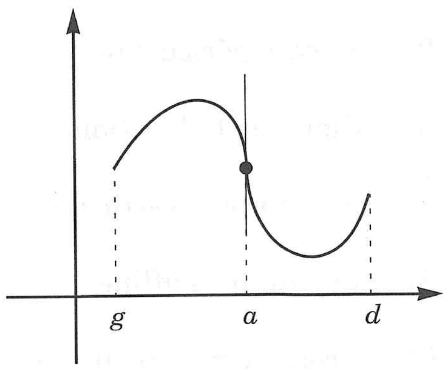
2) Si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum en a .

Définition

Soit f une fonction dont le graphe admet une tangente en a .

> Le graphe de f admet un **point d'inflexion** en a s'il existe g et d tels que
> f est convexe sur $]g\,;a[$ et concave sur $]a\,;d[$ ou
> f est concave sur $]g\,;a[$ et convexe sur $]a\,;d[$.





Remarque

Le graphe de f admet un point d'inflexion en a si la tangente au graphe de f en a «traverse» le graphe en a .

Point d'inflexion: test de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a.

Si $f''(x)$ s'annule et change de signe en a, alors $(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion du graphe de f.

3. Etude d'une fonction

Définition

> Un point c de l'ensemble de définition d'une fonction f est un **point critique** si $f'(c) = 0$ ou si $f'(c)$ n'existe pas.

Cette notion est très utile pour déterminer les extremums d'une fonction car si f est une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$, les abscisses des extremums de f sont à chercher parmi les points critiques et les extrémités de l'intervalle.

3.1 Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, on traite habituellement les points suivants

1) Ensemble de définition de la fonction
2) Parité, périodicité
3) Signe de la fonction
4) Asymptotes verticales, «trous»
5) Asymptotes affines
6) Croissance et points critiques
7) Concavité
8) Représentation graphique

On s'assurera de la cohérence des résultats obtenus

3.2 Exemples

a) Etudier la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

1) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3) Le signe de f est donné par le tableau suivant

x		0		1	
x^3	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$		$+$

4) Comme $\lim\limits_{x \to 1} |f(x)| = +\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale de f. Le signe de f permet de préciser $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$.

5) Comme $f(x) = x + 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$, la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique de f vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

La position relative du graphe et de l'asymptote oblique est donnée par le signe de $\delta(x) = \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$

x		$\frac{2}{3}$		1	
$\delta(x)$	$-$	0	$+$		$+$
Position du graphe relativement à l'asymptote	dessous	coupe	dessus		dessus

6) $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ s'annule en 0 et 3 .

Les points du graphe dont les abscisses sont des points critiques de f sont donc $(0\,;0)$ et $\left(3\,; \dfrac{27}{4}\right)$.

La croissance de f est donnée par le tableau suivant

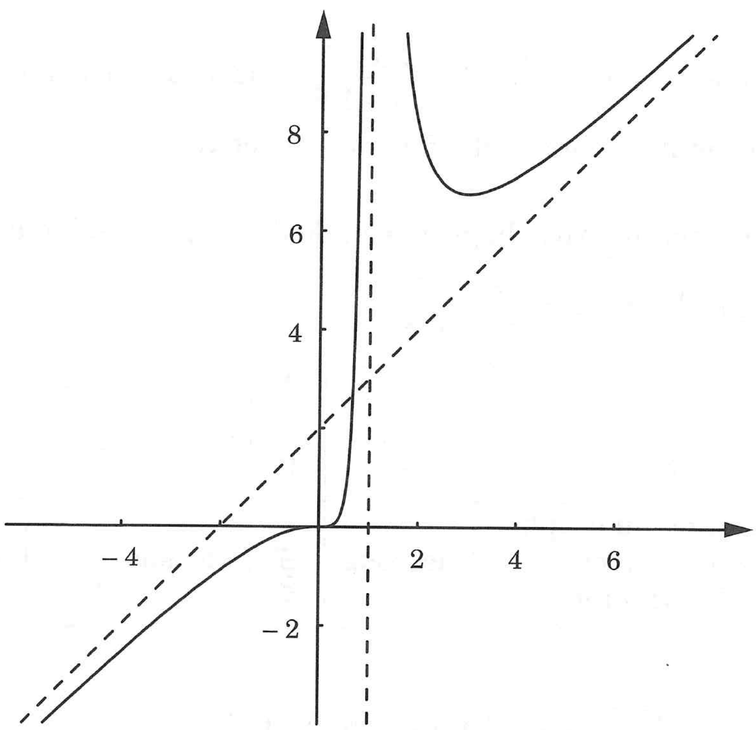
x		0		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$
		«palier»				minimum	

7) $f''(x) = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$ s'annule en 0.

La concavité est donnée par le tableau suivant

x		0		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\frown$	0	$\smile$		$\smile$
		inflexion			

8)



b) Etudier la fonction $f\colon x \mapsto x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$

1) L'ensemble de définition de f est $]-\infty\,;-4\,] \cup [\,0\,;+\infty\,[$.

3) Le signe de f est donné par le tableau suivant

x		-4		0	
$f(x)$	$-$	-3		1	$+$

5) Comme $\sqrt{x^2+4x}$ a pour asymptotes $y = \lvert x+2 \rvert$ (page 45), la droite d'équation $y = x+1+(x+2)$, c'est-à-dire $y = 2x+3$ est asymptote oblique de f vers $+\infty$ et la droite d'équation $y = x+1-(x+2)$, c'est-à-dire $y = -1$ est asymptote horizontale de f vers $-\infty$.

6) $f'(x) = 1 + \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$ ne s'annule pas sur $]-\infty\,;-4\,[\, \cup\,]\,0\,;+\infty\,[$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = +\infty$ (tangente verticale)

$\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ <}} f'(x) = -\infty$ (tangente verticale)

La croissance de f est donnée par le tableau suivant

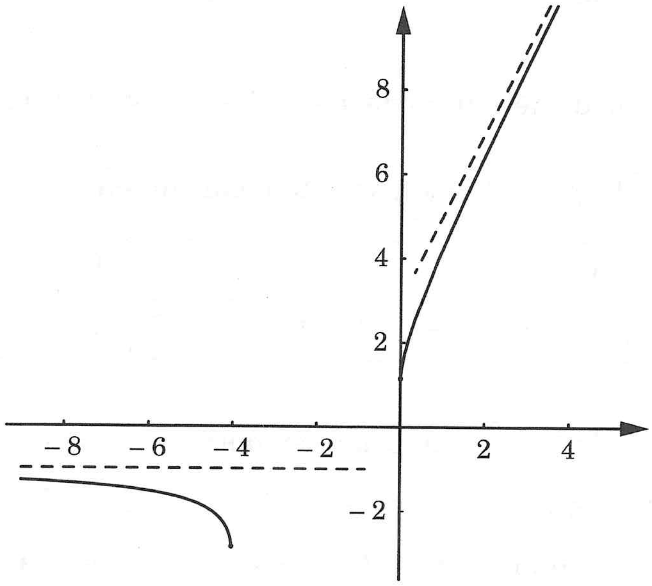
x		-4		0	
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3		1	$\nearrow$

7) $f''(x) = \dfrac{-4}{(\sqrt{x^2+4x})^3}$.

La concavité est donnée par le tableau suivant

x		-4		0	
$f''(x)$	$-$				$-$
$f(x)$	$\frown$	-3		1	$\frown$

8)



c) Etudier la fonction $f\colon x \mapsto 2\sin(x) + \dfrac{1}{2\sin(x)}$

1) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

2) f est impaire et périodique de période 2π.
Il suffit donc de l'étudier sur $]\,0\,;\pi\,[$.

3) Comme $f(x) = \dfrac{4\sin^2(x)+1}{2\sin(x)}$, le signe de f est donné par le tableau suivant

x	0		π
$f(x)$		$+$	

4) Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = \pi$ est une asymptote verticale.

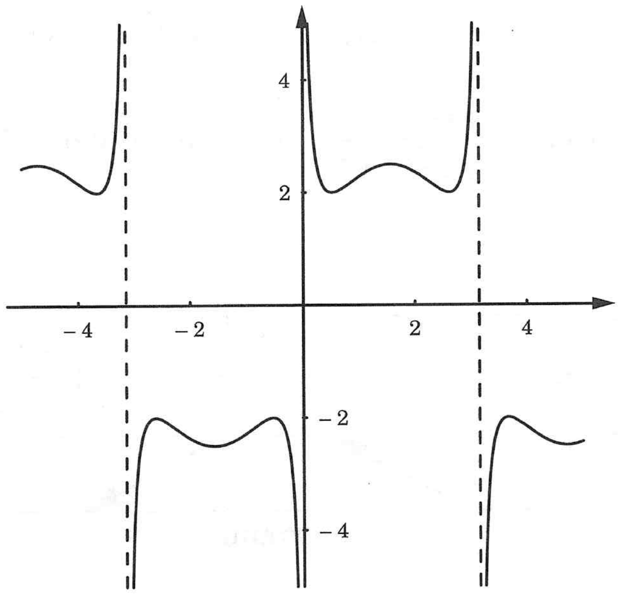
6) $f'(x) = 2\cos(x) - \dfrac{\cos(x)}{2\sin^2(x)} = \dfrac{\cos(x)\cdot(4\sin^2(x)-1)}{2\sin^2(x)}$ s'annule

en $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. La croissance de f est donnée par le tableau suivant

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	
			minimum		maximum		minimum		

7) On renonce ici à l'étude de la concavité.

8)



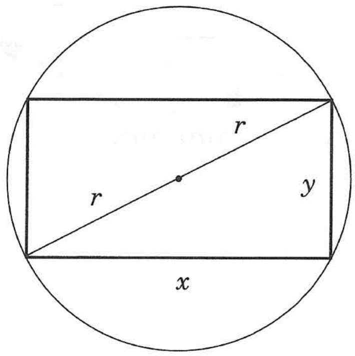
4. Optimisation

Beaucoup de problèmes pratiques conduisent à la détermination des valeurs maximales ou minimales prises par une quantité variable. Ces valeurs, qui sont les plus favorables dans un contexte donné, sont parfois appelées valeurs optimales. Déterminer ces valeurs constitue un **problème d'optimisation**.

La résolution d'un problème d'optimisation passe par une lecture attentive de la donnée souvent accompagnée d'un dessin, une définition de toutes les variables nécessaires et la recherche des extremums d'une fonction.

4.1 Exemples

a) Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale qui puisse être inscrit dans un cercle de rayon r ?



Désignons par x et y les côtés du rectangle et par A son aire. Il faut rendre $A = x \cdot y$ maximum.

Les variables x et y étant liées par la relation de Pythagore $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$, on doit rendre maximum

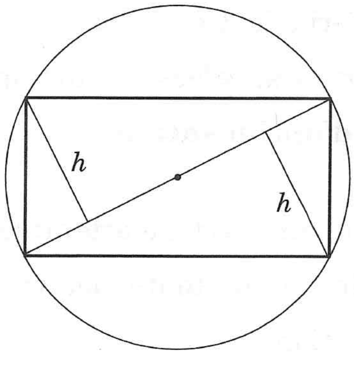
$$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} \quad \text{pour } x \in [\,0\,;2r\,]$$

La dérivée $A'(x) = \dfrac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$ ne s'annule dans $[\,0\,;2r\,]$ que pour $x = r\sqrt{2}$.

x		0		$r\sqrt{2}$		$2r$	
$A'(x)$			$+$	0	$-$		
$A(x)$			$\nearrow$		$\searrow$		
				maximum			

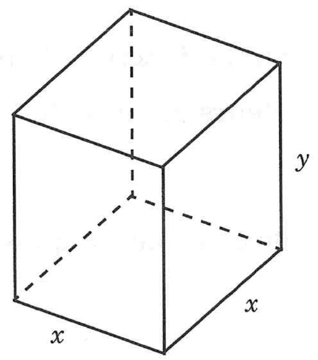
Les dimensions du rectangle d'aire maximum sont donc $x = r\sqrt{2}$ et $y = r\sqrt{2}$. Le rectangle cherché est un carré de côté $r\sqrt{2}$.

Remarque



Un autre choix de variable permet de résoudre plus simplement ce problème avec un argument géométrique.
On divise le rectangle en deux triangles dont l'aire est maximum lorsque leur hauteur h est maximum, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré

b) Quelles doivent être les dimensions d'une boîte de base carrée sans couvercle de contenance un litre pour que sa construction demande un minimum de matériau ?



Désignons par x le côté du carré de base et par y la hauteur de la boîte mesurés en dm. L'aire latérale, proportionnelle à la quantité de matériau nécessaire à la construction de la boîte est $S = x^2 + 4xy$.

Les variables x et y sont liées par le fait que le volume de la boîte vaut 1 dm^3 : $x^2 y = 1$.

On doit donc chercher le minimum de $S(x) = x^2 + \frac{4}{x}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

La dérivée $S'(x) = 2x - \frac{4}{x^2}$ s'annule pour $x = \sqrt[3]{2}$.

x		0		$\sqrt[3]{2}$	
$S'(x)$			$-$	0	$+$
$S(x)$			$\searrow$		$\nearrow$

minimum

Les dimensions de la boîte de surface minimale sont donc

$x = \sqrt[3]{2}$ dm et $y = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ dm.

Remarque

La boîte optimale a donc une hauteur égale au rayon du cercle inscrit dans la base. Ce résultat est vrai même si la base n'est pas carrée.

4.2 Plan de résolution

Nous donnons ci-dessous une stratégie d'approche de ces problèmes sous forme de marche à suivre.

1) Exprimer la quantité variable Q à rendre maximale ou minimale comme fonction d'une ou de plusieurs variables.

2) Si Q dépend de plus d'une variable, disons de n variables, trouver au moins $(n-1)$ équations liant ces variables.

3) Utiliser ces équations pour exprimer Q comme fonction d'une seule variable et déterminer l'ensemble D des valeurs admissibles de cette variable.

4) Calculer les extremums de Q sans oublier de contrôler ce qui se passe aux «bords» de D.

EXERCICES

Calculs de limites par la règle de l'Hospital

4.1 Calculer, si elles existent, les limites ci-dessous

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(3x) - 1}{x^2}$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin(x)}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x) - x}{x^3}$ 4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}\right)$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x}$ 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 1 + \cos(2x)}{x^4}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{\tan^2(2x)}$ 8) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x - 1}$

4.2 La règle de l'Hospital ne s'applique pas au calcul des limites suivantes, bien que celles-ci existent. Expliquer pourquoi et calculer ces limites par une autre méthode.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sin(x)}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ où $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

4.3 La condition $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ contient des hypothèses implicites: par exemple, g' doit être non nulle dans un intervalle ouvert contenant a. Cette hypothèse est indispensable: le théorème peut s'avérer faux si elle n'est pas satisfaite.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos(x)) \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

4.4 Selon le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a\,; x[$ tel que $f(x) = f(a) + f'(c_x) \cdot (x - a)$. Montrer que si de plus $f''(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{c_x - a}{x - a} = \dfrac{1}{2}$.

Indication: Calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)}{(x - a)^2}$ de deux manières différentes (en particulier par la règle de l'Hospital).

4.5 Théorème de Cauchy ou théorème de la moyenne généralisé.
Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ et dérivables sur $]a\,;b[$, montrer qu'il existe un point $c \in]a\,;b[$ tel que

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(c) = (g(b)-g(a))\cdot f'(c)$$

Croissance et concavité

4.6 Etudier la croissance des fonctions données par

1) $f(x) = x^2+6x+2$ 2) $f(x) = x^3+3x$

3) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{2} + 6x + 1$ 4) $f(x) = 2x^4-9x^2$

5) $f(x) = \dfrac{2x+5}{2x-3}$ 6) $f(x) = (x-1)^5\cdot(2x+1)^4$

7) $f(x) = x^5-5x^4+5x^3+1$ 8) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$

9) $f(x) = x^2\cdot\sqrt{24-x^2}$ 10) $f(x) = \sin^3(x)$

11) $f(x) = \sin(x)\cdot(1+\cos(x))$ 12) $f(x) = 3+|x-3|$

4.7 Trouver une fonction qui s'annule en $x = 0$, qui est décroissante pour $x < 2$ et croissante sinon.

4.8 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

1) Définir f en $x = 1$ pour qu'elle devienne continue en ce point. Peut-on faire de même en $x = -1$?

2) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

3) Montrer que pour $a < -1$, on a $\dfrac{a^3-1}{a^2-1} \le -3$ et que pour $a > -1$, on a $\dfrac{a^3-1}{a^2-1} \ge 1$.

4.9 Montrer que si f et g sont deux fonctions croissantes sur un intervalle I, il en est de même pour la fonction $f+g$.

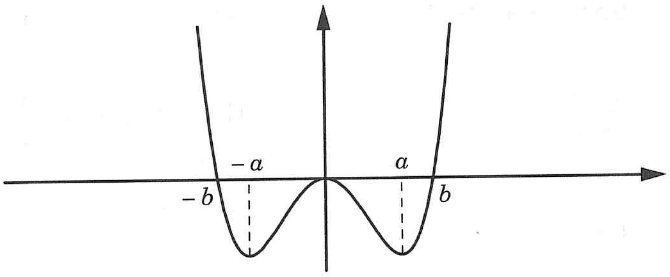
4.10 Montrer que si f et g sont deux fonctions croissantes et positives sur un intervalle I, il en est de même pour la fonction $f \cdot g$.

4.11 Soit g et h deux fonctions positives. Quelles sont les inégalités que doivent vérifier $\frac{g'}{g}$ et $\frac{h'}{h}$ pour que

1) $g \cdot h$ soit croissante ?

2) $\frac{g}{h}$ soit décroissante ?

4.12 Quelle est la relation que doivent vérifier a et b pour qu'il existe une fonction polynomiale de degré 4 ayant pour graphe la figure ci-dessous



4.13 En quels points les fonctions suivantes admettent-elles des extremums ?

1) $f(x) = x^2 \cdot (a-x)^2 , \quad a \neq 0$

2) $f(x) = \sin(x) \cdot \sin(a-x) , \quad a \neq 0$

3) $f(x) = \dfrac{x}{a x^2 - b x + c} \qquad a > 0 , \ c > 0$

4) $f(x) = \sqrt{2 a x^2 \cdot (2a - x)} \qquad a > 0$

5) $f(x) = \sqrt{1 + \left(\dfrac{a x}{1 + b x^2}\right)^2} \qquad b > 0$

6) $f(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{a^2} + \dfrac{\sin^2(x)}{b^2} \qquad a^2 > b^2$

4.14 Déterminer la valeur du nombre a pour que la fonction f définie par

$f(x) = \dfrac{x^2}{x+a}$ admette un minimum égal à 8 .

4.15 La fonction f, deux fois dérivable, vérifie $f(1) = 1$. Quelles autres hypothèses peut-on faire sur f pour que g, définie par $g(x) = x \cdot f(x)$, admette un maximum en 1 ?

4.16 Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des minimums de la famille de fonctions $f_m(x) = x^3 - 12m^2x + 12m$, $m > 0$.

4.17 Utiliser le test de la dérivée seconde pour analyser les extremums des fonctions suivantes

1) $f(x) = 3x^2 + 2$ 2) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3$

3) $f(x) = 6x^5 - x + 20$ 4) $f(x) = x^4 - x^2$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ 6) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

7) $g(t) = \dfrac{t}{1 + t^2}$ 8) $h(s) = s + \dfrac{1}{s}$

4.18 Déterminer les intervalles de convexité et de concavité des fonctions suivantes

1) $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$ 2) $f(x) = x^3 + 3x + 8$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ 6) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 8x + 1$

4.19 Déterminer, si elles existent, les abscisses des points d'inflexion des fonctions suivantes

1) $f(x) = x^3$ 2) $f(x) = x^3 - x$

3) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ 4) $f(x) = (x - 1)^4$

5) $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ 6) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

7) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ 8) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x}$

9) $f(x) = \cos^2(x)$ 10) $f(x) = \dfrac{6x}{1+x^2}$

4.20 Trouver une fonction qui admet des points d'inflexion en 1 et en 2 .

4.21 Trouver une fonction qui admet un maximum en 1 , un minimum en 3 et un point d'inflexion en 2 .

4.22 Trouver une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ qui n'a pas de valeur maximale sur cet intervalle.

4.23 Soit une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Déterminer, à l'aide de f'' , le signe de l'erreur due à l'approximation de $f(x_0+h)$ par $f(x_0+h) \cong f(x_0)+h\cdot f'(x_0)$.

4.24 Montrer que si $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$, alors $f(x_0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum de la fonction f.

4.25 Une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ peut-elle avoir

1) trois maximums ou minimums et deux points d'inflexion ?

2) deux maximums ou minimums et trois points d'inflexion ?

3) quatre maximums ou minimums et aucun point d'inflexion ?

4) deux maximums et aucun minimum ?

Si oui, esquisser le graphe, sinon expliquer pourquoi.

4.26 Démontrer qu'en un point d'inflexion la tangente au graphe d'une fonction «traverse» la courbe.

Indication: montrer que si x_0 est l'abscisse d'un point d'inflexion, l'expression $h(x) = f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)]$ change de signe en x_0 .

4.27 Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de la forme $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;a]$ et admettant une asymptote affine.

Montrer que si $f'' \geq 0$ sur I, alors le graphe de f est situé au-dessus de l'asymptote affine.

4.28 La population P de souris dans un bois varie en fonction du nombre x de hiboux qui s'y trouvent. Pour x compris entre 0 et 12, on admet que $P(x) = 30 + 12x^2 - x^3$.

1) Esquisser le graphe de la population P.

2) Pour quel nombre de hiboux la population des souris croît-elle le plus vite ?

4.29 La population P des cerfs en Valais fut la même en trois moments différents t_1, t_2 et t_3. Supposons que sur les intervalles $[\,t_1\,;t_2\,]$ et $[\,t_2\,;t_3\,]$ la population P soit une fonction dérivable par rapport au temps et non constante. Etablir l'existence d'au moins deux intervalles de temps, l'un contenu dans $[\,t_1\,;t_2\,]$ et l'autre dans $[\,t_2\,;t_3\,]$, pour lesquels la population des cerfs fut décroissante.

4.30 Si $f(t)$ représente le coût de la vie au temps t, alors $f'(t) > 0$ signifie qu'il y a inflation.

1) Que signifie $f''(t) > 0$?

2) Un membre du gouvernement dit: "L'inflation augmente, mais de moins en moins vite". Interpréter ce jugement en termes de $f'(t)$, $f''(t)$ et $f'''(t)$.

4.31 Supposons que le taux d'inflation en Suisse (en pour-cent par année) de 1990 à 2000 est donné par $I(t) = 10\left(\frac{t^3}{100} - \frac{t^2}{20} - \frac{t}{4} + 1\right)$ où t est le nombre d'années écoulées à partir du 1er janvier 1993.

Quelles sont les périodes qui correspondent à une augmentation du taux d'inflation ?

4.32 Calculer le plus grand écart vertical entre les graphes des fonctions f et g.

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{8}$; $g(x) = \sqrt{x}$; $0 \leq x \leq 4$

2) $f(x) = \sin(x)$; $g(x) = \cos(x)$; $0 \leq x \leq 2\pi$

4.33 Trouver sur le graphe de la fonction f les points les plus proches de l'origine.

1) $f(x) = \dfrac{4}{x}$ 2) $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

4.34 On injecte dans une veine d'un patient une substance qui produit une heure plus tard une élévation de température H. Si x milligrammes sont injectés, alors la hausse de température H est donnée par $H(x) = \dfrac{x^2}{8} \cdot \left(1 - \dfrac{x}{16}\right)$.

1) Esquisser le graphe de la fonction H.

2) Le taux de variation de H, selon le dosage x, est appelé la sensibilité du corps au dosage. Trouver le dosage pour lequel la sensibilité est maximale.

Etude d'une fonction

4.35 Prouver que le seul point critique de la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt[3]{x}$ est $x = 0$ et que f n'a pas d'extremum en 0.

4.36 Prouver que le seul point critique de la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ est $x = 0$, que f a un minimum en 0, et que f n'admet pas de tangente à l'origine.

4.37 Prouver qu'une fonction polynomiale f de degré 3 admet au plus 2 points critiques et esquisser le graphe de f selon le nombre de ses points critiques.

4.38 Etudier et représenter graphiquement les fonctions f définies ci-dessous

1) $f(x) = -x^2 + x + 2$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + x + 1$

3) $f(x) = x^2 - 2|x|$ 4) $f(x) = |4 - x^2|$

5) $f(x) = -x^3+3x^2-4x+3$

6) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}+x^2-3x-\dfrac{11}{3}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^2\cdot|x-2|$

8) $f(x) = -\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2}{2}-2$

9) $f(x) = \dfrac{x^4}{8}-\dfrac{3x^3}{4}-\dfrac{3x^2}{2}$

10) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$

11) $f(x) = \dfrac{-3x+4}{2x+3}$

12) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{2x}$

13) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

14) $f(x) = \dfrac{x\cdot(x-3)^2}{(x-2)^2}$

15) $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x+1}$

16) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-2}$

17) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

18) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}$

19) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

20) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

21) $f(x) = x\cdot\sqrt{1-x}$

22) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x}$

23) $f(x) = \sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)$

24) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-\cos(x)}$

25) $f(x) = 4\cos^2(x)-8\cos(x)+3$

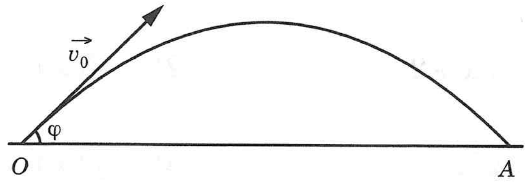
26) $f(x) = x-\sin(x)$

27) $f(x) = x\cdot\sin(x)$

28) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

Optimisation

4.39 La portée $P = OA$ d'un projectile lancé (dans le vide) avec une vitesse initiale v_0 et un angle d'élévation φ est donnée par $P = \dfrac{v_0^2\cdot\sin(2\varphi)}{g}$, g étant l'accélération de la pesanteur. Pour une vitesse initiale donnée, déterminer la valeur de l'angle φ pour laquelle la portée est maximale.



4.40 Parmi tous les triangles rectangles d'hypoténuse donnée h, quel est celui dont le périmètre est le plus grand ? Quel est ce périmètre maximal ?

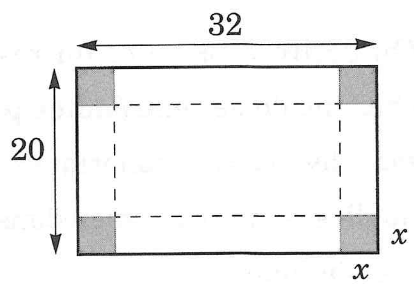
4.41 Parmi tous les rectangles de périmètre donné $2p$, quel est celui dont l'aire est maximale ? Quelle est la valeur de cette aire ?

4.42 Parmi toutes les boîtes cylindriques d'aire totale donnée, caractériser celle dont le volume est maximal.

4.43 Un fil de longueur L doit être coupé en deux parties. Avec l'une on forme un triangle équilatéral et avec l'autre un carré. Où faut-il couper ce fil pour que l'aire totale des deux figures construites soit maximale ? minimale ?

4.44 Déterminer les dimensions d'une boîte cylindrique sans couvercle, de volume donné, pour que sa construction demande le moins de matériau possible (on négligera l'épaisseur des parois et les déchets de construction). Même question pour une boîte avec couvercle.

4.45 On construit une boîte rectangulaire en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm. Déterminer la hauteur x de la boîte de volume maximal.

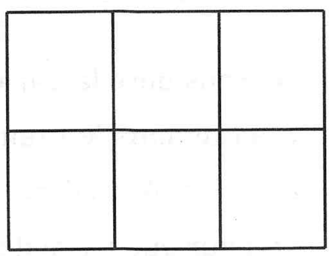


4.46 On construit un conteneur de forme cylindrique sans couvercle de volume $648\,\pi\ \text{cm}^3$. Le matériau utilisé pour le fond coûte 15 centimes par cm^2 et celui utilisé pour la paroi latérale 5 centimes par cm^2.

Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles sont les dimensions du conteneur le plus économique ?

4.47 On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos identiques pour un zoo selon le plan ci-contre.

Quelles dimensions donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?

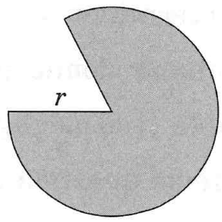


4.48 Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Si le périmètre de la fenêtre est de 6 m, quelles seront les dimensions de la fenêtre laissant passer un maximum de lumière ?

4.49 Un mur de 2 m de haut, situé à 1 m d'une façade, interdit l'accès à celle-ci. Calculer la longueur de l'échelle la plus courte qui s'appuie contre la façade et dont le pied est sur le sol, devant le mur.

4.50 Une feuille rectangulaire doit contenir 392 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent être de 2 cm chacune; les marges latérales de 1 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille nécessitant le moins de papier.

4.51 On fabrique un cornet de forme conique en rejoignant les bords rectilignes d'un secteur circulaire de rayon r. Quel est le volume du plus grand cornet possible ?



4.52 On désire construire un réservoir dont la forme est un cylindre fermé en chacune de ses extrémités par une demi-sphère. Si le coût par unité de surface des parties sphériques est le double de celui de la partie cylindrique, quelles sont les dimensions du réservoir de volume $4\pi \text{ m}^3$ le plus économique ?

4.53 On fait tourner un rectangle de périmètre $2p$ autour de l'un de ses axes de symétrie. Déterminer les dimensions du rectangle pour que le corps ainsi obtenu ait

1) le plus grand volume;
2) la plus grande aire latérale;
3) la plus grande aire totale.

4.54 On considère la parabole γ d'équation $y = 1 - x^2$ ainsi qu'un point M de γ situé dans le premier quadrant. La tangente à γ en M coupe l'axe Ox au point A et l'axe Oy au point B. Déterminer les coordonnées du point M pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.

4.55 La résistance d'une poutre de section rectangulaire est proportionnelle au produit de la largeur par le carré de la hauteur de sa section transversale. Quelle est la forme de la poutre la plus résistante que l'on peut tailler dans un tronc d'arbre de section circulaire ?

4.56 Deux usines situées à 10 km l'une de l'autre émettent des fumées polluantes. On suppose que la pollution provoquée par chaque usine en un endroit est proportionnelle à la quantité de fumée, et inversement proportionnelle au cube de la distance à l'usine. Si la première usine rejette trois fois plus de fumée que la seconde, quel est l'endroit le moins pollué situé entre les deux usines ?

4.57 Sur l'axe Ox on fixe une première source de lumière en $x = 0$ et une deuxième en $x = 10$. On note I_1 et I_2 les intensités lumineuses des deux sources, L_1 et L_2 les intensités des flux lumineux en un point provenant respectivement de la première source et de la deuxième source.

Sachant que $I_2 = 4I_1$ et que l'intensité du flux lumineux en un point est proportionnelle à l'intensité lumineuse de la source considérée et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant ce point de la source, déterminer le point de l'intervalle $[\,0\,;10\,]$ qui reçoit un flux total minimal des deux sources. Calculer le rapport des distances séparant ce point aux deux sources.

4.58 On désire fabriquer une tente en forme de pyramide régulière de base carrée. On dispose de S m^2 de toile pour fabriquer les quatre faces. On désigne par V le volume de la tente, par x le côté du carré de la base et par h la hauteur de la tente. Montrer que V est maximum lorsque $\dfrac{x}{h} = \sqrt{2}$.

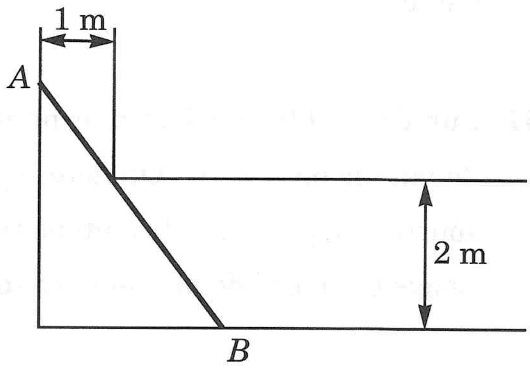
4.59 Un navire doit parcourir 40 km contre un courant de 10 km/h . Il consomme par heure une quantité de carburant proportionnelle au carré de sa vitesse. En supposant qu'il navigue à vitesse constante, quelle doit être sa vitesse pour minimiser la quantité de carburant consommée ?

4.60 A 10 kilomètres de votre maison, vous vous rappelez avoir oublié de fermer un robinet, ce qui vous coûte 40 centimes par heure. En roulant à une vitesse constante de s kilomètres par heure, le coût du carburant est de $8+\dfrac{s}{20}$ centimes par kilomètre. A quelle vitesse devez-vous faire l'aller et retour pour minimiser les frais totaux ?

4.61 On colle les côtés $[AB]$ et $[DC]$ d'un rectangle $ABCD$ de périmètre donné pour former un cylindre ouvert. Quelle doit être la mesure de l'angle entre le côté $[AB]$ et la diagonale $[AC]$ pour que le volume du cylindre soit maximal ?

4.62 Deux couloirs de largeurs 1 m et 2 m se rencontrent à angle droit. On transporte une barre rigide AB parallèlement au sol.

Quelle est la longueur maximale que peut avoir cette barre si l'on veut pouvoir la transporter d'un couloir dans l'autre ?



4.63 Des mesures répétées d'une grandeur inconnue x ont donné les résultats suivants: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Montrer que la somme des carrés des écarts $(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2+\dots+(x-x_n)^2$ sera minimale si l'on estime x

par la moyenne des mesures $\dfrac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}$.

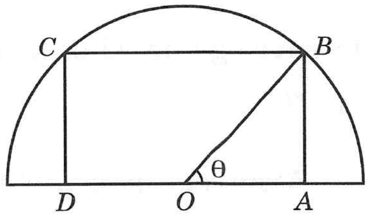
Exercices récapitulatifs

4.64 Etudier sur $[0\,;\pi]$ et sans dérivée seconde la fonction de vibration donnée par $v(t) = \sin(t)+\dfrac{\sin(2t)}{2}+\dfrac{\sin(3t)}{3}$.

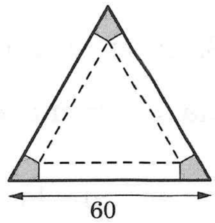
Indication: pour le signe de la dérivée, utiliser la formule $\cos(p)+\cos(q) = 2\cdot\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

4.65 Deux objets s'attirent mutuellement avec une force qui est proportionnelle au produit de leurs masses. Sachant que la somme de leurs masses est égale à M, calculer la masse de chaque objet pour que la force d'attraction soit maximale.

4.66 Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle de diamètre égal à 2. Déterminer le rectangle d'aire maximale en prenant l'angle θ comme variable.



4.67 Déterminer le volume maximal de la boîte triangulaire obtenue à partir d'un triangle équilatéral de 60 cm de côté selon le schéma ci-contre.



4.68 Un camion doit faire un trajet de 150 km. En roulant à une vitesse constante v, sa consommation est de $6 + \frac{v^2}{300}$ litres par heure. Le prix du carburant est de $1,20$ francs par litre et on paie le chauffeur 25 francs par heure. Quelle doit être la vitesse du camion pour que le prix de revient de la course soit minimal ? Quel est alors ce prix de revient ?

4.69 A midi, le bateau B est situé à 45 milles au nord du bateau C. Le bateau B se dirige vers le sud à la vitesse de 9 nœuds et le bateau C se dirige vers l'ouest à la vitesse de 12 nœuds. A quelle heure les bateaux seront-ils à une distance minimale l'un de l'autre ? (Rappel: un nœud $=$ un mille par heure)

4.70 Une maison a une base carrée et son volume habitable est un parallélépipède de 768 m^3. La perte de chaleur par unité de surface est trois fois plus élevée pour le plafond que pour les murs. On suppose qu'il n'y a pas de perte de chaleur par le plancher. Quelles doivent être les dimensions de la maison pour que la perte de chaleur soit minimale ? Est-ce raisonnable ?

4.71 On peut lire dans l'ouvrage de M. Lucien Chambadal "Calcul pratique", au paragraphe consacré au cylindre de révolution, l'information suivante :

«Les rouleaux cylindriques acceptés par les PTT sont tels que $17 \leq 2x + y \leq 104$, où x désigne le diamètre et y la longueur (unité: le cm)»

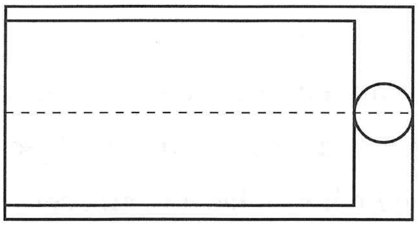
On envisage de déterminer le volume maximal des cylindres acceptés par les PTT.

1) Montrer que le problème revient à déterminer le maximum de $\frac{\pi}{4} x^2 y$ sur le domaine D défini par: $\begin{cases} 17 \leq 2x + y \leq 104 \\ x > 0 \ , \quad y > 0 \end{cases}$.

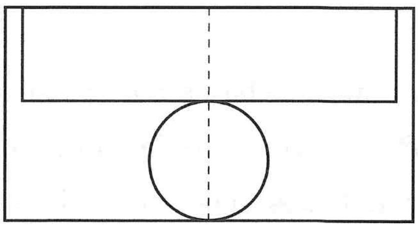
2) Si x et y vérifient l'équation $y = mx$, $(m > 0)$, montrer que le maximum du volume est égal à $\frac{\pi}{4} m \left(\frac{104}{m+2}\right)^3$.

Etudier ensuite la croissance de la fonction $m \mapsto \frac{\pi}{4} m \left(\frac{104}{m+2}\right)^3$ sur $]0 ; +\infty[$. En déduire que le cylindre de volume maximal est celui dont la longueur est égale au diamètre.

4.72 Dans un rectangle de dimensions a et $3a$, on découpe le patron d'un cylindre (paroi latérale et base circulaire) comme l'indique la figure ci-dessous



Possibilité 1



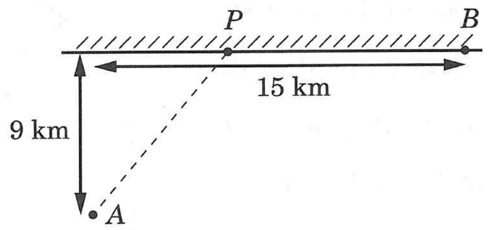
Possibilité 2

Comment procéder pour obtenir le cylindre de volume maximal ?

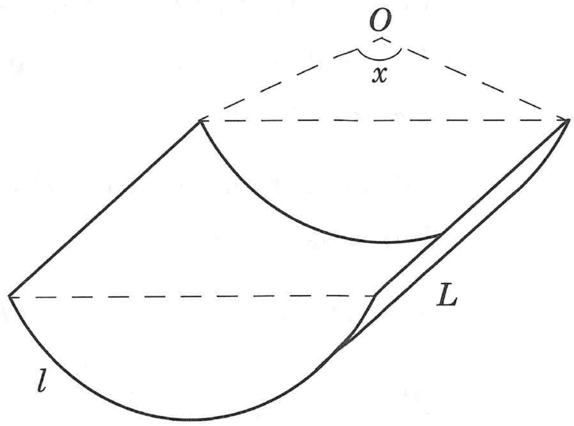
4.73 Des voitures traversent un tunnel de 3'500 m de long à une vitesse v km/h. On suppose que chaque voiture mesure 4 m de long et respecte avec le véhicule précédent une distance minimale en mètres $d = 0,004\, v^2$. Quelle est la vitesse v permettant le débit maximum ?

4.74 Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h.

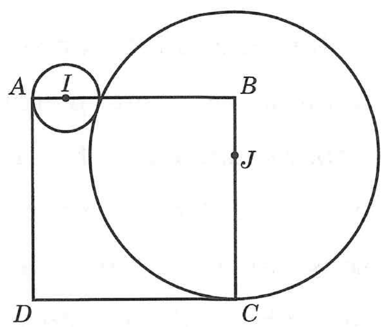
Où doit-il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



4.75 Une bande de métal rectangulaire a pour largeur l et pour longueur L. On la courbe en arc de cercle centré en O de façon à obtenir un élément de gouttière. Pour quelle mesure x de l'angle en O l'élément de gouttière a-t-il une capacité maximale ?



4.76 On donne un carré $ABCD$ de côté égal à 1. On construit deux cercles tangents, l'un centré sur un côté, l'autre sur le côté adjacent, comme le montre la figure. Déterminer la distance $x = \delta(A\,;I)$ pour que l'aire totale des deux disques soit minimale.

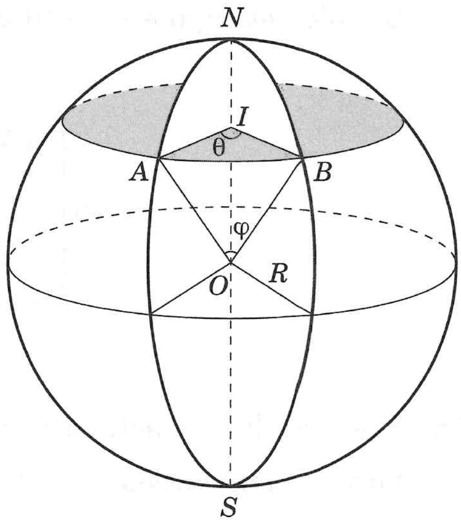


Indication: la dérivée de l'aire totale est divisible par $x^2 + 2x - 1$.

4.77 1) On considère les fonctions $f\colon\ x \mapsto \sin(ax)$ et $g\colon\ x \mapsto a \cdot \sin(x)$ sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ avec la condition $0 < a < 1$.

Montrer que $f(x) > g(x)$ pour tout x tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

2) On considère deux points A et B de la surface terrestre situés sur un même parallèle. Envisageons deux trajets pour aller de A à B : l'un de longueur L suivant le parallèle, l'autre de longueur l suivant le "grand cercle" passant par A et B, c'est-à-dire le cercle découpé sur la sphère par le plan $(A\,;O\,;B)$.



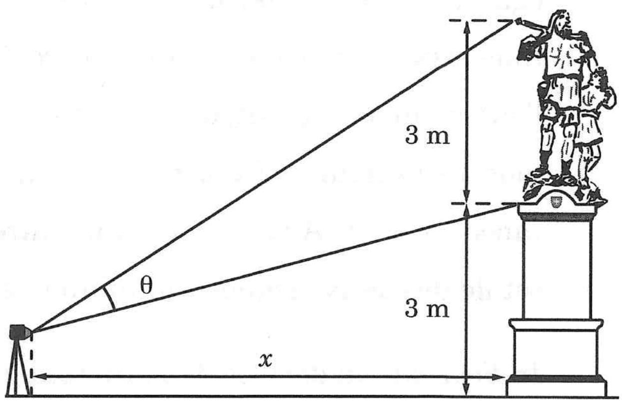
Démontrer que $L > l$ à l'aide de 1) et des relations suivantes à établir préalablement

a) $AB = 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

b) $\frac{r}{R}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

c) $L > l \iff \frac{r\theta}{2R} > \frac{\varphi}{2} \iff \sin\left(\frac{r\theta}{2R}\right) > \frac{r}{R}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

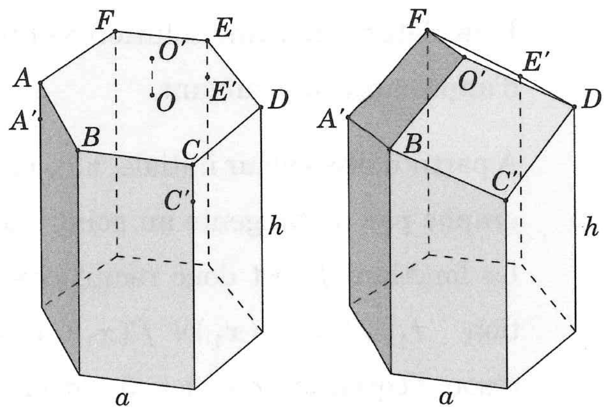
4.78 Déterminer la distance x à laquelle on doit placer un appareil photographique, fixé à $1{,}5$ m du sol, pour avoir sous un angle θ maximal une photo de la statue de Guillaume Tell, haute de 3 m et placée sur un piédestal haut de 3 m .



Indication: observer que θ est maximal lorsque $\tan(\theta)$ est maximal, puis exprimer $\tan(\theta)$ en fonction de x .

4.79 On considère un prisme droit de hauteur h , à base hexagonale régulière de côté $a < h$.

On remplace ce prisme par un objet de même volume en créant les faces $A'BO'F$, $C'DO'B$ et $E'FO'D$ en forme de losange, où les points A', C' et E' sont à une distance $x < h$ au-dessous de A, C et E respectivement, et le point O' est à une distance $x < h$ au-dessus de O.

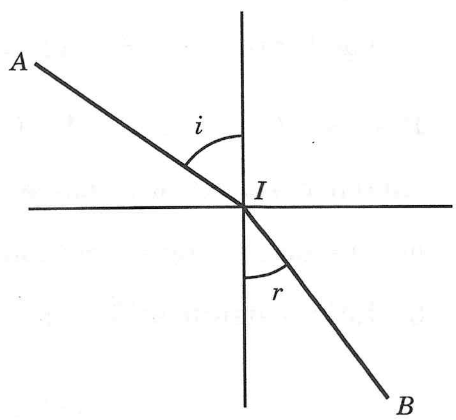


1) Montrer que l'aire S de cet objet (ouvert en bas) est donnée par

$$S(x) = \frac{3a}{2}\left(4h - 2x + \sqrt{3}\sqrt{4x^2 + a^2}\right)$$

2) Déterminer la valeur de x pour que l'aire de cet objet soit minimale. (Les abeilles obturent de cette manière les alvéoles en minimisant la quantité de cire nécessaire !)

4.80 Si un rayon lumineux se déplace à la vitesse v_1 dans un milieu et à la vitesse v_2 dans un autre milieu séparé du premier par une surface plane, on sait que le chemin qu'il suit est tel que le temps mis pour passer d'un point A du premier milieu à un point B du second est minimum.



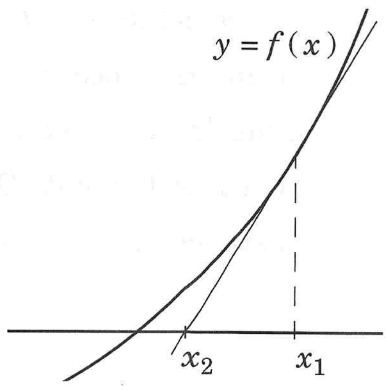
Prouver que le rayon lumineux frappera la surface de séparation en un point I tel que $\dfrac{\sin(i)}{\sin(r)} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

Méthode de Newton

Pour déterminer une solution de l'équation $f(x) = 0$, on utilise le procédé d'approximation suivant.

A partir d'une valeur initiale x_1, on remplace le graphe par sa tangente au point $(x_1 ; f(x_1))$. La fonction f est donc remplacée par la fonction $t_1(x) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)$ et on résout l'équation $t_1(x) = 0$, d'où une nouvelle approximation

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} .$$



On répète ensuite le procédé pour obtenir une suite d'approximations x_1, x_2, x_3, ... avec $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. La méthode ne garantit pas que x_n se rapproche d'une solution, mais lorsque $x_{n+1} \cong x_n$, on obtient souvent une bonne approximation de la solution.

Exemple

On veut calculer $\sqrt{11}$ à 10^{-5} près, c'est-à-dire estimer la solution positive de l'équation $x^2 - 11 = 0$.

Posons $f(x) = x^2 - 11$. Comme $f(3) = -2$ et $f(4) = 5$, la solution cherchée est comprise entre 3 et 4. On amorce le procédé avec $x_1 = 3$ et on calcule les approximations $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 11}{2\,x_n}$ en travaillant avec 6 chiffres significatifs. On obtient

$$x_2 = 3 - \frac{(3)^2 - 11}{2(3)} \cong 3,33333$$

$$x_3 = 3,33333 - \frac{(3,33333)^2 - 11}{2(3,33333)} \cong 3,31667$$

$$x_4 = 3,31667 - \frac{(3,31667)^2 - 11}{2(3,31667)} \cong 3,31662$$

$$x_5 = 3,31662 - \frac{(3,31662)^2 - 11}{2(3,31662)} \cong 3,31662$$

Comme $(3,31662)^2 - 11 < 0$ et $(3,316625)^2 - 11 > 0$, on en déduit que

$$3,31662 < \sqrt{11} < 3,316625$$

4.81 En utilisant la méthode de Newton, calculer à 10^{-4} près dans l'intervalle prescrit la solution de chacune des équations suivantes

1) $\cos(x) - x = 0$ $\qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2) $\sqrt{x} = \cos(x)$ $\qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

3) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\qquad -2 \leq x \leq 0$

4) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\qquad 0 \leq x \leq 1$

5) $x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$ $\qquad 1 \leq x \leq 5$

6) $\tan(x) + x = 0$ $\qquad \frac{\pi}{2} < x < \pi$

4.82 Appliquer la méthode de Newton à l'équation $5\sqrt[3]{x} + x - 1 = 0$ avec la valeur initiale

1) $x_1 = 1$ $\qquad$ 2) $x_1 = 0,5$

Essayer avec d'autres valeurs initiales et déterminer 2 chiffres significatifs de la solution.

4.83 Appliquer la méthode de Newton à l'équation $\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0$ avec la valeur initiale

1) $x_1 = 0$ $\qquad$ 2) $x_1 = 2$

Essayer avec d'autres valeurs initiales et déterminer 4 chiffres significatifs de la solution.

4.84 Montrer que si $x_1 \neq 0$, la méthode de Newton ne fournit pas de solution des équations $\sqrt[3]{x} = 0$ et $\sqrt{|x|} = 0$.

Problèmes économiques

4.85 Dans une certaine entreprise, le coût total CT de la production est donné par la relation $CT(q) = \frac{q^2}{8} + 2$, où q est la quantité produite. On sait encore que sur le marché le prix de vente unitaire est égal à 2 francs.

1) Tracer un graphe qui donne le bénéfice de l'entreprise en fonction de sa production.

2) Quel est le volume de production qui assure un profit maximal ?

3) Calculer le profit maximal du producteur en fonction d'un prix unitaire de vente p.

4.86 Pour un certain bien X, la quantité q que les consommateurs sont prêts à acheter dépend du prix unitaire de vente p de ce bien. On admet ici que la demande des consommateurs est donnée par la relation $q + 2p = 90$.
Le bien X est produit par une firme en situation de monopole. Les frais totaux de production de q unités du bien sont donnés par le montant $CT(q) = q^3 - 8q^2 + 57q + 2$.
Pour éviter surplus et pénurie, le fabricant doit respecter la demande des consommateurs et fixer le prix de vente en fonction de la quantité qu'il veut écouler.

1) Pour une quantité q, calculer le prix unitaire p de vente, la recette $R = p \cdot q$ et le bénéfice B de l'entreprise.

2) Combien le fabricant doit-il produire pour maximiser son profit ?

3) Etudier le bénéfice comme fonction du volume de production. A l'aide du graphe donner l'intervalle de production qui assure une certaine rentabilité de l'entreprise.

4.87 Pour produire q unités d'un certain bien, une entreprise supporte des coûts variables $CV(q)$ et des coûts fixes CF, avec

$$CV(q) = 0,5q^3 - q^2 + 4q \qquad \text{et} \qquad CF = 4$$

On désigne par $CT(q)$ le coût total : $CT(q) = CV(q) + CF$

1) Donner l'expression de chacune des fonctions suivantes

   $CT_u(q)$ le coût total unitaire

   $C_m(q) = CT'(q)$ le coût marginal

   $CV_u(q)$ le coût variable unitaire

   $CF_u(q)$ le coût fixe unitaire

2) Représenter les fonctions CT_u , C_m et CV_u sur un même graphique, en déterminant explicitement les niveaux de production où elles atteignent un minimum.

Pour que le fait de produire soit préférable à la fermeture, il faut que le déficit de l'entreprise active reste inférieur à ses coûts fixes. Le prix de vente minimal pour lequel l'entreprise a avantage à rester active est appelé **seuil de fermeture**. Si elle veut progresser, l'entreprise doit pouvoir vendre son produit plus cher que le prix de revient CT_u . Le prix de vente minimal pour lequel l'entreprise peut faire des bénéfices est appelé **seuil de rentabilité**.

3) Déterminer le seuil de fermeture et le seuil de rentabilité.

4) L'entreprise vend sa production à un prix unitaire égal à p . Déterminer la production maximisant le profit de l'entreprise lorsque $p = 3$, $p = 4$, $p = 6$ et $p = 8$. Calculer dans chaque cas le profit réalisé et commenter.

4.88 Une entreprise produit et distribue un bien X pour lequel la demande q est donnée par l'égalité $p = 45 - 15q + 2q^2$ liant le prix p (en francs par kilo) et la quantité q (en millions de kilos).
On sait que la demande ne dépasse pas 3 millions de kilos. Les coûts de production et de distribution du bien en question sont donnés (en millions de francs) par l'expression $C(q) = 1 + 6q - 3q^2 + q^3$.

1) Quelle quantité q l'entreprise doit-elle mettre sur le marché pour rendre maximum son profit ?

L'État décide de prélever une taxe sur la vente du bien X . Si la taxe est perçue à raison de t francs par kilo, le produit $t \cdot q$ représente pour l'entreprise une augmentation des coûts de production et de distribution.

2) Exprimer, en fonction de la taxe unitaire t, la quantité $q(t)$ que l'entreprise, soumise à la taxe, doit mettre sur le marché pour rendre maximum son profit.

Le produit $t \cdot q$ représente pour l'État la recette totale provenant de la taxe sur le bien X. Sachant que l'entreprise fixera toujours sa production à $q(t)$ comme le veut son objectif de rentabilité maximale, répondre aux trois questions suivantes

3) A quelle valeur l'État doit-il fixer t pour que sa propre recette soit maximale ?

4) Quel est le prix de vente et quelle est la quantité vendue ?

5) Quels sont alors le profit de l'entreprise et la recette de l'État ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

4.1	1) $-\frac{9}{2}$	2) 6	3) $\frac{1}{3}$	4) 0
	5) 0	6) $\frac{2}{3}$	7) $\frac{1}{8}$	8) $-\pi$

4.2 1) 1 2) 0

4.3 0

4.6 1)

x		-3	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

2) f est croissante sur $\mathbb{R}$

3)

x		-3		-2	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

4)

x		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

5)

x		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

6)

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		1	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

7)

x		0		1		3	
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

8)

x		-1		0		1	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

9)

x		$-\sqrt{24}$		-4		0		4		$\sqrt{24}$	
$f(x)$			↗		↘		↗		↘		

10)

x		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π	
$f(x)$			↘		↗		↗		↘		

11)

x		0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π	
$f(x)$			↗		↘		↘		↗		

12)

x		3	
$f(x)$	↘		↗

4.7 Par exemple, $f(x) = x^2 - 4x$

4.8 1) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ est continue en 1 et est égale à f si $x \neq 1$. Non.

2)

x		-2		-1		0		1	
$f(x)$	↗		↘		↘		↗		↗

4.11 1) $\dfrac{g'}{g} + \dfrac{h'}{h} \geq 0$ 2) $\dfrac{g'}{g} \leq \dfrac{h'}{h}$

4.12 $b^2 = 2a^2$

4.13 1) minimums: $(0\,;0)$ et $(a\,;0)$; maximum $\left(\dfrac{a}{2}\,;\dfrac{a^4}{16}\right)$

2) maximums: $\left(\dfrac{a}{2} + k\pi\,;\,\sin^2\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$;

minimums: $\left(\dfrac{a+\pi}{2} + k\pi\,;\,-\cos^2\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

3) minimum $\left(-\sqrt{\dfrac{c}{a}}\,;f\left(-\sqrt{\dfrac{c}{a}}\right)\right)$; maximum $\left(\sqrt{\dfrac{c}{a}}\,;f\left(\sqrt{\dfrac{c}{a}}\right)\right)$

4) minimum $(0\,;0)$; maximum $\left(\dfrac{4a}{3}\,;\dfrac{8a^2}{3\sqrt{3}}\right)$

5) minimum $(0\,;1)$; maximums : $\left(\dfrac{\pm 1}{\sqrt{b}}\,;\sqrt{1+\dfrac{a^2}{2b}}\right)$

6) minimums: $\left(k\pi\,;\dfrac{1}{a^2}\right)$; maximums: $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{1}{b^2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

4.14 $a = -2$

4.15 $f'(1) = -1$ et $f''(1) < 2$

4.16 Les minimums sont sur la courbe d'équation $y = 6x - 2x^3$

4.17 1) minimum en 0

2) maximum en 0 ; minimum en 4

3) maximum en $\dfrac{-1}{\sqrt[4]{30}}$; minimum en $\dfrac{1}{\sqrt[4]{30}}$

4) maximum en 0 ; minimums en $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}$

5) minimum en 0

6) maximum en $\cong -0,596$; minimum en 0

7) maximum en 1 ; minimum en -1

8) maximum en -1 ; minimum en 1

4.18 1) f est convexe sur $\mathbb{R}$

2)

x		0	
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

3)

x		0	
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

4)

x		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f(x)$	$\smile$		$\frown$		$\smile$

5)

x		1	
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

6)

x		$-\frac{4}{3}$	
$f(x)$			

4.19 1) 0 2) 0 3) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ 4) —

5) — 6) 1 7) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 8) 2

9) $\dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}$ 10) $0\,;\ \pm\sqrt{3}$

4.20 Par exemple: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$

4.21 Par exemple: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

4.22 Par exemple $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \text{ ou si } x = 1 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

4.23 La différence entre la valeur approchée et la valeur exacte est de signe contraire à celui de $f''(x)$ pour $x \in [\,x_0\,;x_0 + h\,]$

4.25 3) et 4) de telles fonctions n'existent pas

4.28 2) pour 4 hiboux

4.30 1) l'inflation augmente 2) $f'(t) > 0$, $f''(t) > 0$ et $f'''(t) < 0$

4.31 Le taux d'inflation a augmenté du 1.1.90 au 1.5.91 et du 1.1.98 au 31.12.2000.

4.32 1) le plus grand segment est à l'abscisse 4 . Il mesure 6

2) le plus grand segment est aux abscisses $\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$. Il mesure $\sqrt{2}$

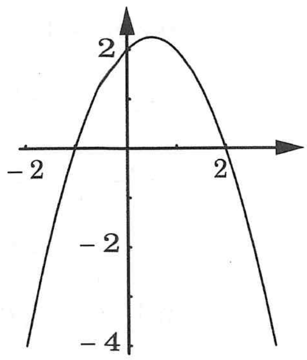
4.33 1) $(2\,;2)$ et $(-2\,;-2)$ 2) $(1\,;1)$ et $(-1\,;1)$

4.34 2) $x = \dfrac{16}{3}$

4.38 1) $f'(x) = -2x + 1$

max. $\left(\frac{1}{2} ; \frac{9}{4}\right)$

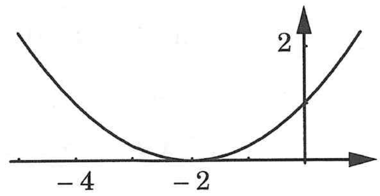
$f''(x) = -2$



2) $f'(x) = \frac{1}{2}x + 1$

min. $(-2 ; 0)$

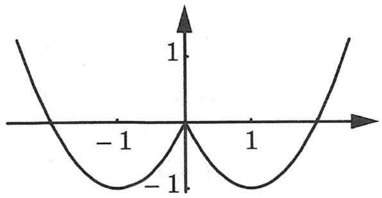
$f''(x) = \frac{1}{2}$



3) $f'(x) = 2x - 2\,\mathrm{sgn}(x)$

min. $(-1 ; -1)$ et $(1 ; -1)$

$f''(x) = 2$

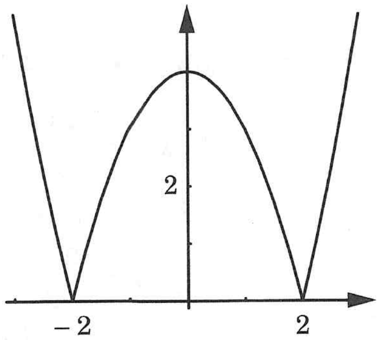


4) $f'(x) = -2x \cdot \mathrm{sgn}(4 - x^2)$

min. $(-2 ; 0)$ et $(2 ; 0)$

max. $(0 ; 4)$

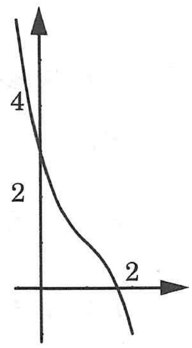
$f''(x) = -2\,\mathrm{sgn}(4 - x^2)$



5) $f'(x) = -3x^2 + 6x - 4$

$f''(x) = -6x + 6$

infl. $(1 ; 1)$



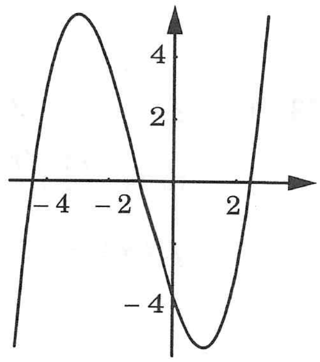
6) zéros -1 , $\dfrac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$

max. $\left(-3\,;\,\dfrac{16}{3}\right)$, min. $\left(1\,;\,-\dfrac{16}{3}\right)$

$f''(x) = 2x + 2$

infl. $(-1\,;0)$



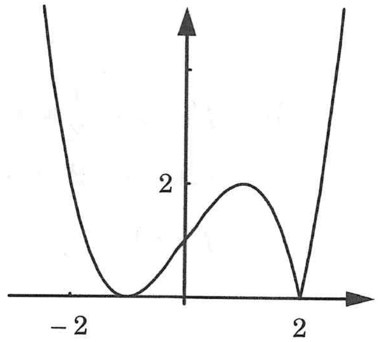
7) $f'(x) = \left(\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}\right) \cdot \operatorname{sgn}(x-2)$

min. $(-1\,;0)$ et $(2\,;0)$

max. $(1\,;2)$

$f''(x) = 3x \cdot \operatorname{sgn}(x-2)$

infl. $(0\,;1)$ et $(2\,;0)$



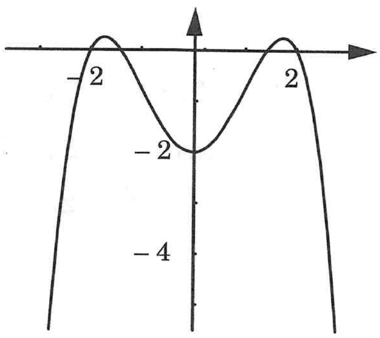
8) zéros ± 2 , $\pm\sqrt{2}$

$f'(x) = -x^3 + 3x$

max. $\left(\pm\sqrt{3}\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$, min. $(0\,;-2)$

$f''(x) = -3x^2 + 3$

infl. $\left(-1\,;-\dfrac{3}{4}\right)$, $\left(1\,;-\dfrac{3}{4}\right)$



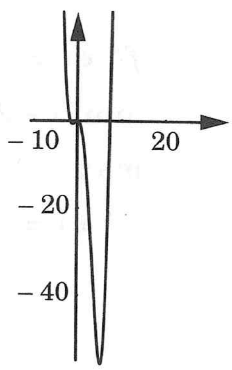
9) zéros 0 , $\dfrac{6 \pm 2\sqrt{21}}{2}$

$f'(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{9x^2}{4} - 3x$, max. $(0\,;0)$

min. $(-1{,}08\,;-0{,}63)$, $(5{,}58\,;-55{,}83)$

$f''(x) = \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{9x}{2} - 3$

infl. $\left(\dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}\,;\,\dfrac{-265 \mp 63\sqrt{17}}{16}\right)$

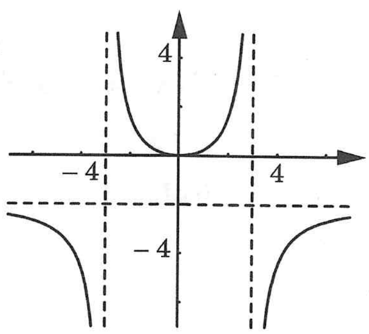


10) zéro 0 , asymptotes $x = -3$, $x = 3$, $y = -2$

$f'(x) = \dfrac{36x}{(9-x^2)^2}$

min. $(0\,;0)$

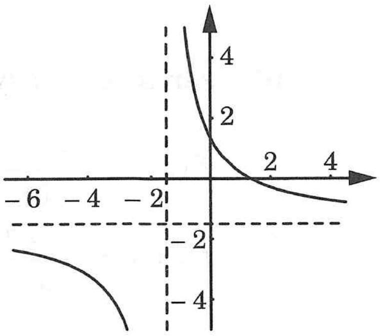
$f''(x) = \dfrac{108(x^2+3)}{(9-x^2)^3}$



11) zéro $\frac{4}{3}$, asymptotes $x = -\frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$

$$f'(x) = \frac{-17}{(3+2x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{68}{(3+2x)^3}$$



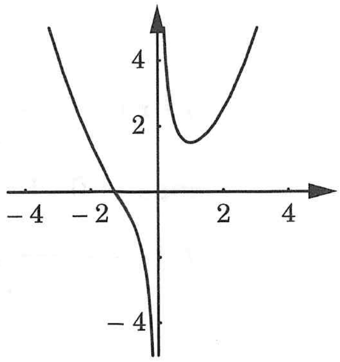
12) zéro $-\sqrt[3]{2}$, asymptote $x = 0$

$$f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$$

min. $\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$

$$f''(x) = \frac{x^3+2}{x^3}$$

infl. $(-\sqrt[3]{2} ; 0)$



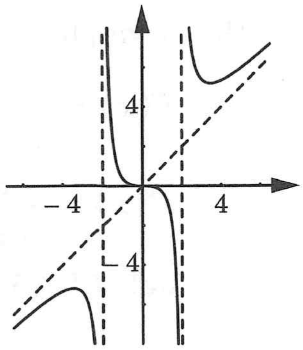
13) asymptotes $x = -2$, $x = 2$ et $y = x$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

max. $(-2\sqrt{3} ; -3\sqrt{3})$, min. $(2\sqrt{3} ; 3\sqrt{3})$

$$f''(x) = \frac{8(x^3+12x)}{(x^2-4)^3}$$

infl. $(0 ; 0)$



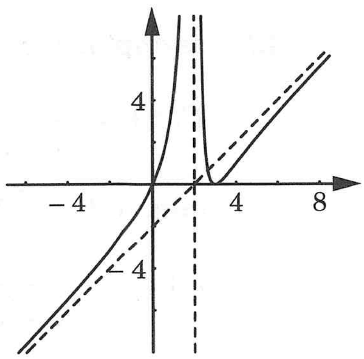
14) asymptotes $x = 2$ et $y = x - 2$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 15x - 18}{(x-2)^3}$$

min. $(3 ; 0)$

$$f''(x) = \frac{-6(x-4)}{(x-2)^4}$$

infl. $(4 ; 1)$



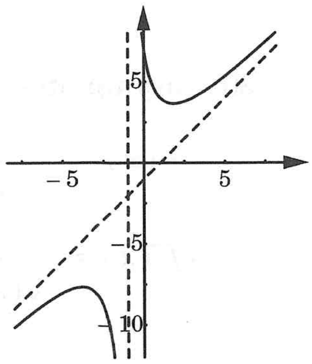
15) asymptotes $x = -1$ et $y = x - 1$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 7}{(x+1)^2}$$

max. $(-1-\sqrt{8} ; -2-2\sqrt{8})$

min. $(-1+\sqrt{8} ; -2+2\sqrt{8})$

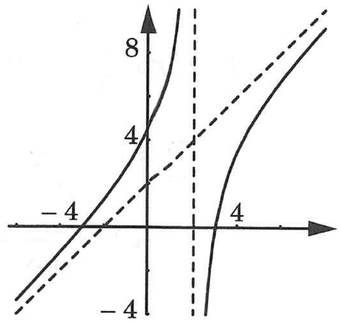
$$f''(x) = \frac{16}{(x+1)^3}$$



16) zéros ± 3 , asymptotes $x = 2$ et $y = x + 2$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 9}{(x-2)^2}$$

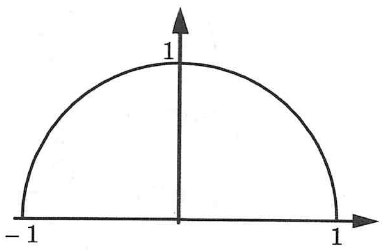
$$f''(x) = \frac{-10}{(x-2)^3}$$



17) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

max. $(0 ; 1)$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

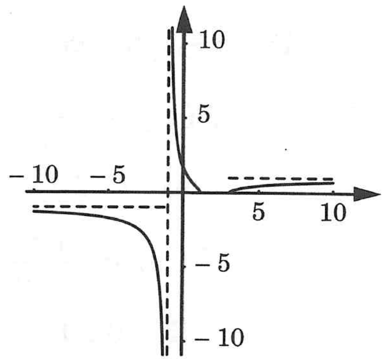


18) asymptotes $x = -1$, $y = 1$ et $y = -1$

$$f'(x) = \frac{3x-5}{(x+1)^2\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$f''(x) = \frac{-6x^3 + 33x^2 - 60x + 29}{(x+1)^3\sqrt{(x^2-4x+3)^3}}$$

infl. $(0,75 ; 0,43)$

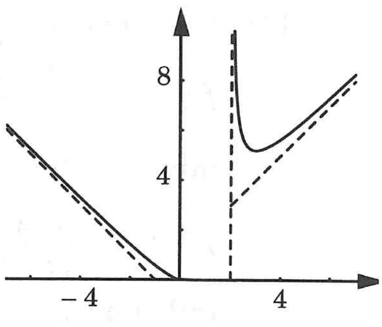


19) asymptotes $x = 2$, $y = -x-1$, $y = x+1$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{\sqrt{x^3(x-2)^3}}$$

min. $(3 ; \sqrt{27})$

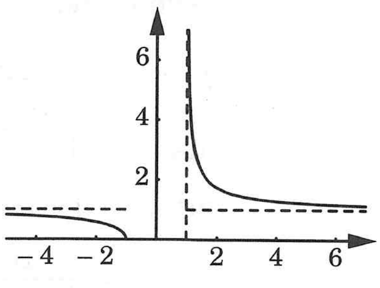
$$f''(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^3(x-2)^3}\,(x-2)}$$



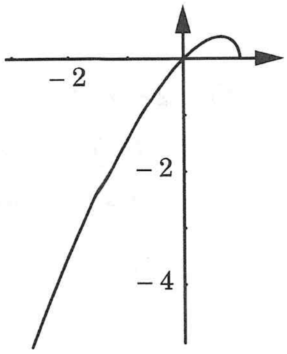
20) asymptotes $x = 1$ et $y = 1$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}$$

$$f''(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^3(x-1)^5}}$$



21) zéros 0 et 1

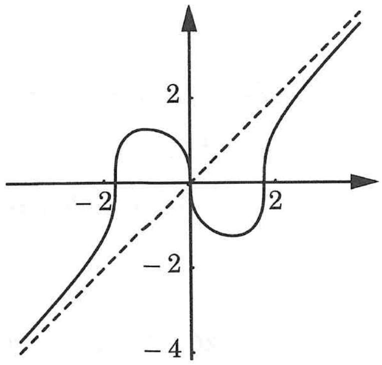


$$f'(x) = \frac{-3x+2}{2\sqrt{1-x}}$$

max. $\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{\sqrt{27}}\right)$

$$f''(x) = \frac{-3x+4}{4(x-1)\sqrt{1-x}}$$

22) zéros $\pm\sqrt{3}$, 0 ; asymptote $y = x$



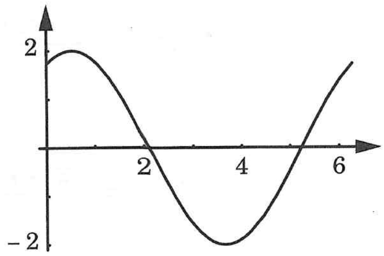
$$f'(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}}$$

max. $(-1 ; \sqrt[3]{2})$; min. $(1 ; -\sqrt[3]{2})$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^5}}$$

infl. $(\pm\sqrt{3} ; 0)$, $(0 ; 0)$

23) étude sur $[\,0 ; 2\pi\,[$; zéros $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$



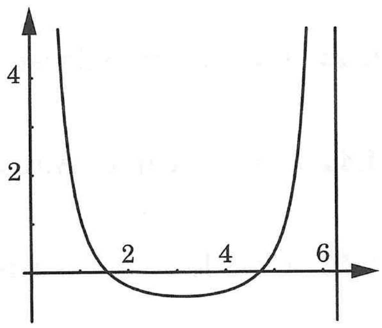
$$f'(x) = \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$$

max. $\left(\frac{\pi}{6} ; 2\right)$; min. $\left(\frac{7\pi}{6} ; -2\right)$

$$f''(x) = -\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$$

infl. $\left(\frac{2\pi}{3} ; 0\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{3} ; 0\right)$

24) étude sur $[\,0 ; 2\pi\,[$; zéros $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$

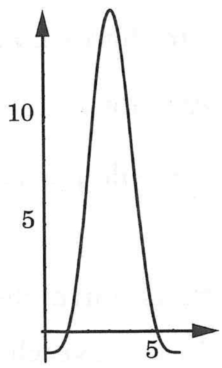


$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{(\cos(x)-1)^2}$$

min $(\pi ; -0,5)$; asymptote $x = 0$

$$f''(x) = \frac{-\cos^2(x) - 2\sin^2(x) + \cos(x)}{(\cos(x)-1)^3}$$

25) étude sur $[\,0 ; 2\pi\,[$; zéros $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$



$$f'(x) = 8\sin(x)(1-\cos(x))$$

min. $(0 ; -1)$; max. $(\pi ; 15)$

$$f''(x) = 8(\sin^2(x) - \cos^2(x) + \cos(x))$$

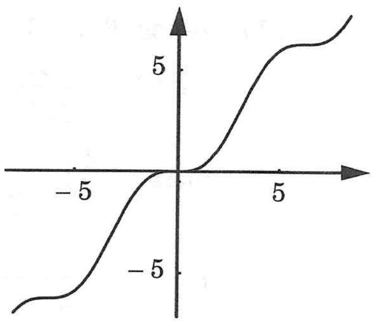
infl. $\left(\frac{2\pi}{3} ; 8\right)$ et $\left(\frac{4\pi}{3} ; 8\right)$

26) zéro 0

$f'(x) = 1 - \cos(x)$

$f''(x) = \sin(x)$

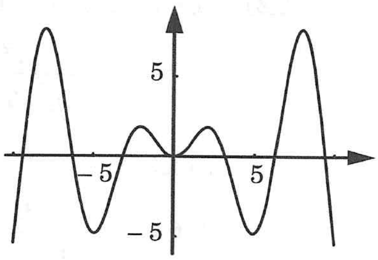
infl. $(k\pi\ ;\ k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$



27) zéros $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$f'(x) = x\cos(x) + \sin(x)$

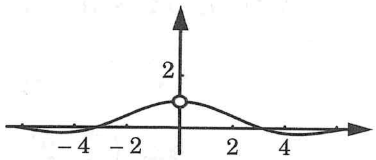
$f''(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$



28) zéros $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$

asymptote $y = 0$, «trou» en $(0\,;1)$

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$



$$f''(x) = \frac{2\sin(x) - 2x\cos(x) - x^2\sin(x)}{x^3}$$

4.39 45 °

4.40 C'est le triangle isocèle. Périmètre maximal: $h(1 + \sqrt{2})$

4.41 C'est le carré. Aire maximale: $\dfrac{p^2}{4}$

4.42 C'est le cylindre dont le diamètre de la base est égal à la hauteur

4.43 Aire totale maximale si l'on forme un carré de périmètre L sans couper le fil

Aire totale minimale si l'on forme un triangle de périmètre $\dfrac{9L}{4\sqrt{3}+9}$ et un carré de périmètre $\dfrac{4\sqrt{3}\,L}{4\sqrt{3}+9}$

4.44 Sans couvercle: rayon = hauteur

Avec couvercle: diamètre = hauteur

4.45 $x = 4$ cm

4.46 Rayon de base: 6 cm , hauteur: 18 cm

4.47 Dimension de l'enclos : 16 m sur 18 m

4.48 Diamètre du demi-cercle: $\dfrac{12}{\pi + 4}$ m ; hauteur du rectangle $\dfrac{6}{\pi + 4}$ m

4.49 Longueur de l'échelle la plus courte: $(1 + \sqrt[3]{4})^{3/2} \cong 4,16$ m

4.50 Dimensions: 16 cm × 32 cm

4.51 Volume maximum: $\dfrac{2\pi r^3}{9\sqrt{3}}$ cm^3

4.52 Rayon du cylindre: $r = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$; longueur du cylindre: $4r$

4.53 1) côtés du rectangle: $\dfrac{p}{3}$ (parallèle à l'axe) et $\dfrac{2p}{3}$

2) carré de côté $\dfrac{p}{2}$

3) le rectangle se réduit à un segment de longueur p et perpendiculaire à l'axe de rotation

4.54 $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} ; \dfrac{2}{3}\right)$

4.55 Hauteur = largeur × $\sqrt{2}$

4.56 A la distance $\dfrac{10\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3} + 1} \cong 5,68$ km de l'usine la plus polluante

4.57 Abscisse du point cherché: $\dfrac{10}{1 + \sqrt[3]{4}} \cong 3,86$. Le rapport des distances de L_2 à L_1 est $\sqrt[3]{4}$

4.59 20 km/h

4.60 20 km/h

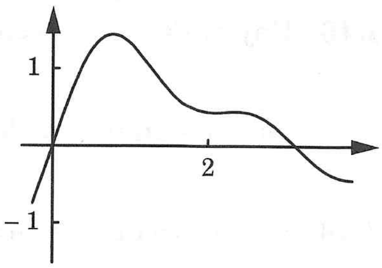
4.61 63, 43 °

4.62 $(1+\sqrt[3]{4})^{3/2} \cong 4,16$ m

4.64 $f'(x) = \cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)$

max. $\left(\frac{\pi}{4} ; \frac{4\sqrt{2}+3}{6}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4} ; \frac{4\sqrt{2}-3}{6}\right)$

min. $\left(\frac{2\pi}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$



4.65 La masse de chaque objet est égale à $\frac{M}{2}$

4.66 $\theta = 45°$

4.67 Volume maximal: 4 dm^3

4.68 Vitesse = $\sqrt{8'050} \cong 89,72$ km/h ; prix de revient 107, 65 Fr

4.69 1 h 48' (36 milles)

4.70 Base: 8 m ; hauteur: 12 m

4.71 Volume maximal: $\frac{281'216\pi}{27} \cong 32'721$ cm^3

4.72 Possibilité 1 : rayon de la base $\frac{a}{2\pi}$; volume maximal $a^3\left(\frac{3}{2\pi} - \frac{1}{4\pi^2}\right)$

Possibilité 2 : rayon de la base $\frac{a}{3}$; volume maximal $\frac{\pi a^3}{27}$

4.73 Vitesse optimale $v = \sqrt{1'000} \cong 31,62$ km/h

4.74 Il doit accoster à 12 km du point de la côte le plus proche du phare

4.75 $x = 180°$

4.76 $x = \sqrt{2}-1$

4.78 $x \cong 2,60$ m

4.79 $x = \dfrac{a}{\sqrt{8}}$

4.81 1) 0, 7391 2) 0, 6417

3) – 1, 6400 4) 0, 1353

5) 4, 5046 6) 2, 0287

4.82 0, 0078

4.83 0, 5053

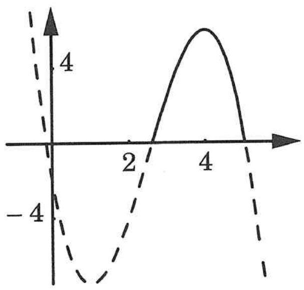
4.85 1) $B = pq - CT(q) = -\dfrac{1}{8}q^2 + 2q - 2$

2) $q = 8$ 3) $B = -2p^2 + 8p - 2$

4.86 1) $p(q) = \dfrac{90 - q}{2}$; $R(q) = \dfrac{90q - q^2}{2}$; $B(q) = -q^3 + \dfrac{15}{2}q^2 - 12q - 2$

2) $q = 4$

3)



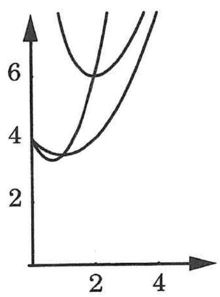
La production est rentable si $B(q) > 0$:

$2,62 \le q \le 5,04$

4.87 1) $CT_u(q) = \dfrac{1}{2}q^2 - q + 4 + \dfrac{4}{q}$ $C_m(q) = \dfrac{3}{2}q^2 - 2q + 4$

$CV_u(q) = \dfrac{1}{2}q^2 - q + 4$ $CF_u(q) = \dfrac{4}{q}$

2)



minimum de $CT_u(q)$ en $q = 2$

minimum de $C_m(q)$ en $q = \dfrac{2}{3}$

minimum de $CV_u(q)$ en $q = 1$

3) seuil de fermeture $p = 3,5$

seuil de rentabilité $p = 6$

4) $p = 3 : q = 0$ et $B = -4$

fermeture de l'entreprise

$p = 4 : q = 1,33$ et $B = -3,41$

travail non rentable, mais préférable à la fermeture de l'entreprise

$p = 6 : q = 2$ et $B = 0$

travail couvrant juste les frais

$p = 8 : q = 2,43$ et $B = 4,45$

4.88 1) $q = 2,27$ millions de kilos ($p = 21,27$; bénéfice $= 37,39$)

2) $q(t) = 4 - \frac{1}{3}\sqrt{27 + 3t}$

3) $t = 18$ Fr/kg

4) $p = 32$, $q = 1$

5) $B = 9$ et $R = 18$

§ 5. INTÉGRALE

1. Présentation

1.1 Aire d'une surface

On considère la parabole d'équation $y = 4 - x^2$. On veut calculer l'aire A du domaine borné limité par cette parabole et l'axe Ox .

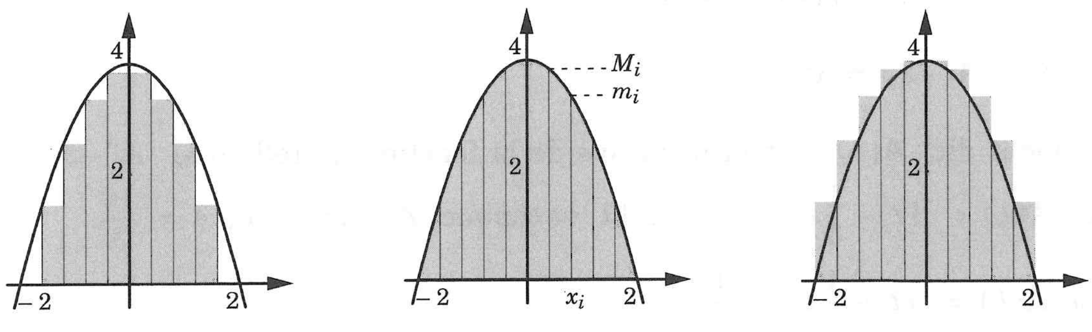
Première méthode: encadrement de l'aire

La première idée consiste à approcher cette aire par excès et par défaut à l'aide de rectangles, puis de calculer la limite de ces approximations lorsque la largeur des rectangles tend vers zéro.

On partage l'intervalle $[-2\,;2]$ en n intervalles $[x_{i-1}\,;x_i]$ que nous choisissons d'égale longueur Δx , $1 \le i \le n$.

En notant M_i le maximum et m_i le minimum de la fonction $f(x) = 4 - x^2$ sur $[x_{i-1}\,;x_i]$, on a

$$m_1 \cdot \Delta x + m_2 \cdot \Delta x + \ldots + m_n \cdot \Delta x \le A \le M_1 \cdot \Delta x + M_2 \cdot \Delta x + \ldots + M_n \cdot \Delta x$$



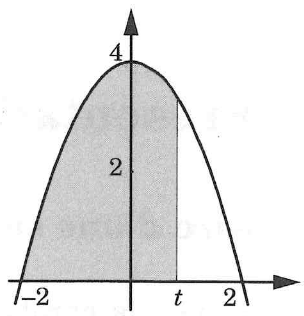
c'est-à-dire
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x \le A \le \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x = S_n$$

On peut montrer que l'approximation par défaut s_n et l'approximation par excès S_n tendent vers la même limite A lorsque $n \to \infty$.

Cette méthode peut fournir de bonnes approximations, mais les calculs sont en général longs et difficiles (page 179).

Deuxième méthode: variation des constantes

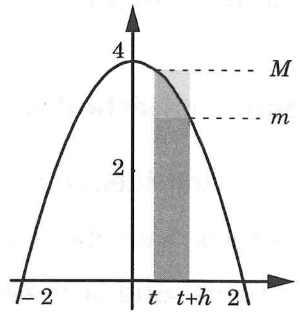
L'idée est de considérer un problème plus général dont la résolution est ici en fin de compte plus simple. On se propose de calculer l'aire $A(t)$ du domaine borné limité par la parabole d'équation $y = 4 - x^2$, l'axe Ox et la verticale d'équation $x = t$ pour tout t tel que $-2 \le t \le 2$.



Si M est le maximum et m le minimum de $f(x) = 4 - x^2$ sur $[t\,;t+h]$, alors on a

$$m \cdot h \le A(t+h) - A(t) \le M \cdot h \text{ donc}$$

$$m \le \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \le M$$



Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un nombre c compris entre t et $t+h$ tel que $A(t+h) - A(t) = f(c) \cdot h$

Par suite $\dfrac{A(t+h)-A(t)}{h} = f(c)$ et $A'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{A(t+h)-A(t)}{h} = f(t)$

La fonction $A(t)$ a donc les propriétés suivantes

1) $A'(t) = f(t) = 4 - t^2$

2) $A(-2) = 0$

Autrement dit $A(t)$ est la primitive de la fonction f telle que $A(-2) = 0$.

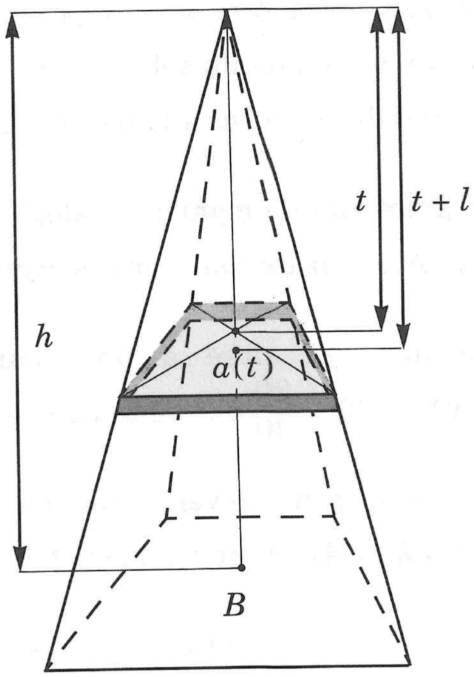
Donc $A(t) = 4t - \frac{1}{3}t^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$ et comme $A(-2) = 0$, $c = \frac{16}{3}$.

Ainsi $A(t) = 4t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{16}{3}$.

L'aire du domaine est donc $A(2) = \frac{32}{3}$.

1.2 Volume d'un solide

On considère une pyramide de hauteur h dont la base a une aire égale à B. On veut calculer le volume V de cette pyramide.



En procédant de manière analogue à l'exemple précédent, on va calculer le volume $V(t)$ d'une pyramide de hauteur variable t.

L'aire de la base de la pyramide de hauteur t est égale à $a(t) = B \cdot \left(\frac{t}{h}\right)^2$. Comme $a(t)$ est une fonction croissante, on a:

$$a(t) \cdot l \leq V(t+l) - V(t) \leq a(t+l) \cdot l$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un nombre c entre t et $t+l$ tel que:

$$V(t+l) - V(t) = a(c) \cdot l = B \cdot \left(\frac{c}{h}\right)^2 \cdot l$$

Par suite, lorsque l tend vers 0, $\dfrac{V(t+l)-V(t)}{l} = a(c)$ tend vers $a(t)$ et

$$V'(t) = \lim_{l \to 0} \frac{V(t+l)-V(t)}{l} = a(t)$$

La fonction $V(t)$ a donc les propriétés suivantes:

1) $V'(t) = a(t) = B\left(\frac{t}{h}\right)^2$

2) $V(0) = 0$

Autrement dit $V(t)$ est la primitive de la fonction a telle que $V(0) = 0$.

Donc $V(t) = \dfrac{B \cdot t^3}{3h^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$ et comme $V(0) = 0$, $c = 0$.

Ainsi $V(t) = \dfrac{B \cdot t^3}{3h^2}$.

Le volume de la pyramide est donc $V(h) = \dfrac{B \cdot h}{3}$.

1.3 Travail d'une force

Dans le cas d'une force constante exercée dans la direction et dans le sens du déplacement, le travail est égal au produit de l'intensité de la force par la longueur du déplacement.

Un sac d'un poids $F = 20$ Newton est percé en son fond. Lorsqu'on le soulève verticalement à vitesse constante, il perd progressivement son contenu. On admet que son poids diminue proportionnellement à la hauteur à laquelle le sac se trouve au-dessus du sol. A 30 m du sol, le sac est vide. Quel est le travail fourni pour soulever ce sac à la hauteur de 30 m ?

En procédant de manière analogue aux exemples précédents, on va calculer le travail $A(x)$ pour soulever le sac du sol jusqu'à la hauteur variable x .

Lorsqu'il est situé à une hauteur x au-dessus du sol, le sac pèse $p(x) = 20 - \frac{20}{30}x$. L'intensité de la force exercée vers le haut est égale à $p(x)$.

Le travail pour élever le sac de la hauteur x à la hauteur $x + h$ est égal à $A(x+h) - A(x)$ et comme la fonction $p(x)$ est décroissante, on a

$$p(x+h)\cdot h \le A(x+h) - A(x) \le p(x)\cdot h$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un nombre c compris entre x et $x+h$ tel que

$$A(x+h) - A(x) = p(c)\cdot h = \left(20 - \frac{2}{3}c\right)\cdot h$$

Par suite, $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = p(c)$ et

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = p(x) .$$

La fonction $A(x)$ a donc les propriétés suivantes

1) $A'(x) = p(x) = 20 - \frac{2}{3}x$

2) $A(0) = 0$

Autrement dit $A(x)$ est la primitive de la fonction p telle que $A(0) = 0$.

Donc $A(x) = 20x - \frac{1}{3}x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ et comme $A(0) = 0$, $c = 0$.

Ainsi $A(x) = 20x - \frac{1}{3}x^2$.

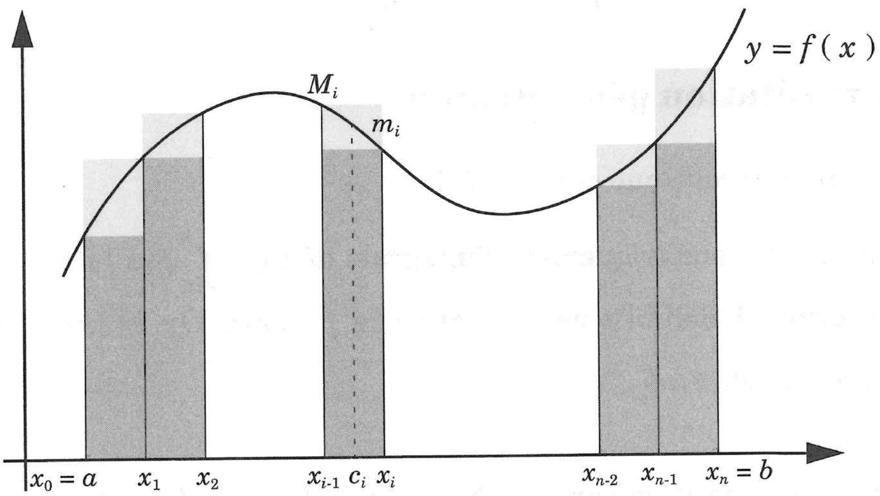
Le travail fourni est donc $A(30) = 600 - 300 = 300$ Joule.

2. Intégrale définie

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$. On partage l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ en n intervalles $[\,x_{i-1}\,;x_i\,]$ de même longueur $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Si M_i est le maximum de f sur $[\,x_{i-1}\,;x_i\,]$, m_i le minimum de f sur $[\,x_{i-1}\,;x_i\,]$ et si $c_i \in [\,x_{i-1}\,;x_i\,]$, alors on a:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x$$



Il est possible de démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \frac{b-a}{n}$$

Définitions

On appelle **intégrale définie** de f sur $[\,a\,;b\,]$ et l'on note $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx}$ le nombre $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x$.

Dans l'expression $\int_a^b f(x)\,dx$, x est appelée la **variable d'intégration**, les nombres a et b les **bornes d'intégration**.

Remarques

1) On peut se libérer de la contrainte $a < b$ et envisager deux cas:

   Si $a = b$, on définit $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

   Si $a > b$, on définit $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2) L'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ se présente comme «une somme infinie de quantités infiniment petites».

3) L'intégrale définie ne dépend pas du nom de la variable d'intégration:

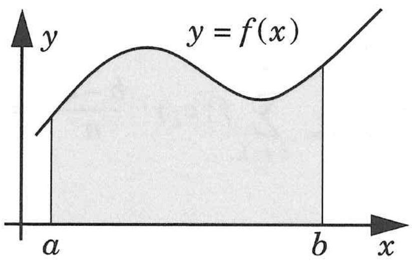
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

2.1 Interprétation géométrique

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$.

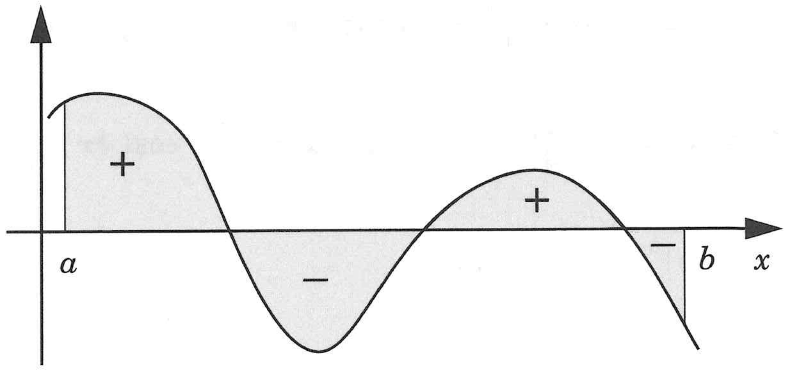
Afin d'interpréter géométriquement l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$, on considère le domaine borné D délimité par le graphe de f, l'axe Ox et les deux verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Si f est positive sur $[\,a\,;b\,]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'**aire** du domaine D .



Si f est négative sur $[\,a\,;b\,]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'opposé de l'aire du domaine D .

Si f change de signe sur $[\,a\,;b\,]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à la somme des aires munies chacune d'un signe. Les aires des parties de D situées au-dessus de l'axe Ox sont comptées positivement et les autres négativement.



2.2 Un moyen de calcul

Théorème fondamental du calcul intégral

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et $a \in I$. La fonction $A : I \to \mathbb{R}$ définie par $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de la fonction f telle que $A(a) = 0$.

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ et F une primitive de f sur $[\,a\,;b\,]$. Alors
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Notation

Dans le calcul des intégrales, l'expression $F(b) - F(a)$ se note $F(x)\Big|_a^b$

Remarque

Il résulte du théorème fondamental que toute fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ admet une primitive sur cet intervalle.

Exemples

a) $\displaystyle\int_{-2}^{0} 4x^3\,dx \;=\; x^4\Big|_{-2}^{0} \;=\; -16$.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -(\cos(2\pi)-\cos(0)) = 0$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}(\sin(4x)\cdot 4)\,dx = \frac{1}{4}(-\cos(4x))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c\,x\Big|_a^b = c\,(b-a)$

2.3 Propriétés de l'intégrale définie

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ et k un réel

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

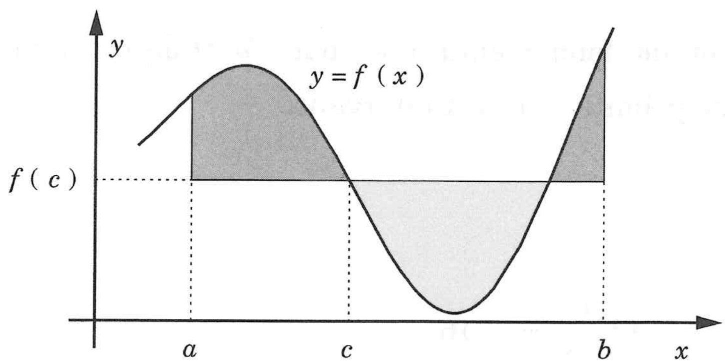
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \text{ si } f(x)\le g(x) \text{ pour tout } x\in[\,a\,;b\,]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ ,\quad c\in[\,a\,;b\,]$$

Théorème de la moyenne

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$. Il existe un réel $c\in[\,a\,;b\,]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)$

Le nombre $f(c)$ est appelé la **valeur moyenne** de la fonction f sur $[\,a\,;b\,]$



3. Méthodes d'intégration

Le calcul d'une intégrale nécessite la recherche d'une primitive. Dans les cas simples, on recherche cette primitive comme au § 3.5 (page 77).

D'autres cas nécessitent des méthodes appropriées.

3.1 Intégration par substitution ou changement de variable

Première forme

Cette forme permet de calculer dans certains cas l'intégrale de fonctions composées.

Si f est une fonction continûment dérivable (f' continue) sur $[\,a\,;b\,]$ et si g est une fonction continue entre $f(a)$ et $f(b)$, on a

$$\boxed{\int_a^b g(f(x))\cdot f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\,du}$$

On a posé $f(x) = u$.

Exemple

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\;dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\cdot 2x\;dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{u}\;du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\right)\Bigg|_0^3 = \sqrt{3}$$

On a posé $x^2-1 = u$.

Seconde forme

Si g est une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$ et si f est une fonction continûment dérivable sur l'intervalle $[\,c\,;d\,]$ et telle que $f(c) = a$ et $f(d) = b$, on a

$$\boxed{\int_a^b g(x)\,dx = \int_c^d g(f(t))\cdot f'(t)\,dt}$$

On a posé $x = f(t)$.

Exemple

Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ à l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$.

Puisque $\sin: [\,0\,;\frac{\pi}{2}\,] \to [\,0\,;1\,]$ est continûment dérivable avec $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et comme $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$ sur $[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,]$, on a

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

3.2 Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions continûment dérivables sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$. On a

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

Exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(x)\,dx = x\cdot(-\cos(x))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

On a posé $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin(x)$, d'où $f'(x) = 1$ et, par exemple, $g(x) = -\cos(x)$.

4. Intégrales généralisées ou impropres

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,[$, mais non définie ou non continue en b .

Si $\lim\limits_{t \xrightarrow{<} b} \int_a^t f(x)\,dx$ existe et est finie, alors on définit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \xrightarrow{<} b} \int_a^t f(x)\,dx$$

Si la limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'**intégrale diverge**.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]\,a\,;b\,]$, mais non définie ou non continue en a .

> Si $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ >}} \int_t^b f(x)\,dx$ existe et est finie, alors on définit
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{t \to a \\ >}} \int_t^b f(x)\,dx$$
>
> Si la limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'**intégrale diverge**.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;+\infty\,[$.

> Si $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ existe et est finie, alors on définit
>
> $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$
>
> Si la limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'**intégrale diverge**.

On définit de même $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

> Si $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ ne divergent pas, alors on définit
>
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

Exemples

a) $$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} 2\sqrt{x}\,\Big|_t^4 = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} (4 - 2\sqrt{t}) = 4$$

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{u \to +\infty} \int_0^u \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$\lim_{t \to -\infty} (\arctan(0) - \arctan(t)) + \lim_{u \to +\infty} (\arctan(u) - \arctan(0)) =$$

$$0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

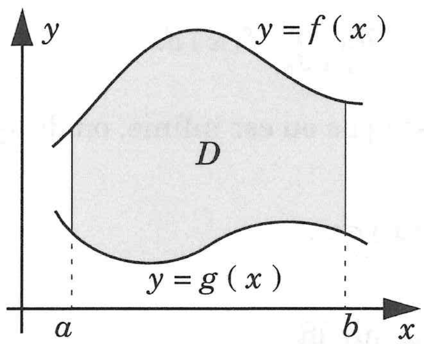
5. Applications

5.1 Aire d'une région située entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de $[a\,;b]$ et D le domaine borné limité par les graphes de f et g et par les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. On veut calculer l'aire A du domaine D.

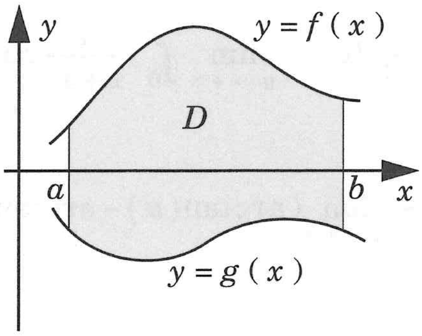
Si g est positive sur $[a\,;b]$, alors A = «aire sous f» − «aire sous g», donc

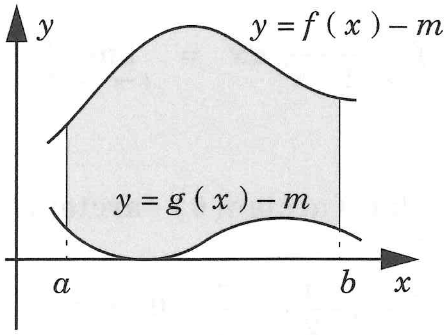
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



Si g prend des valeurs négatives sur $[a\,;b]$, on translate les graphes de f et de g vers le haut de façon que le domaine D soit au-dessus de l'axe Ox. Soit m le minimum de g sur $[a\,;b]$. Comme $g(x) \geq m$, $g(x) - m \geq 0$ et la fonction $g - m$ est positive sur $[a\,;b]$. Comme l'aire d'une région n'est pas modifiée par translation, l'aire A de la région limitée par f et g est la même que celle de la région limitée par $f - m$ et $g - m$. Ainsi

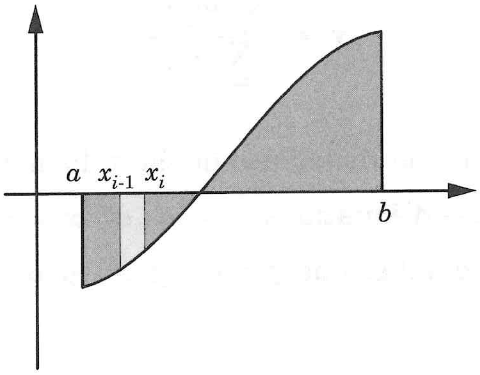
$$A = \int_a^b ((f(x) - m) - (g(x) - m))\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

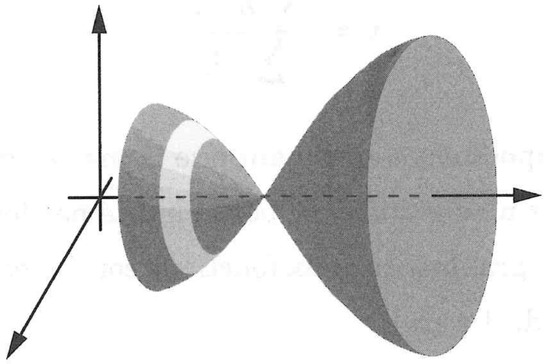




5.2 Volume d'un solide de révolution (découpage en disques)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a ; b]$ et D le domaine borné limité par le graphe de f, l'axe Ox et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. On veut calculer le volume V du solide engendré par la révolution de D autour de Ox.





On peut procéder comme dans les exemples précédents ou faire appel à la définition de l'intégrale définie (page 169). Nous choisissons ici la seconde méthode.

On partage l'intervalle $[a ; b]$ en n intervalles $[x_{i-1} ; x_i]$ de même longueur Δx, $1 \leq i \leq n$. Le solide est alors partagé en n tranches.

Soit m_i le minimum de f sur $[x_{i-1} ; x_i]$ et M_i le maximum de f sur $[x_{i-1} ; x_i]$. Le volume d'une tranche est compris entre celui d'un cylindre de rayon m_i et d'épaisseur Δx et celui d'un cylindre de rayon M_i et d'épaisseur Δx.

Si Δx est assez petit, le volume d'une tranche est à peu près égal à $\pi f^2(c_i)\,\Delta x$ pour tout c_i de l'intervalle $[x_{i-1} ; x_i]$. Il en résulte que le volume du solide est à peu près égal à $\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\,\Delta x$.

En faisant tendre n vers l'infini on a, puisque la fonction πf^2 est continue sur l'intervalle $[a ; b]$,

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\,\Delta x = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

Par conséquent,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

5.3 Barycentre d'un domaine du plan

Les coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ du barycentre d'un système de masses ponctuelles m_1, m_2, ..., m_n respectivement localisées aux points $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$, ..., $P_n(x_n;y_n)$ sont données par les formules

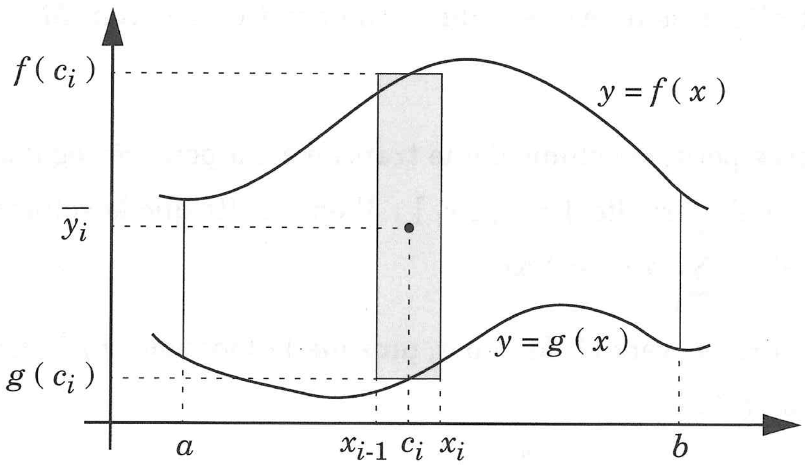
$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

Supposons maintenant que la masse totale m soit distribuée de façon homogène sur un domaine D borné limité par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et les graphes de deux fonctions continues f et g telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de $[a;b]$.

La masse superficielle σ représentant la masse par unité d'aire est alors constante sur le domaine D.

Découpons ce domaine D en tranches d'égale largeur Δx. La masse de chaque tranche est égale au produit de sa masse superficielle par son aire.

Par ailleurs chaque tranche peut être assimilée à un rectangle de base $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ et de hauteur $f(c_i) - g(c_i)$ où pour simplifier c_i est le milieu de $[x_{i-1};x_i]$. On obtient ainsi $\Delta m_i = \sigma[f(c_i) - g(c_i)] \cdot \Delta x$.



Le centre de gravité de la tranche est alors assimilable à celui du rectangle dont le centre de gravité est le centre de symétrie de coordonnées

$$\bar{x_i} = c_i \qquad \bar{y_i} = \frac{f(c_i) + g(c_i)}{2}$$

En localisant la masse de chaque tranche en son centre de gravité, on peut approcher les coordonnées du barycentre de D par

$$\bar{x} = \frac{\sum \sigma(f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x \cdot c_i}{\sum \sigma(f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x} = \frac{\sum (f(c_i) - g(c_i)) \cdot c_i \cdot \Delta x}{\sum (f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x} \quad \text{et}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \sigma(f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x \cdot \dfrac{f(c_i) + g(c_i)}{2}}{\sum \sigma(f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sum (f(c_i) - g(c_i)) \cdot (f(c_i) + g(c_i)) \cdot \Delta x}{\sum (f(c_i) - g(c_i)) \cdot \Delta x}$$

En passant à la limite lorsque Δx tend vers 0, on obtient finalement

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\, dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx} \quad \text{et}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) \cdot (f(x) - g(x))\, dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx}$$

6. Exercices résolus

6.1 Calcul d'une aire par somme et par primitive

On considère la parabole d'équation $y = 4 - x^2$. On veut calculer l'aire A du domaine borné limité par la parabole et l'axe Ox.

En vertu de l'interprétation géométrique de l'intégrale définie, il s'agit de calculer l'intégrale définie $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx$. Nous allons effectuer ce calcul de deux manières, d'abord en suivant la définition, puis en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral.

Première méthode

On partage l'intervalle $[-2\,; 2]$ en n intervalles de longueur $\Delta x = \frac{4}{n}$. Le i-ème intervalle est $[x_{i-1}\,; x_i] = [-2 + (i-1)\frac{4}{n}\,; -2 + i\frac{4}{n}]$, $1 \le i \le n$.

On a donc $A = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (4 - x_i^2) \cdot \frac{4}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(4 - \left(-2 + i\,\frac{4}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{4}{n} =$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(4 - \left(4 - \frac{16\,i}{n} + \frac{16\,i^2}{n^2}\right)\right) \cdot \frac{4}{n} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{64\,i}{n^2} - \frac{64\,i^2}{n^3}\right) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{64}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i - \frac{64}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2\right) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{64}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{32}{3}\,.$$

Seconde méthode

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}\,.$$

6.2 Volume d'une boule

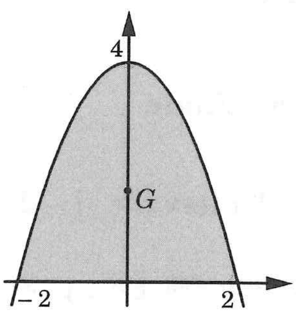
On considère la boule de rayon R comme le solide engendré par la révolution autour de l'axe Ox du domaine D limité par le graphe de $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et l'axe Ox.

Son volume est donc donné par

$$\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}\,.$$

6.3 Barycentre d'un segment parabolique

On veut calculer les coordonnées du barycentre du domaine borné limité par la parabole d'équation $y = 4 - x^2$ et l'axe Ox.



Par symétrie, l'abscisse du barycentre est nulle. Son ordonnée est donnée par

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{2}(4-x^2)\cdot(4-x^2)\,dx}{\displaystyle\int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\,dx}{\displaystyle\int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx} =$$

$$\frac{\displaystyle\frac{1}{2}\left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_{-2}^{2}}{\displaystyle 4x - \frac{1}{3}x^3\Bigg|_{-2}^{2}} = \frac{\frac{256}{15}}{\frac{32}{3}} = \frac{8}{5}$$

Ainsi, le barycentre de ce segment parabolique est le point $G\,(\,0\,;\,\frac{8}{5}\,)$.

EXERCICES

Intégrale définie

5.1 Calculer les intégrales suivantes

1) $\int_0^4 (2x+1)\,dx$

2) $\int_{-1}^3 (6x^2-4x-6)\,dx$

3) $\int_{-1}^2 (4+3x-x^2)\,dx$

4) $\int_{-1}^1 (x^4+1)\,dx$

5) $\int_1^3 \left(\frac{1}{x^3}+x^2\right) dx$

6) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3u^2\,du$

7) $\int_1^4 -4t^{-4}\,dt$

8) $\int_a^{2a} a y\,dy$

9) $\int_4^{25} (x^2+2\sqrt{x})\,dx$

10) $\int_{-1}^5 |x|\,dx$

11) $\int_0^2 |x^2-1|\,dx$

12) $\int_{-4}^2 \sqrt{|x|}\,dx$

13) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

14) $\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right) dx$

15) $\int_{1/2}^2 \frac{x^2+1}{x^2}\,dx$

16) $\int_1^2 \frac{x^3+2}{x^2}\,dx$

17) $\int_1^2 \frac{x^2+2x+2}{x^4}\,dx$

18) $\int_a^{a+\pi} \cos(t)\,dt$

19) $\int_\pi^{2\pi} \sin(x)\,dx$

20) $\int_0^{\pi/2} (a\sin(t)+b\cos(t))\,dt$

21) $\int_{-r}^r r x^2\,dx$

22) $\int_0^1 r x^2\,dr$

5.2 Sachant que $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$, $\int_1^2 f(x)\,dx = 4$ et $\int_2^3 f(x)\,dx = -8$, calculer

1) $\int_0^2 f(x)\,dx$

2) $\int_0^1 3f(x)\,dx$

3) $\int_0^3 8f(x)\,dx$

4) $\int_3^1 2f(x)\,dx$

5.3 Montrer que pour une fonction f continue sur $[-a\,;a]$, on a

1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ lorsque f est paire

2) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ lorsque f est impaire.

5.4 Déterminer les réels k pour lesquels on a

1) $\int_{-1}^{2} k\,x^2\,dx = \frac{2}{3}$

2) $\int_{4}^{k} (x^2 - 3x + 7)\,dx = \frac{129}{2}$

3) $\int_{0}^{k/2} \sin(2t)\,dt = 1$

4) $\int_{0}^{k/2} \cos(t)\,dt = \frac{1}{2}$

5) $\int_{k}^{0} \frac{2}{(x+1)^3}\,dx = -\int_0^k \frac{3}{(x+3)^2}\,dx$

6) $\int_0^k (x+1)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^k (x+1)^3\,dx$

5.5 Déterminer la nature des extremums des fonctions f suivantes

1) $f\colon x \mapsto \int_0^x (t^3 - t)\,dt$

2) $f\colon t \mapsto \int_0^t \sqrt{x+1}\,dx$

5.6 On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{x^2} (at+b)\,dt$. Déterminer a et b pour que le point $(-2\,;4)$ soit un point d'inflexion du graphe de la fonction f. Ensuite, calculer les extremums de cette fonction.

5.7 Calculer la valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$, puis déterminer les valeurs de $c \in [a\,;b]$ telles que $f(c) = \mu$

1) $f(x) = x^2$	$a = 0$	$b = 4$
2) $f(x) = 2x+1$	$a = 1$	$b = 5$
3) $f(x) = \sqrt{2x}$	$a = 0$	$b = 8$
4) $f(x) = \sin(x)$	$a = 0$	$b = \pi$
5) $f(x) = A\cos(\omega t)$	$a = -\frac{\pi}{2\omega}$	$b = \frac{\pi}{2\omega}$

5.8 Vérifier que $\dfrac{x}{x+1}$ et $-\dfrac{1}{1+x}$ sont des primitives de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ à l'aide de chacune de ces primitives.

5.9 On considère la fonction f donnée par $f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \le t \le 1 \\ 1 & 1 < t < 5 \\ (t-6)^2 & 5 \le t \le 6 \end{cases}$.

1) Tracer le graphe de la fonction f pour $0 \le t \le 6$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,dt$.

3) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Expliciter $F(x)$ sur l'intervalle $[\,0\,;6\,]$ et tracer le graphe de F .

4) Déterminer F' sur l'intervalle $]\,0\,;6\,[$.

5.10 Une fonction f continue et deux réels a_1 et a_2 étant donnés, on définit $F_1(t) = \displaystyle\int_{a_1}^t f(x)\,dx$ et $F_2(t) = \displaystyle\int_{a_2}^t f(x)\,dx$.

Montrer que les fonctions F_1 et F_2 diffèrent par une constante que l'on exprimera à l'aide d'une intégrale.

5.11 On définit $F(p) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} |\sin(x) - \sin(p)|\,dx \quad \left(0 \le p \le \frac{\pi}{2}\right)$

1) On pose $f(x) = |\sin(x) - \sin(p)|$. Esquisser le graphe de f pour $p = \dfrac{\pi}{6}$.

2) Calculer $F(p)$ pour $0 \le p \le \dfrac{\pi}{2}$.

3) Déterminer les valeurs maximales et minimales prises par la fonction F dans l'intervalle $[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,]$.

Méthodes d'intégration

5.12 Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_0^3 (1-x)^3\,dx$

2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{5}{(2x+3)^2}\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int_3^5 \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt$

5) $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2x(1+x^2)^2\,dx$

6) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x+3}{(x+1)^3}\,dx$

7) $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{x+1}\,dx$

8) $\displaystyle\int_{0}^{2} x\sqrt{2x^2+1}\,dx$

9) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\,du$

10) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{2x+9}{\sqrt{x^2+9x}}\,dx$

11) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt[n]{1-x}\,dx \qquad n \in \mathbb{N}^*$

12) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+8}}\,dt$

13) $\displaystyle\int_{0}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$

14) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)dt$

15) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2\omega} \cos(\omega t)\,dt$

16) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} 6\sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$

17) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,dx$

18) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}\,dx$

19) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx$

5.13 Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué

1) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x\sqrt{x+2}\,dx \qquad x = t^2-2$

2) $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx \qquad x = 3\sin(t)$

3) $\displaystyle\int_{a}^{2a} x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx\ ,\quad a>0 \qquad x = \sqrt{a^2+t^2}$

5.14 Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\sin(x)\,dx$

2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2\omega} x^2\sin(\omega x)\,dx$

3) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$

4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \cos^2(x)\,dx$

5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sin^2(3x)\,dx$

6) $\displaystyle\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x}\,dx$

5.15 Calculer $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ de trois manières différentes

1) en effectuant le changement de variable $x = u-1$

2) en effectuant le changement de variable $x = t^2-1$

3) en effectuant une intégration par parties

Intégrales généralisées ou impropres

5.16 On considère la fonction F : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $F(x) = \int_0^x \mathrm{E}(t)\,dt$, où $\mathrm{E}(t)$ est la partie entière de t .

1) Calculer $F(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$

2) Dessiner le graphe de la fonction F pour $x \in [0\,;4]$ et déterminer la dérivée F' là où elle existe.

5.17 Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{E}(x)}{x^2}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{E}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) dx$

5.18 Calculer, si elles existent, les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$

3) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{5+y}{y^3}\,dy$ 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{x^2}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^4 t^{-\frac{3}{2}}\,dt$ 8) $\displaystyle\int_0^8 t^{-\frac{2}{3}}\,dt$

9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{z^2+1}\,dz$ 10) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

Applications

5.19 Calculer l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ si

1) $f(x) = x^2+2$ $a = -3$, $b = 3$

2) $f(x) = 9-x^2$ $a = -4$, $b = 4$

3) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}-1$ $a = 1$, $b = 4$

4) $f(x) = \cos(3x)$ $\qquad a = 0\,,\ b = \dfrac{\pi}{2}$

5) $f(x) = \sqrt{2x-4}$ $\qquad a = 2\,,\ b = 10$

5.20 Calculer l'aire du domaine formé des points dont les coordonnées x et y remplissent les conditions suivantes

1) $0 \le y \le \dfrac{1}{2}\sin(x) + 2\cos(x)$ **et** $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

2) $0 \le y \le \sqrt{x+1}$ **et** $x \le 0$

5.21 Calculer l'aire totale des domaines bornés limités par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox si

1) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

2) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

3) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

4) $f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 4 & \text{si } x \le 1 \\ 10 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

5) $f(x) = -x^2 + 6|x| + 7$

5.22 La courbe d'équation $y = f(x)$ délimite avec l'axe Ox une infinité de domaines dont chacun est compris entre deux zéros consécutifs. Combien d'aires différentes définissent-ils ? Calculer ces aires.

1) $f(x) = \sin(2x)$

2) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \sin(x)$

3) $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$

5.23 On donne les fonctions f et g. Calculer l'aire du domaine borné limité par les graphes des deux fonctions

1) $f:\ x \mapsto x^2$ $\qquad g:\ x \mapsto 8 - x^2$

2) $f:\ x \mapsto x^2 - 3x + 2$ $\qquad g:\ x \mapsto -x^2 - x + 6$

3) $f:\ x \mapsto x^3 - 5x^2 + 6x$ $\qquad g:\ x \mapsto x^3 - 7x^2 + 12x$

4) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^3$ $\qquad g: x \mapsto \sqrt{2x}$

5) $f: x \mapsto x(6-2x^2)$ $\qquad g: x \mapsto x(2-x^2)$

6) $f: x \mapsto x^4$ $\qquad g: x \mapsto -x^2+2$

7) $f: t \mapsto t^2-3$ $\qquad g: t \mapsto 2t$

8) $f: t \mapsto t^3$ $\qquad g: t \mapsto 2t$

5.24 Calculer l'aire totale des domaines bornés limités par les courbes d'équations $y = x^3$ et $y = 3x^2 - 2x$.

5.25 Les paraboles d'équations $y = 16 - x^2$, $y = (x-4)^2$ et $y = -x^2 + 5x + 1$ délimitent trois triangles curvilignes. Déterminer les coordonnées des sommets et l'aire de chacun de ces triangles.

5.26 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes d'équations $y^2 = 4-x$ et $y^2 = 4+x$.

5.27 Les paraboles d'équations $y = 3(x+3)^2$ et $y = 3(x-1)^2$ délimitent avec l'axe Ox un domaine borné. Calculer son aire.

5.28 La courbe d'équation $y^3 = x^2$ délimite avec la courbe d'équation $y = |x|$ deux domaines bornés. Calculer l'aire totale de ces deux domaines.

5.29 Quelle est l'aire de chacun des deux domaines bornés limités par la courbe d'équation $y = 2x - x^3$ et sa **normale** (perpendiculaire à la tangente) en son point d'inflexion ?

5.30 Pour quelle valeur du paramètre positif a la courbe d'équation $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$ délimite-t-elle avec l'axe Ox , dans le premier quadrant, un domaine d'aire égale à 6 ?

5.31 Calculer le réel $m > 0$ de façon que l'aire limitée par les graphes des fonctions $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ et $x \mapsto mx$ soit égale à 9 .

5.32 Les axes de coordonnées et la parabole d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$ délimitent un domaine contenu dans le 1er quadrant. Déterminer la valeur c pour laquelle la droite d'équation $x = c$ coupe ce domaine en deux parties de même aire.

5.33 On considère le domaine borné du 1er quadrant limité par les axes de coordonnées, la droite d'équation $y = 8$ et la courbe d'équation $y = \dfrac{4-x^2}{x^2}$. Déterminer la valeur b pour laquelle la droite d'équation $y = b$ coupe ce domaine en deux parties de même aire.

5.34 On donne la courbe d'équation $y = ax - x^3$ $(a > 0)$. Montrer que chacun des deux domaines limités par cette courbe et l'axe Ox est divisé en deux domaines d'aires égales par la courbe d'équation $y = x^3$.

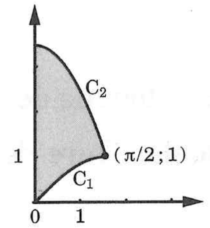
5.35 Déterminer la pente de la droite qui passe par l'origine et qui coupe en deux parties de même aire le domaine borné limité par la courbe d'équation $y = -x^2 + 3x$ et l'axe Ox.

5.36 La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe Ox en les points $A(1;0)$ et $B(4;0)$. Déterminer les valeurs des paramètres a, b et c pour que l'aire du domaine délimité par la parabole et l'axe Ox soit égale à $\dfrac{9}{2}$.

5.37 Les courbes d'équations $y = \sin(x)$ et $y = \cos(x)$ forment avec les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$, dans le 1er quadrant, trois domaines. Calculer les aires de ces trois domaines.

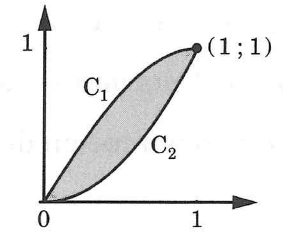
5.38 La parabole d'équation $y = x^2$ coupe le disque d'équation $x^2 + y^2 \leq 2$ en deux domaines. Calculer l'aire du plus petit de ces deux domaines.

5.39 Calculer d'abord le paramètre a, puis l'aire du domaine grisé

1) 

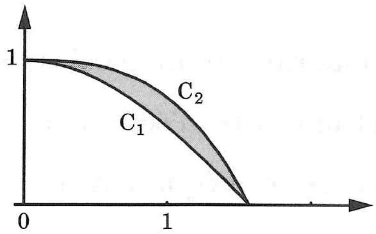
$C_1 : y = \sin(x)$

$C_2 : y = -x^2 + a$

2) 

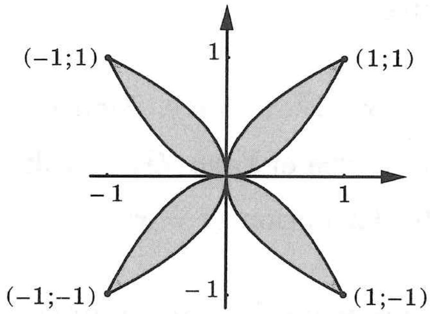
$C_1 : \; y = \sin(a x)$

$C_2 : \; y = x^2$

3) 

$C_1 : \; y = \cos(x)$

$C_2 : \; y = a x^3 + 1$

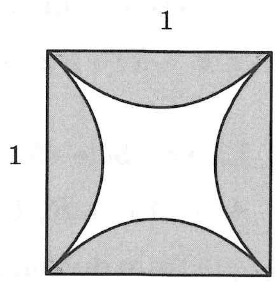
4) 

$C_1 : \; y^2 = a x^4$

$C_2 : \; x^2 = y^4$

5.40 Le domaine grisé est délimité par des arcs de parabole tangents aux diagonales du carré.

Calculer son aire.



5.41 Calculer le réel positif a pour que l'aire du domaine du premier quadrant compris entre l'axe Ox et la courbe d'équation $y = -a x^3 + (a+1) x$ soit minimale.

5.42 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $x = y^2 - 2$ et la droite d'équation $y = x$

a) en prenant x comme variable d'intégration

b) en prenant y comme variable d'intégration.

5.43 Un arc de forme parabolique d'axe vertical a une base longue de 10 mètres et son sommet se trouve à 12 mètres du sol. Calculer l'aire de la surface que délimite cet arc.

5.44 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ tourne autour de l'axe Ox. Esquisser le corps ainsi obtenu et calculer son volume.

1) $f(x) = x+1$ $\quad a = 1\,,\ b = 3$

2) $f(x) = mx$ $\quad a = 0\,,\ b = h$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad 0 < a < b$

4) $f(x) = 2 + \sin(x)$ $\quad a = 0\,,\ b = 2\pi$

5.45 Le domaine borné délimité par les deux paraboles d'équations $y = x^2 - 2x + 6$ et $y = -x^2 + 10$ tourne autour de l'axe Ox. Calculer le volume du corps ainsi engendré.

5.46 Le domaine borné limité par la courbe d'équation $y = k(1-kx)\sqrt{x}$ $(k > 0)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Montrer que le volume du corps ainsi obtenu est indépendant du paramètre k.

5.47 Déterminer le volume d'une "bague" engendrée par la révolution autour de l'axe Ox du rectangle $ABCD$ défini par

$$A(3\,;2)\,,\ B(4\,;3)\,,\ C(2\,;5)\ \text{et}\ D(1\,;4)\,.$$

5.48 Formule des trois niveaux

On considère un solide S limité par deux plans horizontaux d'équations $z = a$ et $z = b$. Si $S(z)$ est l'aire de la section par un plan horizontal, on peut estimer le volume de S par

$$V = \frac{b-a}{6}\left(S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right)$$

a) Montrer que si $S(z)$ s'exprime comme un polynôme de degré trois au plus, alors la formule ci-dessus est exacte.

b) En déduire le volume des corps suivants

1) d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur h

2) du tronc de cône de rayons R et r et de hauteur h

3) d'une piscine de forme pyramidale : une pyramide droite tronquée par deux carrés de côtés C et c, de profondeur égale à h.

5.49 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$, $x = b$ tourne autour de l'axe Ox. Estimer les volumes suivants à l'aide de la formule des trois niveaux et comparer avec la valeur exacte

1) $f(x) = 2 + \sin(x)$ $\qquad a = 0 \, , \; b = 2\pi$

2) $f(x) = 3 - \dfrac{x^2}{16}$ $\qquad a = -4 \, , \; b = 4$

5.50 Déterminer le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Ox du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = \dfrac{|3x+1| + |x-1|}{2}$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

5.51 Un récipient cylindrique de rayon R est rempli d'eau à ras bord. Calculer le volume d'eau qui s'en écoule lorsqu'on l'incline d'un angle α.

5.52 On donne la courbe d'équation $y = (3-x)\sqrt{x+3}$

1) Quelle est l'abscisse de son point le plus haut ?

2) Calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Ox du domaine borné limité par la courbe et l'axe Ox.

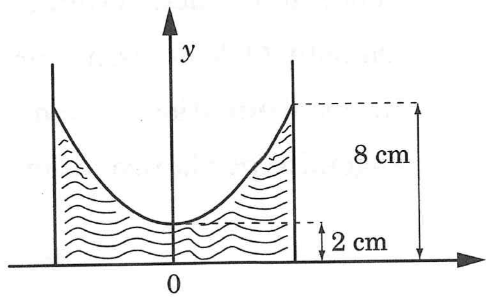
5.53 On fait tourner le domaine délimité par la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = 1$ autour de l'axe Ox puis autour de l'axe Oy. Calculer les volumes des deux corps ainsi obtenus.

5.54 Les domaines bornés délimités par les courbes suivantes tournent aussi bien autour de l'axe Ox qu'autour de l'axe Oy. Calculer les volumes des deux corps ainsi obtenus.

1) $y^2 = 2x+3$, $x = 0$ et $x = 3$

2) $x^2 - 4y^2 = 16$ et $x = 8$

5.55 Un récipient cylindrique de rayon r, contenant un liquide, tourne autour de son axe de symétrie Oy. Une coupe de la surface du liquide selon un plan contenant Oy est la parabole illustrée ci-contre.



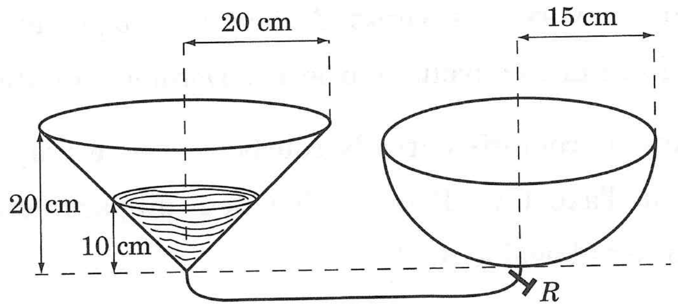
Calculer la hauteur du liquide dans le cylindre lorsque celui-ci est au repos.

5.56 1) Calculer le volume d'un verre en forme de tronc de cône de révolution sachant que sa hauteur mesure 12 cm et que les diamètres de ses bases mesurent 8 cm et 12 cm.

2) Calculer le volume de la bouteille engendrée par la révolution autour de l'axe Ox du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = 3 + \sqrt[3]{x}$, l'axe Ox, la droite $x = -8$ et la droite $x = 8$.

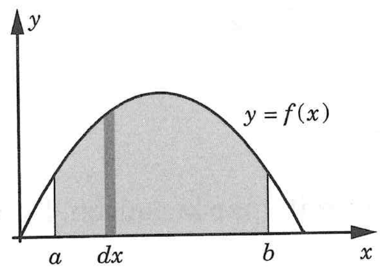
3) On verse le contenu de cette bouteille dans le verre. Quelle est la hauteur du liquide dans ce verre ?

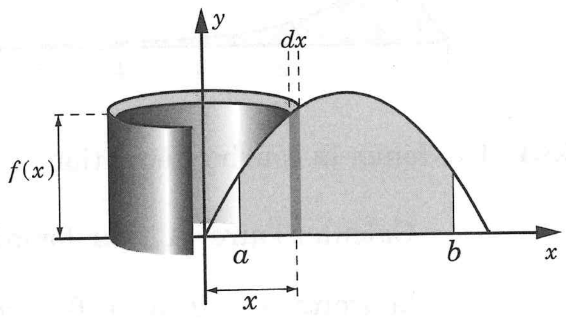
5.57



Déterminer la hauteur atteinte par le liquide dans le cône et la demi-sphère après l'ouverture du robinet R.

5.58 Volume d'un solide de révolution (découpage en tubes cylindriques)





Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a ; b]$ avec $a \geq 0$. On note D le domaine borné limité par le graphe de f, l'axe Ox et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. Montrer que le volume V du solide engendré par la révolution de D autour de l'axe Oy est donné par

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

1) On considère le domaine borné D délimité par la courbe d'équation $y = 5x - x^2$ et l'axe Ox. Calculer le volume du solide engendré par la révolution de D autour de l'axe Oy.

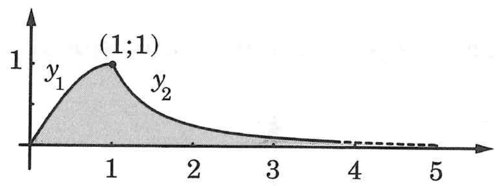
2) On considère le domaine borné D délimité par la courbe d'équation $y = \sin(x)$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$. Calculer le volume du solide engendré par la révolution de D autour de l'axe Oy.

5.59 On considère la famille de fonctions C_a définie par $C_a(x) = \dfrac{x^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ avec $a > 0$. Notons p_a et q_a les abscisses des minimums de C_a.

1) Lorsque a varie, les points $P_a(p_a ; C_a(p_a))$ et $Q_a(q_a ; C_a(q_a))$ engendrent une nouvelle courbe C. Donner l'équation de cette courbe.

2) Le domaine compris entre la courbe C et le graphe de C_a tourne autour de l'axe Oy. Pour quelle valeur du paramètre a le volume de ce corps est-il égal à 3π ?

5.60 Calculer d'abord le paramètre a, puis l'aire du domaine non borné grisé ci-dessous.



$$y_1 = \sin(ax)$$

$$y_2 = \frac{1}{x^2}$$

5.61 On donne la courbe d'équation $y = \dfrac{4 - x^2}{x^4}$.

1) Calculer l'aire A_1 du domaine borné limité par la courbe, l'axe Ox et la droite $x = a$ avec $0 < a \leq 2$.

2) Calculer l'aire A_2 du domaine borné limité par la courbe, l'axe Ox et la droite $x = b$, avec $b > 2$.

3) Calculer $\lim\limits_{a \to 0} A_1$ et $\lim\limits_{b \to +\infty} A_2$.

5.62 Le domaine non borné délimité par le graphe de la fonction f, l'axe Ox et le demi-plan $x \geq 1$ tourne autour de l'axe Ox. Calculer le volume du corps ainsi obtenu lorsque

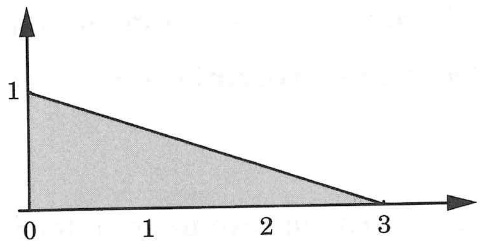
1) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ 2) $f(x) = 2x^{-3/2}$

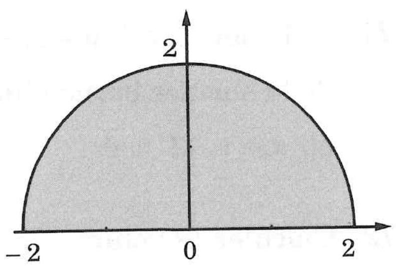
5.63 Le domaine non borné délimité par le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, l'axe Ox et le demi-plan $x \geq 1$ tourne autour de l'axe Ox . On désire découper ce corps, par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, en portions successives telles que chacune d'elles ait un volume égal à la moitié du volume de la précédente. Déterminer les équations de ces plans sachant que le premier a pour équation $x = 2$.

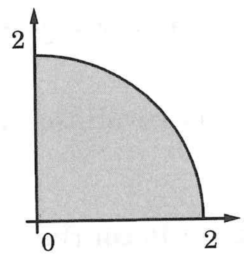
5.64 On considère la fonction f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Calculer l'aire du domaine non borné limité par l'axe Oy , le graphe de f et son asymptote horizontale.

5.65 Calculer les coordonnées du barycentre de chacun des domaines dessinés ci-dessous

1) 

2) 

3) 

5.66 Un domaine est décrit par des inégalités. Calculer les coordonnées de son barycentre

1) $0 \geq y \geq x^3 - 2x^2 - 3x$ **et** $x \geq 0$ 2) $0 \leq y \leq 4 - \sqrt{x}$ **et** $x \geq 0$

3) $0 \leq y \leq \cos^2(x)$ **et** $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

5.67 Déterminer les coordonnées du barycentre du domaine délimité par deux paraboles d'équations

1) $y^2 = 4x$ **et** $y = \frac{x^2}{4}$ 2) $y = x^2$ **et** $y = 2 - x^2$

5.68 Calculer les coordonnées du barycentre d'un demi-disque inhomogène de rayon R en supposant que la densité de ce demi-disque en chaque point est proportionnelle à la distance de ce point au centre.

Exercices récapitulatifs

5.69 Les paraboles d'équation $y = \frac{x^2}{4}$ et $y = 5 - x^2$ délimitent une surface bornée S. Calculer le volume engendré par la révolution de S

1) autour de Ox 2) autour de Oy

5.70 Calculer le volume engendré par la révolution autour de Ox de la surface bornée située dans le premier quadrant et limitée par les courbes d'équations $y = 5x - x^3$ et $y = \frac{4}{x}$.

5.71 Calculer le volume engendré par la révolution autour de la droite $y = -1$ de la surface bornée limitée par les courbes d'équations $y = -x^2 - 3x + 6$ et $x + y - 3 = 0$.

5.72 Calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de Ox du domaine plan borné limité par les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

5.73 Calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de Ox du domaine plan borné limité par

1) l'axe Ox, les droites $x = 0$, $x = 2$ et la courbe $xy + y = 1$.

2) l'axe Ox, les droites $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ et la courbe $y = \cos(x)$.

5.74 On considère le domaine plan limité par les courbes d'équations $y = x^2 + 2$ et $y = 3x$. Calculer le volume du solide engendré par la révolution de ce domaine autour de

1) Ox 2) Oy 3) la droite $x = 1$

4) la droite $x = 2$ 5) la droite $y = 3$ 6) la droite $y = 6$

5.75 La base d'un solide est le disque du plan Oxy centré à l'origine et de rayon 3. Chaque section du solide par un plan perpendiculaire à Oy est un carré. Esquisser ce solide et calculer son volume.

5.76 De l'eau s'écoule d'un réservoir avec un débit instantané de $0,003\,t^2$ litres par seconde, pour $0 \leq t \leq 5$. Combien de litres s'écoulent-ils durant ces 5 secondes ?

5.77 De l'air s'échappe d'un ballon avec un débit instantané de $3t^2 + 2t$ centimètres cubes par seconde pour $0 \leq t \leq 36$. Quel volume d'air s'échappe-t-il pendant ces 36 secondes ?

5.78 A partir du temps $t = 0$, on verse du liquide dans un récipient avec un débit instantané de $r(t) = t$ litres par minute. Simultanément, une partie de ce liquide s'échappe du récipient avec un débit instantané de $v(t) = t^2$ litres par minute. En supposant qu'au temps $t = 0$, le récipient était vide, à quel moment le niveau du liquide atteindra-t-il son maximum ? A quel moment le récipient sera-t-il à nouveau vide ?

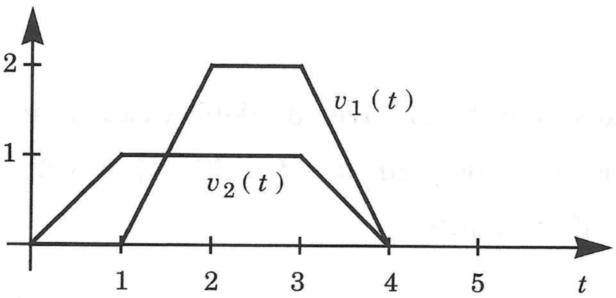
5.79 Alors qu'il se déplace à la vitesse de 20 m/s, un mobile est soumis à une décélération constante et s'arrête après 30 s. Calculer la distance parcourue durant ces 30 secondes.

5.80 Une pierre lâchée d'un ballon acquiert, après t secondes, une vitesse égale à $9 \cdot t$ mètres par seconde.
Quelle distance a-t-elle parcourue après 10 secondes ? après 20 secondes ?

5.81 Au temps $t = 0$ un objet est lancé d'une montgolfière vers le bas. La composante verticale de sa vitesse est donnée par $v(t) = -3 - 9{,}8\,t$ mètres par seconde. Si, après 10 secondes de chute, l'objet n'a toujours pas atteint le sol, que peut-on dire de l'altitude à laquelle se trouvait la montgolfière au temps $t = 0$?

5.82 D'un pont surplombant une gorge, on lâche une pierre qui est alors soumise à une accélération de $9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. Le bruit de l'impact avec l'eau est entendu sur le pont après $5{,}6$ secondes. Sachant que la vitesse du son est de 330 m/s, calculer le temps de chute de la pierre ainsi que la hauteur du pont.

5.83 Le diagramme ci-dessous donne les vitesses v_1 et v_2 de deux mobiles M_1 et M_2. On désigne par $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les abscisses de M_1 et M_2 au temps t.

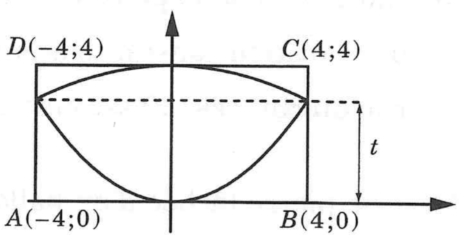


Calculer la date de l'éventuelle rencontre des deux mobiles sachant que

1) $x_1(0) = x_2(0) = 0$ 2) $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$

5.84 La parabole d'équation $y^2 = 12x$ est coupée à angle droit, aux points d'abscisse $x = 3$, par une autre parabole dont le sommet se situe sur l'axe Ox. Calculer l'aire du domaine que délimitent ces deux paraboles.

5.85 On donne ci-contre le rectangle $ABCD$ ainsi que deux arcs de parabole d'axe Oy.



1) Déterminer, en fonction de t, les équations des deux paraboles.

2) Calculer l'aire du domaine borné délimité par les deux paraboles.

3) Pour quelle valeur du paramètre t les paraboles se coupent-elles à angle droit ?

5.86 Pour $k > 0$, la courbe d'équation $y = \frac{1}{k}(3k^2x^2 + x)$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = 2$ délimitent un domaine. Pour quelle valeur du paramètre k l'aire de ce domaine admet-elle un extremum ? S'agit-il d'une valeur maximale ou minimale ?

5.87 Une boule de camphre exposée à l'air libre diminue de volume, tout en gardant sa forme sphérique. La perte de volume est proportionnelle à sa surface externe. Son diamètre passe de 20 mm à 16 mm en six mois.

1) Après combien de mois le diamètre est-il égal à 10 mm ?

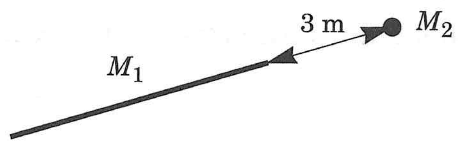
2) Après combien de mois la boule disparaît-elle ?

5.88 A l'intérieur de la Terre, considérée comme une boule homogène, la force de gravitation s'exerçant sur un point matériel est proportionnelle à la distance séparant ce point du centre de la Terre. Dans un livre de science-fiction, on veut creuser un puits jusqu'au centre de la Terre. Quel travail doit-on fournir pour transporter une masse d'un kilo de ce centre à la surface ?

Indications: le rayon de la Terre est égal à $6,371 \cdot 10^6$ m et l'accélération gravitationnelle à la surface est égale à $9,81 \text{ m/s}^2$.

5.89 La loi d'attraction universelle de Newton $F = \mathrm{G}\,\dfrac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$ donne la force F qui s'exerce entre deux points matériels de masses M_1 et M_2 situés à une distance r, G étant la constante universelle de gravitation.

Quelle est la force F qui s'exerce entre deux masses M_1 et M_2 situées à 3 m l'une de l'autre, la masse M_1 de 18 kg étant constituée d'une barre homogène de 6 m de long et la masse M_2 de 2 kg étant considérée comme ponctuelle ?



Où concentrer la masse M_1 pour que la force F soit donnée par la loi de Newton ?

5.90 On considère un disque de rayon variable R ainsi que les fonctions $A(R)$ donnant l'aire du disque et $P(R)$ donnant la circonférence du cercle de rayon R. Montrer (sans utiliser les expressions explicites des fonctions A et P) que $A' = P$.

5.91 On considère une boule de rayon variable R et de volume $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$. On désigne par $S(R)$ la surface de la sphère de rayon R. Montrer que $V' = S$ et en déduire l'expression de $S(R)$.

5.92 On considère un corps tombant en chute libre avec une vitesse initiale nulle. Pour calculer la hauteur h parcourue par ce corps après un temps de chute t, on divise le temps t en n intervalles de grandeur $\Delta t = \frac{t}{n}$. Sur le i-ème intervalle $(1 \le i \le n)$ on suppose que la vitesse de chute v_i est constante et égale à $g \cdot i \cdot \Delta t$, où $g \cong 9,81$ m/s^2.

1) Calculer la hauteur h pour $n = 10$, pour $n = 20$ et pour une valeur quelconque de n.

2) Calculer la hauteur h pour n tendant vers l'infini.

5.93 Pour calculer l'aire d'un disque de rayon r, on découpe son intérieur en n anneaux concentriques d'épaisseur égale à $d = \frac{r}{n}$.

1) Expliquer pourquoi l'aire d'un anneau dont le cercle intérieur a pour rayon r_i peut être approchée par la valeur $A_i = 2\pi r_i d$.

2) Pour un nombre donné n d'anneaux, calculer la somme S_n des aires de ces anneaux.

3) Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

Solutions des exercices

5.1

1) 20
2) 16
3) $\frac{27}{2}$
4) $\frac{12}{5}$
5) $\frac{82}{9}$
6) $6\sqrt{3}$
7) $-\frac{21}{16}$
8) $\frac{3a^3}{2}$
9) $5'343$
10) 13
11) 2
12) $\frac{16+4\sqrt{2}}{3}$
13) 2
14) $2\sqrt{2}-\frac{5}{2}$
15) 3
16) $\frac{5}{2}$
17) $\frac{11}{6}$
18) $-2\sin(a)$
19) -2
20) $a+b$
21) $\frac{2r^4}{3}$
22) $\frac{x^2}{2}$

5.2

1) 7
2) 9
3) -8
4) 8

5.4

1) $k = \frac{2}{9}$
2) $k = 7$
3) $k = \pi + m\cdot 2\pi\ ,\ m \in \mathbb{Z}$
4) $k = \frac{\pi}{3} + m\cdot 4\pi$ ou $k = \frac{5\pi}{3} + m\cdot 4\pi \quad m \in \mathbb{Z}$
5) $k = 0$
6) $k \in \left\{-2\,;\,0\,;\,\frac{-6\pm 2\sqrt{3}}{6}\right\}$

5.5

1) minimums de coordonnées $\left(\pm 1\,;-\frac{1}{4}\right)$, maximum de coordonnées $(0\,;0)$
2) minimum de coordonnées $\left(-1\,;-\frac{2}{3}\right)$

5.6 $a = -\dfrac{1}{10}$; $b = \dfrac{12}{10}$; maximums: $(\pm\sqrt{12}\,;7,2)$, minimum: $(0\,;0)$

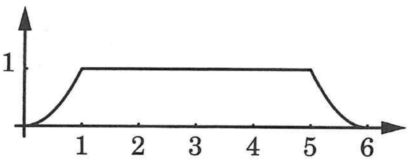
5.7 1) $\mu = \dfrac{16}{3}$, $c = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 2) $\mu = 7$, $c = 3$

3) $\mu = \dfrac{8}{3}$, $c = \dfrac{32}{9}$ 4) $\mu = \dfrac{2}{\pi}$, $c = 0,69$ ou $2,45$

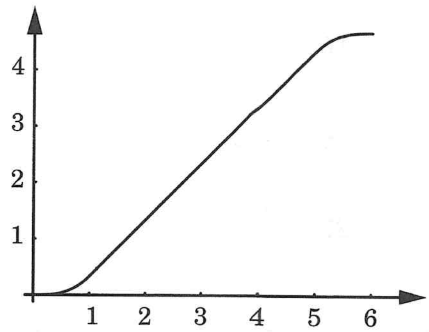
5) $\mu = \dfrac{2A}{\pi}$, $c = \dfrac{1}{\omega}\arccos\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

5.8 $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{12}$

5.9 1)



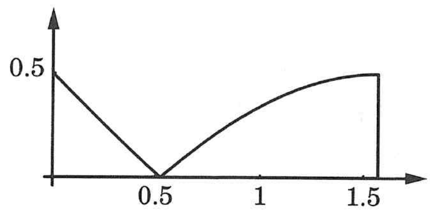
3)



2) $\dfrac{14}{3}$ 4) $F'(x) = f(x)$

5.10 $F_2(t) - F_1(t) = \displaystyle\int_{a_2}^{a_1} f(x)\,dx$

5.11 1)



2) $2\cos(p) + \left(2p - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin(p) - 1$

3) maximums: $(0\,;1)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$

minimum: $\left(\dfrac{\pi}{4}\,;\sqrt{2} - 1\right)$

5.12 1) $-\dfrac{15}{4}$ 2) 2 3) $\dfrac{1}{6}$

4) $\dfrac{4}{65}$ 5) $-\dfrac{7}{3}$ 6) $\dfrac{5}{4}$

7) $\dfrac{14}{3}$ 8) $\dfrac{13}{3}$ 9) $2 - \sqrt{5}$

10) $12 - 2\sqrt{10}$ 11) $\dfrac{n}{n+1}$ 12) $2(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

13) $\dfrac{r^3}{3}$ 14) 0 15) $\dfrac{1}{\omega}$

16) $\dfrac{3}{2}$ 17) $\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$ 18) $\dfrac{1}{2}$

19) $\dfrac{3}{2}$

5.13 1) $\dfrac{-16\sqrt{2}}{15}$ 2) $\dfrac{9\pi}{4}$ 3) $\dfrac{14\sqrt{3}}{5}\,a^5$

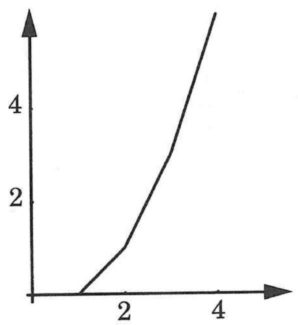
5.14 1) π 2) $\dfrac{\pi-2}{\omega^3}$ 3) $\dfrac{1}{2}$

4) $\dfrac{\pi+2}{8}$ 5) $\dfrac{3\pi+2}{24}$ 6) $\dfrac{116}{15}$

5.15 $\dfrac{4+2\sqrt{2}}{3}$

5.16 1) $F(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

2)



$F'(x) = \mathrm{E}(x)$ si $x \notin \mathbb{N}$

5.17 1) $\dfrac{5}{6}$ 2) $5-\sqrt{5}$

5.18 1) 2 2) $-\dfrac{1}{2}$ 3) $\dfrac{11}{18}$ 4) diverge

5) diverge 6) 8 7) diverge 8) 6

9) 3π 10) 4

5.19 1) 30 2) $\dfrac{128}{3}$ 3) 2 4) 1 5) $\dfrac{64}{3}$

5.20 1) $\frac{5}{2}$ 2) $\frac{2}{3}$

5.21 1) $\frac{9}{2}$ 2) $\frac{37}{12}$ 3) $\frac{16}{3}$

4) 24 5) $\frac{490}{3}$

5.22 1) 1 2) $\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$; $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{9}{4}$; $\frac{1}{4}$

5.23 1) $\frac{64}{3}$ 2) 9 3) 9 4) $\frac{5}{3}$

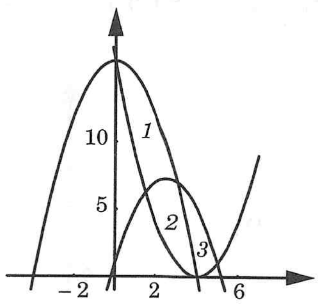
5) 8 6) $\frac{44}{15}$ 7) $\frac{32}{3}$ 8) 2

5.24 $\frac{1}{2}$

5.25 Sommets : $(0\,;16)$, $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{25}{4}\right)$, $(3\,;7)$, $(4\,;0)$ et $(5\,;1)$

Aire triangle *1* : $\frac{297}{24}$; aire triangle *2* : $\frac{215}{24}$;

aire triangle *3* : $\frac{16}{3}$



5.26 $\frac{64}{3}$

5.27 16

5.28 $\frac{1}{5}$

5.29 $\frac{25}{16}$

5.30 $a = 2\sqrt{2}$

5.31 $m = \frac{3}{2}$

5.32 $c \cong 1,2091$

5.33 $b = 3$

5.35 $3 - \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

5.36 a) $a = 1$; $b = -5$; $c = 4$ b) $a = -1$; $b = 5$; $c = -4$

5.37 Aires: $\sqrt{2} - 1$; $\sqrt{2} - 1$ et $\sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1)$

5.38 $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}$

5.39 1) $a = 1 + \dfrac{\pi^2}{4}$; $\dfrac{\pi^3 + 6\pi - 12}{12}$ 2) $a = \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{1}{3}$

3) $a = \dfrac{-8}{\pi^3}$; $\dfrac{3\pi}{8} - 1$ 4) $a = 1$; $\dfrac{4}{3}$

5.40 $\dfrac{2}{3}$

5.41 $a = 1$

5.42 $\dfrac{9}{2}$

5.43 80

5.44 1) $\dfrac{56\pi}{3}$ 2) $\pi\,\dfrac{m^2 h^3}{3}$ 3) $\pi\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ 4) $9\pi^2$

5.45 135π

5.47 28π

5.48 1) $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$ 2) $\dfrac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$ 3) $\dfrac{h}{3}(c^2 + cC + C^2)$

5.49 1) estimation : $8\pi^2$; valeur exacte : $9\pi^2$

2) estimation : $\dfrac{176\pi}{3}$; valeur exacte : $\dfrac{288\pi}{5}$

5.50 $\dfrac{35\pi}{3}$

5.51 Le volume d'eau qui s'écoule est $\pi R^3 \tan(\alpha)$ si $\tan(\alpha) < \dfrac{h}{2R}$

5.52 1) -1 2) 108π

5.53 Autour de Ox : $\dfrac{\pi}{2}$ Autour de Oy : $\dfrac{4\pi}{5}$

5.54 1) autour de Ox : 18π autour de Oy : $\dfrac{\pi}{2}(45 + 5\sqrt{3})$

2) autour de Ox : $\dfrac{64\pi}{3}$ autour de Oy : $128\pi\sqrt{3}$

5.55 5 cm

5.56 1) 304π cm^3 2) $\dfrac{912\pi}{5}$ cm^3 3) $8,24$ cm

5.57 $h = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$ cm

5.58 1) $\dfrac{625\pi}{6}$ 2) $2\pi^2$

5.59 1) $y = -\dfrac{x^2}{2}$ 2) $a = \sqrt{12}$

5.60 $a = \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{2}{\pi} + 1$

5.61 1) $\dfrac{a^3 - 3a^2 + 4}{3a^3}$ 2) $\dfrac{b^3 - 3b^2 + 4}{3b^3}$

3) $\lim\limits_{a \to 0} A_1 = +\infty$ $\lim\limits_{b \to +\infty} A_2 = \dfrac{1}{3}$

5.62 1) $\dfrac{\pi}{5}$ 2) 2π

5.63 Les équations de ces plans sont $x = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

5.64 1

5.65 1) $\left(1\,;\dfrac{1}{3}\right)$ 2) $\left(0\,;\dfrac{8}{3\pi}\right)$ 3) $\left(\dfrac{8}{3\pi}\,;\dfrac{8}{3\pi}\right)$

5.66 1) $\left(\dfrac{42}{25}\ ;\ -\dfrac{414}{175}\right)$ 2) $\left(\dfrac{24}{5}\ ;\ 1\right)$ 3) $\left(0\ ;\ \dfrac{3}{8}\right)$

5.67 1) $\left(\dfrac{9}{5}\ ;\ \dfrac{9}{5}\right)$ 2) $(0\,;1)$

5.68 $\left(0\ ;\ \dfrac{3R}{2\pi}\right)$

5.69 1) $V = \dfrac{176\pi}{3}$ 2) $V = 10\pi$

5.70 $\dfrac{136\pi}{21}$

5.71 $\dfrac{704\pi}{5}$

5.72 $\dfrac{3\pi}{10}$

5.73 $\dfrac{2\pi}{3}$ 2) $\dfrac{\pi^2}{2}$

5.74 1) $\dfrac{22\pi}{15}$ 2) $\dfrac{\pi}{2}$ 3) $\dfrac{\pi}{6}$

4) $\dfrac{\pi}{6}$ 5) $\dfrac{7\pi}{15}$ 6) $\dfrac{8\pi}{15}$

5.75 144

5.76 $0,125$ litre

5.77 47'952 cm^3

5.78 Maximum après 1 minute. De nouveau vide après 1 minute et 30 secondes

5.79 300 m

5.80 450 m ; 1'800 m

5.81 Elle était à plus de 520 m du sol

5.82 Hauteur $\cong$ 132, 43 m ; temps de chute de la pierre 5, 2 s

5.83 1) $t_c = 2,5$ s 2) Ils ne se rencontrent pas

5.84 48

5.85 1) $y = \dfrac{t\,x^2}{16}$; $y = 4 + \dfrac{(t-4)x^2}{16}$ 2) $\dfrac{64}{3}$ 3) $t = 2$

5.86 L'aire est minimum si $k = \dfrac{1}{2}$

5.87 1) Après 15 mois 2) Après 30 mois

5.88 $3,125 \cdot 10^7$ Joule

5.89 $\dfrac{4G}{3}$; en son centre de masse

5.91 $S(R) = 4\pi R^2$

5.92 1) $h = \dfrac{g\,t^2}{n^2}\,\dfrac{n(n+1)}{2}$ (par excès)

$h = \dfrac{g\,t^2}{n^2}\,\dfrac{n(n-1)}{2}$ (par défaut)

2) $h = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$

5.93 2) $\dfrac{\pi\,r^2(n+1)}{n}$ (par excès) $\dfrac{\pi\,r^2(n-1)}{n}$ (par défaut)

3) $\pi\,r^2$

§ 6. FONCTION LOGARITHME FONCTION EXPONENTIELLE

Dans les cours d'algèbre élémentaire, l'expression a^x n'est définie de manière complète que si x est rationnel. On fait cependant la supposition que la définition de a^x peut être prolongée à des exposants réels quelconques de telle manière que les règles de calcul sur les exposants soient encore valables.

On suppose alors que la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $\exp_a(x) = a^x$ est bijective si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La **fonction logarithme** $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est alors définie comme la réciproque de $\exp_a$, et ses propriétés établies à partir de celles de $\exp_a$.

Dans ce paragraphe, nous allons procéder de manière inverse en définissant une fonction logarithme (la fonction logarithme naturel) à l'aide d'une intégrale. Cette fonction sera bijective ; elle permettra de définir de manière rigoureuse l'exponentielle comme réciproque et de démontrer les résultats admis aux cours d'algèbre élémentaire.

1. Primitive de la fonction inverse

Nous avons vu (page 78) que, si $q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, alors $\int t^q \, dt = \dfrac{t^{q+1}}{q+1} + c$.

Ce calcul n'est pas applicable au cas $q = -1$. Cependant $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt$ existe si $x > 0$, car la fonction inverse $f(t) = \dfrac{1}{t}$ est continue entre 1 et x.

Pour trouver les propriétés de la fonction F, dérivons les fonctions $G(x) = F(kx)$ et $H(x) = F(x^q)$, $k \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{Q}$.

On obtient $G'(x) = F'(kx) \cdot k = \dfrac{1}{x}$. Il existe donc une constante c telle que $G(x) = F(x) + c$ pour tout $x > 0$. Comme $F(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} \, dt = 0$, on a $c = F(k)$, et $F(kx) = F(k) + F(x)$.

Comme $H'(x) = F'(x^q) \cdot q\, x^{q-1} = \dfrac{q}{x}$, on déduit de même $F(x^q) = q \cdot F(x)$.

La fonction F transforme donc les produits en sommes et les puissances en produits, et elle vaut 0 en 1 ; elle a donc les mêmes propriétés que les fonctions logarithmiques étudiées dans les cours d'algèbre élémentaire.

2. Fonction logarithme naturel

2.1 Définition

On appelle **fonction logarithme naturel** la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

2.2 Propriétés

a) La fonction ln est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$.

b) Le signe de $\ln(x)$ est donné par le tableau

x		0		1	
$\ln(x)$			$-$	0	$+$

c) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
La fonction ln est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

e) Pour tout x, y réels strictement positifs et tout q rationnel, on a

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(x \cdot y) &= \ln(x) + \ln(y) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) - \ln(y) \\ \ln(x^q) &= q \cdot \ln(x) \end{aligned}}$$

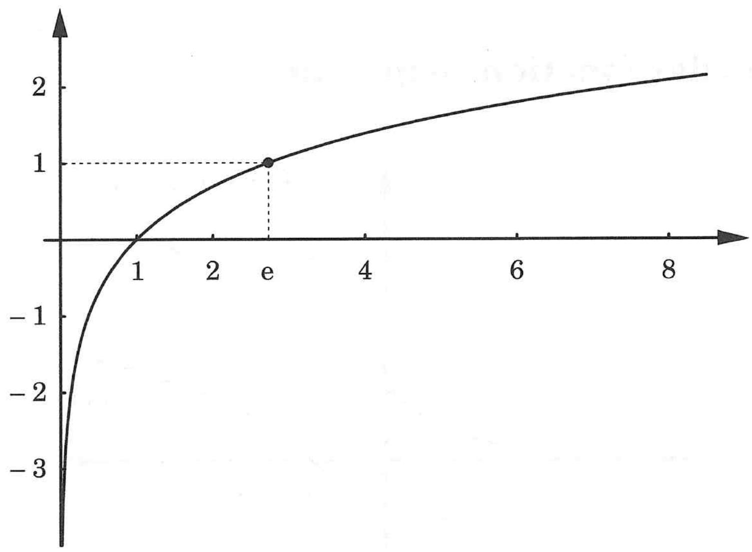
f) La fonction $g(x) = \ln|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$. Ainsi, $\ln|x|$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ pour tout x non nul.

g) Si f est une fonction positive et dérivable, $(\ln(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

h) Si f est une fonction dérivable, $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ pour tout x tel que $f(x) \neq 0$.

i) Si f est une fonction qui ne s'annule pas et qui est continûment dérivable sur l'intervalle I, alors $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$.

2.3 Graphe de la fonction ln.



On désigne par **e** l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$ ($e \cong 2,71828$).

3. Fonction exponentielle

3.1 Définition

La **fonction exponentielle** $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est la fonction réciproque de la fonction $\ln$.

En d'autres termes

$\ln(\exp(x)) = x$ pour tout x réel

$\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$

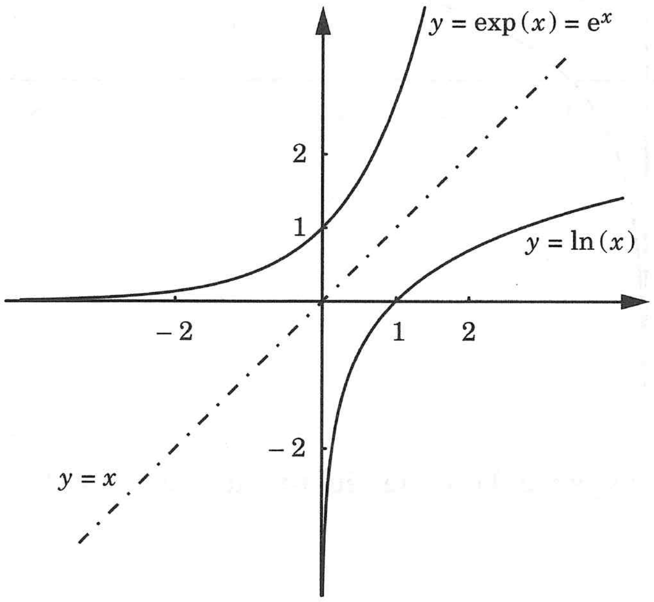
Remarque

Pour tout q rationnel, on a $\ln(e^q) = q \cdot \ln(e) = q = \ln(\exp(q))$. Il en résulte que, pour tout q rationnel, $\exp(q) = e^q$. On étend cette égalité aux nombres réels.

Définition

> Pour tout x réel, on définit le nombre $\mathbf{e^x}$ par $e^x = \exp(x)$

3.2 Graphes des fonctions exp et ln



3.3 Propriétés

a) $\ln(e^x) = x$ pour tout x réel

b) $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$

c) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

d) La fonction e^x est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

e) Pour tout x, y réel et tout q rationnel, on a

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$
$$(e^x)^q = e^{x \cdot q}$$

f) La fonction e^x est égale à sa dérivée: $(e^x)' = e^x$ pour tout x réel. Ainsi, e^x est une primitive de e^x pour tout x réel.

g) Si f est une fonction dérivable, $(e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

h) Si f est une fonction continûment dérivable, $\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

3.4 Théorème

Les seules fonctions égales à leur dérivée sont les multiples de la fonction exponentielle par une constante. Plus généralement

> Soit k un réel et f une fonction positive et dérivable sur un intervalle I. Si $f' = k \cdot f$ en tout point de I, il existe une constante positive c telle que $f(x) = c\, e^{kx}$

4. Fonctions logarithme et exponentielle de base *a*

Dans tout cet alinéa, la lettre a désigne un réel strictement positif et différent de 1.

4.1 Fonction logarithme de base *a*

Définition

> On appelle **fonction logarithme de base *a*** la fonction $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Propriétés

a) La fonction $\log_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

b) La fonction $\log_a$ est une bijection strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$

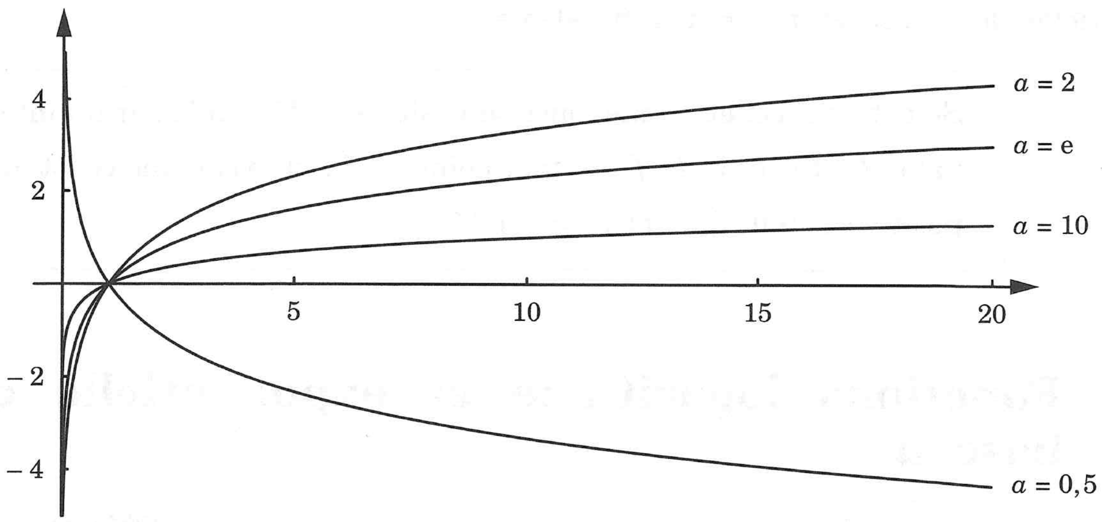
c) Pour tout x, y réel strictement positif et tout q rationnel, on a

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^q) = q \cdot \log_a(x) \qquad \log_a(a^q) = q$$

d) $\log_e(x) = \ln(x)$

Représentation graphique



4.2 Fonction exponentielle de base a

Définition

> La **fonction exponentielle de base** a $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est la réciproque de la fonction $\log_a$.

En d'autres termes

$\log_a(\exp_a(x)) = x$ pour tout x réel

$a^{\log_a(x)} = x$ pour tout $x > 0$

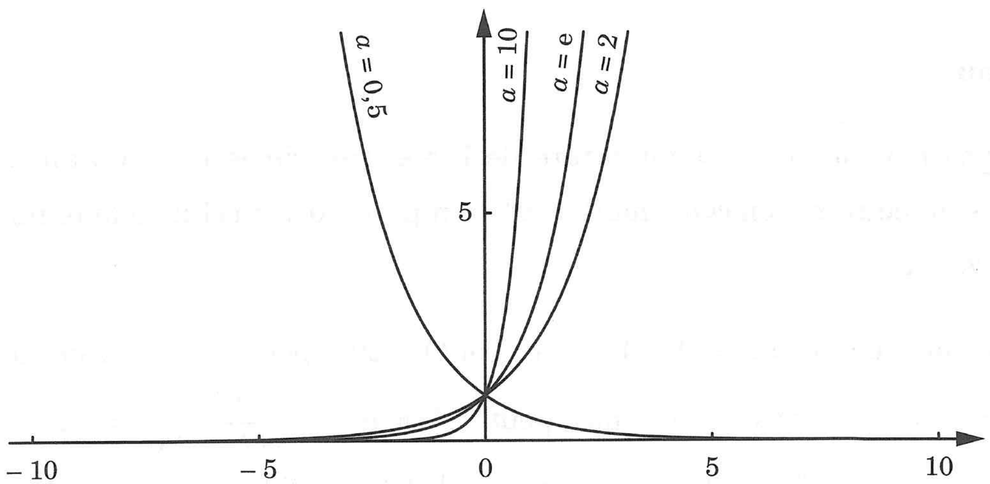
Remarque

Pour tout q rationnel, on a $\log_a(a^q) = q = \log_a(\exp_a(q))$. Il en résulte que, pour tout q rationnel, $\exp_a(q) = a^q$. On étend cette égalité aux nombres réels.

Définition

> Pour tout x réel, on définit le nombre $\boldsymbol{a^x}$ par $a^x = \exp_a(x)$

Représentation graphique



Propriétés

Pour tout x , y réel et b réel strictement positif, on a

a) $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$

b) $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

c) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

d) $\log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b)$

e) La fonction a^x est dérivable pour tout x réel et $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

f) La fonction a^x est une bijection strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.

4.3 Exercice résolu

La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant (loi de Newton).

Si la température d'un objet passe de 200 °C à 140 °C en 20 minutes lorsqu'il a pour milieu ambiant de l'air à la température constante de 20 °C ,

a) quel est le temps nécessaire pour que la température de l'objet passe de 140 °C à 50 °C ?

b) quelle est sa température 1 heure après avoir atteint 100 °C ?

Solution

Désignons par $\theta(t)$ la température de l'objet (exprimée en °C) au temps t (exprimé en heures), en convenant que le temps $t = 0$ est celui où la température est de 200 °C .

Par la loi de Newton, on a $\theta'(t) = -c \cdot (\theta(t) - 20)$ pour une certaine constante positive c. Cette équation peut s'écrire $\dfrac{\theta'(t)}{\theta(t) - 20} = -c$, donc $\displaystyle\int \frac{\theta'(t)}{\theta(t) - 20}\, dt = \int -c\, dt$, c'est-à-dire $\ln(\theta(t) - 20) = -ct + k$ pour un réel k. Il en résulte que $\theta(t) = 20 + e^{-ct+k}$.

On détermine les constantes c et k en utilisant les conditions $\theta(0) = 200$ et $\theta\left(\frac{1}{3}\right) = 140$:

$$\theta(0) = 200 \Leftrightarrow e^k = 180 ,$$

$$\theta\left(\frac{1}{3}\right) = 140 \Leftrightarrow 120 = e^k \cdot e^{-\frac{c}{3}} \Leftrightarrow e^{-\frac{c}{3}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{-c} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

D'où $k \cong 5,1930$ et $c \cong 1,2164$

La température de l'objet au temps t est donc donnée par la formule

$$\theta(t) = 20 + 180\left(\frac{8}{27}\right)^t \cong 20 + e^{-1,2164\,t\,+\,5,1930}$$

Nous sommes maintenant à même de répondre aux deux questions posées.

a) Cherchons à quel moment la température $\theta(t)$ est égale à 50 °C :

$$50 = 20 + 180\left(\frac{8}{27}\right)^t \Leftrightarrow \left(\frac{8}{27}\right)^t = \frac{1}{6} \Leftrightarrow t\ln\left(\frac{8}{27}\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-\ln(6)}{\ln(8)-\ln(27)} \cong 1,47\text{ h} \cong 1\text{ h }29\text{ min}$$

b) Désignons par t_0 le moment où la température est égale à 100 °C :

$100 = 20 + 180\left(\frac{8}{27}\right)^{t_0}$. On cherche $\theta(t_0+1)$:

$$\theta(t_0+1) = 20 + 180\left(\frac{8}{27}\right)^{t_0+1} = 20 + 180\left(\frac{8}{27}\right)^{t_0}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)$$

$$= 20 + 80\cdot\left(\frac{8}{27}\right) \cong 43,7\text{ °C}$$

5. Quelques limites

Soit k un réel, a un réel strictement positif et n un entier strictement positif.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\cdot\ln(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^{ax}} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^k(x)}{x^a} = 0$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^x = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$

6. Intégration de fonctions rationnelles

6.1 Introduction

Une des nombreuses utilités de la fonction logarithme est de permettre le calcul de certaines primitives de fonctions rationnelles $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ où f et g sont des fonctions polynômes.

La méthode d'intégration est basée sur la décomposition de $q(x)$ en somme d'**éléments simples**. Nous l'illustrons par un exemple.

On veut déterminer les primitives de $q(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$.

On effectue d'abord la division euclidienne du numérateur par le dénominateur:

$$q(x) = 2 + \frac{-x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = 2 + \frac{-x^2 + 3x + 1}{x \cdot (x-1)^2}$$

On détermine ensuite les nombres a, b et c tels que l'égalité

$$\frac{-x^2 + 3x + 1}{x \cdot (x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

soit vraie pour tout x différent de 0 et de 1 .

En multipliant les deux membres de cette égalité par $x \cdot (x-1)^2$, on obtient l'égalité

$$-x^2 + 3x + 1 = a \cdot (x-1)^2 + b \cdot x \cdot (x-1) + c \cdot x$$

qui doit être vraie pour tout x différent de 0 et de 1 .

Or, si cette égalité est vraie pour tout x réel, elle sera encore vérifiée si x est différent de 0 et de 1 . Il suffit donc de trouver trois nombres a , b et c vérifiant l'égalité ci-dessus pour tout x réel.

Première méthode

Les deux polynômes $-x^2 + 3x + 1$ et $a \cdot (x-1)^2 + b \cdot x \cdot (x-1) + c \cdot x$ étant égaux, les coefficients de leurs termes de même degré sont égaux

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ -2a - b + c = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

On en déduit $a = 1$, $b = -2$ et $c = 3$

Ainsi $\dfrac{-x^2 + 3x + 1}{x \cdot (x-1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$

Seconde méthode

On peut montrer que deux polynômes de degré 2 sont égaux s'ils prennent la même valeur pour trois valeurs distinctes de x .

Les polynômes $a \cdot (x-1)^2 + b \cdot x \cdot (x-1) + c \cdot x$ et $-x^2 + 3x + 1$ sont égaux s'ils prennent la même valeur en $x = 0$, en $x = 1$ et en $x = 2$:

si $x = 0$, on obtient $a = 1$,

si $x = 1$, on obtient $c = 3$,

si $x = 2$, on obtient $a + 2b + 2c = 3$, donc $b = -2$.

Finalement

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 + 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx = \int \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right) dx =$$

$$= 2x + \ln|x| - 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c$$

dans chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$, $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

EXERCICES

Fonction logarithme naturel

6.1 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes.

Indication: pour certaines fonctions, on aura intérêt à modifier la forme de $f(x)$ avant d'en calculer la dérivée.

1) $f(x) = \ln(5x)$
2) $f(x) = \ln(x-1)$
3) $f(x) = \ln(1-x)$
4) $f(x) = \ln|1-x|$
5) $f(x) = \ln(x^2-x)$
6) $f(x) = \ln(x-x^2)$
7) $f(x) = \ln|x^2-x|$
8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$
9) $f(x) = \ln\sqrt{3-x^2}$
10) $f(x) = \ln(3x^5)$
11) $f(x) = \ln\left(\dfrac{(x^2+2)(x^2-1)}{x^2+3}\right)$
12) $f(x) = x\ln(x) - x$
13) $f(x) = \ln|\cos(x)|$
14) $f(x) = \ln(\tan(2x))$
15) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
16) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

6.2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive définie sur D_f

1) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
2) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$
3) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+4}$
4) $f(x) = x^2+x+1+\dfrac{3}{5x-1}$
5) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$
6) $f(x) = \dfrac{3x^3+2x^2-3x+5}{x+2}$
7) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

6.3 Calculer les intégrales suivantes, lorsqu'elles existent

1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x}$ 2) $\displaystyle\int_{-1}^{-3} \frac{dx}{x}$

3) $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{dx}{x}$ 4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{2x+3}$

5) $\displaystyle\int_2^6 \frac{8x^3+19x^2+15x+4}{x^2+2x+1}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^2-4x+2}{3x+4}\,dx$

7) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan(x)\,dx$

6.4 Calculer les zéros et l'extremum de $f(x) = \sqrt{\ln(x)} - \ln(\sqrt{x})$.

Fonction exponentielle

6.5 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes

1) $f(x) = e^{5x}$ 2) $f(x) = e^{x^2}$

3) $f(x) = e^{(1/x)}$ 4) $f(x) = \exp(\sqrt{x^2+x}\,)$

5) $f(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$ 6) $f(x) = e^{\sin(x)}$

7) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ 8) $f(x) = e^{-x} \cdot \cos(x)$

6.6 Calculer la dérivée d'ordre n de $f(x) = x \cdot e^x$.

6.7 Montrer que l'équation $e^x + x = 0$ admet une solution unique et calculer cette solution à $0,01$ près.

6.8 Calculer

1) $\displaystyle\int_0^2 e^x\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-2}^3 e^{2x+1}\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^3 x^2 \cdot e^{x^3}\,dx$ 4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}$

5) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot e^x\,dx$ 6) $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} x^2 \cdot e^x\,dx$

Fonctions logarithme et exponentielle de base a

6.9 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes

1) $f(x) = \log_2(3x+1)$
2) $f(x) = \log_3(x^2+x+1)$
3) $f(x) = \log_{10}|\sin(x)|$
4) $f(x) = 2^x$
5) $f(x) = \exp_3(x^2)$
6) $f(x) = \exp_2\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

6.10 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes

1) $f(x) = x^x$
2) $f(x) = x^{\ln(x)}$

6.11 Calculer

1) $\displaystyle\int_1^3 4^x\, dx$
2) $\displaystyle\int_0^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} dx$
3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x \cdot 2^{x^2}\, dx$

6.12 Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équations $y = 2^x$, $x + y = 1$ et $x = 1$.

6.13 On fait tourner autour de l'axe Ox la surface située sous la courbe d'équation $y = 2^{-x}$ entre les droites $x = -1$ et $x = 1$. Calculer le volume du solide ainsi engendré.

Quelques limites

6.14 Calculer les limites suivantes

1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$
2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$
3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\tan(2x)}$
4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot e^x}{1 - e^x}$

5) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\ln(2+x)}{x+1}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{8^x - 2^x}{4x}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin(x)}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \cdot (1 - e^x)}{(1+x) \cdot \ln(1-x)}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

11) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin(x)}}{x - \sin(x)}$

12) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{e^{-3/x}}{x^2}$

13) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(x^2 - 3)}{x - 2}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

6.15 Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ pour $a > 0$. En déduire $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)$.

6.16 Déterminer les asymptotes de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$

2) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 2x + 3}$

4) $f(x) = \dfrac{2\,e^x - 1}{e^x + 2}$

5) $f(x) = \dfrac{e^x - 2\,e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

6) $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$

7) $f(x) = (x+2)\,e^{\frac{1}{x}}$

8) $f(x) = (x+3)\,e^{\frac{4}{x-1}}$

6.17 Etudier les fonctions suivantes

1) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

2) $f(x) = (x-2)^2 \cdot e^x$

3) $f(x) = \ln(x^2+9)$

4) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

5) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

6) $f(x) = \ln|\ln(x)|$

7) $f(x) = \ln(e^{2x} + 3\,e^x + 2)$

8) $f(x) = \dfrac{x}{\ln|x|}$

6.18 Par un calcul de logarithme en base 10, déterminer le nombre de chiffres des nombres naturels suivants

1) $1'000^{1'000}$

2) $1'001^{999}$

3) $999^{1'001}$

4) $2^{859'433} - 1$

5) $2^{1'398'269} - 1$ (c'était le plus grand nombre premier connu le 16 novembre 1996)

Intégration de fonctions rationnelles

6.19 Calculer

1) $\displaystyle\int \frac{12x^3 + 42x^2 + 24x + 12}{2x+3}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^2-3}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{x}{2x-1}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot(x-1)^2}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{x}{3x^2+8x-3}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot(x^2-9)}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 - 3x^3}\,dx$

Exercices récapitulatifs

6.20 On considère les courbes γ_1 d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$ et γ_2 d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}\cdot\cos(x)$.

1) Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes γ_1 et γ_2.

2) Prouver qu'en chacun de ces points, γ_1 et γ_2 sont tangentes.

6.21 Sous quel angle les courbes d'équations $y = \mathrm{e}^{x+2}$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$ se coupent-elles ?

6.22 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 2^x$ passant par le point $(1 ; 0)$.

6.23 Déterminer le nombre réel a pour lequel les courbes d'équations $y = e^x$ et $y = a x^3$ sont tangentes. Calculer les coordonnées du point de contact.

6.24 Démontrer que, quels que soient les nombres réels a et b, les courbes $y^2 = a - 2x$ et $y = e^{x+b}$ se coupent à angle droit.

6.25 Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\, dx$

Indication: on déterminera tout d'abord deux nombres réels a et b tels que $\frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} = a + b\,\frac{-\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$

6.26 Tant qu'il y a assez de nourriture, la population d'une culture de bactéries croît proportionnellement à la quantité de bactéries présentes. Le nombre de bactéries au début d'une expérience est égal à 100 et leur nombre double chaque heure.

1) Combien y aura-t-il de bactéries deux heures et demie après le début de l'expérience ?

2) Au bout de combien de temps la population sera-t-elle de 100'000 bactéries ?

6.27 Une substance radioactive se désintègre à une vitesse proportionnelle à la quantité de matière présente. Si le 30 % d'une telle substance se désintègre en 15 ans, quelle est la demi-vie de la substance ? La **demi-vie** (ou période) est le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de la matière.

6.28 Sous l'effet de la désintégration radioactive, une masse initiale M de carbone 14 évolue en fonction du temps t (en années) de la manière suivante: $M(t) = M_0 \cdot e^{-0,000'121\,t}$, M_0 étant la masse initiale.

1) Calculer la demi-vie du carbone 14.

2) On admet que la concentration du carbone 14 dans l'atmosphère a

toujours été constante au cours du temps. Les organismes vivants ingèrent durant toute leur existence du carbone et en particulier du carbone 14 . Ainsi, durant la vie, l'absorption de carbone 14 compense exactement la partie de carbone 14 qui se désintègre. Dès la mort, la quantité de carbone 14 commence à décroître. Estimer l'âge d'un morceau de charbon retrouvé dans les grottes de Lascaux (et ainsi l'âge probable des peintures) sachant qu'il donnait en 1950 un taux de $0,97$ désintégrations par minute et par gramme alors que du bois vivant donne un taux de $6,68$ désintégrations par minute et par gramme.

6.29 Dans les premières semaines qui suivent sa naissance, l'augmentation de poids d'un bébé est proportionnelle à son poids. Un bébé qui pesait 4 kg à sa naissance pèse $4,4$ kg deux semaines plus tard. Quel était son poids selon ce modèle 5 jours après sa naissance ?

6.30 Le modèle de *Jenss* est généralement considéré comme le plus précis dans la prévision de la taille d'un enfant à l'âge préscolaire. Selon ce modèle, la taille $h(x)$ (en cm) est donnée par $h(x) = 79,041 + 6,39x - e^{3,261 - 0,993x}$ où x est exprimé en années et $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$. Sous les mêmes hypothèses, un autre modèle donne $h(x) = 70,228 + 5,104x + 9,222\ln(x)$

En utilisant chacun des deux modèles,

1) prévoir la taille et le taux instantané de croissance d'un enfant de 1 an

2) calculer le moment où ce taux est le plus élevé, le plus faible.

6.31 Dans le calcul des probabilités on appelle **fonction de densité** (ou densité de probabilité) une fonction positive f définie sur un intervalle $[a\,;b]$ et telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. Déterminer la constante c pour que la fonction donnée ci-dessous soit une fonction de densité.

1) $f(x) = \dfrac{cx}{x^2+4}$ sur $[0\,;3]$

2) $f(x) = cx\,e^{-x^2}$ sur $[0\,;10]$

6.32 Un rectangle $ABCD$ est tel que A et B sont sur l'axe Ox, alors que C et D sont sur la courbe $y = e^{-x^2}$. Calculer les coordonnées de ses sommets pour que son aire soit maximum.

6.33 Calculer la plus courte distance entre les courbes d'équations $y = e^x$ et $y = \ln(x)$.

6.34 De l'origine on mène la tangente à la courbe $y = \ln(x)$. Quelles sont les coordonnées du point de contact ?

6.35 Pour quelles valeurs de $a > 0$ la courbe d'équation $y = a^x$ coupe-t-elle la droite d'équation $y = x$?

6.36 Prouver que $x > \ln(x)$ pour tout $x > 0$.

6.37 On considère une famille de fonctions f_a définie par $f_a(x) = (x+a) \cdot e^x$, a étant un nombre réel.

1) Montrer que le graphe de f_a admet un point P_a à tangente horizontale; déterminer les coordonnées de P_a et le lieu de P_a quand a décrit $\mathbb{R}$.

2) Montrer que le graphe de f_a admet un point d'inflexion Q_a ; déterminer les coordonnées de Q_a et le lieu de Q_a quand a décrit $\mathbb{R}$.

6.38 Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant les deux conditions

i) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

ii) $f(a) = 1$.

On se propose de démontrer qu'une telle fonction est un logarithme.

1) Prouver que $f(1) = 0$.

2) En considérant x comme une constante, on définit les fonctions $g: y \mapsto f(x \cdot y)$ et $h: y \mapsto f(x) + f(y)$. Calculer les dérivées de g et de h, puis utiliser la relation i) pour en déduire $x \cdot f'(x \cdot y) = f'(y)$.

3) Déduire de 2) que $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = f'(1) \cdot \ln(x) + c$, où c est une constante.

4) Montrer que $c = 0$.

5) Déduire de ii) que $f'(1) = \dfrac{1}{\ln(a)}$, donc que $f(x) = \log_a(x)$.

6.39 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions

i) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ pour tout x, $y \in \mathbb{R}$

ii) $f(1) = a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

On se propose de démontrer qu'une telle fonction est une exponentielle.

1) Prouver que $f(0) = 1$.

2) Utiliser l'égalité $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$ pour prouver que $f(x) > 0$ pour tout x.

3) En considérant x comme une constante, on définit les fonctions $g : y \mapsto f(x+y)$ et $h : y \mapsto f(x) \cdot f(y)$. Calculer les dérivées de g et h, puis utiliser la relation i) pour en déduire $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$.

4) Déduire de 3) et de 1) que $\ln(f(x)) = f'(0) \cdot x$ pour tout x.

5) Déduire de ii) que $f'(0) = \ln(a)$, donc que $f(x) = a^x$.

6.40 On donne la fonction f par $f(x) = \dfrac{\ln(x) - m}{x}$, m étant une constante positive. On note A son intégrale dans l'intervalle $[a\,; b]$ ($a > 0$, $b > 0$). Si le graphe de f coupe l'axe Ox en $x = a$ et atteint son maximum en $x = b$, montrer que le nombre A ne dépend pas de m.

6.41 Soit la fonction f définie par $f(x) = (ax - 3)\,\mathrm{e}^{1/x}$. Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que le nombre d'extremums de cette fonction suivant les différentes valeurs du paramètre a.

6.42 Montrer que la tangente à la courbe d'équation $y = \log_a(x)$, en son point d'abscisse e, passe par l'origine.

6.43 1) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction logarithme naturel, montrer que $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$

2) On définit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$
En déduire que $S_n - 1 < \ln(n) < S_n$ et $\ln(n) < S_n < \ln(n) + 1$

6.44 Soit $f(x) = -\ln(x)$. Montrer que la fonction f est convexe. En déduire que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ pour a et b positifs.

6.45 Après avoir étudié la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$, résoudre l'équation $a^b = b^a$, a et b étant des entiers positifs distincts.

6.46 En utilisant le fait que la fonction exponentielle est convexe montrer que $e^x \geq 1 + x$. Montrer que l'équation $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ n'a pas d'autre solution que $x = 0$.

6.47 Démontrer que l'équation $e^{-x/2} = 3 + 2x$ ne possède qu'une seule solution. Calculer cette solution à 10^{-4} près avec la méthode de Newton.

6.48 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le graphe Γ_n de la fonction $f_n(x) = e^{-x} \cdot x^n$.

1) Esquisser les courbes Γ_1, Γ_2 et Γ_3.

2) Calculer l'aire du domaine plan limité par chacune de ces courbes et l'axe Ox pour $x > 0$. On cherchera une primitive de $e^{-x} \cdot x^n$ sous la forme $e^{-x} \cdot P_n(x)$, où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

6.49 Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

6.50 En mécanique et en électricité, on rencontre souvent des fonctions trigonométriques et exponentielles ainsi que des combinaisons de ces fonctions. En voici trois exemples

1) $f(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$ qui donne l'horaire de la position d'une masse attachée à un ressort et à un amortisseur.

2) $g(t) = e^{-t} + \sin(\omega t)$ qui donne la charge d'un condensateur mis en série avec une résistance et soumis à une tension sinusoïdale.

3) $h(t) = e^{-t} \cdot \cos(\omega t)$ qui donne l'horaire d'une oscillation amortie.

Représenter le graphe des fonctions f, g et h pour une valeur de ω.

6.51 Dans de l'eau de mer propre la lumière perd 75 % de son intensité par mètre de profondeur.

1) Représenter graphiquement l'intensité de la lumière en fonction de la profondeur.

2) A quelle profondeur la lumière n'a-t-elle plus que le millième de l'intensité qu'elle a à la surface de l'eau ?

6.52 1) Pour x compris entre 0 et 1, tracer dans un même repère les graphes des fonctions suivantes
$f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = x + 1$.

2) Le graphe de f partage le domaine compris entre les graphes de g et de h en deux parties. Calculer l'aire de ces deux parties.

6.53 On considère les deux domaines bornés limités par la courbe $y = a^x$, l'axe Ox et les verticales $x = p - 1$, $x = p$ et $x = p + 1$. Calculer le rapport de leurs aires.

6.54 La grippe se propage à partir d'un individu malade dans une population de 1'000 personnes. On admet que le nombre N de personnes qui sont ou ont été atteintes par la grippe après t jours est donné par $N(t) = \dfrac{1'000}{1 + 999 \cdot 10^{-0,17t}}$.

1) Combien de personnes ont-elles été atteintes après 20 jours ?

2) Après combien de jours 600 personnes ont-elles été atteintes ?

3) Après combien de jours la vitesse de propagation de la maladie commence-t-elle à diminuer ? Quel est alors le nombre de personnes qui ont été atteintes ?

6.55 Le son le plus faible qu'une oreille humaine puisse percevoir est celui provoqué par une source de puissance $P_0 = 10^{-12}$ Watt.

En décibels (dB), le niveau sonore N d'un son de puissance P Watt est défini par $N = 10\log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$.

1) Une conversation normale correspond à une puissance sonore de 10^{-6} Watt. Calculer son niveau sonore.

2) Par quel facteur la puissance d'une source sonore est-elle multipliée lorsque son niveau sonore passe de 60 dB à 90 dB ?

3) Un niveau sonore supérieur à 90 dB est considéré comme nuisible pour les oreilles. La puissance sonore perçue à 100 m d'un avion au décollage est de 1 Watt. Ce son est-il nuisible ?

4) Si le niveau sonore de chacune de deux sources est de 45 dB, quel est le niveau sonore de la réunion de ces deux sources ?

6.56 L'échelle de Richter donne la magnitude M d'un séisme en fonction de l'énergie E dissipée par le séisme. Cette échelle est définie par la relation $\log_{10}(E) = 1,5\,M + 4,4$ où E est mesurée en Joule.

1) Si l'énergie dissipée par un premier séisme de magnitude M_1 sur l'échelle de Richter est 10 fois inférieure à l'énergie dissipée par un second séisme de magnitude M_2, quelle est la différence de leurs magnitudes ?

2) Comparer l'énergie dissipée lors du séisme qui détruisit San Francisco en 1906 ($M = 8,3$) à l'énergie de celui de Los Angeles en janvier 1994 ($M = 6,6$).

3) Quelle est la magnitude sur l'échelle de Richter de l'onde sismique provoquée par l'explosion d'une bombe H de 10 mégatonnes, c'est-à-dire d'une bombe libérant une énergie équivalente à celle produite par l'explosion de 10 millions de tonnes de TNT ? On sait qu'un kilogramme de TNT libère en explosant une énergie de $4,2 \cdot 10^7$ Joule.

6.57 On note $[H^+]$ la concentration d'ions d'hydrogène présents dans une substance (en moles par litre). Le pH d'une substance est déterminé à partir de la concentration par la formule $pH = -\log_{10}([H^+])$.

Le pH de l'eau distillée est égal à 7 . Les acides ont un pH inférieur à 7 , alors que les bases ont un pH supérieur à 7 .

1) Pour les tomates $[H^+] = 6,3 \cdot 10^{-5}$. Font-elles partie des aliments acides ? Même question pour le lait pour lequel $[H^+] = 4 \cdot 10^{-7}$.

2) Calculer la concentration en ions d'hydrogène d'une crème de corps ayant un pH égal à $5,5$.

6.58 Le profit P (exprimé en francs) d'une compagnie est donné par la formule $P(t) = 5'000 \cdot e^{0,3t - 0,001t^2}$ où t désigne le nombre d'années écoulées à partir du 1er janvier 1997 . Calculer le taux instantané annuel d'augmentation du profit au 1er juillet 1998 .

SOLUTION DES EXERCICES

6.1

1) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

2) $D_f =]\,1\,;+\infty\,[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

3) $D_f =]-\infty\,;1\,[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

5) $D_f =]-\infty\,;0\,[\;\cup\;]\,1\,;+\infty\,[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

6) $D_f =]\,0\,;1\,[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

7) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

8) $D_f =]-\infty\,;1\,[\setminus \{0\}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2-x}{x(1-x)}$

9) $D_f =]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\,[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$

10) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\qquad f'(x) = \dfrac{5}{x}$

11) $D_f =]-\infty\,;-1\,[\;\cup\;]\,1\,;+\infty\,[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2x(x^2+5)(x^2+1)}{(x^2+2)(x^2-1)(x^2+3)}$

12) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\qquad f'(x) = \ln(x)$

13) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\qquad f'(x) = -\tan(x)$

14) $D_f = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{k\pi}{2}\,;\frac{(2k+1)\pi}{4}\right[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{4}{\sin(4x)}$

15) $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$

16) $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{\ln(x)+1}{x^2\ln^2(x)}$

6.2

1) $F(x) = \ln|x+1|$ $\qquad D_F = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|2x+3|$ $\qquad D_F = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{3}{2}\}$

3) $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 2x + 4|$ $\quad D_F = \mathbb{R}$

4) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{5}\ln|5x - 1|$ $\quad D_F = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{5}\}$

5) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x - 1|$ $\quad D_F = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

6) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 5\ln|x + 2|$ $\quad D_F = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

7) $F(x) = \ln|\sin(x)|$ $\quad D_F = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

6.3 1) $\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ 2) $\ln(3)$ 3) —

4) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{11}{5}\right)$ 5) $140 + \ln\left(\frac{7}{3}\right)$ 6) $6\ln\left(\frac{10}{7}\right) - 1$

7) $\frac{1}{2}\ln(3)$

6.4 Zéros: 1 et e^4 ; maximum $\frac{1}{2}$ en $x = e$.

6.5 1) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 5e^{5x}$

2) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 2x\,e^{x^2}$

3) $D_f = \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{(1/x)}$

4) $D_f =]-\infty\,;-1] \cup [0\,;+\infty[$ $\quad f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\,e^{\sqrt{x^2+x}}$

5) $D_f =]-1\,;1[$ $\quad f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}\,(1-x^2)}\,e^{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}$

6) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \cos(x)\,e^{\sin(x)}$

7) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = x\,e^x(2 + x)$

8) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = -e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$

6.6 $f^{(n)}(x) = e^x(x + n)$

6.7 $x = -0,57$

6.8 1) $e^2 - 1$ 2) $\frac{1}{2}(e^7 - e^{-3})$

3) $\frac{1}{3}(e^{27} - e)$ 4) $-2(e^{-\sqrt{2}} - e^{-1})$

5) 1 6) $2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 4 - e$

6.9 1) $D_f = \left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ $f'(x) = \dfrac{3}{\ln(2)(3x+1)}$

2) $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{2x+1}{\ln(3)(x^2+x+1)}$

3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\ln(10)\sin(x)}$

4) $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$

5) $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2x\ln(3) \cdot 3^{x^2}$

6) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $f'(x) = \dfrac{2\ln(2) \cdot 2^{\left(\frac{x}{x+2}\right)}}{(x+2)^2}$

6.10 1) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$

2) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x} \cdot x^{\ln(x)}$

6.11 1) $\dfrac{60}{\ln(4)}$ 2) $\dfrac{1}{2\ln(2)} \cdot \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{11}}\right)$ 3) 0

6.12 $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{1}{2}$

6.13 $\dfrac{15\pi}{8\ln(2)}$

6.14 1) e^2 2) 1 3) $\dfrac{1}{2}$ 4) -1

5) 1 6) -1 7) $\dfrac{\ln(2)}{2}$ 8) 4

9) 1 10) $-\dfrac{1}{2}$ 11) 1 12) 0

13) 4 14) —

6.15 $\ln(a)$

6.16 1) asymptotes: $x = 1$; $y = 0$ vers $+\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; asymptote: $y = 0$ vers $\pm\infty$

3) asymptote: $y = 0$ vers $-\infty$

4) asymptotes: $y = -\dfrac{1}{2}$ vers $-\infty$; $y = 2$ vers $+\infty$

5) asymptotes: $y = -2$ vers $-\infty$; $y = 1$ vers $+\infty$

6) asymptotes: $y = -x$ vers $-\infty$; $y = 0$ vers $+\infty$

7) asymptotes: $x = 0$ pour $x > 0$; $y = x + 3$

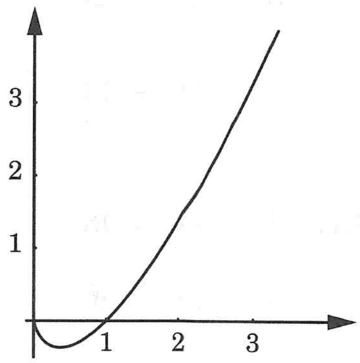
8) asymptotes: $x = 1$ pour $x > 1$; $y = x + 7$

6.17 1) zéro 1, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \cdot \ln(x) = 0$, pas d'asymptote

$f'(x) = 1 + \ln(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 + \ln(x) = -\infty$

min $\left(\dfrac{1}{e} ; -\dfrac{1}{e}\right)$

$f''(x) = \dfrac{1}{x}$



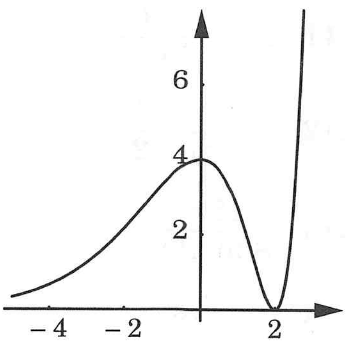
2) zéro 2, asymptote: $y = 0$ vers $-\infty$

$f'(x) = x(x-2)\,e^x$,

max $(0 ; 4)$, min $(2 ; 0)$

$f''(x) = (x^2 - 2)\,e^x$

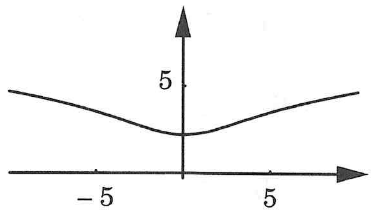
infl $(-\sqrt{2} ; 2,83)$, $(\sqrt{2} ; 1,41)$



3) f paire, pas d'asymptote

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+9}$, min $(0 ; \ln(9))$

$f''(x) = \dfrac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}$, infl $(\pm 3 ; \ln(18))$



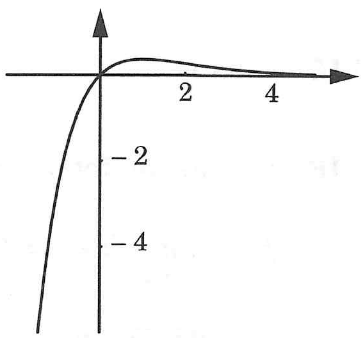
4) zéro 0, asymptote: $y = 0$ vers $+\infty$

$f'(x) = (1-x)\,e^{-x}$

max $\left(1 ; \dfrac{1}{e}\right)$

$f''(x) = (x-2)\,e^{-x}$

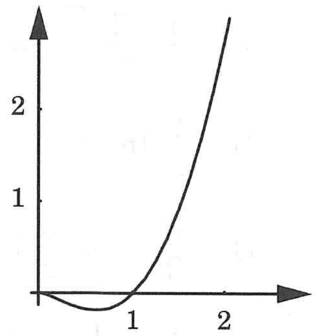
infl $\left(2 ; \dfrac{2}{e^2}\right)$



5) zéro 1, pas d'asymptote

$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$; min $\left(e^{-1/2} ; \dfrac{-1}{2e} \right)$

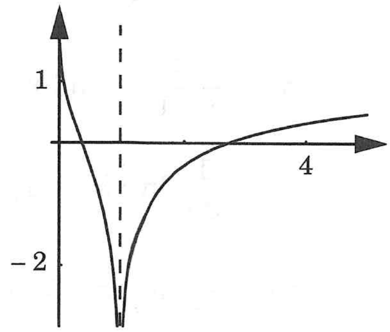
$f''(x) = 2\ln(x) + 3$; infl $\left(e^{-3/2} ; \dfrac{-3}{2e^3} \right)$



6) zéros e^{-1}, e ; asymptotes: $x = 0$, $x = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

$f''(x) = -\dfrac{\ln(x)+1}{x^2 \ln^2(x)}$; infl $(e^{-1} ; 0)$

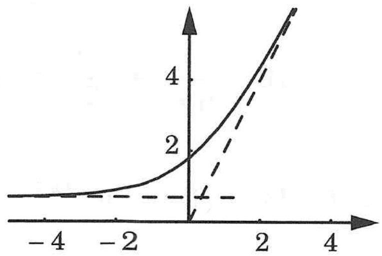


7) asymptotes: $y = \ln(2)$ vers $-\infty$,

$y = 2x$ vers $+\infty$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{e^x}{e^x+2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} + \frac{2e^x}{(e^x+2)^2}$$



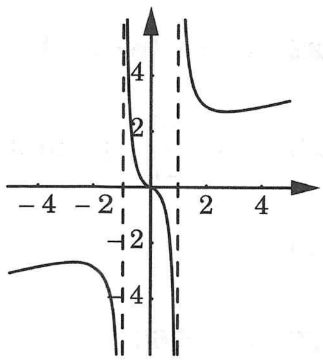
8) impaire ; asymptotes: $x = -1$, $x = 1$

$$f'(x) = \frac{\ln|x| - 1}{\ln^2|x|}$$

min $(e ; e)$, max $(-e ; -e)$

$$f''(x) = \frac{-\ln|x| + 2}{x \ln^3|x|}$$

infl $\left(e^2 ; \dfrac{e^2}{2} \right)$, $\left(-e^2 ; -\dfrac{e^2}{2} \right)$



6.18 1) 3'001 2) 2'998 3) 3'003

4) 258'716 5) 420'921

6.19 1) $2x^3 + 6x^2 - 6x + 15\ln|2x+3| + c$

2) $\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\ \ln|x+\sqrt{3}| + \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\ \ln|x-\sqrt{3}| + c$

3) $\frac{5}{2}\ \ln|x-1| + \frac{13}{2}\ \ln|x-3| - 8\ \ln|x-2| + c$

4) $\frac{3}{2}\,x^2 + \frac{5}{2}\ \ln|x-4| + \frac{3}{2}\ \ln|x+2| + c$

5) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ \ln|2x-1| + c$

6) $\frac{-1}{x-1} - \ln|x-1| + \ln|x| + c$

7) $\frac{1}{30}\ \ln|3x-1| + \frac{3}{10}\ \ln|x+3| + c$

8) $\frac{1}{18}\ \ln|x-3| + \frac{1}{18}\ \ln|x+3| - \frac{1}{9}\ \ln|x| + c$

9) $\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}\right) + c$

10) $\frac{1}{6x^2} + \frac{1}{9x} + \frac{1}{27}\ \ln\left|\frac{x-3}{x}\right| + c$

6.20 1) $(2k\pi\,;\,e^{-2k\pi}),\ k \in \mathbb{Z}$

6.21 40, 40 °

6.22 $y = 2e\,(x-1)\,\ln(2)$

6.23 $a = \frac{e^3}{27}$; point de contact $(3\,;\,e^3)$

6.25 $\frac{\pi}{4}$

6.26 1) 566 2) environ 10 heures

6.27 29, 15 ans

6.28 1) 5'728 ans 2) 13'997 av. J.-C.

6.29 4, 14 kg

6.30 1) modèle de Jenss: $75,77$ cm et $15,98$ cm / an

autre modèle: $75,33$ cm et $14,33$ cm / an

2) pour les deux modèles le taux de croissance est le plus élevé à 3 mois et le plus faible à 6 ans

6.31 1) $c = \dfrac{2}{\ln(13) - \ln(4)}$ 2) $c = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{100}}{\mathrm{e}^{100} - 1}$

6.32 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;0\right)$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;0\right)$; $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$

6.33 $\sqrt{2}$ (Points de contact $(0\,;1)$ et $(1\,;0)$)

6.34 $(\mathrm{e}\,;1)$

6.35 Si $0 < a < 1$, un point d'intersection; si $1 < a < \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, deux points d'intersection

6.37 1) $P(-a-1\,;-\mathrm{e}^{-a-1})$; lieu de P: $y = -\mathrm{e}^{x}$

2) $Q(-a-2\,;-2\,\mathrm{e}^{-a-2})$; lieu de Q: $y = -2\,\mathrm{e}^{x}$

6.38 2) $g'(y) = x \cdot f'(xy)$; $h'(y) = f'(y)$

6.39 3) $g'(y) = f'(x+y)$; $h'(y) = f(x) \cdot f'(y)$

6.40 $A = \dfrac{1}{2}$

6.41 On pose $x_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 12a}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 12a}}{2a}$

si $a < 0$

x		0		x_2		x_1	
$f(x)$	↘		↘		↗		↘

si $0 \leq a \leq 12$

x		0	
$f(x)$	↗		↗

si $12 < a$

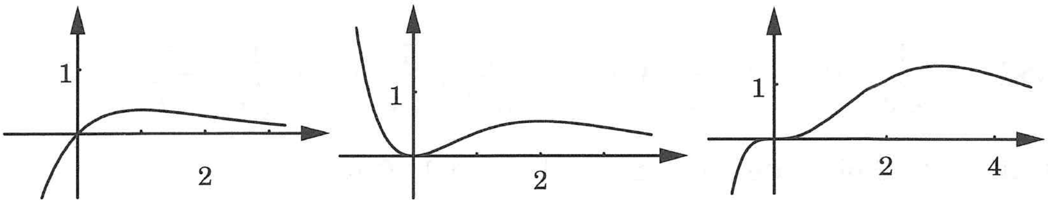
x		0		x_1		x_2	
$f(x)$	↗		↗		↘		↗

6.42 $y = \dfrac{1}{x_0 \cdot \ln(a)}\, x + \dfrac{\ln(x_0) - 1}{\ln(a)}$

6.45 $a = 2$ et $b = 4$ ou $a = 4$ et $b = 2$

6.47 $-0,7665$

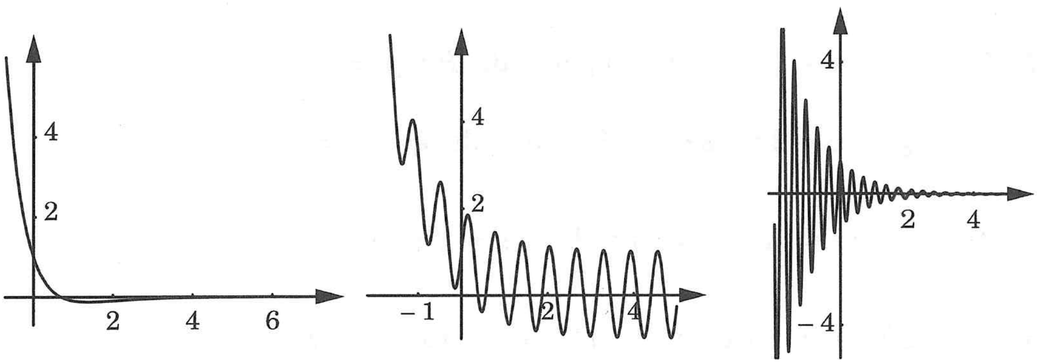
6.48 1)



2) Aire = 1 Aire = 2 Aire = 6

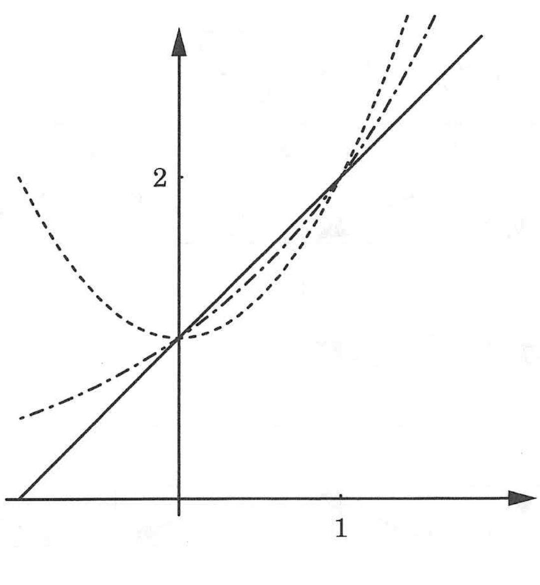
6.49 $x = 1$ et $x = 4$

6.50



6.51 2) A 5 mètres

6.52



Aires :

$\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln(2)} \cong 0,057$ et

$\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{4}{3} \cong 0,109$

6.53 Le rapport des aires vaut a

6.54 1) 715 personnes 2) 19 jours

3) 18 jours ; 500 personnes

6.55 1) 60 dB

2) 1'000

3) oui, le niveau sonore est de 120 dB

4) 48 dB

6.56 1) $M_2 - M_1 = \frac{2}{3}$

2) Le rapport des énergies est de $354,8$

3) $M = 8,82$

6.57 1) les tomates et le lait sont des aliments acides, leur pH vaut $4,2$ et $6,4$

2) $3,16 \cdot 10^{-6}$

6.58 $29,7$ %

Index terminologique