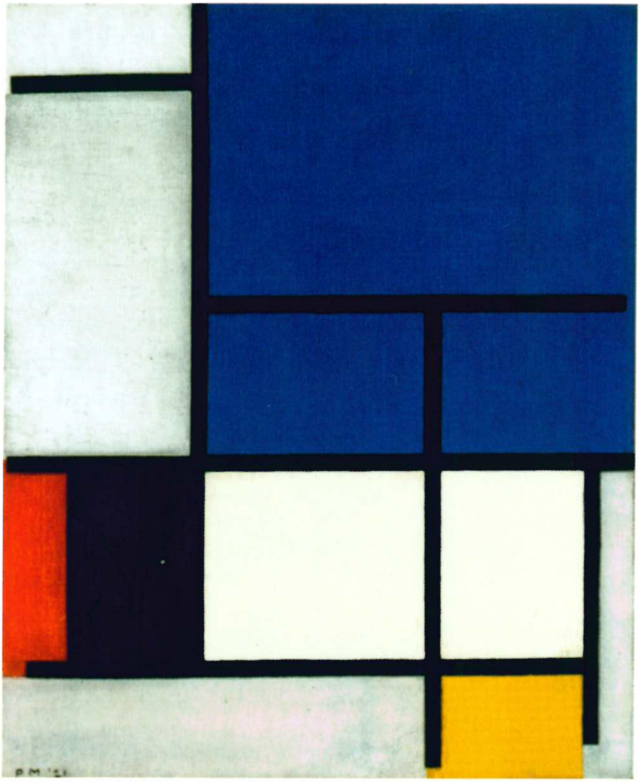
Monographies de la Commission Romande de Mathématique 28
Société Suisse des Professeurs de Mathématiques et de Physique

Algèbre linéaire



EDITIONS G d'Encre EDUCATION

Monographies de la Commission Romande de Mathématique 28
Société Suisse des Professeurs de Mathématiques et de Physique

Algèbre linéaire

EDITIONS
G
d'Encre
EDUCATION

Ouvrages publiés par la Commission Romande de Mathématique

OUVRAGES COLLECTIFS DE LA CRM

N° 18 Géométrie 2
N° 21 Méthodes numériques (M.-Y. BACHMANN, H. CATTIN, P. ÉPINEY, F. HAEBERLI et G. JENNY)
N° 23 Géométrie vectorielle et analytique plane
N° 24 Géométrie vectorielle et analytique de l'espace
N° 25 Analyse
N° 26 Probabilités
N° 27 Notions élémentaires
N° 28 Algèbre linéaire

CAHIERS DE LA CRM

N° 1 Suites de nombres réels	Alex WILLA
N° 2 Cryptologie	Nicolas MARTIGNONI
N° 3 Équations algébriques et nombres complexes	Martin CUÉNOD
N° 4 Séries numériques et séries de Taylor	Alex WILLA
N° 5 Arrêt sur image	Daniel PONCET-MONTANGE
N° 6 Introduction à la théorie des graphes	Didier MÜLLER

CRM, CRP ET CRC

Formulaires et Tables (Mathématique, Physique, Chimie)

S. PAHUD

Géométrie expérimentale I, II et III (Livre de l'élève)
Géométrie expérimentale I, II et III (Notes méthodologiques à insérer)

Site web de la CRM

http://www.sspmp.ch/crm/

Diffusion : Pahud & Cie
http://www.diffusionpahud.ch/

Collection : éducation
www.editions-gdencre.ch
ISBN 978-2-940501-00-7

FSC
MIXTE
Papier
FSC® C003211

Auteurs

Le présent ouvrage est le fruit d'un travail collectif de la Commission Romande de Mathématique (CRM), qui est actuellement composée de Mesdames et Messieurs

José Luis ZULETA (Gymnase de Chamblandes, Pully), président
Richard CATENAZZI (Collège Voltaire, Genève)
Yves DUBEY (Collège Saint-Michel, Fribourg)
Louis GENOUD (Collège de Staël, Genève)
Patrick HOCHULI (Gymnase français, Bienne)
Jean-Marc LEDERMANN (Lycée Denis-de-Rougemont, Neuchâtel)
Nicolas MARTIGNONI (Haute École pédagogique, Fribourg)
Didier MÜLLER (Lycée Cantonal, Porrentruy)
Nicolas QUINODOZ (Collège des Creusets, Sion)
Lucile TORRENT (Collège de l'Abbaye, Saint-Maurice)
* Patrick TURTSCHY (Lycée Blaise-Cendrars, La Chaux-de-Fonds)
Jean-Daniel VOELKE (Gymnase Auguste Piccard, Lausanne)

Ont également collaboré à l'élaboration de cet ouvrage, les anciens membres de la CRM suivants :

* Ewa MIAZZA (Collège Voltaire, Genève)
* Sandrine OSTERMANN (Gymnase de Chamblandes, Pully)
* Alex WILLA (Collège des Creusets, Sion)

Les rédacteurs du texte sont désignés par un astérisque.

Préface

L'idée de la série des monographies éditées par la Commission Romande de Mathématique (CRM) a vu le jour en 1973. Visant à proposer des moyens d'enseignement conformes aux exigences de la maturité, ces ouvrages sont régulièrement réexaminés et remaniés.

En janvier 1989 sortait de presse le septième tome de la série : la première édition de «Algèbre linéaire». La collection des Fundamentum était ainsi complète. On y ajouta en 1993 la monographie «Méthodes numériques». Ces ouvrages furent les années suivantes corrigés, complétés, améliorés.

Au tournant du millénaire, le besoin d'un changement plus fondamental se fit sentir et, en 2005, sortit «Probabilités». Cet ouvrage rompait avec la tradition en proposant des exemples introductifs permettant au lecteur de comprendre le bien-fondé des définitions et de la théorie. Celle-ci est toujours suivie d'un ou de plusieurs exemples. Chaque chapitre se termine par un large éventail d'exercices avec leurs réponses.

Vu les échos très positifs que la CRM a recueillis concernant cette nouvelle forme d'ouvrages, elle a poursuivi dans une voie analogue, mais bien évidemment sous une forme adaptée au sujet traité, pour les titres suivants : «Notions élémentaires» en 2005 et l'ouvrage que vous tenez entre les mains en 2009.

Dans le courant de l'année 2006, un groupe de travail fut formé afin d'entreprendre la rédaction d'un nouvel ouvrage d'algèbre linéaire. Une telle aventure implique des choix, autant dans la matière traitée afin de conserver un volume raisonnable que dans la façon de présenter les concepts étudiés.

Le nouvel *Algèbre linéaire* est le fruit d'une collaboration. Il a donc donné lieu à de multiples échanges de vue, souvent contradictoires, et a nécessité rapprochements et compréhension mutuelle. Il m'est agréable de remercier tous les collègues de la CRM qui, par les remarques, critiques et suggestions qu'ils ont formulées lors de nos nombreuses séances de lecture, ont contribué à la rédaction de cet ouvrage.

Patrick Hochuli
Septembre 2009

Avant-propos

Cet ouvrage se veut une refonte de l'*Algèbre linéaire, CRM n^o 20.* À présent, de nombreux exemples introduisent et illustrent les notions abordées. Quelques démonstrations sont données afin de familiariser le lecteur au raisonnement et au langage qu'il rencontrera lors de ses études ultérieures. Nous espérons aussi susciter l'envie d'ouvrir des ouvrages plus complets sur le sujet.

De longues discussions sur les tenants et les aboutissants de l'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau du gymnase ont précédé et accompagné la rédaction du présent ouvrage. Le texte que vous tenez entre les mains est le produit d'un compromis et d'un travail d'équipe. La multitude des approches envisageables est preuve de l'importance et de l'impact du sujet. Voici, dans les grandes lignes, les objectifs visés par ce moyen d'enseignement.

En premier lieu, l'algèbre linéaire est un chapitre de l'*al-jabr*, qui fut l'art de bien conduire un calcul. L'algèbre devint par la suite la science des structures mathématiques. L'attribut « linéaire » devrait être synonyme de « simple » puisque les structures sous-jacentes sont régies par des règles de transformations simples. De nombreux problèmes font appel à des méthodes linéaires qui généralisent la *règle de trois* à des dimensions supérieures. L'outil de travail principal étant la résolution de systèmes d'équations linéaires, nous lui consacrons le début de ce cours.

Par la suite, nous avons voulu, à travers divers exemples et exercices, initier les étudiants aux différentes applications possibles de l'algèbre linéaire, sans être toutefois aussi complet et exhaustif qu'un ouvrage de niveau universitaire.

Enfin, au niveau gymnasial, la géométrie est l'une des principales sources d'inspiration et d'interprétation de l'algèbre linéaire. Nous avons essayé de conserver l'aspect général de différentes notions, en évitant de nous limiter aux seules applications géométriques. Par ce choix, cet ouvrage apporte aux gymnasiens une ouverture vers d'autres domaines.

Les auteurs tiennent à remercier toutes les personnes qui leur ont permis d'écrire cet ouvrage, et particulièrement les membres de la CRM, qui, par leurs remarques toujours pertinentes, ont enrichi leurs réflexions.

Notes aux utilisateurs

1. La définition d'une nouvelle notion est signalée par un mot en gras dans le texte. On retrouve ce terme dans l'index en fin d'ouvrage.
2. Il conviendra de faire un choix judicieux parmi les nombreux exercices et problèmes proposés.
3. On a donné les réponses aux exercices et problèmes chaque fois qu'elles pouvaient s'exprimer simplement.

Table des matières

1 Calcul matriciel

1.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 1. *On se propose de résoudre le système suivant selon la méthode dite de Gauss-Jordan.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 10y & + & 7z & = & 8 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

On échange d'abord les équations n° 1 et n° 3, ce que l'on note $L_1 \leftrightarrow L_3$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \hline \multicolumn{1}{|r}{x} & + & 2y & + & z & = & \multicolumn{1}{r|}{1} \\ \hline 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ 4x & + & 10y & + & 7z & = & 8 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|r|r} -2 & -4 \\ 1 & \\ & 1 \end{array}$$

En utilisant la première équation comme « équation de référence », on élimine l'inconnue x dans les deux autres équations par méthode d'addition (on additionne à chaque équation un multiple de l'équation de référence). On écrit aussi $L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2$ et $L_3 - 4L_1 \rightarrow L_3$ et on obtient le système suivant, équivalent au système donné.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -3 \\ & & 2y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \\ \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ \\ \end{array}$$

On multiplie la deuxième équation par $-\frac{1}{3}$, ce que l'on note $-\frac{1}{3}L_2 \rightarrow L_2$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ \cline{3-7} & & \multicolumn{1}{|r}{y} & + & z & = & \multicolumn{1}{r|}{1} \\ \cline{3-7} & & 2y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|r} \\ -2 \\ 1 \end{array}$$

Avec la deuxième équation, on élimine l'inconnue y dans l'équation n° 3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Le système échelonné ainsi obtenu est équivalent au système donné. Pour le résoudre, il suffit de procéder par substitutions successives en commençant par la dernière équation. On peut néanmoins poursuivre la résolution en éliminant y dans la première équation, puis z dans les deux premières. On obtient successivement les systèmes suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1\\ & & \multicolumn{5}{r}{\boxed{y + z = 1}}\\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1\\ \\ \\ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & z & = & -1\\ & & y & + & z & = & 1\\ & & & & \multicolumn{3}{r}{\boxed{z = 2}} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} L_1 + L_3 \rightarrow L_1\\ L_2 - L_3 \rightarrow L_2\\ \\ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 1\\ & & y & & & = & -1\\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Sous cette forme réduite, la solution est immédiate : $S = \big\{(1\,;-1\,;2)\big\}$.

Résolution d'un système linéaire

Deux systèmes d'équations sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

À partir d'un système d'équations donné, on obtient un système équivalent lorsqu'on le transforme à l'aide de l'une des **opérations élémentaires** suivantes.

1. On permute deux équations, ce que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. On multiplie une équation par un nombre réel non nul, ce que l'on note $\lambda L_i \rightarrow L_i$.
3. On additionne à une équation un multiple d'une autre équation, ce que l'on note $L_i + \lambda L_j \rightarrow L_i$.

La méthode usuelle pour résoudre un système linéaire consiste à le transformer en un système équivalent **échelonné** (méthode de Gauss[1]) ou **réduit** (méthode de Gauss-Jordan[2]). Dans ce dernier cas, la solution est immédiate.

Un système linéaire est **régulier** s'il admet une solution unique ; habituellement un tel système contient autant d'équations que d'inconnues. Un système formé de plus d'équations que d'inconnues est généralement **impossible** (aucune solution), alors qu'un nombre insuffisant d'équations caractérise souvent un système **indéterminé** (une infinité de solutions). La **solution générale** d'un système est l'ensemble de toutes ses solutions.

---

[1] Carl Friedrich Gauss, mathématicien et physicien allemand, 1777–1855

[2] Wilhelm Jordan, mathématicien allemand, 1842–1899

Exemple 2. *On considère un système formé de deux équations à trois inconnues.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & 6z & = & 11 \end{array}\right.$$

Un tel système linéaire peut apparaître, par exemple, dans un problème de géométrie analytique de l'espace où l'on cherche à établir une équation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans sécants.

En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, le système initial se transforme en

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & 6z & = & 11 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ (-1)L_2 \to L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & - & 2z & = & -1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} L_1 - L_2 \to L_1 \\ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 4z & = & 6 \\ & & y & - & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

Ce système étant réduit, on pose $z = \lambda$ (un paramètre choisi librement) et on obtient immédiatement une valeur pour x et y en fonction de ce paramètre. Le système initial est donc indéterminé et la solution générale peut s'écrire sous la forme

$$S = \{(6 - 4\lambda\,; -1 + 2\lambda\,; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

En géométrie, on l'écrit comme équation paramétrique d'une droite.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple 3. *On considère un système déjà échelonné de trois équations à cinq inconnues.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 7 \\ & & & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

On choisit $x_2 = \lambda$ et $x_5 = \mu$ (deux paramètres). La solution générale du système peut s'écrire sous la forme

$$S = \big\{(-8 + 2\lambda - 4\mu\,; \lambda\,; 9 + 3\mu\,; 2 + 2\mu\,; \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}$$

Écriture matricielle

Afin de résoudre un système linéaire qui contient un nombre élevé d'équations et d'inconnues, on introduit des tableaux rectangulaires de nombres. Pour le système de l'exemple 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 11 \end{array}\right.$$

les informations nécessaires à sa résolution sont entièrement contenues dans les deux tableaux

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Le tableau A est la **matrice des coefficients** et B la **matrice des termes constants** du système. Pour retrouver le système initial à partir de ces deux matrices, on convient d'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A \cdot X = B \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où la multiplication « matrice par vecteur » est effectuée comme produit scalaire de chaque ligne de A par la matrice-colonne X.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 2} \\ 2 \quad 1 \quad 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3} \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Exemple 4. *On considère le système linéaire $A \cdot X = B$ suivant.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La transcription en une écriture traditionnelle montre qu'il s'agit d'un système de 3 équations à 5 inconnues et que sa résolution est immédiate lorsque l'on pose $x_4 = \lambda$ et $x_5 = \mu$, deux paramètres choisis librement.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \\ & x_2 & & - & 4x_4 & + & 6x_5 & = & -3 \\ & & x_3 & + & 6x_4 & - & 3x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$S = \{(5 - \lambda - 2\mu\,; -3 + 4\lambda - 6\mu\,; 1 - 6\lambda + 3\mu\,; \lambda\,; \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Les deux matrices qui caractérisent un système sont parfois regroupées en un seul tableau, appelé **matrice augmentée du système**. Pour l'exemple précédent, on écrit

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&1&2&5\\0&1&0&-4&6&-3\\0&0&1&6&-3&1\end{array}\right)$$

Exemple 5. *Pour mettre en évidence la façon de travailler avec une matrice augmentée, on résout le système linéaire suivant en utilisant en parallèle les deux écritures.*

$$\left\{\begin{array}{rcl}x_1+x_2-x_3&=&1\\-2x_1-x_2+3x_3&=&0\\x_1\phantom{{}+x_2}-5x_3&=&2\end{array}\right.\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\-2&-1&3&0\\1&0&-5&2\end{array}\right)\qquad\begin{array}{l}\\L_2+2L_1\to L_2\\L_3-L_1\to L_3\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}x_1+x_2-x_3&=&1\\x_2+x_3&=&2\\-x_2-4x_3&=&1\end{array}\right.\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&1&2\\0&-1&-4&1\end{array}\right)\qquad\begin{array}{l}L_1-L_2\to L_1\\\\L_3+L_2\to L_3\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}x_1\phantom{{}+x_2}-2x_3&=&-1\\x_2+x_3&=&2\\-3x_3&=&3\end{array}\right.\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&-1\\0&1&1&2\\0&0&-3&3\end{array}\right)\qquad\begin{array}{l}\\\\-\frac{1}{3}L_3\to L_3\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}x_1\phantom{{}+x_2}-2x_3&=&-1\\x_2+x_3&=&2\\x_3&=&-1\end{array}\right.\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&-1\\0&1&1&2\\0&0&1&-1\end{array}\right)\qquad\begin{array}{l}L_1+2L_3\to L_1\\L_2-L_3\to L_2\\\\\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}x_1&=&-3\\x_2&=&3\\x_3&=&-1\end{array}\right.\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

Le système est régulier et admet une solution unique, d'où $S=\big\{(-3\,;3\,;-1)\big\}$.

Exemple 6. *Un système donné sous la forme*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr}x_1&-&2x_2&+&x_3&-&x_4&+&x_5&=&-5\\2x_1&-&5x_2&+&4x_3&+&x_4&-&x_5&=&-3\\x_1&-&x_2&-&x_3&-&4x_4&+&4x_5&=&10\end{array}\right.$$

sera d'abord écrit comme $A\cdot X=B$ *avec*

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\2&-5&4&1&-1\\1&-1&-1&-4&4\end{pmatrix}\ \text{et}\ B=\begin{pmatrix}-5\\-3\\10\end{pmatrix}$$

On cherche ensuite à simplifier le système donné en appliquant les transformations de la méthode de Gauss-Jordan directement à la matrice augmentée $(A|B)$.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 & 4 & 10 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 & 15 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ -L_2 \rightarrow L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 & 15 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 + 2L_2 \rightarrow L_1 \\ \\ L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -3 & -7 & 7 & -19 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right)$$

Cette dernière matrice augmentée montre que le système initial est impossible ($S = \varnothing$) ; en effet, il est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & - & 3x_3 & - & 7x_4 & + & 7x_5 & = & -19 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 3x_5 & = & -7 \\ & & & & & & & & 0x_5 & = & 22 \end{array}\right.$$

Exemple 7. *Le système linéaire homogène*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

du type $A \cdot X = O$ est un système de 4 équations à 3 inconnues qui admet au moins la solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Un **système homogène** est un système linéaire dont les termes constants sont nuls. Un système homogène admet au moins la **solution nulle** $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Si le système est régulier alors cette solution est unique, sinon le système est indéterminé.

1.2 Notion de matrice

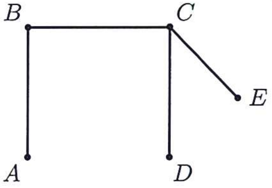
En mathématiques, on désigne par matrice[3] un tableau rectangulaire de nombres. Les matrices sont utiles pour structurer des informations numériques. C'est ainsi qu'un système linéaire peut être donné par la matrice de ses coefficients et la matrice-colonne de ses termes constants.

Exemple 1. *Historiquement les premières matrices sont apparues sous la forme de* **carrés magiques** *qui sont des tableaux carrés de nombres entiers (tous les nombres de 1 à n^2) tels que la somme des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chacune des deux diagonales est une même constante.*
Dans cet exemple, la « constante magique » vaut 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

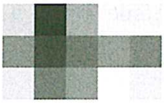
Les carrés latins et gréco-latins constituent d'autres formes de carrés de nombres entiers et sont les prédécesseurs de nombreux jeux tels que le sudoku ou le kakuro.

Exemple 2. *Pour modéliser un graphe comme celui représenté ci-dessous, on utilise une* **matrice d'adjacence** *qui contient les nombres 1 ou 0 selon que deux sommets sont reliés par une arête ou non. Cette matrice présente une symétrie par rapport à une diagonale.*



	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	1	0	0	0
B	1	0	1	0	0
C	0	1	0	1	1
D	0	0	1	0	0
E	0	0	1	0	0

Exemple 3. *Pour sauvegarder une image dans un ordinateur, on utilise une* matrice de nombres réels *qui indiquent pour chaque pixel (point-image) le niveau de gris correspondant (1 pour blanc, 0 pour noir).*



0.76	0.00	0.51	0.88	0.88
0.38	0.09	0.27	0.42	0.33
0.82	0.29	0.44	0.91	0.85

La taille de ces matrices peut devenir énorme. Pour des photos numériques en couleur, on utilise trois matrices qui donnent les intensités de trois couleurs primaires : le rouge, le vert et le bleu (RVB).

---

[3] Le terme de matrice fut proposé en 1850 par James Joseph Sylvester, mathématicien anglais, 1814–1897.

Exemple 4. *On suppose que l'économie d'un pays est divisée en trois secteurs : l'agriculture (A), l'industrie (I) et les services (S). Pour représenter les biens consommés et produits par ces trois secteurs, on utilise un « modèle d'entrée-sortie » dû à W. Leontief*[4]*. Pour chaque secteur, on indique dans une colonne la part des biens produits pour chacun des autres secteurs.*

	A	I	S
A	0.3	0.2	0.2
I	0.1	0.5	0.2
S	0.6	0.3	0.6

La première colonne, par exemple, indique que l'industrie et les services utilisent respectivement les 10% et les 60% des biens produits par l'agriculture (les 30% restant sont considérés comme la part utilisée par l'agriculture pour exercer sa propre activité). La deuxième ligne, par exemple, indique les parts des biens consommés par l'industrie. La somme des nombres de chaque colonne doit donner 1 puisque tous les biens produits par le secteur sont redistribués.

Définitions

On note n et m deux entiers naturels non nuls. Une **matrice réelle de type** $n \times m$ est un tableau rectangulaire qui contient n lignes et m colonnes de nombres réels, appelés **éléments** de la matrice. L'élément d'une matrice A qui se situe à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est noté a_{ij}. Pour la matrice elle-même, on écrit alors $A = (a_{ij})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

L'ensemble de toutes les matrices réelles d'un même type $n \times m$ est noté $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Exemple 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ *est une matrice de type* 3×4.

On a, par exemple, $a_{14} = 6$ *et* $a_{32} = -2$.

---

[4] Wassily Leontief, économiste américain d'origine russe, 1905–1999

Deux matrices sont **égales** si elles sont de même type et que tous leurs éléments correspondants sont égaux.

Exemple 6. *Les matrices* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *ne sont pas égales.*

Matrices particulières

On note A une matrice de type $n \times m$.

1. Si $n = 1$, A est une **matrice-ligne**.
   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2. Si $m = 1$, A est une **matrice-colonne**.
   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Si tous les éléments de A sont nuls, A est la **matrice nulle** ; elle est notée O.
   Par exemple, si $n = 2$ et $m = 3$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Si $n = m$, A est une **matrice carrée d'ordre n**. Les éléments a_{11}, a_{22}, $a_{33}, \ldots, a_{nn}$ constituent la **diagonale** de la matrice A.
   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1.4 & 6.2 & -2.5 & 0 \\ -0.43 & 4.0 & 3.3 & -4.1 \\ 16.2 & -8.9 & 0.56 & 21 \\ -7.8 & 8.2 & 8.9 & 12 \end{pmatrix}$

Matrices carrées particulières

On note $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.

1. Si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$, A est une **matrice diagonale**.
   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. La matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale valent 1 est la **matrice unité** ; elle est notée I_n, ou plus simplement I lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur son ordre.

   Par exemple, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$, A est une **matrice triangulaire supérieure** (B est une **matrice triangulaire inférieure** si $b_{ij} = 0$ pour tout $i < j$).

   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i et j, A est une **matrice symétrique**.

   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 77 \\ -5 & 77 & -1 \end{pmatrix}$

1.3 Opérations sur les matrices

Addition de matrices

Exemple 1. *On se donne les matrices suivantes.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On définit une nouvelle matrice $A + B$ *par*

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+4 & 2+3 & 0+1 \\ -2-1 & 1-1 & 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Cette somme n'est possible que si les matrices A *et* B *sont de même type. Avec* $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$*, par exemple, il n'est pas possible de définir la matrice* $A + D$*.*

D'une manière générale, on définit la **somme de deux matrices** de même type $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ par

$$\boxed{C = A + B \quad \text{avec } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Propriétés de l'addition matricielle

Pour des matrices A, B, C et O de même type, on a

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$ *associativité*
2. $A+O=A$ *élément neutre*
3. Pour toute matrice A, il existe une **matrice opposée**, notée $-A$, telle que $A+(-A)=O$. *élément symétrique*
4. $A+B=B+A$ *commutativité*

La matrice $-A$ est obtenue en prenant l'opposé de chaque élément de A.

Multiplication d'une matrice par un nombre réel

On considère une matrice A. On peut multiplier tous les éléments de la matrice A par un même nombre réel.

Exemple 2. *En reprenant la matrice A de l'exemple précédent, on a*

$$(-2)A = (-2)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

D'une manière générale, on définit le **produit d'une matrice A par un nombre réel λ** par

$$\boxed{C = \lambda A \text{ avec } c_{ij} = \lambda a_{ij}}$$

Propriétés de la multiplication par un nombre réel

Pour des matrices de même type et des nombres réels λ et μ, on a

5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
6. $1A = A$
7. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
8. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

Multiplication matricielle

Exemple 3. *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

En généralisant la multiplication introduite à la page 4, on définit le produit de la matrice A par la matrice B.

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{-1} & \multicolumn{1}{c|}{-1} \\ \hline \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} \cline{2-2} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \\ \cline{2-2} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -1 & \boxed{-3} & -7 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne de la matrice A est multipliée par chaque colonne de la matrice B. La même définition ne permet pas de calculer le produit $B \cdot A$, le nombre de colonnes de B étant différent du nombre de lignes de A.

On considère une matrice A de type $n \times m$ et une matrice B de type $m \times p$. On définit le **produit des matrices** A et B, dans cet ordre, comme matrice C de type $n \times p$ par

$$\boxed{C = A \cdot B \text{ avec } c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}}$$

Exemple 4. *On considère les matrices* $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On observe que* $C \cdot P \neq P \cdot C$. *En effet,*

$$C \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 5. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

On a $I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

et $A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Exemple 6. *On considère les matrices* $U = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a $U \cdot V = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$ *et* $V \cdot U = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Exemple 7. *On peut également multiplier une matrice carrée par un vecteur et considérer la transformation géométrique correspondante. En multipliant la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *par le vecteur* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, *on obtient un nouveau vecteur* $\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, *image de* $\vec{v}$ *par une symétrie axiale.*

Exemple 8. *À partir de trois matières premières* P_1, P_2 *et* P_3, *on fabrique deux produits intermédiaires* I_1 *et* I_2. *Les quantités de matières premières nécessaires à cette fabrication sont indiquées dans la matrice suivante.*

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} I_1 & I_2 \\ \end{array}$$

$$A = \begin{array}{r} \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}$$

La fabrication d'une unité de I_1, *par exemple, nécessite 4 unités de* P_1, *3 unités de* P_2 *et 2 unités de* P_3.

La confection des produits finis F_1, F_2, F_3 *et* F_4 *requiert les produits intermédiaires* I_1 *et* I_2 *en quantité suivante.*

$$B = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array}$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc} 10 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 2 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array}$$

La quantité de matière première P_1 *que nécessite le produit fini* F_1 *sera donc de* $4 \cdot 10 + 5 \cdot 7 = 75$. *Plus généralement, on trouve*

$$C = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array}$$

$$C = \left(\begin{array}{cccc} 75 & 32 & 34 & 61 \\ 37 & 13 & 20 & 21 \\ 76 & 38 & 28 & 80 \end{array}\right)\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}$$

La matrice C *est le produit de la matrice* A *par la matrice* B.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 32 & 34 & 61 \\ 37 & 13 & 20 & 21 \\ 76 & 38 & 28 & 80 \end{pmatrix}$$

Exemple 9. *La population d'un pays vit soit en ville soit à la campagne. Lors d'un recensement, on constate que, durant les 10 dernières années, 5% des citadins ont décidé d'aller habiter la campagne, alors que 10% des personnes qui vivaient à la campagne ont déménagé en ville. Pour simuler cette migration de population, on utilise un modèle appelé chaîne de Markov*[5]*, en introduisant la matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Le nombre $p_{12} = 0.1$, *situé sur la première ligne et dans la seconde colonne, indique la probabilité avec laquelle une personne qui habite la campagne ira habiter la ville. Supposons qu'en l'an 2000 la population ait été*

---

[5] Andreï Andreïevitch Markov, mathématicien russe, 1856–1922

de 9 millions de personnes dont 3 millions habitaient en ville, 6 millions à la campagne. En 2010, on comptera $0.95 \cdot 3 + 0.1 \cdot 6 = 3.45$ *millions d'habitants en ville et* $0.05 \cdot 3 + 0.9 \cdot 6 = 5.55$ *millions d'habitants à la campagne. On obtient ce résultat par le calcul matriciel*

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.45 \\ 5.55 \end{pmatrix}$$

Si l'on garde le même modèle pour prévoir l'évolution de cette population pour les décennies suivantes, on trouve

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.45 \\ 5.55 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.83 \\ 5.17 \end{pmatrix} \quad \textit{pour 2020}$$

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.83 \\ 5.17 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.16 \\ 4.84 \end{pmatrix} \quad \textit{pour 2030}$$

Propriétés de la multiplication matricielle

Pour des matrices A, B et C de types adéquats, on a

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ *associativité*
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *distributivité*
3. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ *distributivité*
4. $(\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) = \lambda(A \cdot B)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
5. $I_n \cdot A = A = A \cdot I_m$ où A est de type $n \times m$ *éléments neutres*

La multiplication matricielle n'est pas commutative.

Puissance d'une matrice carrée

Si k est un nombre entier positif et A une matrice carrée d'ordre n, on définit

$$\boxed{A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ fois}}}$$

Par convention, A^0 est égal à la matrice unité I_n.

Transposition d'une matrice

La **transposée** d'une matrice A de type $n \times m$ est une matrice de type $m \times n$, notée ${}^tA$, dont les colonnes sont, dans l'ordre, les lignes de la matrice A.

Exemple 10. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, ${}^tA=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

Une matrice symétrique est égale à sa transposée.

Exemple 11. *La matrice* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ *est symétrique.*

Propriétés de la transposition

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
3. ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA \quad$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
4. ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$

1.4 Matrices élémentaires

Exemple 1. *On donne une matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, *ainsi que trois matrices particulières* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
On observe la suite de produits matriciels suivants.

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Multiplier la matrice A à gauche par la matrice P permute les lignes de A ($L_1 \leftrightarrow L_2$).

$$S \cdot P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La multiplication par S a pour effet de soustraire à la deuxième ligne trois fois la première ($L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2$).

$$D \cdot S \cdot P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La multiplication par D revient à multiplier par $\frac{1}{2}$ la deuxième ligne ($\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2$).

Une **matrice élémentaire** est une matrice obtenue en appliquant à la matrice unité une opération élémentaire sur ses lignes (voir page 2).

Exemple 2. *On obtient la matrice P de l'exemple précédent en appliquant l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$ à la matrice unité I_2. De même, on obtient S en appliquant l'opération $L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2$ à I_2 et D en lui appliquant l'opération $\frac{1}{2}\, L_2 \rightarrow L_2$. Les matrices P, S et D sont des matrices élémentaires.*

Dans les matrices carrées d'ordre n, on note

1. P_{ij} la matrice unité I_n transformée par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$,
2. $D_i(\lambda)$ la matrice I_n transformée par l'opération $\lambda L_i \rightarrow L_i$ avec $\lambda \neq 0$,
3. $S_{ij}(\lambda)$ la matrice I_n transformée par l'opération $L_i + \lambda L_j \rightarrow L_i$.

Exemple 3. *Dans les matrices carrées d'ordre* 3, *on a*

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D_2\left(\tfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; S_{31}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 1. Pour toute matrice A et tout nombre réel $\lambda \neq 0$,

1. permuter les i-ième et j-ième lignes de A revient à effectuer la multiplication $P_{ij} \cdot A$,
2. multiplier la j-ième ligne de A par λ revient à effectuer la multiplication $D_j(\lambda) \cdot A$,
3. ajouter à la i-ième ligne de A la j-ième ligne multipliée par λ revient à effectuer la multiplication $S_{ij}(\lambda) \cdot A$.

1.5 Déterminant d'une matrice carrée

Exemple 1. *On considère le système linéaire formé par les équations cartésiennes de deux droites du plan.*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Les droites se coupent en un point si ce système admet une solution unique. Elles sont parallèles (strictement parallèles ou confondues) lorsque les couples $(a_{11}\,; a_{12})$ et $(a_{21}\,; a_{22})$ sont proportionnels[6]*, c'est-à-dire lorsque $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$. Ainsi, pour déterminer si le système donné possède une solution unique ou non, il suffit de calculer le nombre $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. S'il est nul, le système est singulier : il ne possède alors aucune solution ou il en a une infinité. Par contre, si ce nombre est différent de zéro, le système est régulier et admet une solution unique.*

---

[6] voir *Géométrie vectorielle et analytique plane*, CRM N° 23

Le **déterminant d'une matrice carrée** $A = (a_{ij})$ d'ordre 2 est le nombre

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ce nombre est aussi noté $\mathrm{Det}(A)$.

Exemple 2. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 23$

Exemple 3. *Deux vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *du plan vectoriel sont colinéaires si et seulement si* $\mathrm{Det}(\vec{a}, \vec{b}\,) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ *est nul.*

Le **déterminant d'une matrice carrée** $A = (a_{ij})$ d'ordre 3 est le nombre

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Ce nombre est aussi noté $\mathrm{Det}(A)$.

Exemple 4.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-10) + 3 \cdot 4 = 39 \end{aligned}$$

Exemple 5. *En géométrie de l'espace, on peut utiliser le déterminant pour vérifier si trois vecteurs sont coplanaires. Le déterminant de trois vecteurs* $\mathrm{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ *est le produit mixte de ces trois vecteurs. En valeur absolue, ce nombre est le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs. Les trois vecteurs sont coplanaires si ce déterminant est nul.*

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$ est défini de manière récursive. Le **cofacteur** d'un élément a_{ij} de la matrice A est le nombre $(-1)^{i+j}D_{ij}$, où D_{ij} est le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice A.

Exemple 6. *Pour la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{4} & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

le cofacteur de l'élément a_{12} *est le nombre* $(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -12.$

Le **déterminant d'une matrice carrée** $A = (a_{ij})$ d'ordre n, noté $\mathrm{Det}(A)$, est la somme des produits de chaque élément de la première colonne par son cofacteur.

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(A) &= a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + a_{31}D_{31} - \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}D_{n1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} D_{k1} \end{aligned}$$

Exemple 7. *Pour* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, *on trouve*

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(A) = 2 &\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &+ 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-11) - 3 \cdot 19 + 1 \cdot 7 - 4 \cdot (-17) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Dans cette définition du déterminant, on a effectué les calculs sur les éléments de la première colonne (on parle d'un *développement relativement à la première colonne*). On peut cependant effectuer le calcul du déterminant relativement à n'importe quelle colonne ou ligne. Ce résultat sera formalisé dans le théorème 2 ci-après.

Exemple 8. *On peut calculer le déterminant de la matrice A de l'exemple précédent en développant relativement à la quatrième colonne.*

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$-2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot (-13) - 1 \cdot 25 - 2 \cdot 9 + 0 = -4$$

Pour simplifier les calculs, on cherche à développer relativement à une ligne ou à une colonne qui contient un maximum de zéros.

On admet sans démonstration les deux théorèmes fondamentaux suivants.

Théorème 2. Le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre $n \geq 3$ est égal à la somme des produits de chaque terme de la colonne j (ou de la ligne i) par son cofacteur.

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}D_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}D_{ik}$$

Théorème 3. Le déterminant d'un produit de deux matrices carrées de même ordre est égal au produit des déterminants de ces deux matrices.

$$\operatorname{Det}(A \cdot B) = \operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(B)$$

Propriétés des déterminants

1. Si tous les éléments d'une colonne (ou d'une ligne) d'une matrice sont nuls, son déterminant est nul.
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale.

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

3. Le déterminant de la matrice unité est égal à 1.

   $$\operatorname{Det}(I_n) = 1$$

4. Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

   $$\operatorname{Det}({}^tA) = \operatorname{Det}(A)$$

5. Le déterminant d'une matrice change de signe lorsqu'on permute deux de ses colonnes (ou deux de ses lignes). Par exemple, si l'on permute les colonnes C_j et C_l, on a

   $$\operatorname{Det}(C_1, \dots, C_j, \dots, C_l, \dots, C_n) = -\operatorname{Det}(C_1, \dots, C_l, \dots, C_j, \dots, C_n)$$

   En conséquence, si deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice sont identiques, son déterminant est nul.

6. Le déterminant d'une matrice est linéaire relativement à chacune de ses colonnes (ou lignes). Par exemple, on a

   $$\operatorname{Det}(C_1 + \widetilde{C}_1, C_2, \dots, C_n) = \operatorname{Det}(C_1, C_2, \dots, C_n) + \operatorname{Det}(\widetilde{C}_1, C_2, \dots, C_n)$$

   $$\operatorname{Det}(\lambda C_1, C_2, \dots, C_n) = \lambda \operatorname{Det}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

7. Lorsqu'on multiplie tous les éléments d'une matrice carrée d'ordre n par un réel λ, le déterminant est multiplié par λ^n.

   $$\operatorname{Det}(\lambda A) = \lambda^n \operatorname{Det}(A)$$

8. Le déterminant d'une matrice est nul si deux colonnes (ou deux lignes) sont proportionnelles. Par exemple, on a

   $$\operatorname{Det}(C_1, \lambda C_1, C_3, \dots, C_n) = 0$$

9. Le déterminant d'une matrice ne change pas lorsqu'on ajoute à l'une de ses colonnes un multiple d'une autre colonne (de même pour les lignes). Par exemple, on a

   $$\operatorname{Det}(C_1, \lambda C_1 + C_2, C_3, \dots, C_n) = \operatorname{Det}(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$$

10. Le déterminant d'une matrice élémentaire est non nul.

Pour $n = 2$ ou $n = 3$, toutes ces propriétés peuvent être vérifiées par calcul. Pour les démontrer dans le cas général ($n \geq 4$), on utilise la définition et le théorème fondamental 2.

Ces propriétés permettent de simplifier le calcul des déterminants.

Exemple 9.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -5 & 9 & 10 \\ 7 & -5 & -14 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{car } C_3 = -2C_1$$

Exemple 10.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_2 + 2C_1 \to C_2 \\ C_3 - C_1 \to C_3 \end{array}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 3) = 24$$

Exemple 11.

$$\begin{vmatrix} 15 & 5 & 10 & 15 \\ 5 & 2 & 6 & 10 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 10 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_1 - 3C_2 \to C_1 \\ C_3 - 2C_2 \to C_3 \\ C_4 - 3C_2 \to C_4 \end{array}$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe selon la 1re ligne

$$= 5 \cdot (-1) \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 + 3L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 9 & 13 \end{vmatrix}$$

On développe selon la 1re colonne

$$= -5 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot (5 \cdot 13 - 9 \cdot 12) = -215$$

Exemple 12.

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \beta \\ \alpha & x & \beta \\ \alpha & \beta & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-\alpha & \alpha-x & 0 \\ \alpha & x & \beta \\ 0 & \beta-x & x-\beta \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \\ \\ L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$= (x-\alpha)(x-\beta) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \alpha & x & \beta \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe selon la 1^{re} ligne

$$= (x-\alpha)(x-\beta)(x+\beta+\alpha)$$

Règle de Cramer

On considère un système linéaire de n équations à n inconnues de la forme $A \cdot X = B$. Ce système admet une solution unique si et seulement si le nombre $\operatorname{Det}(A)$, appelé le **déterminant du système**, est différent de 0. Dans ce cas, la solution peut être calculée à l'aide de la règle de Cramer[7] suivante.

Pour $n = 2$,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Pour $n = 3$,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\operatorname{Det}(A)}, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\operatorname{Det}(A)}, \; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\operatorname{Det}(A)}$$

En général, on a

$$\boxed{x_i = \frac{\operatorname{Det}(C_1, \ldots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \ldots, C_n)}{\operatorname{Det}(A)}}$$

où le numérateur est le déterminant de la matrice carrée obtenue en remplaçant dans la matrice A la i-ième colonne C_i par la matrice colonne B.

---

[7] Gabriel Cramer, mathématicien suisse, 1704–1752

Démonstration. On démontre la règle de Cramer pour $n = 2$. On peut généraliser cette démonstration à l'ordre n.

Le système $\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}\right.$ peut aussi s'écrire sous la forme matricielle $x_1C_1 + x_2C_2 = B$ où $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ sont les deux colonnes de la matrice des coefficients de A. En utilisant les différentes propriétés des déterminants, on peut écrire successivement

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(B, C_2) &= \operatorname{Det}(x_1C_1 + x_2C_2, C_2) \\ &= \operatorname{Det}(x_1C_1, C_2) \\ &= x_1 \operatorname{Det}(C_1, C_2) \\ &= x_1 \operatorname{Det}(A) \end{aligned}$$

Si $\operatorname{Det}(A) \neq 0$, on en déduit que $x_1 = \dfrac{\operatorname{Det}(B, C_2)}{\operatorname{Det}(A)}$. Dans le cas contraire, la dernière équation obtenue est soit impossible soit indéterminée.

De même, on montre que $x_2 = \dfrac{\operatorname{Det}(C_1, B)}{\operatorname{Det}(A)}$ lorsque $\operatorname{Det}(A) \neq 0$. □

Exemple 13. *Résoudre le système linéaire*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On a

$$\operatorname{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Le système admet donc une solution unique. De plus, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \ \textit{et} \ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

Ainsi $x = -\dfrac{5}{18}$, $y = \dfrac{1}{18}$ *et* $z = \dfrac{7}{18}$.

Conséquence de la règle de Cramer. Un système linéaire homogène possède des solutions non nulles si et seulement si son déterminant est nul.

1.6 Matrice inverse d'une matrice carrée

Matrice carrée d'ordre 2

On considère une matrice carrée A d'ordre 2. On cherche à savoir s'il existe une matrice carrée B d'ordre 2 telle que $A \cdot B = I_2$.

Exemple 1. *Pour* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$, $A \cdot B = I_2$ *s'écrit*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 2x + y & 2u + v \\ 5x + 3y & 5u + 3v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution de cette équation matricielle s'obtient en résolvant les deux systèmes linéaires suivants.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ 5x & + & 3y & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 2u & + & v & = & 0 \\ 5u & + & 3v & = & 1 \end{array} \right.$$

Ces systèmes linéaires admettent une solution unique car $\operatorname{Det}(A) \neq 0$. *Après calcul, on obtient la matrice* B.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans le cas où il existe une matrice B telle que $A \cdot B = I_2$, la matrice A est inversible et B est appelée matrice inverse de A ; elle est notée A^{-1}. On peut vérifier que $B \cdot A = I_2$.

Exemple 2. *On pose* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ *et* $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *La solution de l'équation matricielle* $A \cdot B = I_2$ *s'obtient en résolvant les deux systèmes linéaires suivants.*

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ 6x & + & 3y & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 2u & + & v & = & 0 \\ 6u & + & 3v & = & 1 \end{array} \right.$$

Ces systèmes linéaires n'admettent pas de solution car $\operatorname{Det}(A) = 0$. *La matrice* A *n'est pas inversible.*

Matrice carrée d'ordre n

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. La matrice B est appelée **matrice inverse** de A. On la note A^{-1}.

Remarque. On peut démontrer que si A est une matrice inversible, alors la matrice inverse de A est unique. De plus, $A \cdot B = I_n$ implique $B \cdot A = I_n$.

Propriétés

On note A et B deux matrices carrées d'ordre n.

1. La matrice A est inversible si et seulement si $\operatorname{Det}(A) \neq 0$.
2. Si A est inversible, alors $\operatorname{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\operatorname{Det}(A)}$.
3. Si A et B sont inversibles, alors $A \cdot B$ est inversible et
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$
4. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstrations des propriétés 2 et 3

2. On a vu au théorème 3, page 19, que $\operatorname{Det}(A \cdot B) = \operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(B)$. Comme $A \cdot A^{-1} = I_n$, on a $\operatorname{Det}(A \cdot A^{-1}) = 1$. On en déduit que $\operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(A^{-1}) = 1$, d'où $\operatorname{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\operatorname{Det}(A)}$.
3. La matrice inverse de $A \cdot B$ est $B^{-1} \cdot A^{-1}$ car $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot (I_n) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$. □

Calcul de l'inverse d'une matrice

Matrice carrée d'ordre 2

Pour calculer la matrice inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont le déterminant n'est pas nul, il suffit de résoudre les systèmes d'équations suivants.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & 1 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} au & + & bv & = & 0 \\ cu & + & dv & = & 1 \end{array} \right.$$

Par la règle de Cramer, on obtient

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{d}{\mathrm{Det}(A)} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{-c}{\mathrm{Det}(A)}$$

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{-b}{\mathrm{Det}(A)} \qquad v = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a}{\mathrm{Det}(A)}$$

La matrice inverse de A est

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple 3. *Si* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, *alors* $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Exemple 4. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$.
Comme $\mathrm{Det}(A) = 0$, *la matrice* A *n'est pas inversible.*

Matrices carrées d'ordre n

On a obtenu une formule pour calculer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2. Pour les matrices d'ordre 3, on propose deux méthodes différentes. Ces méthodes sont généralisables à des matrices d'ordre supérieur à 3.

Exemple 5. *On montre, à partir d'un exemple, comment l'on obtient la matrice inverse d'une matrice* A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Le calcul $\mathrm{Det}(A) = -2$ *prouve que cette matrice est inversible. On pose* $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, *la matrice inverse de* A. *L'équation* $A \cdot X = I_3$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution de cette équation matricielle s'obtient en résolvant les trois systèmes linéaires suivants.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & x_{21} & + & 4x_{31} & = & 1 \\ x_{11} & & & - & 3x_{31} & = & 0 \\ 2x_{11} & + & 3x_{21} & + & 8x_{31} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & x_{22} & + & 4x_{32} & = & 0 \\ x_{12} & & & - & 3x_{32} & = & 1 \\ 2x_{12} & + & 3x_{22} & + & 8x_{32} & = & 0 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & x_{23} & + & 4x_{33} & = & 0 \\ x_{13} & & & - & 3x_{33} & = & 0 \\ 2x_{13} & + & 3x_{23} & + & 8x_{33} & = & 1 \end{array} \right.$$

Il existe plusieurs méthodes de résolution. Dans cet exemple, on utilise la règle de Cramer. Il faut alors calculer neuf déterminants pour obtenir les neuf termes de la matrice inverse de A.
On note D_{ij} le déterminant d'ordre 2 que l'on obtient en supprimant dans la matrice A la i-ième ligne et la j-ième colonne.

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{9}{2} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot D_{11}}{\mathrm{Det}(A)}$$

On prêtera attention à l'ordre des indices !

$$x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{-2} = 7 = \frac{(-1)^{1+2} \cdot D_{12}}{\mathrm{Det}(A)}$$

$$x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{3}{2} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot D_{13}}{\mathrm{Det}(A)}$$

$$x_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -1 = \frac{(-1)^{3+2} \cdot D_{23}}{\mathrm{Det}(A)}$$

De manière analogue, on trouve tous les autres éléments de la matrice inverse de A. On laisse le soin au lecteur de vérifier que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 7 & 4 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D'une manière générale, pour une matrice carrée A d'ordre n, on peut démontrer que

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \, {}^t\big((-1)^{i+j} D_{ij}\big)$$

où D_{ij} désigne le déterminant d'ordre $n-1$ que l'on obtient en supprimant dans la matrice A la i-ième ligne et la j-ième colonne. Dans la pratique cette formule n'est pas utilisée par manque d'efficacité. L'inversion d'une matrice carrée à l'aide des matrices élémentaires est en revanche efficace.

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A, jusqu'à obtention de la matrice unité I_n, si cela est possible ; on effectue simultanément exactement les mêmes opérations sur la matrice unité I_n pour obtenir l'inverse de A.

1. Si l'on parvient à transformer la matrice A en la matrice unité, alors A est inversible. En effet, traduit en termes de multiplications par des matrices élémentaires, cela signifie que $(E_p \cdot E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1) \cdot A = I_n$, autrement dit que $A^{-1} = E_p \cdot E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1$.

   De plus, la matrice identité est simultanément transformée en l'inverse de A, car $(E_p \cdot E_{p-1} \cdots E_2 \cdot E_1) \cdot I_n = A^{-1} \cdot I_n = A^{-1}$
2. Dans le cas contraire, la matrice A se transforme en une matrice B qui possède au moins une ligne de zéros. On a donc

   $$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Det}(B) \\ &= \mathrm{Det}(E_p)\,\mathrm{Det}(E_{p-1}) \cdots \mathrm{Det}(E_2)\,\mathrm{Det}(E_1)\,\mathrm{Det}(A) \end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathrm{Det}(A) = 0$ puisque le déterminant des matrices élémentaires est non nul, autrement dit que la matrice A n'est pas inversible.

Exemple 6. *Inversion d'une matrice à l'aide des matrices élémentaires. On reprend la matrice de l'exemple 5.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

On écrit la matrice A augmentée de la matrice I_3. Ensuite, on effectue sur les lignes des opérations élémentaires, ce qui revient à multiplier par des matrices élémentaires.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

On permute les lignes 1 et 2 ce qui revient à multiplier à gauche la matrice augmentée par la matrice élémentaire P_{12}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 - 2L_1 \to L_3$$

On poursuit en multipliant à gauche par $S_{31}(-2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 14 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 - 3L_2 \to L_3$$

On multiplie à gauche par $S_{32}(-3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{2} \cdot L_3 \to L_3$$

On multiplie à gauche par $D_3(\frac{1}{2})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad L_2 - 4L_3 \to L_2$$

On multiplie à gauche par $S_{23}(-4)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad L_1 + 3L_3 \to L_1$$

On multiplie à gauche par $S_{13}(3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

La matrice inverse de A est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 7 & 4 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Formellement, cette matrice est le produit des matrices élémentaires utilisées.

Résolution de systèmes linéaires à l'aide de la matrice inverse

Exemple 7. *On considère le système d'équations suivant.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & -6 \\ x & + & y & - & z & = & 4 \end{array}\right.$$

Ce système d'équations peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ou, en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot X = B$$

On calcule A^{-1} *en utilisant les transformations sur les lignes de la matrice* A *augmentée de la matrice identité.*

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{2}L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \quad L_1 + L_2 \to L_1$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \quad L_2 + L_3 \to L_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} \cdot B \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ I_3 \cdot X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

et finalement

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

À tout système linéaire de n équations à n inconnues, on peut associer une matrice carrée d'ordre n. Dès lors, le système s'écrit $A \cdot X = B$. Au cas où A est une matrice carrée inversible, on peut écrire

$$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

1.7 Exercices

1. Parmi les équations suivantes, indiquer celles qui sont linéaires.

a) $2x+\sqrt{3}\,y=5z$ b) $x+2y=3xy$

c) $\sqrt{x^2+y^2}=25$ d) $y(1-2x)+7=2x(1-y)$

e) $x-y+10^{-3}z=\log(3)$ f) $2\log(x)+6=0$

2. Résoudre les systèmes suivants.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -1 \\ 3x & - & 2y & = & 9 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 4y & = & -11 \\ -7x & + & 6y & = & 19 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & -10 \\ -6x & + & 3y & = & 9 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & -10 \\ -6x & + & 3y & = & 15 \end{array}\right.$

e) $\{\ x-4y=1$ f) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ 3x & + & y & = & 4 \\ x & - & y & = & 5 \end{array}\right.$

3. Résoudre les systèmes suivants par la méthode de Gauss.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 9 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 14 \\ 2x & - & y & - & z & = & 12 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & + & 4y & - & z & = & -5 \\ x & + & 5y & - & 4z & = & -9 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 2 \\ 4x & + & y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$

4. On considère deux plans α et β d'équations $\alpha : x-2y+z=4$ et $\beta : 3x-5y-2z=11$.

a) Trouver une représentation paramétrique de la droite d d'intersection des deux plans.

b) Interpréter géométriquement la solution d'un système régulier de trois équations à trois inconnues.

c) Comment choisir une 3^e équation linéaire pour que le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ 3x & - & 5y & - & 2z & = & 11 \\ \dots & & \dots & & \dots & = & \dots \end{array}\right.$$

soit impossible ? indéterminé ? Donner, pour chaque cas, une interprétation géométrique de cette troisième équation.

5. Trouver un système linéaire dont la solution générale est l'ensemble $S = \{(13 - \lambda\,; \lambda\,; -3 + 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

6. Donner la solution générale de l'équation $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7$.

7. Transcrire les systèmes linéaires des exercices 2 et 6 en écriture matricielle.

8. Résoudre les systèmes suivants en utilisant la matrice augmentée.

a) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & - & 13x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 18 \\ 4x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & - & 6x_4 & = & -5 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

9. Peut-on trouver un système linéaire qui possède exactement les deux solutions $(1\,;0\,;-2)$ et $(1\,;1\,;1)$?

10. a) On cherche un polynôme $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dont le graphe passe par les quatre points $P(1\,;5)$, $Q(2\,;4)$, $R(3\,;-5)$ et $S(-1\,;7)$. Écrire la matrice des coefficients et la matrice des termes constants du système permettant de trouver a, b, c et d. Déterminer $p(x)$.

b) Plus généralement, écrire la matrice des coefficients et la matrice des termes constants du système si le graphe du polynôme p passe par les quatre points $P(x_1\,;y_1)$, $Q(x_2\,;y_2)$, $R(x_3\,;y_3)$ et $S(x_4\,;y_4)$.

11. Échelonner la matrice augmentée associée au système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ -2x_1 & + & 3kx_2 & + & x_3 & = & 3k \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & kx_3 & = & k+1 \end{array}\right.$$

Indiquer ensuite la solution générale de ce système en fonction du paramètre k.

12. Écrire sous forme de systèmes les équations $A \cdot X = B$ et $A \cdot X = C$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

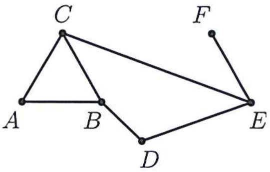
Résoudre ensuite simultanément les deux systèmes en appliquant la méthode de Gauss-Jordan à la matrice doublement augmentée $(A|B\ C)$.

13. Trouver un carré magique d'ordre 3.

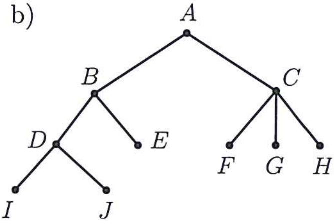
14. Quel est le « nombre magique» d'un carré magique d'ordre n ?

15. Écrire la matrice d'adjacence de chaque graphe non orienté ci-dessous.

a)



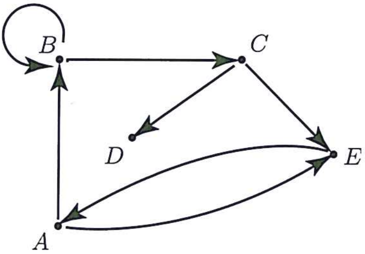
b)



16. Dessiner un graphe dont la matrice d'adjacence est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Écrire la matrice d'adjacence du graphe orienté suivant.



18. Pour simplifier des prévisions météorologiques, on se limite à trois types de prévision : beau (E_1), nuageux (E_2) et pluvieux (E_3).

La matrice $P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition : si un jour on est dans l'état E_j, il y a une probabilité p_{ij} d'être demain dans l'état E_i. Sachant qu'il fait beau temps aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fasse beau demain ? dans 2 jours ? dans 3 jours ?

19. On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer

a) $-2A$ b) $B - 2A$ c) C^2

d) $E \cdot A$ e) $D \cdot B$ f) $A + 2E \cdot B$

20. a) Une matrice A est de type 5×3 et le produit $A \cdot B$ est de type 5×4. Quel est le type de la matrice B ?

b) Si A est une matrice de type 5×3 et C une matrice de type 2×5, quel est le type de la matrice $C \cdot A$?

c) Si M est une matrice de type $n \times 1$ et N est de type $1 \times n$, quel est le type des matrices $M \cdot N$ et $N \cdot M$?

21. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et une matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Trouver la matrice B telle que $A \cdot B = \begin{pmatrix} -20 & 30 & -5 \\ 5 & -15 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Trouver la matrice D telle que $A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Trouver une matrice E telle que $C \cdot E = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) Trouver la matrice F telle que $C \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Les stocks de deux magasins de sport sont donnés dans le tableau A.

	skis	bâtons	fixations
magasin 1	120	110	90
magasin 2	200	180	210

On connaît également les frais (en CHF par unité) liés au stockage et au transport de ces articles du tableau B.

	stockage	transport
skis	5	20
bâtons	4	10
fixations	1	5

Calculer le produit matriciel $A \cdot B$ et donner une interprétation économique du tableau obtenu.

Remarque. Même s'il est possible de calculer le produit matriciel $B \cdot A$, celui-ci n'a aucune signification économique.

23. Un sous-traitant de l'industrie automobile produit deux articles appelés X et Y. Pour la fabrication de ces produits, il emploie de l'acier, du caoutchouc et de la main d'œuvre, selon les quantités unitaires données dans le tableau suivant.

	acier	caoutchouc	travail
article X	2	3	5
article Y	1	4	4

Les coûts unitaires (en CHF) sont

acier	6.–
caoutchouc	4.–
travail	10.–

Utiliser des matrices pour effectuer les calculs suivants.

a) Calculer le coût unitaire de chaque article.

b) Le sous-traitant reçoit une commande de 200 articles de X et de 300 articles de Y. Calculer les quantités de chaque facteur de production qu'il doit utiliser pour la fabrication de ces articles.

c) Calculer le coût total de cette commande.

d) Le prix de vente est de CHF 90.- pour X et de 80.– pour Y. Calculer la recette totale et le profit total.

24. On considère deux matrices-colonne $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits suivants.

a) $A \cdot {}^tB$ b) ${}^tA \cdot B$ c) ${}^tA \cdot A$

25. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

26. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer

a) $A \cdot (B + C)$ b) ${}^tA \cdot B$ c) ${}^tB \cdot A$

d) $(A + B)^2$ e) $A^2 + 2A \cdot B + B^2$ f) $(A + B) \cdot (A - B)$

g) $A^2 - B^2$ h) C^2 i) C^3

j) C^n où $n \in \mathbb{N}$

27. On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) A^2

28. On considère trois nombres réels a, b, c et les matrices suivantes.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a) N^n b) U^n c) R^n d) T^n

29. Une matrice A est **idempotente** si $A^2 = A$.

a) Montrer que les matrices suivantes sont idempotentes.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) À quelles conditions doivent satisfaire les coefficients réels a, b, c et d pour que la matrice $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit idempotente ?

30. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3, A^4, … et observer l'apparition des termes de la suite de Fibonacci[8].

---

[8] voir page 122

31. Deux matrices A et B **commutent** si $A \cdot B = B \cdot A$.
Trouver les matrices B qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

32. a) Montrer à l'aide d'un exemple qu'en général $(A \cdot B)^2 \neq A^2 \cdot B^2$.

b) Si A et B sont des matrices qui commutent, montrer que pour tout entier naturel k, $(A \cdot B)^k = A^k \cdot B^k$.

33. a) Montrer que si A et B sont des matrices qui commutent, alors

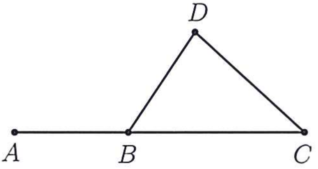
$$(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$$

On peut généraliser cette identité et obtenir la formule du binôme. Si A et B commutent, alors on a

$$(A + B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i \cdot B^{n-i} \quad \text{où} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

b) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^2, M^3 et M^k en écrivant M comme somme de I_3 et d'une matrice B, et en utilisant la formule du binôme.

34. On considère le graphe (non orienté et sans boucle) suivant.



a) Écrire la matrice d'adjacence M de ce graphe.

b) Calculer M^2 et donner une interprétation des éléments de cette matrice.

35. Calculer le carré de la matrice de transition P de l'exercice 18 (page 35). Donner une interprétation des éléments de la matrice P^2.

36. Écrire les matrices élémentaires $D_2(-3)$ et $S_{21}(7)$ d'ordre 2.

37. Écrire les matrices élémentaires P_{23}, $D_3(4)$, $S_{21}(3)$ et $S_{13}(7)$ d'ordre 3.

38. Multiplier à gauche une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par

a) $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et vérifier que cela revient à lui faire subir l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$,

b) $D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et vérifier que cela revient à lui faire subir l'opération $\lambda L_2 \rightarrow L_2$,

c) $S_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et vérifier que cela revient à lui faire subir l'opération $L_1 + \lambda L_2 \rightarrow L_1$.

d) Que se passe-t-il si l'on multiplie A à droite par P_{12} ? par $D_2(\lambda)$? par $S_{12}(\lambda)$?

39. Quelle opération élémentaire sur les lignes a-t-on appliquée à la matrice unité I_4 pour obtenir chacune des matrices suivantes ? Comment note-t-on chacune de ces matrices ?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

40. a) Quel est l'effet sur une matrice d'ordre 3 de la multiplication à droite par $S_{32}(5)$? Et par $S_{13}(2)$?

b) Énoncer un théorème précisant les effets de la multiplication à droite par les matrices élémentaires.

41. Pour les matrices élémentaires d'ordre n, montrer que

a) $P_{ij}^2 = I_n$,

b) $D_i(\lambda) \cdot D_i(\frac{1}{\lambda}) = I_n$, avec $\lambda \neq 0$,

c) $S_{ij}(\lambda) \cdot S_{ij}(-\lambda) = I_n$, avec $i \neq j$,

d) $S_{ij}(\lambda) \cdot S_{ij}(\mu) = S_{ij}(\lambda + \mu)$, avec $i \neq j$.

42. Calculer les déterminants suivants.

$a = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $c = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ $d = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & z \end{vmatrix}$

43. Calculer les déterminants suivants.

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

44. Calculer le déterminant des matrices élémentaires d'ordre 2, 3, 4. Peut-on généraliser le résultat à un ordre quelconque n ?

45. Calculer les déterminants suivants.

$$a = \begin{vmatrix} \alpha - x & \beta \\ \alpha & \beta - x \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} 2m & -(m+2) \\ 2(m-1) & -m \end{vmatrix}$$

46. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer $\mathrm{Det}(A), \mathrm{Det}(B)$ et $\mathrm{Det}(A+B)$. Que peut-on en déduire ?

47. a) Quel est le nombre de multiplications à effectuer pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n (en utilisant la définition récursive) ?

b) En déduire le temps qu'il faudra aux plus puissants ordinateurs du monde, capables d'effectuer mille milliards de multiplications par seconde (1 téraFLOPS = 10^{12} *FLoating-point Operations Per Second*), pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 20 et d'ordre 30. On négligera le temps nécessaire pour effectuer les additions.

48. Vérifier les égalités suivantes sans calculer les déterminants.

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 6 \\ 7 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

49. Exprimer les déterminants suivants en fonction de $p = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$s = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} \qquad t = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \qquad u = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$v = \begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 3a_2+2a_1 & 3b_2+2b_1 & 3c_2+2c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

50. Calculer et factoriser en utilisant les propriétés des déterminants.

$$a = \begin{vmatrix} 1 & \beta+\gamma & \alpha \\ 1 & \gamma+\alpha & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \gamma \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} x & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 5 & -3-t & 1 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix} \qquad d = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$$

51. Résoudre (par rapport à x) en utilisant les propriétés des déterminants.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & b \\ 1 & a & x \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} x & a & 1 \\ a & x & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

52. Calculer les déterminants suivants.

$$a = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{vmatrix}$$

53. Démontrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale.

54. Démontrer les identités suivantes.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

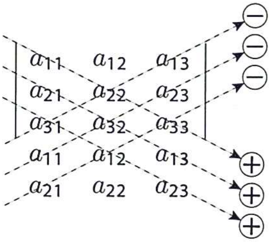
$$\text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Cette propriété peut être généralisée à l'ordre n (**déterminant de Vandermonde**[9]).

---

[9] Alexandre-Théophile Vandermonde, mathématicien français, 1735–1796

55. La **règle de Sarrus**[10] est une méthode de calcul du déterminant d'une matrice carrée A d'ordre 3 uniquement. On recopie, en dessous de A, les deux premières lignes de cette matrice et on effectue la somme des produits des « diagonales descendantes » dont on soustrait les produits des « diagonales ascendantes ».



$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\qquad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

Utiliser cette règle pour calculer les déterminants de l'exercice 43.

56. Résoudre les systèmes suivants à l'aide de la règle de Cramer.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -1 \\ 3x & - & 2y & = & 9 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 4y & = & -11 \\ -7x & + & 6y & = & 19 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & -10 \\ -6x & + & 3y & = & 9 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & -10 \\ -6x & + & 3y & = & 15 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 0 \\ 3x & - & 2y & = & 0 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & 0 \\ -6x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right.$

57. Résoudre et discuter les systèmes suivants en fonction du paramètre réel m.

a) $\left\{\begin{array}{r} m^2x + y = 2 \\ x + y = 2m \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} (m+1)x & + & (m-1)y & = & m \\ mx & + & (m+1)y & = & m-1 \end{array}\right.$

58. Pour quelles valeurs des paramètres a et b le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} ax & + & 3y & = & 5 \\ 3x & - & 2y & = & b \end{array}\right.$$

possède-t-il une seule solution ? aucune solution ? une infinité de solutions ?

---

[10] Pierre-Frédéric Sarrus, mathématicien français, 1798–1861

59. Résoudre les systèmes suivants à l'aide de la règle de Cramer.

$$\text{a)}\ \begin{cases} x + 3y + 2z = -13 \\ 2x - 6y + 3z = 32 \\ 3x - 4y - z = 12 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} 2x + y = 2 \\ -4y + z = 0 \\ 4x + z = 6 \end{cases}$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{d)}\ \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$$

60. Trouver la valeur de x_3 dans le système suivant.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 12 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

61. Résoudre le système suivant en fonction du paramètre réel m.

$$\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my + z = 3m - 2 \\ x + y + mz = 2 - m \end{cases}$$

62. Vérifier que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

$$\text{a)}\quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A$$

$$\text{c)}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -11 & 19 & -1 \\ -8 & 14 & -1 \\ 10 & -17 & 1 \end{pmatrix}$$

63. Calculer, si elles existent, les matrices inverses des matrices suivantes.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e)}\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \end{pmatrix} \qquad \text{f)}\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{g)}\ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{h)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

64. Calculer, si elles existent, les matrices inverses des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

65. a) Calculer le carré de la matrice de transition de l'exemple 9, page 13, et donner une interprétation des éléments de P^2.

b) Vérifier à l'aide de la matrice $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ que $P \cdot (P \cdot X) = P^2 \cdot X$.

c) Calculer P^{-1} et donner une interprétation du produit $P^{-1} \cdot X$.

66. Chercher les matrices élémentaires d'ordre 2 et 3. Vérifier qu'elles sont inversibles et trouver leurs inverses.

67. Pour quelles valeurs de λ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

a) $\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2+\lambda & \lambda \\ -\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \lambda-2 & \lambda+3 & \lambda-4 \\ 1 & 6 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 3 \\ 2\lambda-1 & 4 & -4 \\ \lambda & \lambda & 2 \end{pmatrix}$

68. À l'aide d'opérations élémentaires, déterminer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

69. On donne un système d'équations linéaires. Écrire la matrice associée des coefficients, chercher la matrice inverse et, à l'aide de celle-ci, résoudre les systèmes suivants.

a) $$\begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ 4x - 5y + 6z = 3 \\ 6x + 2y - 8z = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x + y - 3z = -17 \\ 4x - 5y + 6z = 73 \\ 6x + 2y - 8z = -40 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2x + y - 3z = -7 \\ 4x - 5y + 6z = 0 \\ 6x + 2y - 8z = -4 \end{cases}$$

70. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^{-1}, A^2, (A^2)^{-1}, (A^{-1})^2$ et définir A^{-2}.

71. Montrer que la matrice inverse d'une matrice diagonale inversible est une matrice diagonale.

72. À l'aide des propriétés des matrices, montrer que la matrice inverse d'une matrice symétrique inversible est une matrice symétrique.

Réponses aux exercices du chapitre 1

1. a) oui b) non c) non d) oui e) oui f) non

2. a) $S = \{(1\,;-3)\}$ b) $S = \{(-1\,;2)\}$
c) $S = \varnothing$ d) $S = \{(\lambda\,;5+2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
e) $S = \{(1+4\lambda\,;\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ f) $S = \varnothing$

3. a) $S = \{(1\,;2\,;3)\}$ b) $S = \{(7\,;-1\,;3)\}$
c) $S = \{(1-\lambda\,;-2+\lambda\,;\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ d) $S = \varnothing$

4. a) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) C'est le point d'intersection de trois plans.

c) Pour obtenir un système impossible, on choisit l'équation d'un plan qui est strictement parallèle à la droite d'intersection des deux plans donnés. Par exemple $\gamma : 3x - 5y - 2z = 10$.

Pour obtenir un système indéterminé, on choisit l'équation d'un plan qui contient la droite d'intersection des deux plans donnés. Par exemple $\gamma : 4x - 7y - z = 15$ (somme des deux équations données).

5. $\dfrac{x-13}{-1} = y = \dfrac{z+3}{2}$ ou $\begin{cases} x + y = 13 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$

6. $S = \{(7 + 2\alpha - 3\beta + 4\gamma\,;\alpha\,;\beta\,;\gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

7. 2. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 19 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$

8. a) $S = \{(6 + 3\lambda - 3\mu\,;\lambda\,;-5 + 4\mu\,;\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
b) $S = \varnothing$
c) $S = \{(1\,;-1\,;2\,;3)\}$

9. Non

10. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

En résolvant, on trouve $p(x) = -x^3 + 2x^2 + 4$.

b) $A = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

11. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & k-2 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & 1-k & k-2 \end{array}\right)$

Si $k = 1$, le système est impossible ; $S = \varnothing$.
Si $k = 2$, le système est indéterminé ; $S = \{(-3 + 3\lambda\,;\lambda\,;0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Dans tous les autres cas (c'est le k de le dire), le système est régulier ;
$S = \left\{\left(\frac{k+1}{k-1}\,;\frac{k}{k-1}\,;-\frac{k-2}{k-1}\right)\right\}$.

12. $\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & -2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = & -4 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = & 1 \end{array}\right.$

Les solutions sont $\left(-\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$ et $\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ respectivement.

13.

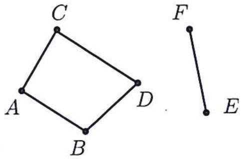
6	7	2
1	5	9
8	3	4

14. $\frac{n(n^2+1)}{2}$

15. a) $\begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . & . & . \\ 1 & . & 1 & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & . & 1 & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$

Pour améliorer la lisibilité, les zéros ont été remplacés par des points.

16. Graphe possible :



17. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. a) 60% b) 48% c) 44%

19. a) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) impossible f) $\begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 13 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

20. a) 3×4 b) 2×3 c) $n \times n$ et 1×1

21. a) $B = \begin{pmatrix} -6 & 12 & -1 \\ 7 & -9 & 2 \end{pmatrix}$ b) $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

c) $E = \begin{pmatrix} 2a+3 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ d) pas de solution

22. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 120 & 110 & 90 \\ 200 & 180 & 210 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 4 & 10 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1130 & 3950 \\ 1930 & 6850 \end{pmatrix}$

Ce tableau indique les frais totaux (en CHF) liés au stockage et au transport des articles entreposés dans chaque magasin.

	stockage	transport
magasin 1	1130	3950
magasin 2	1930	6850

23. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 \\ 62 \end{pmatrix}$

b) $C \cdot A = \begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 & 1800 & 2200 \end{pmatrix}$

c) $(C \cdot A) \cdot B = \begin{pmatrix} 700 & 1800 & 2200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33\,400 \end{pmatrix}$

ou $C \cdot (A \cdot B) = \begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 74 \\ 62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33\,400 \end{pmatrix}$

d) Recette totale $C \cdot D = \begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42\,000 \end{pmatrix}$

Profit total $C \cdot D - C \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 8\,600 \end{pmatrix}$ ou $C \cdot (D - A \cdot B)$

24. a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$

25. $^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

26. a) $\begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & 7 \\ 4 & 18 & 10 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 11 & 18 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 9 & 50 & 45 \\ 4 & 29 & 25 \\ -2 & 15 & 14 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 58 & 41 \\ 7 & 37 & 27 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 7 & -18 & 3 \\ 2 & -11 & 3 \\ 12 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

27. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & ac+bd \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$

28. a) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $n \geq 3$

b) $U^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot a & nb + \frac{n(n-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & n \cdot c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^tR$, $R^3 = I_3$, $R^4 = R$

d) $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29. b) $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$,

ainsi que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

30. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, ...

31. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

32. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

33. $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2+k \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

34. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Les éléments de M^2 indiquent le nombre de chemins différents de longueur 2 qui permettent de relier deux points du graphe. Par exemple, il y a un seul chemin de longueur 2 entre A et D (ABD), mais pour aller de C vers C, on peut choisir CBC ou CDC.

35. $P^2 = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.42 & 0.34 \\ 0.24 & 0.26 & 0.28 \\ 0.28 & 0.32 & 0.38 \end{pmatrix}$

Un élément q_{ij} de cette matrice est la probabilité que, si un jour est dans l'état E_j, le surlendemain sera dans l'état E_i.

36. $D_2(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $S_{21}(7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

37. $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_3(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $S_{21}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$S_{13}(7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

38. d) Multiplier une matrice à droite par P_{12} revient à en permuter les *colonnes*. P_{12} est aussi le résultat de l'opération $C_1 \leftrightarrow C_2$ appliquée à la matrice unité I_2. Multiplier une matrice à droite par $D_2(\lambda)$ revient à en multiplier la deuxième *colonne* par λ. $D_2(\lambda)$ est aussi le résultat de l'opération $\lambda C_2 \to C_2$ appliquée à la matrice unité I_2. Multiplier une matrice à droite par $S_{12}(\lambda)$ revient à ajouter à sa deuxième *colonne* λ fois la première. $S_{12}(\lambda)$ est aussi le résultat de l'opération $C_2 + \lambda C_1 \to C_2$ appliquée à la matrice unité I_2.

39. a) On a appliqué $L_2 \leftrightarrow L_4$ et la matrice se nomme P_{24}.

b) On a appliqué $L_3 - 3L_1 \to L_3$ et la matrice se nomme $S_{31}(-3)$.

c) On a appliqué $L_2 + 7L_3 \rightarrow L_2$ et la matrice se nomme $S_{23}(7)$.

d) On a appliqué $-4L_2 \rightarrow L_2$ et la matrice se nomme $D_2(-4)$.

40. a) $C_2 + 5C_3 \rightarrow C_2$ et $C_3 + 2C_1 \rightarrow C_3$

b) Permuter les i-ième et j-ième colonnes de A, autrement dit appliquer l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ à la matrice A, revient à effectuer la multiplication $A \cdot P_{ij}$.
Si $\lambda \neq 0$, multiplier la j-ième colonne de A par λ, autrement dit appliquer l'opération $\lambda C_j \rightarrow C_j$ à la matrice A, revient à effectuer la multiplication $A \cdot D_j(\lambda)$.
Ajouter à la j-ième colonne de A un multiple λ fois la i-ième colonne, autrement dit appliquer l'opération $C_j + \lambda C_i \rightarrow C_j$ à la matrice A, revient à effectuer la multiplication $A \cdot S_{ij}(\lambda)$.

41. a) Appliquer l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ deux fois de suite revient à ne rien changer à la matrice unité.

b) Appliquer successivement $\frac{1}{\lambda}L_i \rightarrow L_i$ et $\lambda L_i \rightarrow L_i$ à la matrice I_n ne la modifie pas.

c) Appliquer successivement $L_i - \lambda L_j \rightarrow L_i$ puis $L_i + \lambda L_j \rightarrow L_i$ à la matrice I_n ne la modifie pas.

d) Appliquer $L_i + \mu L_j \rightarrow L_i$ puis $L_i + \lambda L_j \rightarrow L_i$ à la matrice unité revient à lui appliquer directement $L_i + (\lambda + \mu)L_j \rightarrow L_i$.

42. $a = 8$, $b = 11$, $c = -2$, $d = xz$

43. $a = 79$, $b = 24$, $c = -12$

44. $\mathrm{Det}(P_{ij}) = -1$, $\mathrm{Det}\big(D_i(\lambda)\big) = \lambda$, $\mathrm{Det}\big(S_{ij}(\lambda)\big) = 1$

45. $a = x^2 - (\alpha + \beta)x$, $b = \lambda^2 - 7\lambda + 2$, $c = 2m - 4$

46. $\mathrm{Det}(A) = 11, \mathrm{Det}(B) = -1, \mathrm{Det}(A + B) = 5$.
On en déduit que, en général, $\mathrm{Det}(A + B) \neq \mathrm{Det}(A) + \mathrm{Det}(B)$.

47. a) $n!$

b) Pour $n = 20$, environ 28 jours ; pour $n = 30$, environ 8 400 milliards années.

49. $s = -p$, $t = -p$, $u = p$, $v = 0$, $w = 3p$

50. $a = 0$, $b = (x - 1)(x - \alpha)$, $c = -(t + 2)(t - 2)(t - 4)$,
$d = (x - y)(y - z)(z - x)(xy + yz + zx)$

51. a) $x = a$ ou $x = b$ b) même solution que a)

52. $a = 27$, $b = 512$, $c = (eh - gf)(ps - rq)$

56. a) $S = \{(1\,;-3)\}$ b) $S = \{(-1\,;2)\}$
c) $S = \varnothing$ d) $S = \{(\lambda\,;5 + 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
e) $S = \{(0\,;0)\}$ f) $S = \{(\lambda\,;2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
La solution des exercices c), d) et f) ne peut pas être obtenue à l'aide de la règle de Cramer car le déterminant du système est nul.

57. a) Si $m = 1$, $S = \{(2 - \lambda\,;\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Si $m = -1$, $S = \varnothing$.
Dans tous les autres cas, $S = \left\{\left(\dfrac{-2}{m+1}\,;\dfrac{2(m^2+m+1)}{m+1}\right)\right\}$
b) Si $m = -\dfrac{1}{3}$, $S = \varnothing$, sinon $S = \left\{\left(\dfrac{3m-1}{3m+1}\,;\dfrac{-1}{3m+1}\right)\right\}$

58. Si $a \neq -\frac{9}{2}$, le système admet une solution unique.
Si $a = -\frac{9}{2}$ et $b \neq -\frac{10}{3}$, le système est impossible.
Si $a = -\frac{9}{2}$ et $b = -\frac{10}{3}$, le système est indéterminé.

59. a) $S = \{(-2\,;-5\,;2)\}$ b) $S = \{(\frac{1}{2}\,;1\,;4)\}$
c) $S = \{(\lambda\,;1\,;\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ d) $S = \{(9\,;4\,;1)\}$
La solution de l'exercice c) ne peut pas être obtenue à l'aide de la règle de Cramer car le déterminant du système est nul.

60. $x_3 = 9$

61. Si $m = 1$, $S = \{(1 - \lambda - \mu\,;\lambda\,;\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
Si $m = -2$, $S = \{(\lambda\,;4 + \lambda\,;\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
Dans tous les autres cas, $S = \{(m\,;2\,;-2)\}$

63. a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ b) non inversible
c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$
e) Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, $\frac{1}{a-a^2}\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ f) non inversible
g) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

64. a) non inversible b) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) non inversible h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

65. a) $P^2 = \begin{pmatrix} 0.9075 & 0.1850 \\ 0.0925 & 0.8150 \end{pmatrix}$

c) $P^{-1} = \frac{1}{0.85}\begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} \cdot X \approx \begin{pmatrix} 2.47 \\ 6.53 \end{pmatrix}$ donne la répartition de la population (millions en ville/campagne) de 1990

66. Matrices élémentaires d'ordre 2

$(P_{12})^{-1} = P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\big(D_1(\lambda)\big)^{-1} = D_1(\frac{1}{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\big(D_2(\lambda)\big)^{-1} = D_2(\frac{1}{\lambda}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$

$\big(S_{12}(\lambda)\big)^{-1} = S_{12}(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\big(S_{21}(\lambda)\big)^{-1} = S_{21}(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$

Matrices élémentaires d'ordre 3

$(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$, $\big(D_i(\lambda)\big)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$, $\big(S_{ij}(\lambda)\big)^{-1} = S_{ij}(-\lambda)$

67. a) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, b) $\lambda \in \mathbb{R}$, c) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, d) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 4\}$

68. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -21 & -4 & -1 \\ 2 & -8 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 12 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

69. $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 28 & 2 & -9 \\ 68 & 2 & -24 \\ 38 & 2 & -14 \end{pmatrix}$

a) $\left(-\frac{11}{5}\,;\,-\frac{31}{5}\,;-\frac{16}{5}\right)$ b) $(3\,;-5\,;6)$ c) $(-16\,;-38\,;-21)$

70. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = A^{-2}$

72. Indication : ${}^tA = A$, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

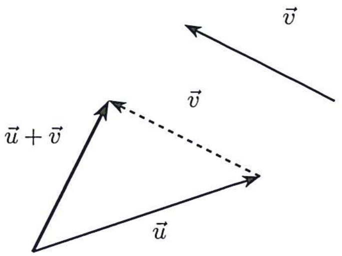
2 Espaces vectoriels

2.1 Exemples et définitions

Exemple 1. *On considère l'ensemble V_2 des vecteurs du plan.*

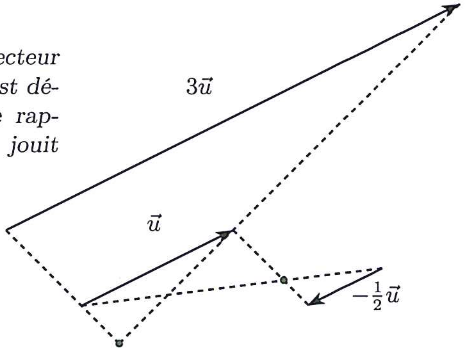
Dans V_2, on définit une addition comme illustrée dans le dessin ci-contre. Cette addition vectorielle jouit des propriétés suivantes.

1. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
2. $\vec{o}$ *est l'élément neutre :* $\vec{o} + \vec{u} = \vec{u}$
3. *Pour tout $\vec{u}$, il existe un unique vecteur, noté $-\vec{u}$, tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$.*
4. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



La multiplication d'un vecteur de V_2 par un nombre réel λ est définie par une homothétie de rapport λ. Cette multiplication jouit des propriétés suivantes.

5. $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
6. $1\vec{u} = \vec{u}$
7. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
8. $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$



L'ensemble V_2 des vecteurs du plan, muni de ces deux opérations, est appelé un espace vectoriel. D'autres ensembles, munis de deux opérations jouissant des mêmes propriétés, seront aussi appelés espaces vectoriels.

Exemple 2. *Considérons l'ensemble $M_{2,3}(\mathbb{R})$ des matrices réelles de type 2×3. On peut additionner deux matrices et multiplier une matrice par un nombre réel (voir page 10). L'ensemble $M_{2,3}(\mathbb{R})$, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel, car cette structure vérifie les mêmes propriétés fondamentales que celles de l'exemple 1.*

Exemple 3. *Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels. On définit une addition*

$$(x_1\,;x_2) + (y_1\,;y_2) = (x_1 + y_1\,;x_2 + y_2)$$

et une multiplication par un nombre réel λ

$$\lambda \cdot (x_1\,;x_2) = (\lambda x_1\,;\lambda x_2)$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux opérations, est aussi un espace vectoriel.

Exemple 4. *Considérons l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. On peut additionner deux fonctions f et g.*

$$\begin{array}{rccc} f+g: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

On peut également multiplier une fonction f par un nombre réel λ

$$\begin{array}{rccc} \lambda \cdot f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel.

Un **espace vectoriel** réel est un triplet $(E\,;+\,;\cdot)$ formé d'un ensemble E, d'une opération interne dans E, appelée **addition** et notée $+$, et d'une loi de composition externe, appelée **multiplication par un réel** et notée $\cdot$, satisfaisant aux huit propriétés suivantes, pour tout élément u, v, w de E et tout nombre réel α et β.

Addition

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$ *associativité*
2. Il existe un élément neutre dans E, noté o et tel que $u+o=o+u=u$ *élément neutre*
3. Pour chaque élément u de E, il existe un élément opposé, noté $-u$, tel que $u+(-u)=(-u)+u=o$ *élément opposé*
4. $u+v=v+u$ *commutativité*

L'ensemble E, muni de l'addition satisfaisant ces quatre propriétés est un **groupe commutatif** ou **abélien**. On peut définir dans cet ensemble la **soustraction** par $u-v=u+(-v)$.

Multiplication par un réel

5. $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$
6. $1 \cdot u = u$

Deux propriétés lient ces deux opérations.

7. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
8. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

Les éléments de E sont des **vecteurs**. Les nombres réels sont aussi appelés **scalaires**. L'élément neutre de l'addition est le **vecteur nul**.

Pour alléger la notation, le produit $\alpha \cdot u$ sera souvent noté αu. De même, on parlera de l'espace vectoriel E au lieu de l'espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot)$.

Exemple 5. *On considère l'ensemble $\mathbb{R}^n$ formé de tous les n-uplets de nombres réels $(x_1\,;x_2\,;\,\ldots\,;x_n)$. On définit l'addition de deux n-uplets par l'addition des éléments respectifs*

$$(x_1\,;x_2;\ldots\,;x_n) + (y_1\,;y_2\,;\,\ldots\,;y_n) = (x_1+y_1\,;x_2+y_2\,;\,\ldots\,;\,x_n+y_n)$$

et la multiplication par un scalaire λ comme la multiplication de chaque élément par le nombre réel λ.

$$\lambda \cdot (x_1\,;x_2\,;\,\ldots\,;x_n) = (\lambda x_1\,;\lambda x_2\,;\,\ldots\,;\lambda x_n)$$

On peut montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux opérations, vérifie les huit propriétés de la définition d'un espace vectoriel.
Le vecteur nul est alors $o = (0\,;0\,;\,\ldots\,;0)$.

Exemple 6. *On considère l'ensemble $\mathbb{P}_2$ des polynômes réels à une variable x, de degré inférieur ou égal à 2. On définit une addition*

$$(a_2x^2+a_1x+a_0)+(b_2x^2+b_1x+b_0) = (a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$

et une multiplication par un scalaire

$$\lambda(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0$$

On peut montrer que l'ensemble $\mathbb{P}_2$, muni de ces deux opérations, vérifie les huit propriétés de la définition d'un espace vectoriel.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Un sous-ensemble non-vide F d'un espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot)$ est un **sous-espace vectoriel** de E si $(F\,;\,+\,;\cdot)$ est lui-même un espace vectoriel.

Propriétés

1. Un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel si, pour tout $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + v \in F$ et $\lambda u \in F$.
2. Tout sous-espace vectoriel F de E contient l'élément neutre o de E, car pour un vecteur u de F, on a $0 \cdot u \in F$ et $0 \cdot u = o$.

Exemple 1. *On considère un vecteur $\vec{u}$ du plan V_2.*
L'ensemble $\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de V_2.

Exemple 2. *L'ensemble $\big\{(t\,;2t) \mid t \in \mathbb{R}\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*

Exemple 3. *L'ensemble des vecteurs $(x\,;y\,;z)$ de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant l'équation $2x - 3y + z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

Exemple 4. *Les ensembles E et $\{o\}$ sont les sous-espaces vectoriels triviaux d'un espace vectoriel E.*

Exemple 5. *L'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles.*

Exemple 6. *La solution générale d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*
En effet, sous forme matricielle, le système s'écrit $A \cdot X = O$. Si X et Y sont deux solutions du système et λ un nombre réel, on a
1. $A \cdot (X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y = O + O = O$
2. $A \cdot (\lambda X) = \lambda(A \cdot X) = \lambda O = O$

2.3 Combinaison linéaire et espace engendré

On se donne des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ d'un espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot)$.

Un vecteur v de E est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ s'il peut s'écrire sous la forme

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$$

où les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 1. *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$*, on considère les deux vecteurs* $u_1 = (2\,;1)$ *et* $u_2 = (2\,;-1)$*. Le vecteur* $v = u_1 + 2u_2 = (6\,;-1)$ *est une combinaison linéaire des vecteurs* u_1 *et* u_2*.*

Exemple 2. *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{P}_2$*, le polynôme* $5x^2 - 3x + 2$ *est une combinaison linéaire des polynômes* $u_1 = x^2$*,* $u_2 = x$ *et* $u_3 = 1$*.*

Théorème 1. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de E est un sous-espace vectoriel de E. Ce sous-espace, noté $L(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, est l'**espace engendré** par $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Exemple 3. *L'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$ *est engendré par les deux vecteurs* $e_1 = (1\,;0)$ *et* $e_2 = (0\,;1)$*, mais aussi par les trois vecteurs* $u_1 = (1\,;1)$*,* $u_2 = (-1\,;2)$ *et* $u_3 = (2\,;1)$*.*

Exemple 4. *L'ensemble des solutions de l'équation* $2x - y = 0$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$*, engendré par le vecteur* $u = (1\,;2)$*.*

Exemple 5. *L'ensemble des solutions du système d'équations*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 4y & + & 9z & - & 7t & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & t & = & 0 \\ 5x & - & 6y & + & 10z & + & 7t & = & 0 \end{array}\right.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ *engendré par les vecteurs* $u = (2\,;5\,;2\,;0)$ *et* $v = (-5\,;-3\,;0\,;1)$*. On le note* $L\big((2\,;5\,;2\,;0), (-5\,;-3\,;0\,;1)\big)$*.*

Exemple 6. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs* $(0\,;1\,;2)$ *et* $(1\,;1\,;1)$ *est l'ensemble des triplets* $(x\,;y\,;z)$ *de nombres réels qui satisfont l'équation* $x - 2y + z = 0$*.*
En effet, un élément $(x\,;y\,;z)$ *de* $L\big((0\,;1\,;2), (1\,;1\,;1)\big)$ *peut s'écrire sous la forme* $(x\,;y\,;z) = \lambda(0\,;1\,;2) + \mu(1\,;1\,;1)$*. Cette équation peut être décomposée en trois équations.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \mu \\ y & = & \lambda + \mu \\ z & = & 2\lambda + \mu \end{array}\right.$$

En éliminant le paramètre μ*, on trouve*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \lambda + x \\ z & = & 2\lambda + x \end{array}\right.$$

L'élimination du paramètre λ *donne finalement*

$$x - 2y + z = 0$$

Le sous-espace $L\big((0\,;1\,;2)\,;(1\,;1\,;1)\big)$ *est appelé plan vectoriel.*

2.4 Indépendance linéaire

On se donne des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ d'un espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot)$. Ces vecteurs sont **linéairement indépendants** si et seulement si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = o \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$$

Ce qui signifie que la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont **linéairement dépendants** s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = o$.

Exemple 1. *Les vecteurs* $(1\,;0)$, $(0\,;1)$ *et* $(1\,;1)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont linéairement dépendants car*

$$1\cdot(1\,;0) + 1\cdot(0\,;1) - 1\cdot(1\,;1) = (0\,;0)$$

Théorème 2. Des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ d'un espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot)$ sont linéairement dépendants si et seulement si au moins l'un d'eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exemple 2. *Les vecteurs* $(1\,;-2\,;0)$, $(2\,;1\,;2)$ *et* $(3\,;4\,;4)$ *sont linéairement dépendants car* $(3\,;4\,;4) = (-1)\cdot(1\,;-2\,;0) + 2\cdot(2\,;1\,;2)$.

Exemple 3. *Les vecteurs* $u_1 = (0\,;1\,;1)$, $u_2 = (1\,;2\,;1)$ *et* $u_3 = (-1\,;0\,;2)$ *sont linéairement indépendants. En effet, l'équation* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = o$ *amène à résoudre le système*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Comme le déterminant du système est différent de 0, la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exemple 4. *Les vecteurs* $u_1 = x^2 + x$, $u_2 = x - 1$, $u_3 = x + 1$ *et* $u_4 = 1$ *de l'espace vectoriel* $\mathbb{P}_2$ *sont linéairement dépendants car* $u_2 = u_3 - 2u_4$.

Exemple 5. *Les vecteurs* $e_1 = (1\,;0)$, $e_2 = (0\,;1)$ *et* $u = (1\,;1)$ *engendrent l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$. *En effet, tout vecteur* $(x\,;y)$ *peut s'écrire comme combinaison linéaire de* e_1, e_2 *et* u. *On a*

$$(x\,;y) = xe_1 + ye_2 + 0u$$

Mais cette écriture n'est pas unique. On a également

$$(x\,;y) = (x-1)e_1 + (y-1)e_2 + 1u$$

Les vecteurs e_1, e_2 *et* u *engendrent l'espace* $\mathbb{R}^2$, *mais sont linéairement dépendants.*

2.5 Bases et dimension

On considère un espace vectoriel $(E\,;+\,;\cdot\,)$. Une **base** de E est un ensemble ordonné $\mathcal{B}=(e_1\,;e_2\,;\,\dots\,;e_n)$ de vecteurs de E, linéairement indépendants, qui engendrent E.

Exemple 1. *Tout vecteur $u=(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1=(1\,;0)$ et $e_2=(0\,;1)$. Les vecteurs e_1 et e_2 sont linéairement indépendants. L'ensemble ordonné $\mathcal{B}=(e_1\,;e_2)$ forme par conséquent une base de $\mathbb{R}^2$. Cette base est appelée base canonique. Les scalaires x et y sont les composantes du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$. On représente le vecteur u par une matrice-colonne U dont les éléments sont les composantes du vecteur u.*

$$U=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Théorème 3. On considère un espace vectoriel $(E,+,\cdot\,)$ et une base $\mathcal{B}$ de E. Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. Comme les vecteurs de la base $\mathcal{B}=(e_1\,;e_2\,;\,\dots\,;e_n)$ engendrent l'espace E, tout vecteur u de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs. Supposons qu'un vecteur u s'écrive de deux manières différentes.

$$u=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\ldots+\beta_ne_n$$

On a alors

$$o=u-u=(\alpha_1-\beta_1)e_1+(\alpha_2-\beta_2)e_2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)e_n$$

Comme $e_1,e_2,\dots,e_n$ sont linéairement indépendants, tous les coefficients doivent être nuls et donc $\alpha_i=\beta_i$, pour tout i. L'écriture de u comme combinaison linéaire des vecteurs de $(e_1\,;e_2\,;\,\dots\,;e_n)$ est donc unique. □

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}$, on peut écrire chaque vecteur u de manière unique comme $u=u_1e_1+u_2e_2+\ldots+u_ne_n$. Les réels $u_1,u_2,\dots,u_n$ sont les **composantes** du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$. On peut représenter le vecteur u par la matrice-colonne

$$U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$$

Si U et V sont les matrices-colonne des vecteurs u et v respectivement, par rapport à la même base $\mathcal{B}$, alors la matrice-colonne $U + V$ représente le vecteur $u + v$ et la matrice-colonne λU représente le vecteur λu.

Exemple 2. *Les vecteurs* $e_1 = (1\,;0\,;0)$, $e_2 = (0\,;1\,;0)$ *et* $e_3 = (0\,;0\,;1)$ *forment la base canonique de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$. *Relativement à cette base, le vecteur* $(4\,;5\,;-2)$ *est représenté par la matrice-colonne* $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

D'une manière générale, les vecteurs

$$e_1 = (1\,;0\,;\ldots\,;0), e_2 = (0\,;1\,;0\,;\ldots\,;0), \ldots, e_n = (0\,;\ldots\,;0\,;1)$$

forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3. *Le vecteur* $u = (2\,;3)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sera représenté dans la base canonique par la matrice-colonne* $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Les vecteurs* $e_1 = (-1\,;2)$ *et* $e_2 = (1\,;-1)$ *forment aussi une base de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$. *Dans cette base, le vecteur* $u = (2\,;3)$ *s'écrit* $(2\,;3) = 5e_1 + 7e_2$ *et sera représenté par la matrice-colonne* $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exemple 4. *L'ensemble ordonné* $(1\,;x\,;x^2)$ *est une base de* $\mathbb{P}_2$. *Relativement à cette base, le polynôme* $3x^2 - 7x + 2$ *peut donc être représenté par la matrice-colonne* $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exemple 5. *On considère les vecteurs* $v_1 = (1\,;2\,;0)$, $v_2 = (1\,;0\,;1)$, $v_3 = (2\,;6\,;-1)$, $v_4 = (1\,;0\,;0)$ *et* $v_5 = (-1\,;-2\,;-1)$. *Ces vecteurs engendrent l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *mais ne sont pas linéairement indépendants. On a, par exemple,* $v_4 = -2v_1 + 2v_2 + v_3 + v_5$. *L'ensemble réduit formé des vecteurs* $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ *engendre par conséquent* $\mathbb{R}^3$. *Mais ces vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. On a par exemple* $v_3 = 3v_1 - v_2$. *Les vecteurs* v_1, v_2 *et* v_5 *engendrent* $\mathbb{R}^3$ *et sont eux linéairement indépendants : l'équation* $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_5 v_5 = o$ *amène à résoudre le système*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_5 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & - & 2\lambda_5 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

qui ne possède que la solution triviale $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0$.
L'ensemble ordonné de vecteurs $\mathcal{B}_1 = (v_1\,;v_2\,;v_5)$ *est donc une base de* $\mathbb{R}^3$. *Une autre base de* $\mathbb{R}^3$ *peut être construite à l'aide des vecteurs* v_1, v_2 *et* v_5. *Il suffit de modifier l'ordre en prenant par exemple* $\mathcal{B}_2 = (v_2\,;v_1\,;v_5)$.

Le vecteur u représenté par la matrice-colonne $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ *dans la base* $\mathcal{B}_1$ *sera représenté par la matrice-colonne* $U_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *dans la base* $\mathcal{B}_2$.

Théorème 4. On considère un espace vectoriel E différent de $\{o\}$ et un ensemble fini $\mathcal{F}$ de vecteurs qui engendrent E. On peut extraire de $\mathcal{F}$ une base de E.

Démonstration. On note $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ un ensemble de vecteurs qui engendrent l'espace vectoriel E. On peut considérer deux cas. Tout d'abord, si les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont linéairement indépendants, alors cet ensemble, une fois ordonné, forme une base de E. Sinon, on peut écrire l'un de ces vecteurs comme combinaison linéaire des autres. Pour simplifier, choisissons v_p. L'ensemble $\mathcal{F}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}\}$ engendre aussi E. Si ces vecteurs sont linéairement indépendants, alors cet ensemble ordonné forme une base de E, sinon, l'un d'eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. En poursuivant ce processus, on finit par obtenir une base de E. $\square$

Exemple 6. *Dans l'exemple précédent, les vecteurs* v_1, v_2, v_3, v_4 *et* v_5 *engendraient l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$. *Considérons maintenant les vecteurs* $u_1 = (5\,;3\,;0)$ *et* $u_2 = (4\,;1\,;0)$. *Ces vecteurs sont linéairement indépendants mais n'engendrent pas* $\mathbb{R}^3$. *Le vecteur* $(4\,;1\,;2)$ *ne peut être écrit à l'aide des vecteurs* u_1 *et* u_2. *On peut compléter l'ensemble* $\{u_1\,;u_2\}$ *à l'aide de vecteurs choisis dans* $\{v_1\,;v_2\,;v_3\,;v_4\,;v_5\}$ *pour former une base de* $\mathbb{R}^3$. *On choisit le premier vecteur* v_1, *mais on constate que les vecteurs* u_1, u_2 *et* v_1 *sont linéairement dépendants. En effet,* $v_1 = u_1 - u_2$. *On essaie alors avec* v_2 *et on constate que les vecteurs* u_1, u_2 *et* v_2 *sont linéairement indépendants. On ajoute ensuite à* $\{u_1\,;u_2\,;v_2\}$ *le vecteur* v_3. *Mais* $v_3 = 3u_1 - 3u_2 - v_2$. *Ces quatre vecteurs ne sont donc pas linéairement indépendants. En poursuivant ainsi, on arrive à montrer que les vecteurs* v_1, v_2, v_3, v_4 *et* v_5 *peuvent être écrits à l'aide des vecteurs* u_1, u_2 *et* v_2. *Ceux-ci engendrent par conséquent aussi* $\mathbb{R}^3$. *Comme ils sont linéairement indépendants, l'ensemble ordonné* $(u_1\,;u_2\,;v_2)$ *est une base de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$.

Théorème 5. On considère $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ un ensemble de vecteurs linéairement indépendants et $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ un ensemble de vecteurs qui engendrent un espace vectoriel E. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ n'est pas une base de E, on peut extraire de $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ des vecteurs $v_{s_1}, v_{s_2}, \ldots, v_{s_m}$ tels que $(u_1 ; u_2 ; \ldots ; u_k ; v_{s_1} ; v_{s_2} ; \ldots ; v_{s_m})$ est une base de E.

Théorème 6. On considère un espace vectoriel E et une base $\mathcal{B}$ de E comportant n vecteurs. Si l'on choisit un nombre m de vecteurs de E, avec $m > n$, alors ces vecteurs sont linéairement dépendants.

Corollaire 1. Toutes les bases d'un espace vectoriel E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est la **dimension de l'espace vectoriel** E et sera noté $\dim(E)$.

Corollaire 2. Si $\dim(E) = n$, tout ensemble ordonné de n vecteurs linéairement indépendants de E est une base de E.

Corollaire 3. Si $\dim(E) = n$, tout ensemble ordonné de n vecteurs qui engendrent E est une base de E.

> **Exemple 7.** *L'espace vectoriel* V_2 *des vecteurs du plan est de dimension* 2 *et l'espace vectoriel* V_3 *des vecteurs de l'espace est de dimension* 3.
>
> **Exemple 8.** *L'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ *est de dimension* n.
>
> **Exemple 9.** $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$

Remarques

1. Par convention, l'espace vectoriel $\{o\}$ est de dimension 0.
2. L'espace vectoriel $\mathbb{P}$ de tous les polynômes définis sur $\mathbb{R}$, ne peut pas être engendré par un nombre fini de vecteurs. Il est de dimension infinie. Une base possible est $\mathcal{B} = (1 ; x ; x^2 ; x^3 ; \ldots)$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

On considère un espace vectoriel E de dimension n et un sous-espace vectoriel F de E. On a alors

1. $\dim(F) \leq \dim(E)$
2. $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$

> **Exemple 10.** *Les vecteurs* $u_1 = (-2 ; 1 ; 0)$ *et* $u_2 = (1 ; 0 ; 1)$ *sont linéairement indépendants et engendrent un sous-espace vectoriel de dimension 2 de* $\mathbb{R}^3$. *Ce sous-espace est le plan défini par l'équation* $x + 2y - z = 0$.

Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est une **droite vectorielle**.

Un sous-espace vectoriel de dimension 2 est un **plan vectoriel**.

2.6 Exercices

1. Montrer que l'ensemble des matrices $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, muni de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire (voir page 10) est un espace vectoriel.

2. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition comme loi de composition interne et on définit la multiplication par un scalaire ainsi : $\lambda u = o$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{Z}$. L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

3. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition suivantes.

$$\begin{array}{ccc} (x\,;y)+(x'\,;y') & = & (x+x'\,;y+y') \\ \lambda\cdot(x\,;y) & = & (\lambda x\,;y) \end{array}$$

Montrer que $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, n'est pas un espace vectoriel.

4. On considère dans l'espace V_2 des vecteurs du plan, le sous-ensemble V_+ des vecteurs ayant leurs deux composantes positives. Montrer que ce sous-ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel.

5. On considère des vecteurs u, v et w d'un espace vectoriel $(E;\,+\,;\cdot)$. Montrer que

a) Si $u+v=u+w$, alors $v=w$.

b) $0\cdot u=o$

c) $(-1)\cdot u=-u$

6. On considère des vecteurs u et v d'un espace vectoriel $(E\,;+\,;\cdot\,)$ et des nombres réels λ et μ. Montrer que

a) Si $\lambda\cdot u=\mu\cdot u$ et $u\neq o$, alors $\lambda=\mu$.

b) $\lambda\cdot(u-v)=\lambda\cdot u-\lambda\cdot v$

c) $(-\lambda)\cdot(-u)=\lambda\cdot u$

7. a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{P}_3$ des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3, muni des opérations habituelles d'addition de polynômes et de multiplication d'un polynôme par un scalaire, est un espace vectoriel.

b) Même question pour l'ensemble $\mathbb{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $n \in \mathbb{N}$.

8. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ et les opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire. Indiquer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

a) $A_1 = \{(x\,;y) \mid 2x + y = 0\}$

b) $A_2 = \{(x\,;y) \mid 2x + y = 1\}$

c) $A_3 = \{(x\,;y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

d) $A_4 = \{(a - b\,;a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

9. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ et les opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire. Indiquer lesquels sont des espaces vectoriels.

a) $B_1 = \{(x\,;y\,;z) \mid 2x + y - 4z = 0\}$

b) $B_2 = \{(x\,;y\,;z) \mid 2x + y - 4z = 1\}$

c) $B_3 = \{(x\,;2x + 2\,;x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

d) $B_4 = \{(x\,;2x\,;3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

e) $B_5 = \{(a - b + c\,;a + b - c, 2a + 3b) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

f) $B_6 = \{(x\,;y\,;z) \mid x + y = y + z = z + x\}$

10. On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des fonctions définies par $f(x) = a\cos(x) + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{T}$ muni des opérations habituelles d'addition de fonctions et de multiplication d'une fonction par un scalaire est un espace vectoriel.

11. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions réelles paires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'ensemble des fonctions réelles impaires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

12. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$ forme un espace vectoriel.

13. Une entreprise produit deux articles. Pour l'article A, elle compte 7.– de matières premières, 3.– de coût de production et 1.– de frais généraux. Pour la fabrication de l'article B, ces frais sont de 4.–, 2.– et 1.– respectivement. On pose $a = (7\,;3\,;1)$ et $b = (4\,;2\,;1)$.

a) Quelle interprétation économique peut-on donner au vecteur $5a$?

b) Utiliser une combinaison linéaire de a et b pour décrire les coûts de fabrication de 23 articles A et 72 articles B.

c) Sachant que les coûts des matières premières d'une certaine production s'élèvent à 1400.– et les frais généraux à 260.– peut-on retrouver le nombre d'articles fabriqués de chaque type ?

14. En physique, le centre de masse G d'un système formé de k points P_i est défini par la combinaison linéaire

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} m_i \vec{r_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m}\,\vec{r_i}$$

où m_i est une masse ponctuelle, $m = \sum m_i$ la masse totale du système et $\vec{r_i} = \overrightarrow{OP_i}$ le rayon-vecteur du point P_i.
Calculer le centre de masse des quatre points donnés dans le tableau suivant.

point	masse en g
$P_1(5\,;1\,;3)$	2
$P_2(4\,;0\,;-2)$	5
$P_3(-3\,;-3\,;4)$	2
$P_4(7\,;2\,;2)$	1

15. Pourquoi $\mathbb{R}^2$ n'est-il pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

16. a) Les vecteurs $x = (22\,;-35\,;-27)$ et $y = (10\,;5\,;3)$ appartiennent-ils au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1\,;0\,;1)$ et $(-3\,;5\,;4)$?

b) Les vecteurs $x = (1\,;0\,;0\,;0)$ et $y = (6\,;34\,;-26\,;17)$ appartiennent-ils au sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(5\,;8\,;-5\,;3)$, $(-5\,;8\,;-9\,;-2)$ et $(-9\,;-6\,;3\,;7)$?

17. a) Montrer que les fonctions $f\colon x \mapsto e^x$ et $g\colon x \mapsto e^{-x}$ sont linéairement indépendantes.

b) Exprimer les fonctions $x \mapsto \cosh(x)$ et $x \mapsto \sinh(x)$ comme combinaisons linéaires de f et de g.

c) Les fonctions f, g et $h\colon x \mapsto \cosh(x+1)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

18. Montrer que les vecteurs $u_1 = (1\,;2)$ et $u_2 = (-1\,;2)$ sont linéairement indépendants. Écrire ensuite les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ dans la base $(u_1\,;u_2)$.

19. Montrer que les trois vecteurs $u_1 = (1\,;-2\,;1)$, $u_2 = (-1\,;0\,;1)$ et $u_3 = (2\,;1\,;0)$ sont linéairement indépendants. Écrire ensuite les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base $(u_1\,;u_2\,;u_3)$.

20. On donne trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $u = (-1\,;1)$, $v = (2\,;1)$ et $x = (4\,;5)$. Montrer que l'ensemble ordonné de vecteurs $(u\,;v)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ et exprimer x dans cette base.

21. Une pyramide de sommet S a pour base un carré $ABCD$. Trouver les composantes du vecteur $\overrightarrow{SD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{SA}\,;\overrightarrow{SB}\,;\overrightarrow{SC}\right)$ et écrire la matrice-colonne correspondante.

22. Les vecteurs indiqués forment-ils une base de l'espace mentionné ?

a)	$(1\,;0)$, $(1\,;2)$	$\mathbb{R}^2$
b)	$(0\,;1)$, $(0\,;2)$, $(1\,;2)$	$\mathbb{R}^2$
c)	$(-1\,;3)$, $(2\,;-6)$	$\mathbb{R}^2$
d)	$(1\,;2\,;1)$, $(-3\,;1\,;2)$, $(-5\,;4\,;5)$	$\mathbb{R}^3$
e)	$(1\,;0\,;3)$, $(1\,;0\,;1)$, $(0\,;1\,;0)$	$\mathbb{R}^3$
f)	$(1\,;0\,;0)$, $(0\,;1\,;0)$	$\mathbb{R}^3$
g)	$(1\,;0\,;0)$, $(0\,;1\,;0)$	$\mathbb{R}^2$

23. Montrer que l'ensemble ordonné de polynômes $(x^2 + x\,; x + 1\,; 1)$ est une base de $\mathbb{P}_2$. Représenter ensuite les polynômes suivants par des matrices-colonne relativement à cette base.

a) $p(x) = 1$ b) $q(x) = x$ c) $r(x) = x^2$ d) $s(x) = 3x^2 - 7x + 2$

24. L'ensemble ordonné de polynômes $(1 + x^2\,; 4 + x + 5x^2\,; 3 + 2x)$ est-il une base de $\mathbb{P}_2$?

25. Trouver une base de l'ensemble des couples de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant l'équation linéaire $x + y = 0$.

26. Montrer que l'ensemble des matrices carrées de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Donner la dimension et une base de ce sous-espace vectoriel.

27. Déterminer la dimension et une base de l'ensemble des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & & & = & 0 \\ x & & & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

28. Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par

a) $(1\,;-2\,;1)$, $(1\,;3\,;2)$ et $(0\,;5\,;1)$

b) $(1\,;4\,;2)$ et $(2\,;3\,;1)$

c) $(1\,;-3\,;2)$, $(2\,;5\,;4)$ et $(5\,;1\,;3)$

d) $(1\,;-2\,;2)$ et $(-2\,;4\,;-4)$

e) $(1\,;4\,;2)$, $(-2\,;-7\,;3)$ et $(1\,;5\,;9)$

f) $(1\,;-2\,;4)$, $(2\,;3\,;-6)$, $(1\,;3\,;-6)$ et $(5\,;9\,;-18)$

29. Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants.

a) $A = \{(x\,;y) \mid y = 2x\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $B = \{(x\,;y\,;z) \mid y = 2x \text{ et } z = -3x\} \subset \mathbb{R}^3$

c) $C = \{(x\,;y\,;z) \mid -2x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

d) $D = \{(x\,;y\,;z) \mid y = 5x - 3z\} \subset \mathbb{R}^3$

30. Trouver une base et la dimension des sous-espaces engendrés par les vecteurs des ensembles donnés.

a) $A = \{(-2\,;1), (4\,;-2)\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $B = \{(-1\,;3), (2\,;1)\} \subset \mathbb{R}^2$

c) $C = \{(-1\,;3), (2\,;1), (3\,;2)\} \subset \mathbb{R}^2$

d) $D = \{(2\,;-1\,;3)\} \subset \mathbb{R}^3$

e) $E = \{(-1\,;2\,;2), (2\,;-1\,;1), (-1\,;5\,;7)\} \subset \mathbb{R}^3$

f) $F = \{(2\,;1\,;-4), (1\,;3\,;-2), (2\,;1\,;5)\} \subset \mathbb{R}^3$

31. Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(0\,;1\,;0\,;1)$, $(2\,;1\,;2\,;1)$, $(1\,;0\,;1\,;0)$ et $(3\,;-3\,;3\,;-3)$.

32. Donner une base de l'espace vectoriel des fonctions réelles engendré par $\sin(t)$, $\sin(2t)$ et $\sin(t)\cos(t)$.

33. Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs donnés de $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

34. Déterminer la dimension de $F = L(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1\,;2\,;0)$, $u_2 = (1\,;-1\,;2)$ et $u_3 = (1\,;-7\,;6)$.
Trouver ensuite une base de ce sous-espace vectoriel.

35. On donne les vecteurs $u_1 = (1\,;0\,;-1)$, $u_2 = (2\,;1\,;3)$, $u_3 = (1\,;1\,;4)$ et $v = (3\,;1\,;2)$.

a) Montrer que v appartient à $L(u_1, u_2, u_3)$.

b) Quelle est la dimension de $L(u_1, u_2, u_3)$?

c) Donner une base de $L(u_1, u_2, u_3)$.

36. On considère deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel $(E\,;\,+\,;\cdot\,)$. Montrer que $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

37. Donner la dimension des sous-espaces vectoriels des matrices carrées d'ordre 3 qui sont

a) diagonales,

b) triangulaires inférieures,

c) symétriques.

38. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les deux sous-espaces vectoriels définis par $F = \big\{(x\,;y\,;z) \mid x + 2y + z = 0\big\}$ et $G = \big\{(x\,;y\,;z) \mid y + 2z = 0\big\}$.

a) Trouver une base de chacun de ces sous-espaces.

b) Déterminer $F \cap G$ et trouver une base de ce sous-espace vectoriel.

39. On peut démontrer que l'ensemble solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est un espace vectoriel de dimension n.

Montrer que les fonctions $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation du mouvement d'oscillation harmonique

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

En déduire la solution générale de cette équation différentielle.

Réponses aux exercices du chapitre 2

2. Non, $1 \cdot u \neq u$ par exemple

3. La propriété 8 n'est pas satisfaite car, par exemple $(2+3)\cdot(1\,;1) \neq 2\cdot(1\,;1) + 3\cdot(1\,;1)$

4. Si $u \in V_+$ et $\lambda < 0$, alors $\lambda \cdot u \notin V_+$

8. A_1, A_4

9. B_1, B_4, B_5 et B_6

13. a) Le vecteur $5a = (35\,;15\,;5)$ représente les divers frais de production pour 5 articles A.

b) $23a + 72b = (449\,;213\,;95)$

c) 120 articles A et 140 articles B

14. $G(3.1\,;-0.2\,;0.6)$

16. a) x appartient, y n'appartient pas
b) x n'appartient pas, y appartient

17. b) $\cosh(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$ et $\sinh(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$

c) non

18. $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

19. $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

20. $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

21. $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

22. a) oui, b) non, c) non, d) non, e) oui, f) non, g) non

23. a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$

24. oui

25. Le sous-espace vectoriel est engendré par le vecteur $v = (1; -1)$.

26. Dimension = 3, base possible : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

27. Ce sous-espace de dimension 1 est $L\big((2\,;-3\,;1)\big)$.

28. a) $\big((1\,;-2\,;1)\,;(1\,;3\,;2)\big)$ b) $\big((1\,;4\,;2)\,;(2\,;3\,;1)\big)$
c) $\big((1\,;-3\,;2)\,;(2\,;5\,;4)\,;(5\,;1\,;3)\big)$ d) $\big((1\,;-2\,;2)\big)$
e) $\big((1\,;4\,;2)\,;(-2\,;-7\,;3)\big)$ f) $\big((1\,;-2\,;4)\,;(2\,;3\,;-6)\big)$

29. a) $\dim(A) = 1$, $\mathcal{B} = \big((1\,;2)\big)$ b) $\dim(B) = 1$, $\mathcal{B} = \big((1\,;2\,;-3)\big)$

c) $\dim(C) = 2$, $\mathcal{B} = \big((1\,;0\,;2)\,;(1\,;2\,;0)\big)$
d) $\dim(D) = 2$, $\mathcal{B} = \big((0\,;-3\,;1)\,;(1\,;5\,;0)\big)$

30. a) $\mathcal{B} = \big((-2\,;1)\big)$, $\dim(A) = 1$
b) $\mathcal{B} = \big((-1\,;3)\,;(2\,;1)\big)$, $\dim(B) = 2$
c) $\mathcal{B} = \big((-1\,;3)\,;(2\,;1)\big)$, $\dim(C) = 2$
d) $\mathcal{B} = \big((2\,;-1\,;3)\big)$, $\dim(D) = 1$
e) $\mathcal{B} = \big((-1\,;2\,;2)\,;(2\,;-1\,;1)\big)$, $\dim(E) = 2$
f) $\mathcal{B} = \big((2\,;1\,;-4)\,;(1\,;3\,;-2)\,;(2\,;1\,;5)\big)$, $\dim(F) = 3$

31. $\big((0\,;1\,;0\,;1)\,;(1\,;0\,;1\,;0)\big)$ par exemple

32. $\big(\sin(t)\,;\,\sin(2t)\big)$ par exemple

33. a) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right)$. Espace engendré de dimension 2.
b) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$. Espace engendré de dimension 2.

34. $\dim(F) = 2$ $\qquad \mathcal{B}_F = \big(u_1\,;u_2\big)$

35. a) $v = u_1 + u_2$ $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) $\mathcal{B} = \big(u_1\,;u_2\big)$

37. a) 3 b) 6 c) 6

38. a) $\mathcal{B}_F = \big((-2\,;1\,;0)\,;(-1\,;0\,;1)\big)$ $\qquad \mathcal{B}_G = \big((1\,;0\,;0)\,;(0\,;-2\,;1)\big)$
b) $F \cap G = \big\{(3t\,;-2t\,;t), t \in \mathbb{R}\big\}$, $\mathcal{B} = \big((3\,;-2\,;1)\big)$

39. $y = \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3 Applications linéaires

3.1 Définitions et propriétés

Exemple 1. *On considère un nombre réel a et la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$.*

1. $a(x+y) = ax + ay$ *que l'on peut écrire* $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $a(\lambda x) = \lambda(ax)$ *que l'on peut écrire* $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

La fonction f est linéaire. Aucune autre fonction réelle à une variable réelle ne vérifie ces deux propriétés. Par exemple

$f(x)$	$f(x+y)$		$f(x)+f(y)$	$f(\lambda x)$		$\lambda f(x)$
x^2	$(x+y)^2$	$\neq$	x^2+y^2	$(\lambda x)^2$	$\neq$	λx^2
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x+y}$	$\neq$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	$\sqrt{\lambda x}$	$\neq$	$\lambda\sqrt{x}$
$\sin(x)$	$\sin(x+y)$	$\neq$	$\sin(x)+\sin(y)$	$\sin(\lambda x)$	$\neq$	$\lambda \sin(x)$

Exemple 2. *L'application $h\colon V_2 \to V_2$ est définie par $h(\vec{u}) = 3\,\vec{u}$. Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de V_2 et tout nombre réel λ, on a*

1. $h(\vec{u}+\vec{v}) = 3(\vec{u}+\vec{v}) = 3\,\vec{u} + 3\,\vec{v} = h(\vec{u}) + h(\vec{v})$
2. $h(\lambda\,\vec{u}) = 3(\lambda\,\vec{u}) = (3\lambda)\,\vec{u} = (\lambda 3)\,\vec{u} = \lambda(3\,\vec{u}) = \lambda\, h(\vec{u})$

Comme cette application h possède les mêmes propriétés que celle de l'exemple 1, on dit aussi qu'elle est linéaire. Elle est interprétée comme l'homothétie de rapport 3 du plan vectoriel.

Exemple 3. *On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par*

$$f\big((x_1\,;x_2)\big) = 2x_1 - x_2$$

Pour tous les vecteurs $(x_1\,;x_2)$, $(y_1\,;y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et tout nombre réel λ, on a

1. $$\begin{aligned} f\big((x_1\,;x_2)+(y_1\,;y_2)\big) &= f\big((x_1+y_1\,;x_2+y_2)\big) \\ &= 2(x_1+y_1) - (x_2+y_2) \\ &= 2x_1 + 2y_1 - x_2 - y_2 \\ &= 2x_1 - x_2 + 2y_1 - y_2 \\ &= f\big((x_1\,;x_2)\big) + f\big((y_1\,;y_2)\big) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} f(\lambda(x_1\,;x_2)) &= f((\lambda x_1\,;\lambda x_2)) \\ &= 2\lambda x_1 - \lambda x_2 \\ &= \lambda(2x_1 - x_2) \\ &= \lambda f((x_1\,;x_2)) \end{aligned}$$

   L'application f est linéaire.

On considère deux espaces vectoriels E et F. Une application f de E vers F est une **application linéaire** si, pour tous les vecteurs u et v de E et tout nombre réel λ, on a

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Une application linéaire est aussi appelée un **homomorphisme**[1].

Exemple 4. *L'**application nulle** $k_o\colon E \to F$ définie par $k_o(x) = o_F$, où o_F est le vecteur nul de F, est une application linéaire.*

Exemple 5. *L'**identité** $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ définie par $\mathrm{id}_E(x) = x$ est une application linéaire.*

Exemple 6. *La dérivation est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vers l'espace vectoriel des fonctions réelles, car*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad \text{et} \qquad (\lambda f)' = \lambda f'$$

Exemple 7. *L'application $f\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(ax^2+bx+c) = (a\,;b\,;c)$ est linéaire.*

Exemple 8. *L'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x_1\,;x_2)) = (x_1\,;0)$ est une application linéaire, interprétée géométriquement comme une projection.*

Propriétés

1. Si f est une application linéaire de E vers F, alors l'image par f du vecteur nul de E est le vecteur nul de F.

   $$f(o_E) = o_F$$

   En effet, on a $f(o_E) = f(0 \cdot o_E) = 0 \cdot f(o_E) = o_F$ (voir exercice 5, page 65). La réciproque est fausse.

---

[1] Le mot *homomorphisme* vient du grec *homos* (semblable) et *morphê* (forme).

2. Une application f de E vers F est linéaire si et seulement si

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

quels que soient les vecteurs u et v de E et les nombres réels λ et μ.

Exemple 9. *La fonction* $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x-5 \end{aligned}$ *n'est pas linéaire car* $f(0) \neq 0$.

Exemple 10. *La fonction* $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ *n'est pas linéaire bien que* $f(0) = 0$.

Exemple 11. *Si* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *est une application linéaire, alors*

$$\begin{aligned} f\big((x_1\,;x_2)\big) &= f\big((x_1\,;0)+(0\,;x_2)\big) \\ &= f\big((x_1\,;0)\big) + f\big((0\,;x_2)\big) \\ &= f\big(x_1(1\,;0)\big) + f\big(x_2(0\,;1)\big) \\ &= x_1 f\big((1\,;0)\big) + x_2 f\big((0\,;1)\big) \end{aligned}$$

L'image d'un vecteur $(x_1\,;x_2)$ *est donc déterminée si l'on connaît les images des deux vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement, l'image par une application linéaire f d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des images de ces vecteurs, avec les mêmes coefficients. Lorsqu'un vecteur x de E est donné par ses composantes dans une base $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;\ \dots\ ;e_n)$ de E, il suffit de connaître les images $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour déterminer celle du vecteur x. En effet, comme f est linéaire, on a

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

3.2 Matrice associée à une application linéaire

Exemple 1. *Soit* $\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^2 \quad &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2) &\mapsto (-x_1+3x_2\,;2x_1-6x_2\,;x_1-3x_2) \end{aligned}$

En travaillant dans les bases canoniques, on peut écrire matriciellement l'image par l'application f *d'un vecteur* $(x_1\,;x_2)$.

$$\begin{pmatrix} -x_1+3x_2 \\ 2x_1-6x_2 \\ x_1-3x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On observe que les colonnes de la matrice A sont constituées des composantes des images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$f\big((1\,;0)\big) = (-1\,;2\,;1) \quad et \quad f\big((0\,;1)\big) = (3\,;-6\,;-3)$$

La matrice A est appelée matrice associée à l'application f relativement aux bases canoniques.

Exemple 2. *On considère un espace vectoriel E de dimension 2, muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1\,;e_2)$, un espace vectoriel F de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B}_F = (e'_1\,;e'_2\,;e'_3)$, et une application linéaire f de E vers F. On peut calculer l'image y d'un vecteur quelconque $x = x_1e_1 + x_2e_2$ dès lors que l'on connaît les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$.*

$$y = f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2)$$

Si les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ de F sont représentés par les matrices-colonne $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}_F$, on peut écrire matriciellement $y = f(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{31}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $A = (a_{ij})$ s'appelle la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On écrit plus simplement encore

$$Y = A \cdot X$$

On retient que les colonnes de A sont les composantes des vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

On note E et F deux espaces vectoriels, munis des bases $\mathcal{B}_E = (e_1\,;\,\ldots\,;e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (e'_1\,;\,\ldots\,;e'_m)$, et f une application linéaire de E vers F. Les images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont données par

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i$$

La matrice $A = (a_{ij})$ dont les colonnes sont les composantes des images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$ dans la base $\mathcal{B}_F$ est la **matrice de l'application linéaire** (ou matrice associée à l'application linéaire) relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Elle est de type $m \times n$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c|cc} \cline{4-4} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \\ \cline{4-4} \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

composantes de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$

Exemple 3. *On considère l'espace* $\mathbb{P}_2$ *muni de la base* $(x^2\,; x\,; 1)$. *La dérivation* $d\colon \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ *est définie par* $d(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$.
On a $d(x^2) = 2x$, $d(x) = 1$ *et* $d(1) = 0$. *La matrice associée à* d *relativement à la base* $(x^2\,; x\,; 1)$ *est donc* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 4. *On considère un espace vectoriel* E *de dimension* n. *La matrice de l'identité* id_E *relativement à une base donnée est la matrice unité* I_n.

Exemple 5. *On considère une application linéaire* g *de* $\mathbb{R}^3$ *vers* $\mathbb{R}^2$ *dont la matrice relativement aux bases canoniques est*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'image d'un vecteur $(x_1\,; x_2\,; x_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est le vecteur* $(y_1\,; y_2)$ *tel que*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Théorème 1. On considère deux espaces vectoriels E et F munis de bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Une application linéaire f de E vers F est donnée par la matrice A. On peut calculer, sous forme matricielle, l'image y par f d'un vecteur quelconque x de E avec la formule

$$Y = A \cdot X$$

où X et Y sont les matrices-colonne associées aux vecteurs x et y.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La démonstration de ce théorème est une généralisation de celle proposée dans l'exemple 2 de la page 76.

Exemple 6. *On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut déterminer l'image d'un vecteur $(x_1\,; x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ en calculant

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $f\big((x_1\,; x_2)\big) = (x_1 - 2x_2\,; x_2\,; 2x_1 + 3x_2)$.

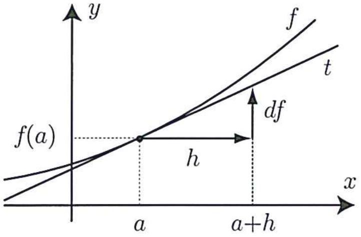
3.3 Matrice jacobienne et différentielle

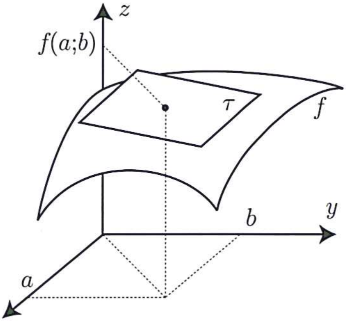
Ce paragraphe présente une contribution de l'algèbre linéaire à l'analyse. Son étude n'est pas nécessaire à la compréhension des chapitres suivants. Sa lecture permet cependant de découvrir la simplification que peut apporter la notion d'application linéaire dans le travail mathématique de niveau supérieur.

Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a peut être approchée au voisinage de a par la fonction affine tangente t d'équation

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Le nombre $f'(a)$ est la pente de cette tangente et, en posant $h = x - a$, le produit $f'(a) \cdot h$, noté df, est appelé la différentielle de f en a.





De manière analogue, on détermine le plan tangent τ à la surface de $\mathbb{R}^3$ qui représente la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & f(x\,;y) \end{array}$ en $(a\,;b)$ par l'équation

$$z = f(a\,;b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a\,;b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a\,;b)\cdot(y-b)$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont les dérivées partielles de f par rapport à x et y.

Exemple 1. *On considère la fonction f définie par $f(x\,;y) = x^2y$. On a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = x^2$$

Pour $x = 3$ et $y = 2$, on trouve $f(3\,;2) = 18$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3\,;2) = 12$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3\,;2) = 9$ et le plan tangent d'équation $z = 18+12(x-3)+9(y-2)$. Ce plan constitue une approximation d'ordre 1 de la fonction f au voisinage de $(3\,;2)$ et on peut écrire sous forme matricielle

$$f(x\,;y) \approx 18 + \begin{pmatrix} 12 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

L'application linéaire $df\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 12 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 12h_1 + 9h_2 \end{array}$

est appelée la différentielle de f en $(3\,;2)$.

Plus généralement, si

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1\,;x_2\,;\,\dots\,;x_n) & \longmapsto & \big(f_1(x)\,;f_2(x)\,;\,\dots\,;f_m(x)\big) \end{array}$$

est une fonction de n variables réelles et que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ désigne la dérivée partielle de f_i par rapport à x_j, on considère la matrice

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

de type $m \times n$ qui est la **matrice jacobienne**[2] de f. La **différentielle** de f en $a \in \mathbb{R}^n$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ de matrice $J(a)$ par rapport aux bases canoniques. Elle permet de calculer une approximation d'ordre 1 de la fonction f au voisinage de a.

Exemple 2. *La fonction* $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \mapsto & (x^2 - 3y\,; x + 5y + xy\,; 7x + e^y) \end{array}$
possède la matrice jacobienne

$$J(x\,;y) = \begin{pmatrix} 2x & -3 \\ 1+y & 5+x \\ 7 & e^y \end{pmatrix}$$

En $(0\,;0)$, *la différentielle de* f *est l'application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}^3$ *donnée par*

$$df = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3h_2 \\ h_1 + 5h_2 \\ 7h_1 + h_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'approximation d'ordre 1 suivante.

$$f(x\,;y) \approx (0\,;0\,;1) + (-3y\,;x + 5y\,;7x + y) = (-3y\,;x + 5y\,;1 + 7x + y)$$

3.4 Image et noyau d'une application linéaire

On considère deux espaces vectoriels E et F de dimension finie et une application linéaire f de E vers F.

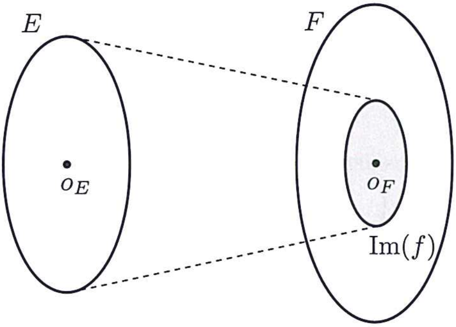
Image d'une application linéaire

L'**image de f**, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble de toutes les images par f des vecteurs de E.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{f(x) \in F \mid x \in E\} \\ &= \{y \in F \mid \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } y = f(x)\} \end{aligned}$$

---

[2] Carl Gustav Jakob Jacobi, mathématicien allemand, 1804–1851



Propriétés

1. Le vecteur nul de F appartient à $\mathrm{Im}(f)$.
2. L'image de f est un sous-espace vectoriel de F.
   La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est appelée **rang de l'application** f.
3. L'espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les images des vecteurs d'une base de E.
4. L'application f est surjective si et seulement si $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(F)$.

Démonstrations

1. Comme $f(o_E) = o_F$ (voir page 74), on a $o_F \in \mathrm{Im}(f)$.
2. On considère v_1 et v_2 deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ et λ un nombre réel. Il suffit de montrer que $v_1 + v_2 \in \mathrm{Im}(f)$ et que $\lambda\, v_1 \in \mathrm{Im}(f)$.
   Par définition de $\mathrm{Im}(f)$, il existe deux vecteurs x_1 et x_2 de E tels que $v_1 = f(x_1)$ et $v_2 = f(x_2)$. Par linéarité, on en déduit que
   $$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in \mathrm{Im}(f) \\ \lambda\, v_1 &= \lambda\, f(x_1) = f(\lambda\, x_1) \in \mathrm{Im}(f) \end{aligned}$$
3. Cette propriété est une conséquence immédiate de la propriété de linéarité de f (voir page 75).
4. On applique la propriété 2 de la dimension d'un sous-espace vectoriel (voir page 64). □

Exemple 1. *Soit* $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2) & \mapsto & (-x_1 + 3x_2\,; 2x_1 - 6x_2\,; x_1 - 3x_2) \end{array}$

Les images par f *des vecteurs de la base canonique sont* $(-1\,;2\,;1)$ *et* $(3\,;-6\,;-3)$. *L'image de* f *est le sous-espace engendré par ces deux vecteurs, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Im}(f) = L\big((-1\,;2\,;1),(3\,;-6\,;-3)\big) = L\big((-1\,;2\,;1)\big)$$

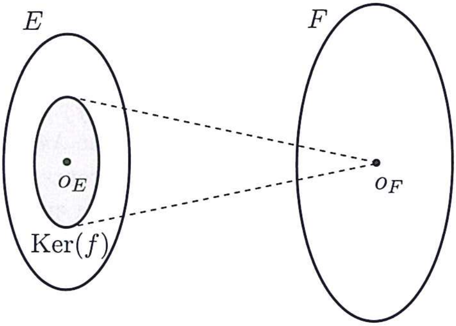
Dans ce cas, l'image de f est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. On constate que les colonnes de la matrice associée à f relativement aux bases canoniques sont les composantes des vecteurs qui engendrent $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 2. *On considère une application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par sa matrice* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ *relativement aux bases canoniques. On a* $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$ *car cet espace est engendré par les vecteurs* $(2\,;-1)$, $(1\,;3)$ *et* $(4\,;5)$. *L'application g est surjective.*

Noyau d'une application linéaire

Le **noyau de f**, noté[3] $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par l'application linéaire f est le vecteur nul de F.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = o_F\}$$



Propriétés

1. Le vecteur nul de E appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.
3. Les trois énoncés suivants sont équivalents.
   a) L'application f est injective.
   b) Les images des vecteurs d'une base de E sont des vecteurs linéairement indépendants de F.
   c) $\mathrm{Ker}(f) = \{o_E\}$

---

[3] En allemand, noyau se dit *Kern* ; en anglais, *kernel*.

Démonstrations

1. Comme $f(o_E) = o_F$ (voir page 74), on a $o_E \in \mathrm{Ker}(f)$.
2. On considère x_1 et x_2 deux vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$ et λ un nombre réel. Par linéarité, on a

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) = o_F + o_F = o_F \\ f(\lambda\, x_1) &= \lambda\, f(x_1) = \lambda\, o_F = o_F \end{aligned}$$

   Ainsi $x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda\, x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.
3. On obtient toutes les équivalences en démontrant successivement que a) implique b), b) implique c) et c) implique a).

   Démonstration de a) $\Rightarrow$ b)
   L'application f est injective si, pour tous les vecteurs x_1 et x_2 de E, on a $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
   On note $\mathcal{B}_E = (e_1\,; e_2\,; \ldots\,; e_n)$ une base de E et α_i des réels tels que $\sum \alpha_i f(e_i) = o_F$. On doit montrer que tous les réels α_i sont nuls.
   Par propriété de linéarité, on peut écrire $f\left(\sum \alpha_i e_i\right) = o_F$. Sachant toutefois que $f(o_E) = o_F$, l'injection de f implique $\sum \alpha_i e_i = o_E$. Mais comme les vecteurs de $\mathcal{B}_E$ sont linéairement indépendants, on obtient $\alpha_i = 0$ pour tout i.

   Démonstration de b) $\Rightarrow$ c)
   On note $\mathcal{B}_E = (e_1\,; e_2\,; \ldots\,; e_n)$ une base de E et u un vecteur quelconque de $\mathrm{Ker}(f)$. On doit montrer que u est le vecteur nul.
   Comme $\mathcal{B}_E$ est une base de E, on peut écrire $u = \sum \alpha_i e_i$. Par linéarité de l'application, on obtient $f(u) = f\left(\sum \alpha_i e_i\right) = \sum \alpha_i f(e_i)$. Cette dernière combinaison linéaire est égale à o_F car $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Mais comme les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ sont linéairement indépendants, on en déduit que $\alpha_i = 0$ pour tout i et donc que $u = o_E$.

   Démonstration de c) $\Rightarrow$ a)
   Si l'on pose $f(x_1) = f(x_2)$, on obtient successivement
   $f(x_1) - f(x_2) = o_F$
   $f(x_1 - x_2) = o_F$ par linéarité
   $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ par définition du noyau
   $x_1 - x_2 = o_E$ car, par hypothèse, $\mathrm{Ker}(f) = \{o_E\}$
   $x_1 = x_2$ □

Exemple 3. *Soit* $f\colon \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2) \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mapsto (-x_1+3x_2\,;2x_1-6x_2\,;x_1-3x_2) \end{array}$

$$\begin{aligned}
(x_1\,;x_2)\in \operatorname{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x_1\,;x_2)=(0\,;0\,;0)\\
&\Leftrightarrow (-x_1+3x_2\,;2x_1-6x_2\,;x_1-3x_2)=(0\,;0\,;0)\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & 3x_2 & = & 0\\ 2x_1 & - & 6x_2 & = & 0\\ x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x_1-3x_2=0\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3\lambda\\ x_2 & = & \lambda \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow (x_1\,;x_2)=\lambda(3\,;1)
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker}(f)=L\big((3\,;1)\big)$.
Dans ce cas, le noyau de f *est donc une droite vectorielle de* $\mathbb{R}^2$.

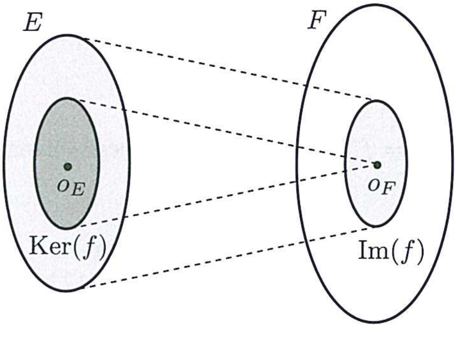
Exemple 4. *On considère une application linéaire* g *de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}^3$ *définie par sa matrice* $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ *relativement aux bases canoniques.*
En utilisant l'écriture matricielle, on a

$$A\cdot X=O \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_1=x_2=0$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(g)=\big\{(0\,;0)\big\}$ *et que l'application* g *est injective.*

Théorème 2 (théorème du rang). Si E est un espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E vers un espace vectoriel F, alors

$$\dim(E)=\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big)+\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$



Exemple 5. *Pour* $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2) & \mapsto & (-x_1+3x_2\,;2x_1-6x_2\,;x_1-3x_2) \end{array}$ *on a vu (exemples 1 et 3) que le noyau et l'image de cette application linéaire sont tous deux de dimension 1.*

On a bien $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = 1+1 = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$.

Exemple 6. *On reprend l'application linéaire* g *de* $\mathbb{R}^3$ *vers* $\mathbb{R}^2$ *de l'exemple 2, définie par la matrice* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Comme* $\dim\big(\operatorname{Im}(g)\big) = 2$, *on peut conclure que la dimension du noyau de* g *est 1. L'espace* $\operatorname{Ker}(f)$ *est engendré par le vecteur* $(1\,;2\,;-1)$, *car*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Corollaire 1. Si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension et que f est une application linéaire de E vers F, alors

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}$$

Une application linéaire bijective de E vers F est un **isomorphisme**[4]. S'il existe un tel isomorphisme, les espaces E et F sont **isomorphes**.

Corollaire 2. On considère deux espaces vectoriels E et F de dimension finie. Il existe un isomorphisme de E vers F si et seulement si ces espaces ont même dimension.

Remarque importante. Tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à l'espace $\mathbb{R}^n$. Cela signifie que, dans la suite de ce cours, on peut se limiter à l'étude des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$.

Exemple 7. *L'application linéaire donnée dans l'exemple 7 de la page 74 est un isomorphisme. Les espaces vectoriels* $\mathbb{P}_2$ *et* $\mathbb{R}^3$ *sont donc isomorphes.*

---

[4] Le mot *isomorphisme* vient du grec *isos* (égal) et *morphê* (forme).

Exemple 8. *On se donne une application linéaire f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$ par sa matrice associée relativement à la base canonique.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer le noyau de cette application linéaire, il faut résoudre le système homogène $A \cdot X = O$. Par la méthode de Gauss (voir page 2), on peut échelonner la matrice A par des opérations sur les lignes et obtenir le système équivalent

$$B \cdot X = 0 \qquad \text{avec } B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système, on obtient que

$$\operatorname{Ker}(f) = L\big((2\,;-1\,;1\,;0)\big)$$

qui est de dimension 1. L'espace $\operatorname{Im}(f)$ est donc de dimension 3.
Les colonnes de la matrice A engendrent $\operatorname{Im}(f)$. En ne prenant que des vecteurs linéairement indépendants, on obtient une base de cet espace. Une méthode consiste à choisir les colonnes de la matrice A qui correspondent à celles de la matrice B ayant un élément en «position pivot» (premier élément non nul des lignes de B). Dans la matrice B, on a $C_3 = C_2 - 2C_1$. La troisième colonne de la matrice A est elle aussi combinaison linéaire des deux premières. On obtient ainsi

$$\operatorname{Im}(f) = L\big((1\,;2\,;1\,;0),(1\,;1\,;0\,;1),(2\,;1\,;0\,;0)\big)$$

On peut justifier cet algorithme de la manière suivante : les opérations effectuées sur les lignes ne changent pas les relations de dépendance linéaire (sinon elles changeraient les solutions du système linéaire). On choisit comme base de $\operatorname{Im}(f)$ des vecteurs dans la matrice A et non dans la matrice échelonnée B.

3.5 Opérations sur les applications linéaires

Dans ce paragraphe, E, F et G sont des espaces vectoriels. Lorsqu'on parle de matrice associée à une application linéaire, il est sous-entendu que ces espaces vectoriels sont de dimension finie et munis des bases notées $\mathcal{B}_E = (e_1\,;\ldots;e_n)$, $\mathcal{B}_F = (e'_1\,;\ldots;e'_m)$ et $\mathcal{B}_G = (e''_1\,;\ldots;e''_p)$.

Théorème 3. Si f et g sont deux applications linéaires de E vers F et λ un nombre réel, alors λf et $f+g$ sont aussi des applications linéaires de E vers F.

> **Exemple 1.** *On donne deux applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$.*
> $f\colon (x\,;y\,;z) \mapsto (2x+z\,;y-3z)$ *et* $g\colon (x\,;y\,;z) \mapsto (x+2y-z\,;x+y)$
> *On vérifie immédiatement que les applications*
>
> $$\begin{aligned} 3f\colon \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x\,;y\,;z) \mapsto (6x+3z\,;3y-9z) \\ f+g\colon \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x\,;y\,;z) \mapsto (3x+2y\,;x+2y-3z) \end{aligned}$$
>
> *sont elles aussi linéaires. En écrivant les matrices associées à ces quatre applications linéaires relativement aux bases canoniques, on peut observer les résultats énoncés dans le théorème suivant.*

Théorème 4. On considère f et g deux applications linéaires de E vers F, on note A et B les matrices qui leur sont associées et λ un nombre réel.

1. La matrice associée à λf est la matrice λA.
2. La matrice associée à $f+g$ est la matrice $A+B$.

Démonstration. On démontre la seconde de ces propriétés. La première s'obtient d'une manière analogue.

Par définition de la somme, on a pour tout vecteur x de E

$$y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Si X et Y sont les matrices-colonne associées respectivement à x et y, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} Y &= A\cdot X + B\cdot X && \text{théorème 1, page 77} \\ &= (A+B)\cdot X && \text{propriété 3 du calcul matriciel, page 14} \end{aligned}$$ ☐

Théorème 5. Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont deux applications linéaires, alors la composée $g\circ f\colon E \to G$ est aussi une application linéaire.

Démonstration. Pour tous les vecteurs u et v de E, on a

$$\begin{aligned} (g\circ f)(u+v) &= g\big(f(u+v)\big) && \text{par définition de la composée} \\ &= g\big(f(u)+f(v)\big) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= g\big(f(u)\big)+g\big(f(v)\big) && \text{car } g \text{ est linéaire} \\ &= (g\circ f)(u)+(g\circ f)(v) && \text{par définition de la composée} \end{aligned}$$

De manière analogue, on montre que $(g\circ f)(\lambda u) = \lambda(g\circ f)(u)$. ☐

Exemple 2. *On considère les deux applications linéaires suivantes.*

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \mapsto & (x+y\,;x-2y-z) \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \mapsto & (x\,;2x+3y) \end{array}$$

La composée est l'application linéaire

$$g\circ f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \mapsto & (x+y\,;5x-4y-3z) \end{array}$$

En écrivant les matrices associées à ces trois applications linéaires relativement aux bases canoniques, on peut observer le résultat énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 6. On considère une application linéaire f de E vers F et une application linéaire g de F vers G, on note A et B les matrices qui leur sont associées. La matrice associée à la composée $g\circ f$ est la matrice $B\cdot A$.

Démonstration. Par définition, on a pour tout vecteur x de E

$$y=(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)$$

Si X et Y sont les matrices-colonne associées respectivement à x et y, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} Y &= B\cdot(A\cdot X) && \text{théorème 1, page 77} \\ &= (B\cdot A)\cdot X && \text{propriété 1 du calcul matriciel, page 14} \end{aligned}$$ □

3.6 Exercices

1. Les applications f définies ci-dessous sont-elles linéaires ?

a) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = x_1 + x_2$

b) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = x_1 \cdot x_2$

c) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (2x_1 - x_2\,;x_1)$

d) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (0\,;|x_2|)$

e) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (x_1^2\,;x_1 + x_2)$

f) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = \big(\sin(x_1)\,;x_1 - x_2\big)$

g) $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3)\big) = (x_1 + 2x_2\,;x_1)$

h) $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3)\big) = (x_1 + 2x_2\,;x_3 - 2x_2)$

i) $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3)\big) = (1 - x_2\,;x_1\,;0)$

j) $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3)\big) = x_2$

2. Deux espaces vectoriels E et F sont munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e_1'\,;e_2'\,;e_3')$. Une application linéaire $h\colon E \to F$ est définie par $h(e_1) = 2e_1' - 4e_2' + 5e_3'$ et $h(e_2) = e_1' + 3e_2' - 4e_3'$.

a) Exprimer l'image par h d'un vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2$ quelconque.

b) Écrire les matrices-colonne associées aux vecteurs x, $h(e_1)$, $h(e_2)$ et $h(x)$ relativement aux bases données.

3. a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni de l'addition complexe et de la multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel, est un espace vectoriel de dimension 2.

b) Les applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définies par $f(z) = \overline{z}$ et $g(z) = |z|$ sont-elles linéaires ?

4. On considère l'espace vectoriel E des suites réelles convergentes. Vérifier que l'application de E vers $\mathbb{R}$, qui associe à toute suite convergente sa limite, est une application linéaire.

5. Pour les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ suivantes, déterminer les matrices relativement aux bases canoniques.

$a\colon (x_1\,;x_2) \mapsto 2x_1 - x_2$

$b\colon (x_1\,;x_2) \mapsto (x_1 - x_2\,;0)$

$c\colon (x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto (x_1 - x_3\,;2x_3 - 2x_1)$

$d\colon (x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto (x_1 - 2x_2\,;6x_2 - 3x_1)$

$e\colon x \mapsto (x\,;2x\,;-3x)$
$f\colon (x_1\,;x_2) \mapsto (x_1 - 3x_2\,;-2x_1 + x_2\,;-x_2)$
$g\colon (x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto (-x_1 + 3x_2 + 2x_3\,;2x_1 - 4x_2 + 3x_3)$
$h\colon (x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto 0$

6. Déterminer l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est

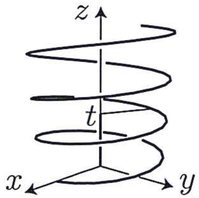
a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

7. Déterminer la matrice de l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ ainsi que celle de l'identité de $\mathbb{R}^2$, relativement à la base canonique.

8. Déterminer la matrice jacobienne de la fonction $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4) = \left(3 + x_1x_2^2 + x_2 - \sin(x_3)\,;x_1\sqrt{x_3} + \dfrac{1}{x_4}\right)$.

9. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = \big(\cos(t)\,;\,\sin(t)\,;t\big)$ qui peut être représentée graphiquement par une courbe dans $\mathbb{R}^3$, appelée *hélice circulaire.*

a) Calculer la matrice jacobienne $J(t)$ de f. Donner une interprétation géométrique de cette matrice.
b) Écrire la différentielle de f pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.



10. Déterminer l'approximation d'ordre 1 de la fonction

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \mapsto & \big(16 - 2x + xyz^2\,;11 - x + 2y + 3z^2\big) \end{array}$$

au voisinage de $(4\,;0\,;1)$. Vérifier cette approximation en calculant la valeur exacte et la valeur approchée de $f(4.02\,;0.03\,;0.99)$.

11. Déterminer l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique est la matrice élémentaire $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer ensuite que cette application est bijective.

12. Déterminer l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est la matrice élémentaire $S_{13}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer ensuite que cette application est bijective.

13. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4) & \mapsto & (x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4\,;x_2 + 3x_4) \end{array}$

Parmi les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants, quels sont ceux qui appartiennent au noyau de f ?
$a = (-1\,;0\,;1\,;0)$, $b = (0\,;0\,;0\,;0)$, $c = (0\,;-2\,;-7\,;1)$,
$d = (-7\,;-3\,;0\,;1)$, $e = (6\,;3\,;1\,;-1)$.

14. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (2x_1 + 3x_2 + 2x_3\,;x_2 + x_3\,;2x_1 - x_3) \end{array}$

a) Les vecteurs suivants appartiennent-ils à l'image de f ?
$a = (8\,;1\,;7)$, $b = (0\,;0\,;0)$, $c = (0\,;1\,;0)$, $d = (5\,;3\,;-4)$.

b) À quelles conditions un élément $(y_1\,;y_2\,;y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient-il à l'image de f ?

c) Déterminer le noyau de f.

15. Déterminer l'image et le noyau des applications linéaires de l'exercice 5 et vérifier l'égalité du théorème du rang.

16. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que la dérivation $h\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ définie par $h(f) = f'$ est une application linéaire et déterminer son noyau.

b) Montrer que $h\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ définie par $h(f) = f' - 3f$ est une application linéaire et déterminer son noyau.

17. On note $\mathcal{C}\big([a\,;b]\big)$ l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathcal{F}\big([a\,;b]\big)$ l'espace des fonctions définies sur cet intervalle. Montrer que l'application $h\colon \mathcal{C}\big([a\,;b]\big) \to \mathcal{F}\big([a\,;b]\big)$ telle que $h\colon f \mapsto P$, où la fonction P est définie par $P(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in [a\,;b]$ (P est une primitive de f), est linéaire. Déterminer le noyau de h.

18. a) On considère une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$. Quelles peuvent être les dimensions du noyau et de l'image de f ?

b) Même question pour $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$.

19. On considère deux espaces vectoriels E et F et une application linéaire f de E vers F. On note G un sous-espace vectoriel de E. L'**image du sous-espace vectoriel** G est l'ensemble, noté $f(G)$, des images de tous les éléments de G.

$$f(G) = \{f(x) \in F \mid x \in G\}$$

Montrer que $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

20. Soit $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2) & \mapsto & (3x_1 - x_2\,;0) \end{array}$

Déterminer l'image par f des sous-espaces vectoriels $U = L\big((1\,;-4)\big)$ et $V = L\big((1\,;3)\big)$ de $\mathbb{R}^2$.

21. Soit $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (x_1 + 2x_2\,;x_3 - 2x_2) \end{array}$

Déterminer l'image par f des sous-espaces vectoriels $U = L\big((1\,;-2\,;1)\big)$, $V = L\big((-2\,;1\,;2)\big)$ et $W = L\big((1\,;-2\,;1),(-2\,;1\,;2)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

22. Soit $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (x_1 + 2x_2\,;x_3 - 2x_2) \end{array}$

a) Déterminer le noyau de f.

b) Trouver l'image par f du sous-espace vectoriel $G = L\big((1\,;-2\,;1)\big)$.

23. a) Déterminer, lorsque cela a un sens, la matrice relativement aux bases canoniques de la somme de deux applications linéaires choisies dans la donnée de l'exercice 5.

b) On considère l'application f de l'exercice 5. Déterminer, parmi les autres applications du même exercice, celles qui peuvent être composées avec f. Calculer, dans ces cas, la matrice de la composée.

24. On considère les applications linéaires suivantes.

$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (-x_1 + 2x_2\,;2x_1 - 3x_2 - x_3) \end{array}$

$g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (3x_1 - x_2 - 5x_3\,;-6x_1 + x_2 + 11x_3) \end{array}$

$h\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1\,;x_2\,;x_3) & \mapsto & (-2x_1 + x_2 - x_3\,;3x_1 + x_3) \end{array}$

$j\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1\,;x_2) & \mapsto & (x_1 - 3x_2\,;-2x_1 + x_2\,;-x_2) \end{array}$

Les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leurs bases canoniques.

a) Déterminer $f+g$, écrire sa matrice et vérifier qu'elle est égale à la somme des matrices de f et de g.

b) Déterminer $f \circ j$, écrire sa matrice et vérifier qu'elle est égale au produit des matrices de f et de j.

c) Déduire des matrices de f, g, h et j celles des applications linéaires $3f-g+4h$, $g \circ j$, $j \circ g$ et $(f+g) \circ j$.

25. On considère deux applications linéaires f et g de E vers F et une application linéaire h de F vers G. En utilisant la propriété

$$h \circ (f+g) = (h \circ f) + (h \circ g)$$

montrer que la multiplication matricielle est distributive relativement à l'addition.

26. a) Montrer que l'ensemble $\operatorname{Hom}(E,F)$ de toutes les applications linéaires de E vers F, muni de l'addition des applications et de la multiplication d'une application par un réel, est un espace vectoriel.

b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\big(\operatorname{Hom}(E,F)\,;\,+\,;\,\cdot\,\big)$ si E et F sont respectivement de dimension n et m ?

Indication : Montrer que $\operatorname{Hom}(E,F)$ *est isomorphe à* $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Réponses aux exercices du chapitre 3

1. L'application f est linéaire pour les exercices a), c), g), h) et j).

2. a) $h(x) = (2x_1+x_2)e'_1 + (-4x_1+3x_2)e'_2 + (5x_1-4x_2)e'_3$

b) La matrice de x relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,
celles de $h(e_1)$, $h(e_2)$ et $h(x)$ relativement à la base $\mathcal{B}'$ sont
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ -4x_1+3x_2 \\ 5x_1-4x_2 \end{pmatrix}.$$

3. b) f est linéaire, g n'est pas linéaire

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. a) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (-2x_1 + x_2\,;3x_1\,;4x_1 - 2x_2)$

b) $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4\,;x_5)\big) = (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4\,;3x_1 + x_3 + 7x_4 + 2x_5)$

c) $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (2x_1 + x_2\,;3x_1)$

7. La matrice de l'application nulle est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de l'application identité est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $J = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2x_1x_2 + 1 & -\cos(x_3) & 0 \\ \sqrt{x_3} & 0 & \dfrac{x_1}{2\sqrt{x_3}} & -\dfrac{1}{x_4^2} \end{pmatrix}$

9. a) La matrice jacobienne $J(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ est la matrice-colonne du vecteur tangent à la courbe.

b) La différentielle est l'application $df : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est définie par

$df(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ h \end{pmatrix}$ pour $t = 0$ et $df(h) = \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ pour $t = \frac{\pi}{2}$.

10. $f(x\,;y\,;z) \approx (16 - 2x + 4y\,;8 - x + 2y + 6z)$
$f(4.02\,;0.03\,;0.99) = (8.0782\,;9.9803)$ valeur exacte
$f(4.02\,;0.03\,;0.99) \approx (8.08\,;9.98)$ valeur approximative

11. $f\big((x_1\,;x_2)\big) = (x_2\,;x_1)$

12. $f\big((x_1\,;x_2\,;x_3)\big) = (x_1 - 4x_3\,;x_2\,;x_3)$

13. $a, b, d, e \in \operatorname{Ker}(f)$

14. a) $b, d \in \operatorname{Im}(f), a, c \notin \operatorname{Im}(f)$

b) $(y_1\,;y_2\,;y_3) \in \mathrm{Im}(f) \iff y_1 - 3y_2 - y_3 = 0$

c) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-2\,;2)\big)$

15. $\mathrm{Ker}(a) = L\big((1\,;2)\big)$ et $\mathrm{Im}(a) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Ker}(b) = L\big((1\,;1)\big)$ et $\mathrm{Im}(b) = L\big((1\,;0)\big)$
$\mathrm{Ker}(c) = L\big((1\,;0\,;1),(0\,;1\,;0)\big)$ et $\mathrm{Im}(c) = L\big((1\,;-2)\big)$
$\mathrm{Ker}(d) = L\big((2\,;1\,;0),(0\,;0\,;1)\big)$ et $\mathrm{Im}(d) = L\big((1\,;-3)\big)$
$\mathrm{Ker}(e) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(e) = L\big((1\,;2\,;-3)\big)$
$\mathrm{Ker}(f) = \{(0\,;0)\}$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;-2\,;0),(-3\,;1\,;-1)\big)$
$\mathrm{Ker}(g) = L\big((17\,;7\,;-2)\big)$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$
$\mathrm{Ker}(h) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}(h) = \{0\}$

16. a) Le noyau de h est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

b) Le noyau de h est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ du type $f(x) = ke^{3x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

17. Le noyau de h ne contient que la fonction nulle.

18. a) Les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ peuvent être respectivement 3 et 0 (application nulle), 2 et 1, ou 1 et 2.

b) Les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ peuvent être respectivement 3 et 0 (application nulle), 2 et 1, 1 et 2, ou 0 et 3 (application injective).

20. $f(U) = L\big((7\,;0)\big)$ et $f(V) = \big\{(0\,;0)\big\}$

21. $f(U) = L\big((-3\,;5)\big)$, $f(V) = \big\{(0;0)\big\}$ et $f(W) = f(U)$

22. a) Le noyau de f est $L\big((-2\,;1\,;2)\big)$.

b) $f(G) = L\big((-3\,;5)\big)$

23. a) La somme n'a un sens que pour les applications c, d et g.

$$C + D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 6 & 2 \end{pmatrix},\ C + G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$D + G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Compositions possibles : $f \circ b, f \circ c, c \circ f, f \circ d, d \circ f, f \circ g$ et $h \circ f$ de matrices respectivement

$$F{\cdot}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F{\cdot}C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ -4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C{\cdot}F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$F \cdot D = \begin{pmatrix} 10 & -20 & 0 \\ -5 & 10 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}, D \cdot F = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -15 & 15 \end{pmatrix},$$

$$F \cdot G = \begin{pmatrix} -7 & 15 & -7 \\ 4 & -10 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } H \cdot F = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

24. Les matrices de f, g, h, j sont respectivement $F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -6 & 1 & 11 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) $$\begin{aligned} f+g\colon \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x_1\,;x_2\,;x_3) \mapsto (2x_1 + x_2 - 5x_3\,; -4x_1 - 2x_2 + 10x_3) \end{aligned}$$
est de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ qui vaut bien $F + G$.

b) $$\begin{aligned} f \circ j\colon \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x_1\,;x_2) \mapsto (-5x_1 + 5x_2\,; 8x_1 - 8x_2) \end{aligned}$$
est de matrice $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$ qui vaut bien $F \cdot J$.

c) La matrice de $3f - g + 4h$ vaut $3F - G + 4H = \begin{pmatrix} -14 & 11 & 1 \\ 24 & -10 & -10 \end{pmatrix}$,
la matrice de $g \circ j$ vaut $G \cdot J = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$,
la matrice de $j \circ g$ vaut $J \cdot G = \begin{pmatrix} 21 & -4 & -38 \\ -12 & 3 & 21 \\ 6 & -1 & -11 \end{pmatrix}$
et la matrice de $(f + g) \circ j$ vaut $(F + G) \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

25. Si A, B et C sont les matrices associées respectivement à f, g et h, alors la matrice associée à $h \circ (f + g)$ est $C \cdot (A + B)$ et celle associée à $(h \circ f) + (h \circ g)$ est $C \cdot A + C \cdot B$.

26. b) L'espace des homomorphismes de E vers F est de dimension nm.

4 Endomorphismes

4.1 Définition

On considère un espace vectoriel E. Un **endomorphisme**[1] de E est une application linéaire de E vers E. Un endomorphisme de E est aussi appelé **transformation linéaire** de E.

Si E est de dimension n, alors la matrice d'un endomorphisme de E est une matrice carrée d'ordre n.

Exemple 1. *L'application définie par* $f\big((x\,;y)\big) = (y\,;x)$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$*. En effet, cette application est linéaire et elle est définie de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}^2$*.*

Exemple 2. *L'application définie par* $f\big((x\,;y\,;z)\big) = (y+z\,;x+z\,;x+y)$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$*. Sa matrice relativement à la base canonique est* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 3. *On considère l'espace vectoriel* $\mathbb{P}_3$ *des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et la base* $\mathcal{B} = (1\,;x\,;x^2\,;x^3)$*. L'application qui associe à chaque fonction polynôme sa fonction dérivée est un endomorphisme de* $\mathbb{P}_3$*, sa matrice relativement à la base* $\mathcal{B}$ *est* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

[1] Le mot *endomorphisme* vient du grec *endon* (en dedans) et *morphê* (forme).

4.2 Endomorphisme bijectif

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E.

Si f est bijectif, alors sa réciproque ${}^{r}\!f$ est aussi un endomorphisme bijectif de E. On a alors $f \circ {}^{r}\!f = {}^{r}\!f \circ f = \mathrm{id}_E$. Un endomorphisme bijectif de E est parfois appelé un **automorphisme**[2] de E.

> **Exemple 1.** *L'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *défini par* $f\big((x\,;y)\big) = (-y\,;x)$ *est bijectif; sa réciproque est l'endomorphisme* ${}^{r}\!f\big((x\,;y)\big) = (y\,;-x)$.

On considère f et g, deux endomorphismes bijectifs de E. L'endomorphisme $g \circ f$ est bijectif et ${}^{r}(g \circ f) = {}^{r}\!f \circ {}^{r}g$.

Théorème 1. Si f est un endomorphisme bijectif d'un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}$, alors la matrice A de f, relativement à la base $\mathcal{B}$, est une matrice inversible. La matrice de ${}^{r}\!f$ est A^{-1}.

> **Exemple 2.** *L'endomorphisme bijectif* f*, de l'exemple 1 ci-dessus, et sa réciproque* ${}^{r}\!f$ *de* $\mathbb{R}^2$*, ont respectivement pour matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*, relativement à la base canonique.*

Théorème 2. On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E dans lequel on a choisi une base $\mathcal{B}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'endomorphisme f est bijectif.
2. La matrice de f relative à la base $\mathcal{B}$ est inversible.
3. Les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ forment une base de E.
4. L'endomorphisme f est injectif.
5. L'endomorphisme f est surjectif.
6. La dimension du noyau de f est zéro.
7. La dimension de l'image de f est égale à la dimension de E.

> **Exemple 3.** *On considère l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^2$*, défini par sa matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$*, relativement à la base canonique. On observe que le déterminant de* A *est différent de zéro. L'endomorphisme* f *est donc bijectif et la matrice de* ${}^{r}\!f$ *est* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

---

[2] Le mot *automorphisme* vient du grec *autos* (soi-même) et *morphê* (forme).

4.3 Matrice de changement de base

Exemple 1. *Dans* $\mathbb{R}^2$, *on choisit la base canonique* $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2)$ *et une autre base* $\mathcal{B}' = (e_1' ; e_2')$ *avec* $e_1' = e_1 + 2e_2$ *et* $e_2' = 3e_1 + 4e_2$.

On considère le vecteur $v = (16 ; 18)$. *La matrice-colonne associée à* v *relativement à la base* $\mathcal{B}$ *est notée* X *; la matrice-colonne associée à* v *relativement à la base* $\mathcal{B}'$ *est notée* X'.

Par définition, on a $X = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix}$. *On pose* $X' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

On a alors

$$\begin{aligned} v &= 16e_1 + 18e_2 \\ &= \alpha e_1' + \beta e_2' \\ &= \alpha(e_1 + 2e_2) + \beta(3e_1 + 4e_2) \\ &= (\alpha + 3\beta)e_1 + (2\alpha + 4\beta)e_2 \end{aligned}$$

En écriture matricielle, on obtient

$$X = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *est appelée matrice de passage de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$. *On obtient alors* $X = P \cdot X'$.

La matrice P *est inversible car son déterminant n'est pas nul ; elle admet une matrice inverse,* $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On trouve alors la matrice-colonne* X' *associée au vecteur* v.

$$X' = P^{-1} \cdot X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\mathcal{B}'$, *le vecteur* v *s'exprime sous la forme* $v = -5e_1' + 7e_2'$.

On considère un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n)$. On cherche souvent une autre base $\mathcal{B}' = (e_1' ; e_2' ; \ldots ; e_n')$ de E, mieux adaptée à un problème donné (voir exemple 4, page 102). On écrit d'abord les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1' = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \ldots + \alpha_{n1}e_n \\ \boxed{e_2' = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{n2}e_n} \\ \qquad\qquad \vdots \\ e_n' = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n \end{array} \right.$$

On regroupe ces données dans une matrice P dont les colonnes sont les *matrices-colonne associées aux vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ relativement à la base $\mathcal{B}$.*

$$P = \left(\begin{array}{c|c|cc} \cline{2-2} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \\ \cline{2-2} \end{array}\right)$$

Cette matrice est appelée **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exemple 2. *Dans $\mathbb{R}^3$, on choisit la base canonique $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ et une autre base $\mathcal{B}' = (e_1'\,;e_2'\,;e_3')$ avec $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1 + e_3$ et $e_3' = e_2 + e_3$.*
La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice associée à l'endomorphisme identité

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & v & \longmapsto & v \end{array}$$

relativement à une même base dans l'ensemble de départ et dans l'ensemble d'arrivée est la matrice unité d'ordre n. En revanche, la matrice associée à l'identité relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ (prises dans cet ordre !) est la matrice de passage P. En effet, les images des vecteurs e_i' de $\mathcal{B}'$ sont ces mêmes vecteurs e_i', exprimés relativement à la base $\mathcal{B}$; ils forment les colonnes de la matrice P.

Si l'on note X et X' les matrices d'un même vecteur v relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, l'égalité $\mathrm{id}_E(v) = v$ devient

$$X = P \cdot X'$$

Comme l'identité est une application bijective, la matrice P est inversible et l'on peut écrire

$$X' = P^{-1} \cdot X$$

Cette formule permet de calculer les composantes du vecteur v dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.

Exemple 3. *En reprenant la matrice de l'exemple précédent, on trouve*

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice-colonne associée à $v = (-2\,;6\,;4)$ *relativement à la base canonique* $\mathcal{B}$ *est* $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. *La matrice-colonne associée à ce même vecteur* v, *relativement à la base* $\mathcal{B}'$ *est*

$$X' = P^{-1} \cdot X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

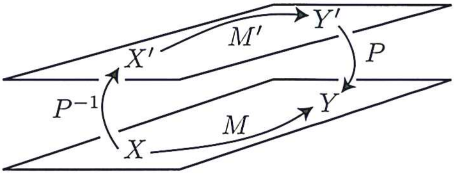
Ainsi $v = -2e_2' + 6e_3'$

Théorème 3. Si M et M' sont les matrices associées à un endomorphisme f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement et si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ alors on a

$$M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$$

et

$$M = P \cdot M' \cdot P^{-1}$$



Démonstration. On note X et X' les matrices-colonne associées à un vecteur quelconque v de E relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. De même, on note Y et Y' les matrices-colonne associées au vecteur $f(v)$ de E relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. En écriture matricielle, on obtient les égalités $Y = M \cdot X$, relativement à la base $\mathcal{B}$ et $Y' = M' \cdot X'$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Or $Y = P \cdot Y'$ et $X = P \cdot X'$. Ainsi

$$P \cdot Y' = M \cdot (P \cdot X')$$

On multiplie à gauche les deux membres de l'égalité par P^{-1} et on obtient

$$P^{-1} \cdot (P \cdot Y') = P^{-1} \cdot \big(M \cdot (P \cdot X')\big)$$

En vertu de l'associativité de la multiplication des matrices, on a

$$Y' = \big(P^{-1} \cdot M \cdot P\big) \cdot X'$$

On en déduit l'égalité $M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$.

En multipliant la dernière égalité à gauche par P et à droite par P^{-1}, on trouve $P \cdot M' \cdot P^{-1} = M$. ☐

Déterminant et trace d'un endomorphisme

La **trace d'une matrice carrée** $A = (a_{ij})$ est la somme des éléments de la diagonale.

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Théorème 4. Si M et M' sont les matrices d'un même endomorphisme f relativement à deux bases de E, alors

$$\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(M') \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M')$$

Démonstration. Comme $M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$ et $\mathrm{Det}(P)\,\mathrm{Det}(P^{-1}) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(M') &= \mathrm{Det}(P^{-1} \cdot M \cdot P)\\ &= \mathrm{Det}(P^{-1})\,\mathrm{Det}(M)\,\mathrm{Det}(P)\\ &= \mathrm{Det}(M)\,\mathrm{Det}(P^{-1})\,\mathrm{Det}(P)\\ &= \mathrm{Det}(M)\end{aligned}$$

Pour la trace, on démontre d'abord que $\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$, lorsque A et B sont deux matrices carrées de même ordre (voir exercice 21, page 120).

Comme $M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M') &= \mathrm{Tr}(P^{-1} \cdot M \cdot P)\\ &= \mathrm{Tr}(M \cdot P \cdot P^{-1})\\ &= \mathrm{Tr}(M)\end{aligned}$$

□

Toutes les représentations matricielles de f ont le même déterminant, appelé **déterminant de l'endomorphisme** f et noté $\mathrm{Det}(f)$.

Toutes les représentations matricielles de f ont la même trace, appelée **trace de l'endomorphisme** f et notée $\mathrm{Tr}(f)$.

Exemple 4. *On considère un espace vectoriel E de dimension 3 et deux bases $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2\,; e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e_1'\,; e_2'\,; e_3')$ avec $e_1' = e_1+e_2-e_3$, $e_2' = e_1-e_2$ et $e_3' = e_2 + e_3$.*

On considère un endomorphisme f défini par sa matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1\\ -6 & 0 & -9\\ -4 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

relativement à la base $\mathcal{B}$. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *sa matrice inverse. La matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ est*

$$\begin{aligned} M' &= P^{-1} \cdot M \cdot P \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & -9 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut vérifier que $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M') = 0$.

Le choix judicieux de la base permet de simplifier les calculs.

a) $\mathrm{Det}(f) = \mathrm{Det}(M') = -6$.

b) *La matrice de $f^2 = f \circ f$ relativement à la base $\mathcal{B}'$ est*

$$M' \cdot M' = (M')^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^2 \end{pmatrix}$$

c) *La matrice N' de la réciproque de f, relativement à la base $\mathcal{B}'$, est*

$$N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice N de la réciproque de f, relativement à la base $\mathcal{B}$, est

$$N = P \cdot N' \cdot P^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 12 & 3 & -3 \\ -2 & 7 & -13 \\ -8 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Cet exemple montre l'intérêt de trouver, pour un endomorphisme f donné, une base relativement à laquelle la matrice de f est la plus simple possible. La recherche d'une telle base est présentée dans le paragraphe suivant.

4.4 Valeurs et vecteurs propres

Exemple 1. *On reprend l'exemple 9 du paragraphe 1.3 (page 13), concernant la migration de population, modélisée par la matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

On se demande quelle est la répartition de la population qui reste stable au cours de dix ans. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *la matrice-colonne donnant le nombre d'habitants* x *dans les villes et* y *à la campagne. Si la répartition reste stable, on a* $P \cdot X = X$.
On est amené à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 0.95x & + & 0.1y & = & x \\ 0.05x & + & 0.9y & = & y \end{array} \right.$$

Ce système est indéterminé et son ensemble-solution est l'espace engendré par le vecteur $(2\,;1)$. *Dans ce modèle, toute répartition de population où le nombre d'habitants en ville est le double de celui de la campagne est stable. Par exemple, si la population des villes s'élève à 6 millions et celle de la campagne à 3 millions, les départs sont compensés par les arrivées. On a ainsi,* $\begin{pmatrix} 0.95 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. *On dit que le nombre 1 est une valeur propre de la matrice* P *et que* $(2\,;1)$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.*

Étant donné un endomorphisme f, on cherche un réel λ et un vecteur non nul v tels que

$$\boxed{f(v) = \lambda v}$$

On appelle **valeur propre** de l'endomorphisme f de E, tout scalaire λ tel qu'il existe un vecteur non nul v de E vérifiant $f(v) = \lambda v$.

Si λ est une valeur propre de f, on appelle **vecteur propre** de l'endomorphisme f de E, associé à la valeur propre λ, tout vecteur v de E tel que $f(v) = \lambda v$.

On peut montrer que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace propre** associé à λ et noté $E_\lambda = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$.

Exemple 2. *On considère l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^2$ *donné par sa matrice* $M = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *relativement à la base canonique. Pour déterminer les valeurs et les vecteurs propres de cet endomorphisme, on résout l'équation* $f\big((x\,;y)\big) = \lambda(x\,;y)$.
On écrit cette équation sous forme matricielle, $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,
ou encore sous forme d'un système linéaire, $\left\{ \begin{array}{rcrcl} -3x & - & 4y & = & \lambda x \\ 2x & + & 3y & = & \lambda y \end{array} \right.$.
On obtient alors le système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} (-3-\lambda)x & - & 4y & = & 0 \\ 2x & + & (3-\lambda)y & = & 0 \end{array} \right.$.

Ce système admet une solution autre que $(0\,;0)$ *si et seulement si son déteminant est nul. Or* $\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)\,(\lambda+1)$.
L'endomorphisme f *admet donc deux valeurs propres* 1 *et* -1.

Pour déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, *on résout le système* $\left\{ \begin{array}{rcrcl} (-3-1)x & - & 4y & = & 0 \\ 2x & + & (3-1)y & = & 0 \end{array} \right.$.
Le vecteur $(1\,;-1)$ *est l'une des solutions du système, il est l'un des vecteurs propres associés à la valeur propre* 1. *Le sous-espace propre associé à la valeur propre* 1 *est* $E_1 = \{\alpha(1\,;-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L\big((1\,;-1)\big)$.

Pour déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre -1, *on résout le système* $\left\{ \begin{array}{rcrcl} \big(-3-(-1)\big)x & - & 4y & = & 0 \\ 2x & + & \big(3-(-1)\big)y & = & 0 \end{array} \right.$.
Le vecteur $(-2\,;1)$ *est l'une des solutions du système, il est l'un des vecteurs propres associés à la valeur propre* -1. *Le sous-espace propre associé à la valeur propre* -1 *est* $E_{-1} = \{\alpha(-2\,;1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L\big((-2\,;1)\big)$.

Dans la base $\mathcal{B}' = \big((1\,;-1)\,;(-2\,;1)\big)$, *la matrice de* f *est* $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On a ainsi trouvé une base dans laquelle la matrice de f *est une matrice diagonale.*

Équation caractéristique

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n. Pour déterminer les valeurs et les vecteurs propres de f, on est amené à résoudre l'équation $f(v) = \lambda v$.

Si id_E est l'endomorphisme identité de E, alors $\mathrm{id}_E(v) = v$. L'équation précédente peut alors s'écrire $f(v) = \lambda\,\mathrm{id}_E(v)$ ou encore $f(v) - \lambda\,\mathrm{id}_E(v) = o$ et finalement

$$(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(v) = o$$

Si l'équation $(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(v) = o$ admet des solutions non triviales, alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \{o\}$. L'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est donc pas bijectif. On en déduit que les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation suivante, appelée **équation caractéristique** de f.

$$\mathrm{Det}(f - \lambda\ \mathrm{id}_E) = 0$$

Comme vu précédemment (voir page 102), cette équation est indépendante de la base dans laquelle on exprime la matrice de f.

Pour chaque valeur propre λ de f trouvée, on détermine le sous-espace propre associé E_λ. Celui-ci est le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda \ \mathrm{id}_E$.

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \ \mathrm{id}_E)$$

Exemple 3. *Un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ est défini par sa matrice relativement à la base canonique,* $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour déterminer les valeurs propres de h, on résout l'équation caractéristique $\mathrm{Det}(h - \lambda \ \mathrm{id}) = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 4 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 5 & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 6)(\lambda^2 - 16)$$

Les valeurs propres de h sont 6, -4 *et* 4.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 6 *est le noyau de* $h - 6\,\mathrm{id}$.

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont les multiples du vecteur $(0\,;1\,;-1)$. *Le sous-espace associé à la valeur propre* 6 *est la droite vectorielle*

$$E_6 = \{\alpha(0\,;1\,;-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L\big((0\,;1\,;-1)\big)$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -4 *est le noyau de* $h+4\,\mathrm{id}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 9 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont les multiples du vecteur $(1\,;0\,;-1)$. *Le sous-espace associé à la valeur propre* -4 *est la droite vectorielle*

$$E_{-4} = L\big((1\,;0\,;-1)\big)$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 *est le noyau de* $h - 4\,\mathrm{id}$.

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont les multiples du vecteur $(1\,;1\,;0)$*. Le sous-espace associé à la valeur propre* 4 *est la droite vectorielle*

$$E_4 = L\big((1\,;1\,;0)\big)$$

Les vecteurs propres $(0\,;1\,;-1)$, $(1\,;0\,;-1)$ *et* $(1\,;1\,;0)$ *forment une base de* $\mathbb{R}^3$*. Dans cette base, la matrice de* h *est* $M' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriétés

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. L'endomorphisme f admet une valeur propre nulle si et seulement si f n'est pas bijectif. Dans ce cas, $E_0 = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Si l'endomorphisme f admet 1 comme valeur propre, alors l'espace propre associé est l'ensemble des vecteurs invariants par f.
3. L'endomorphisme f admet au plus n valeurs propres.
4. Si f admet k valeurs propres distinctes, alors il existe au moins k vecteurs propres linéairement indépendants.
5. Si f admet n valeurs propres distinctes, alors en prenant un vecteur propre associé à chaque valeur propre, on forme une base de E.
6. Si la matrice de f est une matrice triangulaire, alors les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de f.

Démonstration de la propriété 4. Si l'endomorphisme f admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, alors il existe deux vecteurs propres v_1 et v_2 tels que $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $f(v_2) = \lambda_2 v_2$. Si les vecteurs v_1 et v_2 étaient colinéaires, on aurait $v_2 = \alpha v_1$ et $f(v_2) = f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) = \alpha(\lambda_1 v_1) = \lambda_1(\alpha v_1) = \lambda_1 v_2$. On en déduirait que $\lambda_1 = \lambda_2$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. On a ainsi montré qu'à deux valeurs propres distinctes sont associés deux vecteurs propres linéairement indépendants. □

Diagonalisation d'une matrice

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n.

Un endomorphisme f de E est **diagonalisable** s'il existe une base de E telle que la matrice D de f relative à cette base est une matrice diagonale.

Si f est un endomorphisme qui admet n vecteurs propres formant une base de E, alors f est diagonalisable. Les valeurs propres de f ne sont pas nécessairement distinctes.

Exemple 4. *On considère l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^2$ *donné par sa matrice* $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, *relativement à la base canonique. Son équation caractéristique,* $\lambda^2 - 5\lambda - 50 = 0$, *admet deux solutions distinctes,* $\lambda_1 = -5$ *et* $\lambda_2 = 10$. *Les vecteurs propres associés,* $v_1 = (1\,;2)$ *et* $v_2 = (-2\,;1)$, *sont linéairement indépendants et forment une base* $\mathcal{B} = (v_1\,;v_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$. *La matrice de l'endomorphisme* f, *relativement à cette base, est une matrice diagonale* $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Exemple 5. *On considère l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *donné par sa matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, *relativement à la base canonique. Pour calculer la matrice de* $f^{10} = f \circ f \circ \ldots \circ f$, *il est avantageux de diagonaliser la matrice de* f. *En effet, le calcul direct de la matrice de* f^{10} *est très long. Or* $A^{10} = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot \ldots \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot D^{10} \cdot P^{-1}$ *où* D *est la matrice diagonale de* f *et* P *la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres. Pour diagonaliser* f, *on cherche les valeurs propres et les vecteurs propres associés. L'équation caractéristique de l'endomorphisme* f *est* $\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0$, *elle admet deux solutions distinctes,* $\lambda_1 = 0$ *et* $\lambda_2 = 2$. *Le noyau de* f *est de dimension* 2 ; *on en déduit qu'il existe deux vecteurs propres,* $v_1 = (1\,;1\,;0)$ *et* $v_2 = (0\,;2\,;1)$, *linéairement indépendants associés à la valeur propre* 0. *On note* $v_3 = (1\,;1\,;1)$ *un vecteur propre associé à* $\lambda_2 = 2$. *Relativement à la base* $(v_1\,;v_2\,;v_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$, *la matrice de* f *est une matrice diagonale* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *On écrit la matrice de passage* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *on détermine sa matrice inverse* $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, *puis on obtient la matrice de* f^{10} *relativement à la base canonique.*

$$\begin{aligned} A^{10} &= P \cdot D^{10} \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^9 & -2^9 & 2^{10} \\ 2^9 & -2^9 & 2^{10} \\ 2^9 & -2^9 & 2^{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.5 Exemples de modélisation

Matrices de transition

Exemple 1. *Deux magazines sportifs A et B sont vendus uniquement sur abonnement annuel. On observe que chacun des deux magazines est acheté par* 50% *des lecteurs. La probabilité qu'un lecteur du magazine A continue à acheter le magazine A l'année suivante est de* 0.8 *et celle qu'il change de magazine est de* 0.2*. D'autre part, la probabilité qu'un lecteur du magazine B continue à acheter le magazine B est* 0.7 *et celle qu'il change de magazine est de* 0.3*. Ces données peuvent être représentées par les matrices* $E = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ *et* $T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'année suivante, la répartition des abonnements est obtenue par $T \cdot E = \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire* 55% *des lecteurs achètent A et* 45% *des lecteurs achètent B.*

Une **matrice de transition** T est une matrice carrée dont les éléments sont tous positifs ou nuls, de plus la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1. L'élément t_{ij} d'une telle matrice peut être considéré comme la probabilité de passer de l'état j à l'état i. Une matrice-colonne E dont les éléments sont positifs et dont la somme des éléments est 1 est appelée **vecteur d'état**. Un vecteur d'état E qui vérifie l'égalité $T \cdot E = E$ est appelé **vecteur d'état stationnaire**. Dans ce cas, le vecteur d'état E est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Les matrices de transition servent de modèle mathématique dans de nombreux domaines (biologie, chimie, économie,...).

Exemple 2. *On reprend l'exemple 1. La répartition des abonnements après deux ans s'obtient par* $T \cdot \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{pmatrix} = T^2 \cdot E = \begin{pmatrix} 0.575 \\ 0.425 \end{pmatrix}$.

La matrice $T^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.45 \\ 0.3 & 0.55 \end{pmatrix}$ *est aussi une matrice de transition.*

Pour obtenir la répartition des abonnements dans cinq ans, on peut calculer T^5. Afin de simplifier les calculs, il est commode de diagonaliser T. Les valeurs propres de la matrice T sont 1 *et* 1/2 *, les vecteurs propres associés sont respectivement* $U = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *À l'aide de la matrice de changement de base* $P = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.4 & -1 \end{pmatrix}$, *on obtient*

$$T^5 = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^5 \cdot P^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.5)^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.4 & -0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6125 & 0.58125 \\ 0.3875 & 0.41875 \end{pmatrix}$$

De même, on obtient $T^n = \begin{pmatrix} 0.6 + 0.4 \cdot 2^{-n} & 0.6 - 0.6 \cdot 2^{-n} \\ 0.4 - 0.4 \cdot 2^{-n} & 0.4 + 0.6 \cdot 2^{-n} \end{pmatrix}$ *pour tout entier n, ce qui prouve qu'à long terme, 60% des lecteurs choisiront le magazine A et 40% le magazine B. Cette répartition est décrite par le vecteur propre U associé à la valeur propre 1. Ce vecteur est un vecteur d'état stationnaire car il vérifie l'égalité $T \cdot U = U$.*

Propriétés

1. Si T est une matrice de transition et n est un entier naturel, alors T^n est une matrice de transition.
2. Toute matrice de transition admet la valeur propre 1.
3. Toute matrice de transition admet un vecteur d'état stationnaire.

Modèles de Leontief

Modèle d'économie fermée

Une économie est fermée si tous les biens et services produits sont consommés par les producteurs de ces biens et de ces services.

Exemple 3. *On divise l'économie d'un pays en trois secteurs (voir page 8, exemple 4) : l'agriculture, l'industrie, les services. On connaît la production annuelle de chaque secteur ainsi que la répartition des productions entre les secteurs ; celle-ci est donnée par la matrice M suivante, appelée* **matrice des échanges**.

	A	I	S
A	0.3	0.2	0.2
I	0.1	0.5	0.2
S	0.6	0.3	0.6

ou encore $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} = M$

Les nombres de la première ligne indiquent que le secteur agricole utilise 30% de la production du secteur agricole, 20% de celle du industriel et 20% de celle des services. On observe que la somme des nombres de chaque colonne est égale à 1, ce qui signifie que tout ce qui est produit est utilisé par l'un des trois secteurs. Les nombres de la première colonne indiquent que 30% des produits agricoles sont utilisés par l'agriculture, 10% par l'industrie et 60% par les services. Leontief a démontré qu'il existe des *prix d'équilibre pour chaque unité de production afin que les dépenses de chaque secteur soient compensées par leurs recettes.*

On note respectivement p_A, p_I, p_S les revenus totaux de l'industrie, de l'agriculture et des services. Ces revenus sont exprimés en unités monétaires (par exemple en millions de francs). On obtient ainsi que les dépenses du secteur agricole s'élèvent à

$$0.3p_A + 0.2p_I + 0.2p_S$$

Cette somme doit être égale au revenu p_A. En procédant de la même manière pour les autres secteurs, on obtient un système linéaire.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 0.3p_A & + & 0.2p_I & + & 0.2p_S & = & p_A \\ 0.1p_A & + & 0.5p_I & + & 0.2p_S & = & p_I \\ 0.6p_A & + & 0.3p_I & + & 0.6p_S & = & p_S \end{array}\right.$$

Ce qui revient à chercher un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda = 1$. En résolvant $(M - I_3) \cdot P = O$, on trouve l'espace propre $E_1 = L\big((0.424\,; 0.485\,; 1)\big)$. Les prix d'équilibre sont donnés par les vecteurs propres. Si les services produisent l'équivalent de 1 milliard de francs, l'agriculture doit produire l'équivalent de 424 millions de francs et l'industrie l'équivalent de 485 millions de francs pour obtenir l'équilibre entre les dépenses et les revenus.

Modèle d'économie ouverte

Une économie est ouverte si les biens et services sont consommés partiellement par les producteurs de ces biens et de ces services, et que le solde est vendu à d'autres consommateurs.

Exemple 4. *Les activités d'un grand groupe économique se répartissent en trois secteurs : industrie, énergie et transport. Les échanges entre les divers secteurs du groupe permettent non seulement de satisfaire aux besoins de production des divers secteurs du groupe (**demande intermédiaire**), mais encore de dégager des biens et des services destinés à d'autres consommateurs (**demande externe**). Pour produire une unité dans l'industrie, il faut 0.2 unité de produit industriel, 0.3 unité d'énergie et 0.1 unité de transport ; pour produire une unité d'énergie il faut 0.2 unité de produit industriel, 0.1 unité d'énergie et 0.1 unité de transport ; pour produire une unité de transport, il faut 0.4 unité d'industrie, 0.4 unité d'énergie et 0.1 unité de transport. Ces informations sont données dans la matrice suivante, appelée **matrice des coefficients techniques**, notée C.*

$$C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

On observe, dans ce cas, que la somme des éléments de chaque colonne est inférieure à 1.

Ce groupe industriel veut vendre ses produits et ses dirigeants doivent décider de la quantité à produire pour répondre à la demande externe. Par exemple, si la demande externe s'élève à 100 unités de produits industriels, 80 unités d'énergie et 10 unités de transport, quelle doit être la production dans chaque secteur ?

On note D *le vecteur demande externe et* X *le vecteur production. Le vecteur* $C \cdot X$ *est la demande intermédiaire. La production totale, qui est la somme de la demande intermédiaire et de la demande externe, vérifie l'équation de production*

$$X = C \cdot X + D$$

On obtient successivement les équations matricielles suivantes.

$$\begin{aligned} X - C \cdot X &= D \\ I_3 \cdot X - C \cdot X &= D \\ (I_3 - C) \cdot X &= D \end{aligned}$$

Si la matrice $I_3 - C$ *est inversible,* $X = (I_3 - C)^{-1} \cdot D$.

La matrice $(I_3 - C)^{-1}$ *est appelée* **matrice d'impact**, *car elle permet de calculer l'impact sur la demande totale due à un changement de la demande externe* D.

Dans cet exemple,

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.4 \\ -0.3 & 0.9 & -0.4 \\ -0.1 & -0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.52 & 0.43 & 0.87 \\ 0.61 & 1.34 & 0.87 \\ 0.24 & 0.20 & 1.30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195 \\ 177 \\ 53 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a arrondi les résultats à l'unité la plus proche. Ainsi, le groupe doit produire environ 195 unités de produits industriels, 177 unités d'énergie et 53 unités de transport.

La première colonne de la matrice d'impact $\begin{pmatrix} 1.52 & 0.43 & 0.87 \\ 0.61 & 1.34 & 0.87 \\ 0.24 & 0.20 & 1.30 \end{pmatrix}$ *donne l'augmentation de la demande totale dans chacun des trois secteurs lorsque la demande externe de produits industriels augmente d'une unité ; ainsi il faudrait produire 1.52 unité de plus dans le secteur industriel, 0.61 unité de plus dans le secteur de l'énergie et 0.24 unité de plus dans le domaine des transports. Le secteur qui a le plus d'impact est celui des transports.*

Les éléments de la matrice C des coefficients techniques sont tous positifs ou nuls. On peut démontrer que la matrice $(I_n - C)^{-1}$ existe si la somme des éléments de chaque colonne de C est strictement inférieure à 1.

Modèle de Leslie

Exemple 5. *En démographie, on étudie l'évolution d'une population à partir des taux de fécondité et de mortalité. Pour présenter un modèle simple, on exclut d'autres caractéristiques telles que la migration et on suppose que la population dispose de ressources illimitées. Comme seules les femelles donnent naissance, il suffit de considérer les classes d'âge des femelles de la population.*

Dans cet exemple, on considère une population de rongeurs dont le cycle de reproduction est de 3 ans. Chaque femelle donne en moyenne naissance à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles durant sa troisième année. Cependant, seule une femelle sur deux survit au-delà de sa première année et seules 40% de celles qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année.

Si l'on écrit sous forme vectorielle $(x_1\,;x_2\,;x_3)$ *les effectifs* x_i *des femelles à l'âge* i*, l'année suivante, la répartition de cette population est donnée par le vecteur* $(6x_2 + 10x_3\,;0.5x_1\,;0.4x_2)$ *qui peut s'écrire sous forme matricielle par*

$$\begin{pmatrix} 6x_2 + 10x_3 \\ 0.5x_1 \\ 0.4x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $Y = L\cdot X$ *fournit les effectifs des femelles de chaque classe d'âge après une année. Pour* $(10\,;0\,;0)$ *par exemple, on trouve successivement*

an	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
x_1	10	0	30	20	90	120	310	540	1170	2240	...
x_2	0	5	0	15	10	45	60	155	270	585	...
x_3	0	0	2	0	6	4	18	24	62	108	...

La matrice L *possède deux valeurs propres 2 et* -1*. On vérifie immédiatement que* $(20\,;5\,;1)$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. Si une population est répartie en classes d'âge dans les rapports 20 : 5 : 1, alors ses effectifs sont doublés chaque année. Le vecteur propre* $(10\,;-5\,;2)$ *associé à la valeur propre* -1 *n'a pas de signification en termes d'effectifs.*

Plus généralement, on appelle **matrice de Leslie**[3], une matrice carrée de la forme

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

qui modélise la dynamique d'une population structurée en n classes d'âge. La première ligne contient les coefficients (positifs) de fertilité f_i de la classe d'âge i et les éléments p_i sous la diagonale indiquent les probabilités (ou taux) de survie de la classe d'âge i à la suivante.

On peut démontrer que si λ est la plus grande valeur propre de L, alors toute répartition initiale de la population possède un comportement asymptotique où les effectifs de toutes les classes sont multipliés par λ. Une telle **valeur propre dominante** n'existe cependant pas toujours.

Chiffre de Hill

Le chiffre de Hill[4] est une méthode de cryptographie, la science qui cherche à assurer la confidentialité d'un message lors de sa transmission. On attribue d'abord à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier ($A \to 0, B \to 1, C \to 2, \dots, Z \to 25$). Le message ainsi transformé est subdivisé en blocs de $n = 3$ nombres, considérés comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ exprimés en base canonique. Ainsi, le texte VIVE LA VIE est transformé successivement en

$$(21\,;8\,;21\,;4\,;11\,;0\,;21\,;8\,;4) \text{ puis } X = \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 21 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La clé (secrète) de l'algorithme est donnée par une matrice A qui transforme ces vecteurs en prenant les restes de la division entière par 26.

Avec $A = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 1 \\ 13 & 16 & 10 \\ 20 & 17 & 15 \end{pmatrix}$, on trouve $A \cdot X = \begin{pmatrix} 339 \\ 611 \\ 871 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$ mod 26, $A \cdot Y = \begin{pmatrix} 288 \\ 228 \\ 267 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}$ mod 26 et $A \cdot Z = \begin{pmatrix} 322 \\ 441 \\ 616 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 18 \end{pmatrix}$ mod 26.

---

[3] Patrick Leslie, mathématicien anglais, 1900–1974

[4] Lester Hill, mathématicien américain, 1891–1961

Le message crypté est

$$(1\,;13\,;13\,;2\,;20\,;7\,;10\,;25\,;18) \text{ c'est-à-dire BNNCUHKZS}$$

Pour décrypter ce message, le récepteur applique la même méthode, mais en utilisant la matrice inverse $A^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 8 & 5 & 10 \\ 21 & 8 & 21 \\ 21 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ mod 26.

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 21 \end{pmatrix},\ A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix},\ A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 18 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Remarque. Le choix de la matrice A nécessite quelques précautions. En effet, par le calcul *modulo* 26, la transformation considérée n'est pas bijective si $\mathrm{Det}(A)$ n'est pas premier avec 26.

4.6 Exercices

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f\big((1\,;0)\big) = (2\,;3)$ et $f\big((0\,;1)\big) = (5\,;7)$. Déterminer l'image $f\big((x\,;y)\big)$ d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$.

2. Les applications suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?

a) $f : (x\,;y) \mapsto (x\,;xy)$

b) $f : (x\,;y) \mapsto (x^2\,;0)$

c) $f : (x\,;y) \mapsto (x+1\,;y)$

d) $f : (x\,;y) \mapsto (x-y\,;2x+4y)$

3. Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions suivantes ? Si oui, écrire sa matrice relativement à la base canonique.

a) $f\big((3\,;1)\big) = (-3\,;-1)$ et $f\big((-3\,;-1)\big) = (1;1)$

b) $f\big((3\,;1)\big) = (-3\,;-1)$ et $f\big((-1\,;3)\big) = (1\,;7)$

c) $f\big((3\,;3)\big) = (3\,;3)$ et $f\big((3\,;-3)\big) = (0\,;0)$

4. a) Montrer que la proposition suivante est vraie. Si f est un endomorphisme quelconque de $\mathbb{R}^2$ alors il existe quatre réels α, β, γ et δ tels que $f\big((x\,;y)\big) = (\alpha x + \gamma y\,;\beta x + \delta y)$.

b) Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

5. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et un vecteur quelconque $u = xe_1 + ye_2$.
Les applications f suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?
Déterminer les matrices des endomorphismes relativement à la base $\mathcal{B}$.
Déterminer les endomorphismes bijectifs et les matrices de leurs réciproques relativement à la base $\mathcal{B}$.

a) $f : u \mapsto -2u$ b) $f : u \mapsto u + e_1$

c) $f : u \mapsto ye_1 - xe_2$ d) $f : u \mapsto (-2y-3x)e_1 + (x+y)e_2$

e) $f : u \mapsto 2e_1 - 3e_2$ f) $f : u \mapsto (1+y)e_2$

6. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et un vecteur quelconque $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$.
Les applications f suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$?
Déterminer les matrices des endomorphismes relativement à la base $\mathcal{B}$.
Déterminer les endomorphismes bijectifs et les matrices de leurs réciproques relativement à la base $\mathcal{B}$.

a) $f : u \mapsto -2xe_1$ b) $f : u \mapsto 0e_1 + xe_2 + (x+y+z)e_3$

c) $f : u \mapsto ye_1 - xe_2$ d) $f : u \mapsto (-2y-3x)e_1 + (x-z)e_2 + (3z)e_3$

e) $f : u \mapsto (x+y+z)$ f) $f : u \mapsto 2e_1 + e_2 - e_3$

7. On donne les matrices M_f, M_g, M_h et M_k des endomorphismes f, g, h et k de $\mathbb{R}^2$ relativement à la base canonique $\mathcal{B}$.

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, M_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, M_h = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, M_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices des endomorphismes suivants.

a) $-2f + 3g$ b) $g - k$ c) $f \circ h$ d) $f^2 = f \circ f$

e) g^2 f) k^2 g) $g \circ h$ h) $h \circ g$

8. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice relativement à la base canonique, $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

b) Calculer $A \cdot A$.

c) On pose $B = A - I_2$ et $C = A + I_2$. Calculer $B \cdot C$.

d) Déduire que les endomorphismes $f - \mathrm{id}$ et $f + \mathrm{id}$ sont bijectifs et déterminer leurs réciproques.

9. On considère un endomorphisme f de E tel que $f^2 = k_o$ où k_o est l'endomorphisme nul défini par $k_o(u) = o$ pour tout vecteur u de E.

a) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

b) Calculer $(f - \mathrm{id}) \circ (f + \mathrm{id})$

c) En déduire que $(f - \mathrm{id})$ et $(f + \mathrm{id})$ sont bijectifs et déterminer leurs réciproques.

10. On considère un espace vectoriel E. On note k_o l'endomorphisme nul défini par $k_o(u) = o$, pour tout u de E. Démontrer les propriétés suivantes pour deux endomorphismes f et g de E.

a) Si $g \circ f = k_o$, alors g n'est pas bijectif ou f n'est pas bijectif.

b) $g \circ f = k_o \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

11. Déterminer l'image et le noyau des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants définis par leurs matrices relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ ($a \in \mathbb{R}$).

a) $M = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e) $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2a & 2 \end{pmatrix}$ f) $M = \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

12. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice M relativement à la base canonique et μ un nombre réel. Pour quelles valeurs de μ, l'application f n'est-elle pas bijective ? Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ dans chacun de ces cas.

a) $M = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 4 & \mu \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} \mu-1 & 2 \\ \mu & 3 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} \mu^2 & \mu \\ 2\mu & 1 \end{pmatrix}$ d) $M = \begin{pmatrix} \mu-1 & 2 \\ \mu-1 & \mu+1 \end{pmatrix}$

13. Déterminer l'image et le noyau des endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ définis par leurs matrices relativement à la base canonique.

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ d) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice M relativement à la base canonique et μ un nombre réel. Pour quelles valeurs de μ, l'application f n'est-elle pas bijective ? Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ dans chacun de ces cas.

a) $M = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & \mu \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} \mu & -2 & -1 \\ -2 & \mu & 0 \\ 3 & 0 & \mu \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} 3 & \mu & 1 \\ \mu & -1 & -2 \\ 1 & \mu & 1 \end{pmatrix}$ d) $M = \begin{pmatrix} 2 & -\mu & -2 \\ \mu & -2 & 1 \\ -3 & 3 & \mu \end{pmatrix}$

15. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1\,; e_2)$, on considère quatre vecteurs

$$a_1 = 2e_1 + e_2, a_2 = 5e_1 + 3e_2, b_1 = 7e_1 + 2e_2 \text{ et } b_2 = 4e_1 + e_2$$

Après avoir vérifié que $\mathcal{B}_1 = (a_1\,; a_2)$ et $\mathcal{B}_2 = (b_1\,; b_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$, établir les matrices de passage

a) de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1$ b) de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_0$

c) de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_2$ d) de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_0$

e) de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ f) de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$.

Puis établir la matrice-colonne associée au vecteur $u = (3\,; 4)$ relativement à chacune des trois bases.

16. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère quatre vecteurs $a_1 = (-5\,;1)$, $a_2 = (-2\,;2)$, $b_1 = (-1\,;-3)$ et $b_2 = (5\,;7)$. On pose $\mathcal{B}_1 = (a_1\,;a_2)$ et $\mathcal{B}_2 = (b_1\,;b_2)$.

a) Établir la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

b) Établir la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$.

c) Sachant que la matrice-colonne associée à un vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}_1$ est $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, calculer la matrice-colonne X_2 associée au même vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}_2$.

d) Sachant que la matrice-colonne associée à un vecteur v relativement à la base $\mathcal{B}_2$ est $Y_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, calculer la matrice-colonne Y_1 associée au même vecteur v relativement à la base $\mathcal{B}_1$.

17. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $u = (2\,;1)$, $v = (-1\,;1)$, $s = (3\,;1)$ et $t = (2\,;\frac{1}{3})$ ainsi que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique $(e_1\,;e_2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices de f relativement aux bases suivantes.

a) $(e_2\,;e_1)$ b) $(e_1 + e_2\,;3e_2)$ c) $(u\,;v)$ d) $(s\,;t)$

18. On note $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ trois bases d'un espace vectoriel E, P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ et Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_3$.

Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_3$?

19. Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}_0$ la base canonique $(e_1\,;e_2\,;e_3)$. On considère les vecteurs $a_1 = e_1$, $a_2 = e_1 + e_2$ et $a_3 = e_1 + e_2 + e_3$, ainsi que les vecteurs $b_1 = a_3$, $b_2 = a_2 + a_3$ et $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$. On note $\mathcal{B}_1$ la base $(a_1\,;a_2\,;a_3)$ et $\mathcal{B}_2$ la base $(b_1\,;b_2\,;b_3)$.

a) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

b) Calculer de deux manières différentes la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_2$.

20. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ d'un espace vectoriel E et un endomorphisme f de E défini par $f(e_1) = e_1 - e_2$, $f(e_2) = e_2 - e_3$ et $f(e_3) = e_3 - e_1$.

a) Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) On pose $u_1 = e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + e_3$, $u_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1\,;u_2\,;u_3)$ est une autre base de E.

c) Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$. Que peut-on observer ?

21. On note A et B deux matrices carrées d'ordre 2. Démontrer la propriété $\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$.

22. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice A relativement à la base canonique.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Le nombre 2 est-il une valeur propre de f ?

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Le nombre -3 est-il une valeur propre de f ?

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Le vecteur $(1\,;-1)$ est-il un vecteur propre de f ?

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $(1\,;1)$ est-il un vecteur propre de f ?

23. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres des endomorphismes h de $\mathbb{R}^2$ définis par

a) $h\big((x\,;y)\big) = (3y\,;x + 2y)$

b) $h\big((x\,;y)\big) = (-\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y\,;\frac{1}{4}x + y)$

24. Montrer que l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ défini par $h\big((x\,;y)\big) = (-y\,;x)$ n'admet aucun vecteur propre.

25. On donne des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ par leurs matrices relativement à la base canonique. Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque cela est possible, déterminer la matrice d'un changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme et écrire la matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

26. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ admet les valeurs propres 2 et -3 et les sous-espaces propres $E_2 = L\big((2\,;-1)\big)$ et $E_{-3} = L\big((3\,;1)\big)$. Déterminer les matrices de f dans la base des vecteurs propres et dans la base canonique.

27. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ admet les valeurs propres 1 et 4 et les sous-espaces propres $E_1 = L\big((1\,;-1)\big)$ et $E_4 = L\big((2\,;1)\big)$. Déterminer les matrices de f dans la base des vecteurs propres et dans la base canonique.

28. On considère un endomorphisme f de E dont la matrice M relativement à une base est triangulaire. Montrer que les éléments de la diagonale de M sont les valeurs propres de f.

29. On donne des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ par leurs matrices relativement à la base canonique. Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque cela est possible, déterminer la matrice d'un changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme et écrire la matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

30. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ admet les valeurs propres 1, 2 et -3 et les sous-espaces propres associés $E_1 = L\big((1\,;0\,;1)\big)$, $E_2 = L\big((0\,;-1\,;1)\big)$ et $E_{-3} = L\big((0\,;1\,;1)\big)$. Déterminer les matrices de f dans la base des vecteurs propres et dans la base canonique.

31. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ admet les valeurs propres 1 et 4 et les sous-espaces propres $E_1 = L\big((1\,;-1\,;1)\big)$ et $E_4 = L\big((1\,;0\,;1),(0\,;1\,;1)\big)$. Déterminer les matrices de f dans la base des vecteurs propres et dans la base canonique.

32. Démontrer les propriétés suivantes.

a) Un endomorphisme f n'est pas bijectif si et seulement si 0 est une valeur propre de f.

b) Si f est un endomorphisme bijectif et si λ est une valeur propre de f, alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de ${}^{r}\!f$.

c) Si λ est une valeur propre de f, alors λ^n est une valeur propre de f^n.

d) Si f est un endomorphisme vérifiant l'égalité $f \circ f = k_o$, où k_o est l'endomorphisme nul vérifiant $k_o(u) = o$ pour tout u de E, alors l'unique valeur propre de f est 0.

33. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

a) Vérifier que $(1\,;-1)$ et $(3\,;-1)$ sont deux vecteurs propres de f. Quelles sont les valeurs propres associées ?

b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base des vecteurs propres. Calculer P^{-1}.

c) On note D la matrice de f relativement à la base des vecteurs propres. Écrire D et vérifier $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

d) Vérifier l'égalité $A^2 = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$, puis calculer A^2.

e) Calculer A^5.

34. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique. Calculer A^6, en diagonalisant la matrice A.

35. On considère l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C}\,;\,+\,;\cdot)$. Les applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{C}$? Pour les endomorphismes, déterminer leurs noyaux et leurs images.

a) $f : z \mapsto z + \overline{z}$ b) $f : z \mapsto z - \overline{z}$
c) $f : z \mapsto i\,\overline{z}$ d) $f : z \mapsto (1-i)\overline{z} + (1+i)z$
e) $f : z \mapsto 1/z$ f) $f : z \mapsto (1+i)(z-i)$

36. La suite de Fibonacci[5] est définie de manière récursive par $u_1 = u_2 = 1$ et $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$, pour tout $n \geq 3$.
On note M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Écrire les 10 premiers termes de la suite de Fibonacci.

b) Calculer M^2, M^3 et M^4. Démontrer par récurrence que les éléments de la matrice M^n sont des nombres de la suite de Fibonacci.

c) Diagonaliser M, calculer M^n et en déduire la formule de Binet[6]

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

---

[5] Leonardo Fibonacci, mathématicien italien, 1175–1250

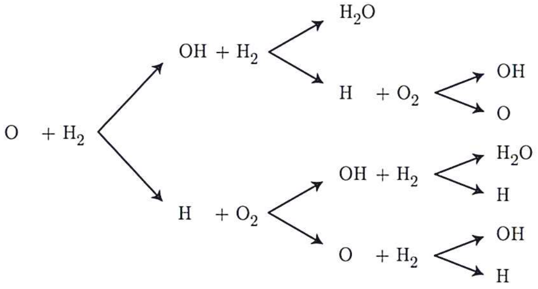
[6] Jacques Binet, mathématicien français, 1786–1856

37. En présence de molécules H_2 et O_2, les radicaux H, O et OH se transforment selon les réactions chimiques suivantes.

$$\begin{aligned} O + H_2 &\to OH + H \\ OH + H_2 &\to H_2O + H \\ H + O_2 &\to OH + O \end{aligned}$$

On suppose que ces trois réactions ont la même vitesse et que l'on dispose d'une quantité illimitée de dihydrogène et de dioxygène.

En partant d'un radical oxygène O, celui-ci réagit avec H_2 pour donner les radicaux OH et H. Chacun de ces radicaux réagit à son tour respectivement avec H_2 et O_2 et fournit H, OH, O et de l'eau (H_2O). À l'étape suivante, on obtient au total $2OH, 2H, 1O$ et $2H_2O$, et ainsi de suite. Voici un schéma qui représente le début de cette **réaction en chaîne**.



Le nombre total de particules de chaque type évolue en fonction du temps selon le tableau suivant.

t	0	1	2	3	...
O	1	0	1	1	
OH	0	1	1	2	
H	0	1	1	2	
H_2O	0	0	1	2	

a) Compléter dans ce tableau les colonnes $t = 4$ et $t = 5$.

b) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui décrit le passage de t à $t + 1$.

c) Trouver les valeurs propres de M.

38. On considère la matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur d'état stationnaire.

39. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ est une matrice de transition. Déterminer un vecteur d'état stationnaire E. Calculer A^n.

40. Dans une crèche, un enfant est déclaré en bonne santé ou malade. Parmi les enfants en bonne santé un jour donné, 90% le seront encore le lendemain. Parmi les enfants malades, 30% le seront encore le lendemain. Le 2 mars, 15% des enfants sont malades.

a) Trouver la matrice de transition.

b) Quel est le vecteur d'état au 2 mars, au 3 mars, au 4 mars ?

c) Quelle est la proportion d'enfants malades à long terme ?

41. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$ est une matrice de transition, puis calculer A^2 et A^3.

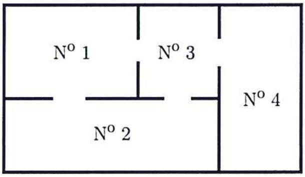
42. Déterminer un vecteur stationnaire de la matrice de transition

$$T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

43. Déterminer le vecteur d'état stationnaire de l'exemple 9 du chapitre 1 (page 13).

44. Dans un village, les habitants disposent de 2 chaînes de télévision, $T1$ et $T2$. On désigne par $T3$ la télévision éteinte. Lorsqu'une personne a choisi son programme, dans 90% des cas elle ne change pas de chaîne dans les dix minutes alors que 1% des téléspectateurs de $T1$ vont zapper sur $T2$ et vice-versa et 9% des téléspectateurs vont éteindre leur poste. Dans le même laps de temps, parmi ceux qui ne regardaient pas la télévision, 9% vont se brancher sur $T1$ et 1% sur $T2$ alors que 90% n'allumeront pas leur poste. Si à 20h, 50% des habitants regardaient $T1$, 20% regardaient $T2$, combien de personnes ont leur poste éteint à 20h10 ? Quel est le vecteur d'état stationnaire ?

45. Une souris est placée dans un labyrinthe. Chaque fois qu'elle entend un coup de sifflet, elle panique et change de compartiment, en choisissant au hasard une des portes.



a) Déterminer la matrice de transition associée à cette situation.

b) La souris se trouvait dans le compartiment 3 au départ. Écrire le vecteur correspondant à sa position après un coup de sifflet, après deux coups de sifflet.

c) Quel est le vecteur d'état stationnaire ? Interpréter ce résultat.

46. Une économie fermée comprend deux secteurs, les biens et les services. Le secteur des biens vend 75% des biens au secteur des services et garde le reste. Le secteur des services fournit 60% de ses prestations au secteur des biens et garde le complément pour lui. Déterminer les prix d'équilibre afin que les recettes compensent les dépenses.

47. Un grand domaine d'une économie fermée est divisée en trois secteurs, la chimie, l'énergie, l'industrie. La chimie vend 25% de sa production à l'énergie, 55% à l'industrie et garde le reste. L'énergie vend 75% de sa production à la chimie, 10% à l'industrie et garde le reste. L'industrie vend 40% à la chimie, 40% à l'énergie et garde le reste.

Écrire la matrice des échanges et déterminer les prix d'équilibre qui permettent aux dépenses d'être compensées par les recettes.

48. On considère une production modélisée par l'équation $X = C \cdot X + D$. Calculer X dans chacun des cas suivants.

a) $C = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.6 \\ 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$

b) $C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$

49. Une économie ouverte est divisée en trois secteurs, l'agriculture, l'industrie et les services. La matrice des coefficients techniques est

$$C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.0 \\ 0.6 & 0.1 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

a) Expliquer ce que signifie cette matrice.

b) Déterminer le vecteur de production totale, si la demande externe est de 100 unités dans chacun des trois secteurs.

50. Un groupe comprend trois secteurs d'activité répartis dans trois entreprises, notées E_1, E_2 et E_3. La production d'une unité dans l'entreprise E_1 requiert 0.2 unité de E_1, 0.4 unité de E_2 et 0.3 unité de E_3 ; la production d'une unité dans l'entreprise E_2 requiert 0.2 unité de E_1, 0.2 unité de E_2 et 0.1 unité de E_3 ; la production d'une unité dans l'entreprise E_3 requiert 0.1 unité de E_1, 0.1 unité de E_2 et 0.2 unité de E_3.

a) Construire la matrice des coefficients techniques.

b) Calculer la matrice d'impact.

c) La demande externe pour le prochain trimestre est de 90 unités de E_1, 100 unités de E_2 et de 200 unités de E_3. Déterminer la production totale permettant de satisfaire à cette demande externe.

d) Le vecteur production d'un trimestre a été $X = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}$. Quelle a été la demande externe de ce trimestre ?

51. Une population de scarabées présente quatre classes d'âge d'une année chacune avec des taux de survie de respectivement 10%, 50% et 50% et une reproduction uniquement durant la quatrième année de p descendants par individu. Écrire la matrice de Leslie qui modélise la dynamique de cette population.
Quelle est la valeur minimale de p qui assure la survie de l'espèce ?
Indication : les naissances doivent compenser les pertes.

52. Un modèle de Leslie est proposé pour représenter la dynamique de la population d'un pays. Ne prenant en compte que les individus de sexe féminin, on a choisi dix classes d'âge d'une durée de 5 ans chacune. Les éléments de la première ligne de la matrice de Leslie sont

0.000 0.000 0.001 0.012 0.376 0.438 0.383 0.046 0.007 0.002

et les éléments situés sous la diagonale sont

0.996 0.998 0.997 0.996 0.996 0.994 0.992 0.990 0.983

a) Comment expliquer que les éléments de la première ligne sont croissants puis décroissants ? Un tel élément peut-il être supérieur à 1 ?

b) Pourquoi le premier coefficient de la deuxième liste est-il inférieur au suivant ?

c) Pourquoi le modèle ne tient-il pas compte des individus de plus de 50 ans ?

53. On considère un modèle de Leslie de matrice $L = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner une interprétation des éléments non nuls de la matrice L par rapport à la population que l'on modélise.

b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice L. Donner une interprétation des résultats.

c) Diagonaliser la matrice L et calculer L^n. En déduire le comportement asymptotique de la dynamique de cette population.

54. Même exercice que le précédent avec la matrice $L = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

55. On considère une population de saumons. En moyenne, deux neuvièmes meurent la première année. Durant la deuxième année, ils donnent naissance en moyenne à un juvénile par individu, puis les six septièmes meurent. Chaque poisson qui survit la troisième année donne encore naissance en moyenne à deux juvéniles avant de mourir.

a) Écrire la matrice de Leslie L modélisant l'évolution de cette population.

b) Avec une population initiale de respectivement 1200, 1400 et 500 saumons dans chaque classe d'âge, calculer les populations au début des quatre années suivantes.

c) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de L.

d) En écrivant le vecteur de la population initiale en combinaison linéaire de trois vecteurs propres, prédire l'évolution à long terme de la population.

56. On considère une évolution d'insectes donnée par une matrice de Leslie. Déterminer, dans chaque cas, les solutions (réelles et complexes) de l'équation caractéristique et étudier le comportement asymptotique d'une population initiale répartie en 3 classes d'âge.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 13 & 24 \\ 1/36 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

57. Utiliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ comme clé pour chiffrer selon la méthode de Hill le mot ORANGE.

58. Trouver le message du cryptogramme RZM DPR IGS BOK BSI sachant qu'il est obtenu par un chiffrement de Hill de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 12 & 16 \\ 23 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Indication : pour trouver l'inverse de 21*, on cherche une solution entière de l'équation* $x \cdot 21 \equiv 1 \bmod 26$*.*

Réponses aux exercices du chapitre 4

1. $(2x + 5y\,; 3x + 7y)$

2. non, non, non, oui

3. non ; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. b) $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$

5. Les application (b), (e) et (f) ne sont pas des endomorphismes.

a) oui ; $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) oui ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) oui ; $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. a) oui ; $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; non bijectif b) oui ; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; non bijectif

c) oui ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; non bijectif

d) oui ; $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -3 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Les applications (e) et (f) ne sont pas des endomorphismes.

7. a) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. a) non b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
d) ${}^{r}(f-\mathrm{id}) = -(f+\mathrm{id})$ ${}^{r}(f+\mathrm{id}) = -(f-\mathrm{id})$

9. a) non b) $-\mathrm{id}$ c) ${}^{r}(f-\mathrm{id}) = -(f+\mathrm{id})$ et ${}^{r}(f+\mathrm{id}) = -(f-\mathrm{id})$

11. a) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((3\,;-1)\big)\,;\ \mathrm{Im}(f) = L\big((3\,;-1)\big)$
b) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;0)\big)\,;\ \mathrm{Im}(f) = L\big((-4\,;3)\big)$
c) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((3\,;1)\big)\,;\ \mathrm{Im}(f) = L\big((0\,;1)\big)$
d) $\mathrm{Ker}(f) = \{o\}\,;\ \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$
e) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-a)\big)\,;\ \mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;2)\big)$
f) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((a\,;-1)\big)\,;\ \mathrm{Im}(f) = L\big((a\,;1)\big)$

12. a) $\mu = 2$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-2)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;2)\big)$
ou $\mu = -2$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;2)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;-2)\big)$
b) $\mu = 3$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-1)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((2\,;3)\big)$
c) $\mu = 0$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;0)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((0\,;1)\big)$
d) $\mu = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;0)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;1)\big)$

13. a) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((2\,;-1\,;0)\,,(3\,;0\,;-1)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;1\,;1)\big)$
b) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;0\,;0)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((-4\,;3\,;0)\,,(2\,;1\,;0)\big)$
c) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((-1\,;1\,;1)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;1\,;5)\,,(-2\,;-3\,;-4)\big)$
d) $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;2\,;0)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((2\,;-4\,;0)\,,(0\,;0\,;1)\big)$

14. a) $\mu = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-1\,;0)\,,(1\,;0\,;-1)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((1\,;1\,;1)\big)$
$\mu = -2$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;1\,;1)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((-2\,;1\,;1)\,,(1\,;-2\,;1)\big)$
b) $\mu = 0$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((0\,;1\,;2)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((0\,;-2\,;3)\,,(1\,;0\,;0)\big)$
$\mu = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;2\,;-3)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((-2\,;1\,;0)\,,(-1\,;0\,;1)\big)$
$\mu = -1$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-2\,;3)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((2\,;1\,;0)\,,(1\,;0\,;1)\big)$
c) $\mu = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((0\,;2\,;-1)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = L\big((6\,;1\,;2)\,,(1\,;-2\,;1)\big)$
d) $\mu = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((5\,;4\,;3)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((2\,;1\,;-3)\,,(-2\,;1\,;1)\big)$
$\mu = 2$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;1\,;0)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((2\,;2\,;-3)\,,(-2\,;1\,;2)\big)$,
$\mu = -3$, $\mathrm{Ker}(f) = L\big((1\,;-4\,;-5)\big)$, $\mathrm{Im}(f) = L\big((-2\,;3\,;3)\,,(3\,;-2\,;3)\big)$

15. a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$

$u : \mathcal{B}_0 : \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B}_1 : \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B}_2 : \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \end{pmatrix}$

16. a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $Y_1 = \begin{pmatrix} -20 \\ 34 \end{pmatrix}$

17. a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & -20 \\ 36 & 33 \end{pmatrix}$

18. $P \cdot Q$

19. a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

20. a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$M' = P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = M$$

La matrice de l'endomorphisme f est la même dans les deux bases !

22. a) oui b) non c) non d) oui

23. a) $\lambda = 3$, $E_3 = L\big((1\,;1)\big)$ et $\lambda = -1$, $E_{-1} = L\big((3\,;-1)\big)$

b) $\lambda = \frac{1}{2}$, $E_{\frac{1}{2}} = L\big((2\,;-1)\big)$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, $E_{\frac{1}{4}} = L\big((3\,;-1)\big)$

25. a) $\lambda_1 = 1$, $E_1 = L\big((1\,;-1)\big)$ et $\lambda_2 = 4$, $E_4 = L\big((2\,;1)\big)$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\lambda_1 = 2$, $E_2 = L\big((1\,;1)\big)$ et $\lambda_2 = 3$, $E_3 = L\big((1\,;0)\big)$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $E_3 = L\big((1\,;-1)\big)$, A n'est pas diagonalisable.

d) $\lambda_1 = 0$, $E_0 = L\big((2\,;1)\big)$ et $\lambda_2 = -3$, $E_{-3} = L\big((1\,;-1)\big)$,
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e) L'endomorphisme n'admet aucune valeur propre.

f) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $E_0 = L\big((3\,;1)\big)$, A n'est pas diagonalisable.

g) $\lambda_1 = 0$, $E_0 = L\big((0\,;1)\big)$ et $\lambda_2 = 3$, $E_3 = L\big((3\,;1)\big)$,
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

h) Si $t = 2k\pi$, $f = \mathrm{id}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, déjà diagonalisée ;

si $t = (2k+1)\pi$, $f = -\,\mathrm{id}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, déjà diagonalisée ;

si $t \neq k\pi$, l'endomorphisme n'admet aucune valeur propre.

i) $\lambda_1 = \cos(t) + \sin(t)$, $E_{\cos(t)+\sin(t)} = L\big((1\,;1)\big)$
$\lambda_2 = \cos(t) - \sin(t)$, $E_{\cos(t)-\sin(t)} = L\big((1\,;-1)\big)$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} \cos(t)+\sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t)-\sin(t) \end{pmatrix}$$

26. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

29. a) $\lambda_1 = -3$, $E_{-3} = L\big((1\,;-1\,;2)\big)$; $\lambda_2 = 0$, $E_0 = L\big((-1\,;1\,;1)\big)$ et
$\lambda_3 = 2$, $E_2 = L\big((2\,;3\,;4)\big)$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_1 = 2$, $E_2 = L\big((1\,;0\,;-1)\,,(2\,;-1\,;0)\big)$ et
$\lambda_2 = 6$, $E_6 = L\big((1\,;1\,;1)\big)$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

c) $\lambda_1 = 0$, $E_0 = L\big((1\,;1\,;0)\big)$ et
$\lambda_2 = 2$, $E_2 = L\big((-1\,;1\,;0), (0\,;0\,;1)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $\lambda_1 = 1$, $E_1 = L\big((1\,;2\,;6)\big)$, A n'est pas diagonalisable.

e) $\lambda_1 = 3$, $E_3 = L\big((1\,;0\,;0)\big)\,;\ \lambda_2 = 4$, $E_4 = L\big((0\,;1\,;0)\big)\,;$
$\lambda_3 = 2$, $E_2 = L\big((2\,;1\,;-2)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

f) $\lambda_1 = 1$, $E_1 = L\big((1\,;2\,;0)\big)\,;\ \lambda_2 = 2$, $E_2 = L\big((0\,;1\,;1)\big)\,;$
$\lambda_3 = 3$, $E_3 = L\big((1\,;2\,;-1)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

30. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\,;\ \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\,;\ \begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

33. a) $\lambda_1 = 5$ et $v_1 = (1\,;-1)\,;\ \lambda_2 = 3$ et $v_2 = (3\,;-1)$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 8 & 33 \end{pmatrix}$ e) $A^5 = \begin{pmatrix} -1198 & -4323 \\ 1441 & 4566 \end{pmatrix}$

34. $A^6 = \begin{pmatrix} 1394 & -665 \\ 1330 & -601 \end{pmatrix}$

35. a) f est un endomorphisme non bijectif. $\mathrm{Ker}(f) = i\,\mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

b) f est un endomorphisme non bijectif. $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) = i\,\mathbb{R}$.

c) f est un endomorphisme bijectif.

Les trois autres applications ne sont pas des endomorphismes.

36. a) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, M^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, M^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$

c) On trouve $M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et les matrices de passage $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, où $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

37. a) Pour $t = 4 : (2\,;3\,;3\,;4)$, pour $t = 5 : (3\,;5\,;5\,;7)$. On peut observer l'apparition des termes de la suite de Fibonacci (voir exercice 36) : pour $t = n \geq 2$, on trouve $(u_{n-1}\,;u_n\,;u_n\,;u_{n+1}-1)$.

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $1, -1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ (le nombre d'or) et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = -\frac{1}{\Phi}$

38. Vecteur stationnaire $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

39. $E = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$ $A^n = \begin{pmatrix} 0.25 + 5^{-n} \cdot 0.75 & 0.25 - 5^{-n} \cdot 0.25 \\ 0.75 - 5^{-n} \cdot 0.75 & 0.75 + 5^{-n} \cdot 0.25 \end{pmatrix}$

40. $T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.15 \end{pmatrix}$; $T \cdot E = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 0.13 \end{pmatrix}$; $T^2 \cdot E = \begin{pmatrix} 0.874 \\ 0.126 \end{pmatrix}$

En bonne santé : $\frac{7}{8} \simeq 87.5\%$

41. $A^2 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.23 & 0.23 \\ 0.32 & 0.39 & 0.32 \\ 0.38 & 0.38 & 0.45 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0.244 & 0.237 & 0.258 \\ 0.334 & 0.355 & 0.341 \\ 0.422 & 0.408 & 0.401 \end{pmatrix}$

42. $E = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

44. La matrice de transition est $\begin{pmatrix} 0.90 & 0.01 & 0.09 \\ 0.01 & 0.90 & 0.01 \\ 0.09 & 0.09 & 0.90 \end{pmatrix}$; 33.3% ; $\frac{1}{209} \begin{pmatrix} 91 \\ 19 \\ 99 \end{pmatrix}$

45. a) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

46. Prix d'équilibre pour les biens et les services $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Si le secteur des biens produit 4 unités monétaires, le secteur des services doit en produire 5.

47. $M = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 & 0.4 \\ 0.25 & 0.15 & 0.4 \\ 0.55 & 0.10 & 0.2 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0.412 \\ 0.271 \\ 0.317 \end{pmatrix}$

48. a) $\begin{pmatrix} 120 \\ 100 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 79 \\ 117 \\ 72 \end{pmatrix}$

49. $X = \begin{pmatrix} 333 \\ 556 \\ 333 \end{pmatrix}$

50. a) $C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$ b) $(I_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.343 & 0.362 & 0.213 \\ 0.746 & 1.471 & 0.277 \\ 0.597 & 0.320 & 1.365 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 270 \\ 359 \end{pmatrix}$ d) $(I_3 - C) \cdot X = \begin{pmatrix} 140 \\ 150 \\ 270 \end{pmatrix}$

51. $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p \\ 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; condition de survie : $p \geq 40$

52. a) La fertilité débute l'âge de 15 ans, puis diminue dès l'âge de 30 ans. Le taux de fertilité peut être supérieur à 1 (nombre de filles par femme sur une période de 5 ans).

b) La mortalité infantile est un peu plus élevée à la naissance.

c) Les femmes survivent mais n'ont plus d'enfants. Elles n'interviennent plus dans la dynamique de la population.

53. a) On considère deux classes d'âge. 25% des femelles de la première classe d'âge donnent naissance à une femelle. 75% survivent et donnent naissance à une femelle en moyenne.

b) Valeurs propres 1 et $-3/4$; $E_1 = L\big((4\,;3)\big), E_{-3/4} = L\big((1\,;-1)\big)$
Une population répartie en deux classes d'âge dans le rapport 4 : 3 est stable.

c) Avec $L' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3/4\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, on trouve $L^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4+3(-0.75)^n & 4-4(-0.75)^n \\ 3-3(-0.75)^n & 3+4(-0.75)^n \end{pmatrix}$.
La population totale reste stable et tend vers une répartition en deux classes d'âge dans le rapport 4 : 3 (1 est valeur propre dominante).

54. a) On considère deux classes d'âge. Les femelles de la première classe d'âge donnent naissance en moyenne à deux femelles. 25% survivent et donnent naissance en moyenne à douze autres femelles.

b) Valeurs propres 3 et -1 ; $E_3 = L\big((12\,;1)\big), E_{-1} = L\big((-4\,;1)\big)$
Une population répartie en deux classes d'âge dans le rapport 12 : 1 triple à chaque génération.

c) Avec $L' = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}12 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 12\end{pmatrix}$, on trouve $L^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 12\cdot 3^n + 4(-1)^n & 48\cdot 3^n - 48(-1)^n \\ 3^n - \ (-1)^n & 4\cdot 3^n + 12(-1)^n \end{pmatrix}$.
La population totale triple à chaque génération et tend vers une répartition en deux classes d'âge dans le rapport 12 : 1 (3 est valeur propre dominante).

55. a) $L = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 7/9 & 0 & 0\\ 0 & 1/7 & 0\end{pmatrix}$

b) $p_1 = \begin{pmatrix}2400\\ 933\\ 200\end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix}1333\\ 1867\\ 133\end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix}2133\\ 1037\\ 267\end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix}1571\\ 1659\\ 148\end{pmatrix}$

c) Valeurs propres : $1, -2/3, -1/3$; espaces propres : $E_1 = L\big((9\,;7\,;1)\big)$, $E_{-2/3} = L\big((12\,;-14\,;3)\big), E_{-1/3} = L\big((3\,;-7\,;3)\big)$

d) $p_0 = \begin{pmatrix}1200\\ 1400\\ 500\end{pmatrix} = 200\begin{pmatrix}9\\ 7\\ 1\end{pmatrix} - 100\begin{pmatrix}12\\ -14\\ 3\end{pmatrix} + 200\begin{pmatrix}3\\ -7\\ 3\end{pmatrix}$

$p_\infty = 200\begin{pmatrix}9\\ 7\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1800\\ 1400\\ 200\end{pmatrix}$ car lorsque n tend vers l'infini, $(-2/3)^n$ et $(-1/3)^n$ tendent vers zéro.

56. a) Valeurs propres : $2/3, -1/2, -1/6$
2/3 est la valeur propre dominante : la population disparaît

b) Valeur propre dominante : 1 (deux valeurs propres complexes de module inférieur à 1) ; la population globale reste constante, sa répartition en 3 classes d'âge se stabilise dans le rapport 2 : 1 : 1.

c) Une valeur propre réelle 1, mais deux valeurs propres complexes de module 1. Une population répartie en 3 classes d'âge dans le rapport 6 : 3 : 1 est en équilibre. Pour toute autre répartition, on peut observer un comportement cyclique de période 3.

57. XWNAMO

58. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 23 & 6 \\ 0 & 11 & 11 \\ 25 & 7 & 15 \end{pmatrix} \bmod 26$

Le texte chiffré reste secret !

5 Applications en géométrie

Remarque préliminaire

Tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$ (voir page 85). Pour les figures qui servent à illustrer certains endomorphismes, on utilise dans ce chapitre les espaces vectoriels V_2 et V_3 introduits dans les cours de géométrie vectorielle et analytique du plan et de l'espace. Les différents concepts peuvent cependant être généralisés à des espaces vectoriels quelconques, raison pour laquelle les définitions et théorèmes seront énoncés pour un espace vectoriel E de dimension n.

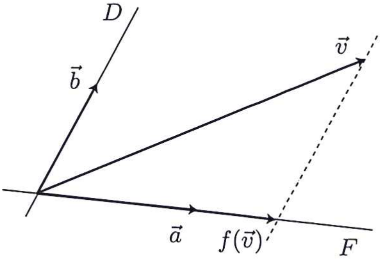
Les endomorphismes de ce chapitre sont des transformations vectorielles. Cependant, afin d'éviter une lourdeur dans les énoncés, on désigne une rotation vectorielle, une symétrie axiale vectorielle, une projection vectorielle, plus simplement par rotation, symétrie axiale, projection.

5.1 Projection, symétrie et homothétie

Projection vectorielle

Exemple 1. *On considère deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{a}$ et $\vec{b}$ du plan vectoriel V_2.*

L'application f qui associe à tout vecteur $\vec{v}$ de V_2 sa projection sur la droite vectorielle $F = L(\vec{a})$ parallèlement à la droite vectorielle $D = L(\vec{b})$ est une application linéaire.



Comme $f(\vec{a}) = \vec{a}$ et que $f(\vec{b}) = \vec{o}$, la matrice de f relativement à la base $(\vec{a}\,;\vec{b})$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'application f possède les valeurs propres 0 et 1, et les espaces propres associés sont $E_0 = L(\vec{b}\,)$ et $E_1 = L(\vec{a}\,)$. Autrement dit, la droite vectorielle $D = L(\vec{b}\,)$ est le noyau de cette projection et la droite vectorielle $F = L(\vec{a}\,)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par f, mais également l'image de f.

Comme $M^2 = M$, on peut écrire $f \circ f = f$, ce qui signifie que les images par f restent invariantes si l'on applique une seconde fois la même projection.

Si un endomorphisme f d'un espace vectoriel E vérifie l'égalité $f \circ f = f$, les nombres 0 et 1 sont les seules valeurs propres possibles. En effet, si $f(v) = \lambda v$ et que $f\big(f(v)\big) = f(v)$, alors $\lambda^2 v = \lambda v$ ou $\lambda(\lambda - 1)v = o$. Pour que cette dernière équation admette une solution non nulle pour v, il faut que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Dans le cas particulier où $E_1 = E$, l'endomorphisme f est l'identité de E. Dans le cas où $E_0 = E$, f est l'application nulle k_0 de E.

Dans les autres cas, on pose $D = E_0 = \mathrm{Ker}(f)$ et $F = E_1 = \mathrm{Im}(f)$. L'application f est la **projection** de E sur F parallèlement à D. Elle n'est ni injective, ni surjective.

Une application linéaire f est une projection si et seulement si sa matrice M relativement à une base $\mathcal{B}$ vérifie la relation $M^2 = M$. On en déduit immédiatement que

$$(I_n - M)^2 = I_n^2 - M - M + M^2 = I_n - M$$

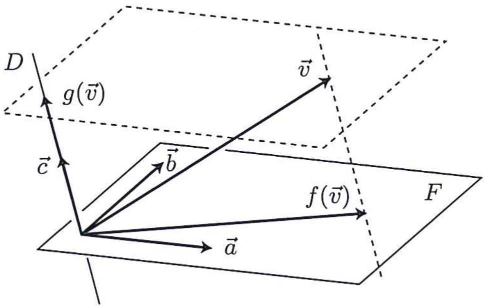
L'application $\mathrm{id}_E - f$ est donc elle aussi une projection. Le vecteur $v - f(v)$ est la projection du vecteur v sur D parallèlement à F. On a la propriété

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - f) = \mathrm{Im}(f) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - f) = \mathrm{Ker}(f)$$

Exemple 2. *On considère trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'espace vectoriel V_3. L'application f définie par la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

relativement à la base $(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,)$ définit la projection de V_3 sur le plan vectoriel $F = L(\vec{a}, \vec{b}\,)$ parallèlement à la droite vectorielle $D = L(\vec{c}\,)$.



L'application g définie par la matrice $N = I_3 - M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la projection de V_3 sur la droite vectorielle D parallèlement au plan F.

Exemple 3. *Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est donné par sa matrice A relativement à la base canonique.*

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $A^2 = A$ et que les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 0 sont

$$E_1 = L\big((-1\,;1\,;0), (2\,;0\,;1)\big) \qquad E_0 = L\big((2\,;3\,;-1)\big)$$

On en déduit que f est une projection de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur le plan $F = E_1$ parallèlement à la droite $D = E_0$. La matrice A' de f relativement à la base $\big((-1\,;1\,;0)\,;(2\,;0\,;1)\,;(2\,;3\,;-1)\big)$ est la matrice M de l'exemple précédent.

La projection sur D parallèlement à F peut être décrite, relativement à la base canonique, par la matrice

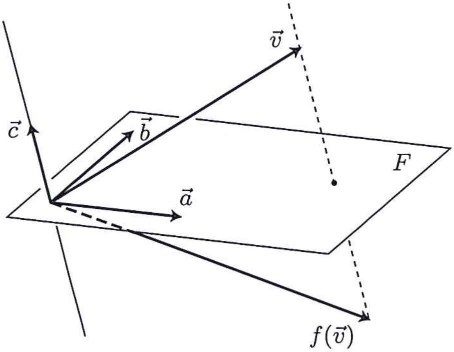
$$B = I_3 - A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Symétrie vectorielle

Exemple 4. *On considère trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'espace vectoriel V_3. L'application f donnée par la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

relativement à la base $(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$ *définit la symétrie de* V_3 *par rapport au plan vectoriel* $F = L(\vec{a}, \vec{b})$ *et de direction* $D = L(\vec{c})$.



L'application f *possède deux valeurs propres* 1 *et* -1. *Les espaces propres associés sont* $E_1 = L(\vec{a}, \vec{b})$ *et* $E_{-1} = L(\vec{c})$. *On a* $f \circ f = \mathrm{id}_E$ *; l'application* f *est donc bijective et* ${}^r\!f = f$.

Si un endomorphisme f d'un espace vectoriel E vérifie l'égalité $f \circ f = \mathrm{id}_E$, les nombres -1 et 1 sont les seules valeurs propres possibles.

Dans le cas particulier où $E_1 = E$, l'endomorphisme f est l'identité de E. Dans le cas où $E_{-1} = E$, l'application f est $-\mathrm{id}_E$ et peut être interprétée comme **symétrie centrale** ou comme homothétie de rapport -1.

Dans les autres cas, on pose $F = E_1$ et $D = E_{-1}$. L'application f est la **symétrie** de E par rapport à F et de direction D. Elle est bijective avec ${}^r\!f = f$ (ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$ et $\mathrm{Im}(f) = E$).

Une application linéaire f est une symétrie si et seulement si sa matrice M relativement à une base $\mathcal{B}$ vérifie la relation $M^2 = I_n$.

En observant la figure de l'exemple 4, on voit que

$p = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + f)$	est la projection sur F parallèlement à D
$g = -f$	est la symétrie par rapport à D et de direction F
$q = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E - f)$	est la projection sur D parallèlement à F

Homothétie vectorielle

L'**homothétie** de rapport k, $k \neq 0$, est l'endomorphisme h de E défini par $h(x) = kx$. La matrice associée à h (relativement à une base quelconque) est $M = kI_n$.

Le nombre k est la seule valeur propre et l'espace propre associé est E. L'application est bijective et sa réciproque est l'homothétie de rapport $1/k$, de matrice $M^{-1} = \frac{1}{k}I_n$.

Les cas particuliers $k = 1$ et $k = -1$ correspondent respectivement à l'identité et à la symétrie centrale. Une homothétie de rapport k est une **contraction** si $|k| < 1$ et une **dilatation** si $|k| > 1$.

5.2 Produit scalaire et norme

Produit scalaire

Le **produit scalaire**[1] usuel de deux vecteurs $x = (x_1\,; x_2)$ et $y = (y_1\,; y_2)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est le nombre réel

$$\langle x\,; y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

De manière analogue, on définit le produit scalaire usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

$$\langle x\,; y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n$$

Exemple 1. *On donne $x = (3\,; -2\,; 4)$ et $y = (2\,; 1\,; 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire usuel de ces deux vecteurs est le nombre $\langle x\,; y\rangle = 16$.*

Propriétés. On note x, y et z trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ un nombre réel.

1. $\langle y\,; x\rangle = \langle x\,; y\rangle$
2. $\langle x\,; y + z\rangle = \langle x\,; y\rangle + \langle x\,; z\rangle$
3. $\langle x\,; \lambda y\rangle = \lambda\langle x\,; y\rangle$
4. $\langle x\,; x\rangle \geq 0$
5. $\langle x\,; x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

La démonstration de ces propriétés est immédiate à l'aide de la définition.

---

[1] L'emploi des chevrons $\langle x\,; y\rangle$ au lieu d'une notation du type $x \cdot y$ permet d'éviter la confusion avec d'autres produits.

Généralisation. Dans un espace vectoriel E quelconque, un produit scalaire est une application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x\,;y) & \longmapsto & \langle x\,;y\rangle \end{array}$$

vérifiant les cinq propriétés précédentes.

Exemple 2. *Dans* $\mathbb{R}^2$, $\langle x\,;y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ *est le produit scalaire usuel. En posant* $\langle x\,;y\rangle = 3x_1y_1 + x_2y_2$, *on obtient un autre produit scalaire. Pour les vecteurs* $x = (1\,;3)$ *et* $y = (2\,;-1)$, *par exemple, ces produits scalaires sont respectivement* -1 *(produit scalaire usuel) et* 3.

Pour la suite de ce cours, on désigne par produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire usuel.

Exemple 3. *Dans l'espace* $\mathbb{P}_2$ *des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, l'application définie par*

$$\big\langle a_1x^2 + b_1x + c_1\,;a_2x^2 + b_2x + c_2\big\rangle = a_1a_2 + 2b_1b_2 + 3c_1c_2$$

est un produit scalaire.
Pour les polynômes $p(x) = x^2 + x - 2$ *et* $q(x) = 2x^2 - 3x + 2$, *par exemple, on obtient* $\langle p\,;q\rangle = -16$.

Exemple 4. *Dans l'espace* $\mathcal{C}\big([0;1]\big)$ *des fonctions réelles continues sur l'intervalle* $[0\,;1]$, *l'application définie par*

$$\langle f\,;g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

est un produit scalaire.
Pour les fonctions $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = \sqrt{x}$, *on obtient* $\langle f\,;g\rangle = \dfrac{2}{7}$.

Exemple 5. *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *des matrices carrées d'ordre* n, *l'application définie par*

$$\langle A\,;B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tA \cdot B\right)$$

est un produit scalaire.
Pour les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *on obtient* $\langle A\,;B\rangle = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un **espace vectoriel euclidien.**

Norme d'un vecteur

La **norme** usuelle d'un vecteur $x = (x_1\,;x_2\,;\,\ldots\,;x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est le nombre réel positif

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

On a $\|x\| = \sqrt{\langle x\,;x\rangle}$. Cette relation définit plus généralement la norme d'un vecteur pour tout produit scalaire d'un espace vectoriel euclidien E.

Un vecteur est **unitaire** si sa norme est égale à 1.

> **Exemple 6.** *La norme du vecteur* $x = (3\,;-2\,;4)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est le nombre* $\|x\| = \sqrt{29}$. *Le vecteur* $u = \left(\frac{3}{5}\,;-\frac{4}{5}\,;0\right)$ *est unitaire.*

Propriétés. On note x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ un nombre réel.

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski[2])
4. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
5. $\big|\langle x\,;y\rangle\big| \leq \|x\|\,\|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz[3])

Démonstration. La démonstration des propriétés 1, 2 et 4 est immédiate. Une démonstration élégante de la propriété 5 consiste à étudier, pour deux vecteurs x et y donnés, la fonction

$$p(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$$

qui prend des valeurs positives quel que soit le nombre réel λ. Or

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \langle x + \lambda y\,;x + \lambda y\rangle \\ &= \langle x\,;x\rangle + 2\langle x\,;y\rangle\lambda + \langle y\,;y\rangle\lambda^2 \end{aligned}$$

La fonction p est donc un polynôme du deuxième degré en λ dont le discriminant doit être inférieur ou égal à 0 (sinon le polynôme changerait de signe). Ainsi

$$\Delta = 4\langle x\,;y\rangle^2 - 4\langle x\,;x\rangle\langle y\,;y\rangle \leq 0$$

---

[2] Hermann Minkowski, mathématicien et physicien allemand, 1864–1909

[3] Augustin-Louis Cauchy, mathématicien français, 1789–1857 et Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand, 1843–1921

et on peut conclure en utilisant la définition de la norme

$$|\langle x\,;y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

La propriété 3 peut maintenant être établie en écrivant successivement

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y\,;x+y\rangle\\ &= \langle x\,;x\rangle + 2\langle x\,;y\rangle + \langle y\,;y\rangle\\ &\leq \|x\|^2 + 2\,|\langle x\,;y\rangle| + \|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

□

Remarques

1. En géométrie analytique du plan et de l'espace, l'inégalité de Minkowski est aussi connue sous le nom d'inégalité triangulaire. Elle découle alors des propriétés de la distance.
2. Si x est un vecteur non nul d'un espace vectoriel euclidien, alors les vecteurs $\pm\frac{1}{\|x\|}x$ sont des vecteurs unitaires, multiples du vecteur donné.
3. Si x et y sont deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel euclidien, alors l'angle φ formé par ces vecteurs vérifie la relation
$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x\,;y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$$

Orthogonalité, bases orthonormées

On considère un espace vectoriel euclidien E. Deux vecteurs de E sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.

Exemple 7. *Les vecteurs* $x = (3\,;2\,;-2)$ *et* $y = (2\,;1\,;4)$ *de l'espace* $\mathbb{R}^3$*, muni du produit scalaire usuel, sont orthogonaux.*

Théorème. L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à un vecteur non nul donné est un sous-espace vectoriel.

Exemple 8. *Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 2, le sous-espace des vecteurs orthogonaux à un vecteur* a *non nul est une droite vectorielle. Dans un espace de dimension 3, ce sous-espace est un plan vectoriel. Dans un espace de dimension* n*, ce sous-espace est un* **hyperplan** *de dimension* $n-1$*. Le vecteur* a *est un* **vecteur normal** *à cet hyperplan.*

Une base de E est **orthonormée** si ses vecteurs sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

Exemple 9. *La base canonique de l'espace* $\mathbb{R}^n$*, muni du produit scalaire usuel, est une base orthonormée.*

Propriétés. On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2\,; \ldots\,; e_n)$. On note $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ les matrices-colonne des composantes de deux vecteurs x et y de E dans cette base. On a

1. $x_i = \langle x\,; e_i \rangle$
2. $\langle x\,; y \rangle = {}^tX \cdot Y$
3. $\|x\|^2 = {}^tX \cdot X$

Remarque. Si u et v sont deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien et $v \neq o$, on définit la projection orthogonale u' de u sur v par

$$u' = \frac{\langle u\,; v \rangle}{\|v\|^2}\, v$$

Endomorphisme orthogonal

Une matrice carrée M est une **matrice orthogonale** si $M^{-1} = {}^tM$.

Exemple 10. *La matrice* $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ *est orthogonale.*

En effet, $${}^tM \cdot M = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = I_3$$

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à $+1$ ou à -1.

Un endomorphisme de E est un **endomorphisme orthogonal** si sa matrice relativement à une base orthonormée est une matrice orthogonale.

Propriétés

1. Un endomorphisme h de E est orthogonal si et seulement s'il conserve le produit scalaire.

   Avec les notations habituelles (M étant la matrice associée à h), on a
   $$\begin{aligned} \langle h(x)\,; h(y) \rangle &= {}^t(M \cdot X) \cdot (M \cdot Y) \\ &= {}^tX \cdot {}^tM \cdot M \cdot Y = {}^tX \cdot I_n \cdot Y = {}^tX \cdot Y \\ &= \langle x\,; y \rangle \end{aligned}$$

   On en déduit immédiatement les propriétés suivantes.

2. Un endomorphisme orthogonal h de E conserve la norme des vecteurs : pour tout vecteur $x \in E$, on a $\|h(x)\| = \|x\|$.

   La propriété de conserver la norme des vecteurs est même une propriété caractéristique des endomorphismes orthogonaux (la réciproque est vraie). Un endomorphisme orthogonal est, de ce fait, également appelé une **isométrie**, terme utilisé dans la suite de ce cours. Géométriquement, on peut montrer que si une transformation de E vers E conserve les distances, elle conserve aussi les angles.

3. Un endomorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité des vecteurs (la réciproque est fausse, l'homothétie en est un contre-exemple).

4. Un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il transforme une base orthonormée de E en une autre base orthonormée de E.

5. Les seules valeurs propres possibles d'un endomorphisme orthogonal sont 1 et -1.

Similitude vectorielle

On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée.

Une **similitude** est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k. La matrice M associée à une similitude est caractérisée par la relation

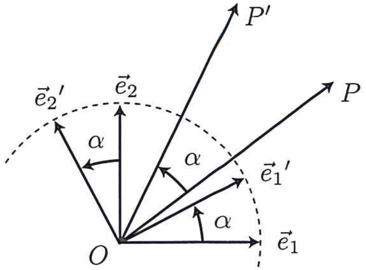
$$^{t}M \cdot M = k^2\, I_n$$

Homothétie et similitude conservent les angles et l'orthogonalité.

5.3 Endomorphismes du plan

En géométrie analytique, le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{e}_1\,;\vec{e}_2)$. Un point P est alors repéré par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ et les composantes de ce vecteur dans la base $(\vec{e}_1\,;\vec{e}_2)$ sont les coordonnées du point P. Le vecteur $\vec{o}$ est le rayon-vecteur de l'origine O du repère. À une droite vectorielle correspond un axe passant par O. Les espaces $L(\vec{e}_1)$ et $L(\vec{e}_2)$ sont appelés respectivement axe Ox et axe Oy.

Rotation



La matrice associée à une **rotation** de centre O et d'angle α est

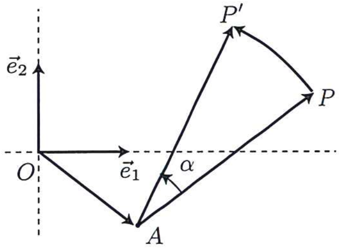
$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un endomorphisme orthogonal h car l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée. La matrice ${}^tM$ est donc également la matrice associée à l'endomorphisme réciproque qui est la rotation d'angle $-\alpha$.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = {}^tM$$

La rotation n'a pas de valeurs propres pour $\alpha \neq k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.
On obtient l'image $P'(x'\,;y')$ d'un point $P(x\,;y)$ par la rotation de centre $A(a\,;b)$ et d'angle α en appliquant la rotation h de matrice M au vecteur $\overrightarrow{AP}$.



On a $\overrightarrow{AP'} = h(\overrightarrow{AP})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + h(\overrightarrow{AP})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Lorsque $\alpha = 0°$, la rotation d'angle α est l'identité du plan.
Lorsque $\alpha = 180°$, la rotation d'angle α est la symétrie centrale.

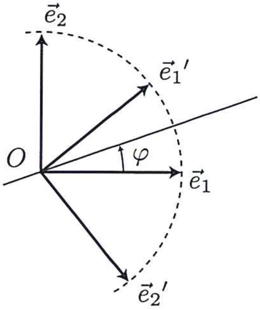
On remarquera encore les cas particuliers des rotations d'angle 90° et −90° dont les matrices associées sont respectivement

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La proposition suivante permet de caractériser une rotation de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1. Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^2$ est une rotation si et seulement si $\mathrm{Det}(h) = +1$.

Symétrie axiale orthogonale



On considère la **symétrie axiale** dont l'axe passe par O et forme un angle φ avec l'axe Ox. L'image du premier vecteur de la base est le vecteur

$$\vec{e_1}' = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

On obtient l'image du second vecteur de la base par rotation d'angle $-90°$ du vecteur $\vec{e_1}'$. Ainsi

$$\vec{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\varphi) \\ -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

La matrice associée à la symétrie axiale considérée est donc

$$M = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ où } \alpha = 2\varphi$$

On vérifie que cet endomorphisme est orthogonal et que $\mathrm{Det}(M) = -1$. On a même ${}^tM = M^{-1} = M$.

Pour les cas particuliers $\varphi = 0°, 90°$ et $45°$, on obtient respectivement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ la matrice de la symétrie axiale d'axe } Ox$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ la matrice de la symétrie axiale d'axe } Oy$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ la matrice de la symétrie axiale d'axe } y = x$$

La proposition suivante permet de caractériser une symétrie axiale orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2. Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^2$ est une symétrie axiale si et seulement si $\mathrm{Det}(h) = -1$. Un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 1 engendre l'axe de symétrie.

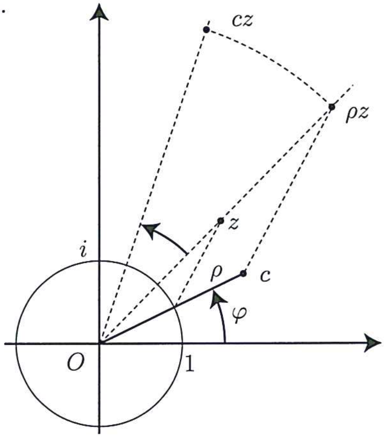
Similitude

Une similitude conserve l'orthogonalité (voir page 146), les images des vecteurs d'une base orthonormée sont donc orthogonales. La matrice associée à une similitude h du plan ne peut alors prendre que l'une des deux formes suivantes

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{avec } a^2 + b^2 \neq 0$$

Pour deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$, on vérifie que $\langle h(u)\,;h(v)\rangle = (a^2+b^2)\langle u\,;v\rangle$ ce qui implique, pour l'angle φ des vecteurs u et v, que $\cos(\varphi) = \frac{\langle u\,;\,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$ est invariant (h conserve bien les angles).

Exemple 2. *Dans le plan d'Argand[4]-Gauss qui représente l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on peut interpréter la multiplication de $z \in \mathbb{C}$ par un nombre complexe donné $c = a + bi$ comme la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $\rho = |c|$ et de la rotation de centre O et d'angle $\varphi = \arg(c)$.*



On attribue ainsi à tout nombre complexe $c = a + bi = \rho e^{i\varphi}$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice

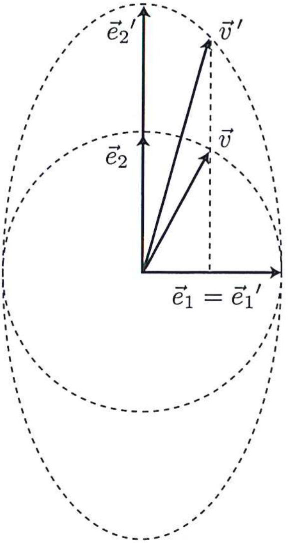
$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

La bijection $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ suggère une nouvelle définition de l'ensemble des nombres complexes comme le sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui représentent respectivement les nombres 1 et i.

---

[4] Jean-Robert Argand, mathématicien suisse, 1768–1822

Affinité axiale orthogonale

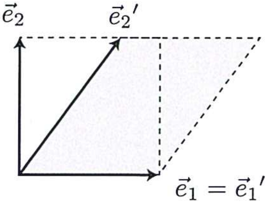


L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui transforme la base canonique $(e_1\,;e_2)$ en $(e_1\,;ke_2)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est l'**affinité axiale** d'axe Ox, de direction Oy et de paramètre k. La matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}^*$$

Cet endomorphisme admet deux valeurs propres 1 et k et les espaces propres associés sont respectivement $L\,(e_1)$ et $L\,(e_2)$.

Cisaillement



L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui transforme la base canonique $(e_1\,;e_2)$ en $(e_1\,;ke_1+e_2)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est le **cisaillement horizontal** de paramètre k. La matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}^*$$

La seule valeur propre est le nombre 1 et l'espace propre associé est $L(e_1)$.

Projection orthogonale

La **projection orthogonale** h du plan sur l'axe Ox transforme e_1 en e_1 et e_2 en o. La matrice associée à h est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cet endomorphisme n'est pas bijectif. On a $\mathrm{Ker}(h) = L(e_2)$, $\mathrm{Im}(h) = L(e_1)$ et $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par $h\big((x\,;y)\big) = (x\,;0)$.

Plus généralement, la projection orthogonale du plan sur un axe qui passe par O et qui forme un angle φ avec l'axe Ox est obtenue par la composition de la rotation f d'angle $-\varphi$, la projection orthogonale du plan sur l'axe Ox et la rotation ^rf d'angle φ.

Exemple 3. *La projection orthogonale du plan sur l'axe $y = x$ (qui forme avec l'axe Ox un angle $\varphi = 45°$) est donné par la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La projection orthogonale d'un point $P(x\,;y)$ du plan sur l'axe $y = x$ est donc le point $P'\left(\frac{x+y}{2}\,;\frac{x+y}{2}\right)$.

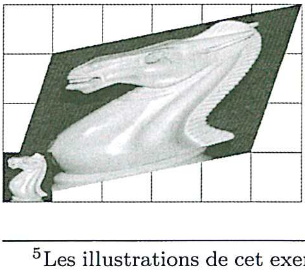
On peut vérifier que M possède deux valeurs propres 0 et 1 et que les espaces propres associés sont engendrés respectivement par $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$.

Exemple d'application

Dans le traitement numérique des images à l'aide d'un logiciel[5], on peut appliquer une transformation géométrique à chaque point $(x\,;y)$ d'une image. On attribue ensuite au point image $(x'\,;y')$ la couleur du pixel d'origine.

Une transformation linéaire est donnée par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array} \right.$$



Transformation linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

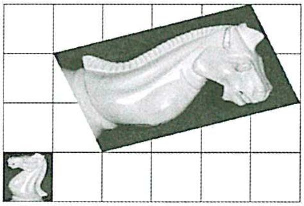
L'image d'origine (en bas à gauche) est de taille 1 × 1.

---

[5] Les illustrations de cet exemple ont été obtenues à l'aide d'instructions décrites dans *Arrêt sur image*, CAHIER N° 5 DE LA CRM.

Une application affine désigne la composée d'une transformation linéaire et d'une translation.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{array} \right.$$



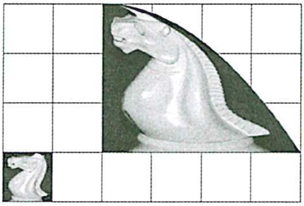
Transformation affine composée d'une transformation linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et d'une translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Plus généralement, on réalise des déformations d'images en utilisant des transformations (non linéaires) du type

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x\,;y) \\ y' = g(x\,;y) \end{array} \right.$$ où f et g sont deux fonctions de deux variables réelles.



Transformation non linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 4x\sqrt{1-y} + 2 \\ y' = 3y + 1 \end{array} \right.$$

5.4 Endomorphismes de l'espace

En géométrie analytique, l'espace affine est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{e}_1\,;\vec{e}_2\,;\vec{e}_3)$. Un point P est alors repéré par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ et les composantes de ce vecteur dans la base $(\vec{e}_1\,;\vec{e}_2\,;\vec{e}_3)$ sont les coordonnées du point P. Le vecteur $\vec{o}$ est le rayon-vecteur de l'origine O du repère. À une droite vectorielle correspond un axe passant par O. Les espaces $L(\vec{e}_1)$, $L(\vec{e}_2)$ et $L(\vec{e}_3)$ sont appelés respectivement axe Ox, Oy et Oz. À un plan vectoriel correspond un plan passant par l'origine O du repère. Les espaces $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $L(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ et $L(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont appelés respectivement plans Oxy, Oxz et Oyz.

En généralisant les endomorphismes du plan, on obtient immédiatement quelques résultats analogues pour l'espace (voir *Formulaires et tables*, CRM).

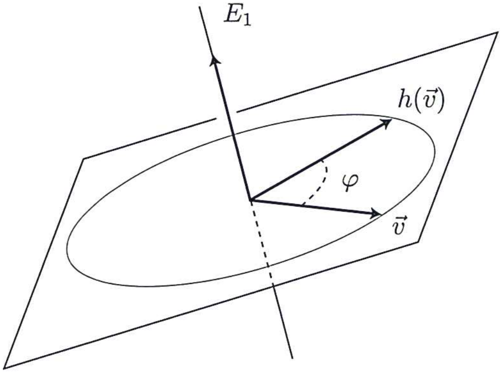
Homothétie de centre O et de rapport k	$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$
Homothétie de centre O et de rapport -1 ou symétrie centrale de centre O	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Rotation d'angle α autour de l'axe Oz	$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rotation d'angle 180° autour de l'axe Oz ou symétrie par rapport à l'axe Oz	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Projection parallèle à l'axe Oz sur le plan Oxy	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Projection parallèle au plan Oxy sur l'axe Oz	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Symétrie par rapport au plan Oxy	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Remarques

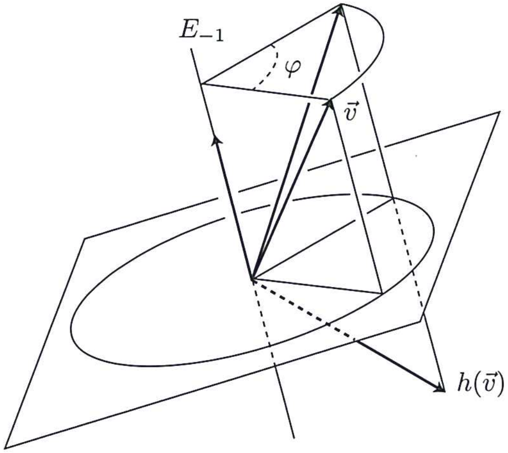
1. On obtient d'autres exemples d'endomorphismes élémentaires en composant les transformations données ci-dessus.
2. Pour la rotation d'angle α autour de l'axe Oz, la trace de la matrice associée est $2\cos(\alpha)+1$. Cette trace est invariante lors d'un changement de base.
3. Pour étudier un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné, on détermine en premier lieu ses valeurs propres et les espaces propres associés. Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre 3 est un polynôme de degré 3 qui admet toujours au moins un zéro réel. Un endomorphisme de l'espace admet donc au moins une valeur propre (qui peut être nulle).

Les isométries de l'espace peuvent être caractérisées de la manière suivante.

Proposition 3. Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^3$ de déterminant $+1$, autre que l'identité, est une rotation autour d'un axe. L'axe de rotation est l'espace propre associé à la valeur propre 1 et l'angle φ de rotation est donné par la relation $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{Tr}(h) - 1\big)$.



Proposition 4. Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^3$ de déterminant -1, autre que la symétrie centrale, est la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan. L'axe de la rotation est l'espace propre associé à la valeur propre -1 et l'angle φ de la rotation est donné par la relation $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{Tr}(h) + 1\big)$. Le plan de symétrie est perpendiculaire à l'axe de rotation. Dans le cas particulier où la trace de h vaut 1, cet endomorphisme est une symétrie par rapport à un plan qui est l'espace propre associé à la valeur propre 1.



Exemple 1. *On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice M relativement à la base canonique.*

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie par ${}^tM \cdot M = I_3$ que cet endomorphisme est orthogonal. Comme on a $\text{Det}(M) = +1$, h est une rotation d'angle α. En calculant un vecteur propre non nul associé à la valeur propre $+1$, on trouve l'axe de rotation qui est $L\big((-2\,;1\,;0)\big)$. Comme $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\big(\text{Tr}(M) - 1\big) = \dfrac{2}{7}$, l'angle de la rotation vaut $\alpha \approx 73.4°$.

Exemple 2. *On cherche à déterminer la matrice associée à la symétrie orthogonale h par rapport au plan d'équation $x+2y-2z = 0$ relativement à la base canonique. Ce plan est engendré par les vecteurs $a = (-2\,;1\,;0)$ et $b = (2\,;0\,;1)$, aussi appelés vecteurs directeurs du plan.*
Le vecteur $n = (1\,;2\,;-2)$, normal au plan, est orthogonal aux vecteurs a et b. Relativement à la base $\mathcal{B}' = (a\,;b\,;n)$, la matrice de h est

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Après calcul, on trouve

$$M = P \cdot M' \cdot P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M est orthogonale, son déterminant vaut -1 et sa trace 1.

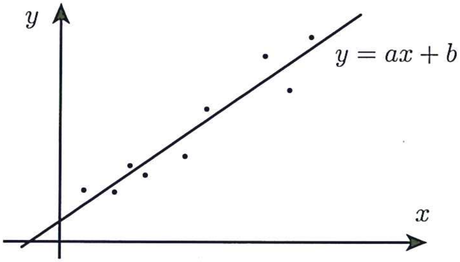
Exemple 3. *L'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est*

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est la composée de la rotation d'angle α autour de l'axe Oz et de la symétrie par rapport au plan Oxy.

5.5 Exemple d'une projection de $\mathbb{R}^n$

La régression linéaire est une méthode pour déterminer la droite d'équation $y = ax + b$ qui passe « au mieux » par n ($n \geq 3$) points donnés dans le plan.



On note $(x_1\,;y_1), (x_2\,;y_2), \ldots, (x_n\,;y_n)$ les points donnés dont on suppose qu'au moins deux abscisses (x_i et x_j) sont différentes. On considère la fonction affine cherchée $p\colon x \mapsto ax + b$ comme un vecteur de l'espace $\mathbb{P}_1$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 muni de la base $\mathcal{B} = (x\,;1)$ et $u = (x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n)$, $v = (y_1\,;y_2\,;\ldots\,;y_n)$, $w = (1\,;1\,;\ldots\,;1)$ comme trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $\mathcal{B}'$.

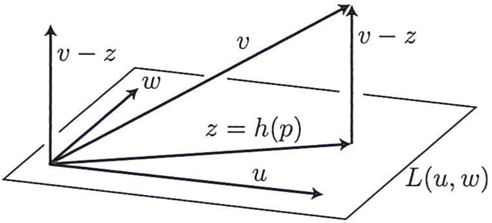
L'application

$$\begin{array}{rccl} h\colon & \mathbb{P}_1 & \to & \mathbb{R}^n \\ & ax+b & \mapsto & z = (ax_1 + b\,;ax_2 + b\,;\ldots\,;ax_n + b) \end{array}$$

est une application linéaire dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ prend la forme

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

L'espace image de h est le sous-espace vectoriel $L(u, w)$ de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension 2. On cherche le polynôme $p \in \mathbb{P}_1$ tel que $z = h(p)$ soit « aussi proche que possible » du vecteur v.



On cherche à minimiser la norme du vecteur $v - z$ de l'espace $\mathbb{R}^n$. L'expression suivante doit donc prendre une valeur minimale.

$$\|v - z\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2$$

Ce problème, connu sous le nom de « méthode des moindres carrés », est habituellement résolu à l'aide de dérivées partielles. On peut aussi considérer l'image $h(p)$ comme la projection orthogonale de v sur $L(u, w)$ et donc chercher le vecteur $p \in \mathbb{P}_1$ tel que

$$\big(v - h(p)\big) \perp u \quad \text{et} \quad \big(v - h(p)\big) \perp w$$

En calculant les produits scalaires $\langle v - h(p)\,;u\rangle$ et $\langle v - h(p)\,;w\rangle$, on obtient, pour les deux inconnues a et b, le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)x_i = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big) = 0 \end{array}\right.$$

que l'on peut écrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \; \big({}^t\!M \cdot M\big) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = {}^t\!M \cdot Y \qquad \text{avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On peut démontrer que la matrice ${}^t\!M \cdot M$ est inversible (exercice) et on obtient la solution sous la forme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \big({}^t\!M \cdot M\big)^{-1} \cdot {}^t\!M \cdot Y$$

5.6 Exercices

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = L\big((3\,;1)\big)$ et $D = L\big((-1\,;1)\big)$. On désigne par p la projection sur F parallèlement à D.

a) Déterminer la matrice P de p relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) Calculer l'image par p du vecteur $(8\,;8)$.

c) Déduire de P la matrice de la projection sur D parallèlement à F relativement à la base $\mathcal{B}$.

d) Déduire de P la matrice de la symétrie s_1 par rapport à F et de direction D, et celle de la symétrie s_2 par rapport à D et de direction F, relativement à la base $\mathcal{B}$.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \big\{(x\,;y\,;z) \mid x - y = 0\big\}$ et $D = L\big((1\,;2\,;1)\big)$. On désigne par s la symétrie par rapport à F et de direction D.

a) Déterminer la matrice de s relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire la matrice de la projection sur F parallèlement à D relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la projection p_1 sur un plan vectoriel P parallèlement à une droite vectorielle D (avec $D \not\subset P$) et p_2 la projection sur D parallèlement à P.
Montrer que $p_1 \circ p_2 = k_o$, l'application nulle, et que $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

4. Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ donnés par leur matrice (relativement à la base canonique) suivante.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} a & a-1 \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

5. Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ donnés par leur matrice (relativement à la base canonique) suivante.

a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

c) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

6. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, on considère l'endomorphisme f_m de matrice $\begin{pmatrix} m-1 & 1 \\ m-2 & 2-\frac{3}{2}m \end{pmatrix}$ où m est un nombre réel.

a) Déterminer, selon les valeurs de m, $\mathrm{Im}(f_m)$ et $\mathrm{Ker}(f_m)$.

b) Pour quelles valeurs de m, f_m est-il une projection ?

c) Pour quelles valeurs de m, f_m est-il une symétrie ?

7. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, on considère l'endomorphisme f_α de matrice $\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$ où α est un nombre réel.

a) Déterminer α pour que f_α ne soit pas bijectif.

b) Déterminer α pour que f_α soit une projection.

c) Déterminer α pour que f_α soit une symétrie.

8. Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

a) le déterminant d'une symétrie axiale est -1 et sa trace est nulle ;

b) le déterminant d'une projection est nul et sa trace est 1.

9. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique, on considère l'endomorphisme f de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ -b & -1 & 0 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels.

a) Déterminer a et b pour que f soit une symétrie.

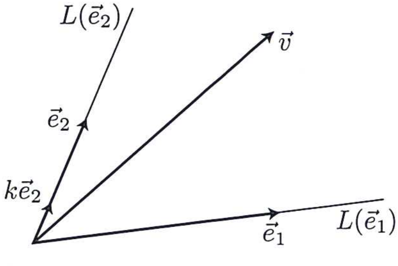
b) Déterminer a et b pour que $\mathrm{Im}(f)$ soit de dimension 2 ; donner alors $\mathrm{Ker}(f)$.

10. L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ qui transforme une base $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2)$ en $(e_1\,; ke_2)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est l'**affinité axiale** d'axe $L(e_1)$, de direction $L(e_2)$ et de paramètre k.

a) Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) Reproduire la figure ci-contre et construire l'image du vecteur v par f.

c) Montrer que l'affinité axiale f est bijective et caractériser son application réciproque.



11. On considère la projection p de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur le plan U d'équation $x - y = 0$ parallèlement à la droite $V = L\big((1\,;2\,;1)\big)$.

a) Indiquer une base de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice associée à p est $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) À l'aide d'une matrice de changement de base, déterminer la matrice de p relativement à la base canonique.

12. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire.

a) Montrer que les vecteurs $(-1\,;5\,;2)$ et $(2\,;4\,;-9)$ sont orthogonaux.

b) Déterminer k pour que les vecteurs $(2\,;1\,;3)$ et $(1\,;7\,;k)$ soient orthogonaux.

c) Déterminer k pour que $(1\,;7\,;k)$ soit orthogonal à $(6\,;k\,;k)$.

d) Déterminer le sous-espace vectoriel des vecteurs orthogonaux à $(2\,;-1\,;5)$.

13. a) Montrer que $\langle f\,;g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ définit un produit scalaire dans l'espace $\mathcal{C}\big([0;1]\big)$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0\,;1]$.

b) Calculer $\langle f\,;g\rangle$ si $f(x) = x$ et $g(x) = e^x$.
Quel est l'angle formé par ces deux fonctions ?

c) Calculer la norme de la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

d) Quelle est la projection orthogonale de f sur g pour $f(x) = x$ et $g(x) = xe^x$?

14. On considère le sous-espace S des matrices symétriques de $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

a) Quelle est la dimension de S ? Indiquer une base de S.

b) Montrer que $\langle A\,;B\rangle = \operatorname{Tr}(A \cdot B)$ définit un produit scalaire dans S.

c) Trouver une base orthonormée de S.

d) Montrer que le sous-ensemble V de S constitué des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel. Donner une base de V.

15. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $u = (a\,;b)$ et $v = \big(\cos(\alpha)\,;\,\sin(\alpha)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ pour démontrer que

$$\big|a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha)\big| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

16. a) Démontrer que l'égalité $|\langle x\,;y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ est vraie si et seulement si les deux vecteurs x et y sont linéairement dépendants.

b) À quelle condition a-t-on l'égalité $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$?

17. On considère $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathbb{R}^n$. Établir l'identité suivante (théorème de Pythagore généralisé).

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

18. On considère un vecteur $v = (1\,;-2\,;0\,;3)$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer l'hyperplan H dont v est un vecteur normal.

19. Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, les ensembles ordonnés suivants forment-ils une base orthonormée ?

a) $$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,;\,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\,;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,;\,\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

b) $$\left(\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)\,;\,\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{3}\right)\,;\,\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)\right)$$

20. On considère deux vecteurs $u = (1\,;1\,;0)$ et $v = (1\,;0\,;1)$ de $\mathbb{R}^3$. Construire une base orthonormée $(i\,;j\,;k)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $L(i) = L(u)$ et $L(i,j) = L(u,v)$.

21. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

22. a) Démontrer que si A et B sont deux matrices orthogonales, alors la matrice $A \cdot B$ est orthogonale.

b) Que peut-on en déduire pour les isométries vectorielles ?

23. On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Pour $u = (x\,;y\,;z)$, calculer $h(u)$ et montrer que $\|h(u)\| = \|u\|$.

b) Déterminer l'ensemble des u de $\mathbb{R}^3$ tels que $h(u) = u$ et donner l'interprétation géométrique de h.

24. Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$, on donne deux vecteurs linéairement indépendants $u = (3\,;1)$ et $v = (-1\,;1)$. On désigne par p la projection vectorielle sur $L(u)$ parallèlement à $L(v)$.

a) Écrire la matrice de p relativement à la base $\mathcal{B}' = (u\,;v)$.

b) Utiliser la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ pour trouver la matrice de p relativement à la base canonique.

25. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ donnés par les matrices suivantes. En déduire la nature géométrique de ces transformations.

a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

26. On considère la projection orthogonale p du plan $\mathbb{R}^2$ sur la droite d d'équation $ax + by = 0$.

a) Indiquer une base de $\mathbb{R}^2$ relativement à laquelle la matrice associée à p est $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) À l'aide d'une matrice de changement de base, déterminer la matrice de p relativement à la base canonique.

27. Vérifier que les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants, donnés par leur matrice relativement à la base canonique, sont des endomorphismes orthogonaux, et les caractériser géométriquement.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

28. Montrer que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x\,;y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\,;\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$$

est orthogonal. Quelle transformation du plan représente-t-il ?

29. Montrer qu'un cisaillement horizontal de paramètre k est bijectif et que son application réciproque est un cisaillement horizontal de paramètre $-k$.

30. Dans le plan affine muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère le triangle de sommets $A(5\,;1)$, $B(9\,;1)$ et $C(9\,;4)$, ainsi que le point $P(2\,;3)$. On souhaite appliquer au triangle ABC la rotation de centre P et d'angle 60°. Pour cela, on effectue tout d'abord la translation de vecteur $\overrightarrow{PO}$, suivie de la rotation de centre O et d'angle 60°. On applique finalement la translation de vecteur $\overrightarrow{OP}$.
Calculer les images des sommets du triangle ABC par la rotation de centre P et d'angle 60°.

31. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui transforme la base canonique $(e_1\,;e_2)$ en $(e_1+ke_2\,;e_2)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est un **cisaillement vertical** de paramètre k.

a) Déterminer la matrice de la composée de l'affinité axiale d'axe Ox, de direction Oy et de paramètre $\frac{1}{2}$, suivie du cisaillement vertical de paramètre $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Montrer que la composée $g \circ f$ des deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ donnés par les matrices $M_g = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est une rotation et déterminer son angle.

c) Démontrer que toute rotation d'angle α ($\alpha \neq k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$) peut être écrite comme composée d'affinités axiales et de cisaillements.

32. Dans le plan affine muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère une droite d. Pour effectuer la symétrie axiale d'axe d d'un point P, on procède de la manière suivante : on choisit un point A quelconque de la droite d et on applique au point P la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$. On effectue ensuite la symétrie axiale d'axe parallèle à d et passant par l'origine. Finalement, on applique à cette dernière image la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

a) Calculer l'image du point $P(6\,;3)$ par la symétrie axiale d'axe d d'équation $d : x - 2y + 2 = 0$.

b) Vérifier que cette image ne dépend pas du point $A \in d$ choisi.

33. On considère les nombres complexes $u = 2 + 5i$ et $v = 3 - 4i$.

a) Écrire les nombres nombres complexes u et v sous forme matricielle.

b) Utiliser la forme algébrique et la forme matricielle pour calculer $u + v, u \cdot v, \dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$.

34. Vérifier que les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ suivants, donnés par leur matrice relativement à la base canonique sont des endomorphismes orthogonaux, et les caractériser géométriquement.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 23 & -36 & 24 \\ -36 & -31 & -12 \\ 24 & -12 & -41 \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 2 & -6 & -9 \\ 6 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

35. a) Montrer que la composée de deux rotations de $\mathbb{R}^3$ est encore une rotation.

b) Déterminer la matrice associée à la composée (dans $\mathbb{R}^3$) de la rotation d'angle 90° autour de l'axe Ox (e_2 a pour image e_3) et de la rotation d'angle 90° autour de l'axe Oy (e_1 a pour image e_3). Déterminer l'axe et l'angle de cette nouvelle rotation.

36. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de

a) la symétrie orthogonale s par rapport au plan $x + y + z = 0$;

b) la symétrie orthogonale t par rapport au plan $3x + y + 4z = 0$;

c) la composée $r = s \circ t$. Caractériser r géométriquement.

37. a) On considère la symétrie orthogonale s de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan vectoriel $L\big((-1\,;3\,;1),(3\,;1\,;2)\big)$. Trouver la matrice de s relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) On note r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $r(e_1) = e_2$, $r(e_2) = e_3$ et $r(e_3) = e_1$ où $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Prouver que r est une rotation, dont on déterminera l'axe et l'angle.

c) Déterminer la matrice de l'endomorphisme t tel que $t \circ s = r$. Caractériser t géométriquement.

38. Déterminer les matrices relativement à la base canonique des rotations de $\mathbb{R}^3$ d'angle α autour de l'axe $L\big((1\,;1\,;1)\big)$ sachant que $\cos(\alpha) = 3/5$.

39. Un endomorphisme f d'un espace vectoriel est **involutif** si $f \circ f = \text{id}$.

a) Montrer qu'un endomorphisme orthogonal f de $\mathbb{R}^3$ est involutif si et seulement si sa matrice relativement à une base orthonormée est symétrique.

b) Caractériser géométriquement les endomorphismes orthogonaux involutifs de $\mathbb{R}^3$.

40. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique.

a) Déterminer la matrice de la projection orthogonale de l'espace sur la droite vectorielle engendrée par $u = (1\,;-2\,;3)$.

b) Déterminer la matrice de la projection orthogonale de l'espace sur le plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

41. Déterminer les coefficients de la droite de régression pour les points P_i dont les coordonnées $(x_i\,;y_i)$ sont données dans le tableau suivant.

x_i	1	3	4	6	8	9	11	14
y_i	1	2	4	4	5	7	8	9

Réponses aux exercices du chapitre 5

1. a) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $(12\,;4)$ c) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. a) projection sur $L\big((1\,;0)\big)$ parallèlement à $L\big((2\,;1)\big)$

b) projection sur $L\big((3\,;1)\big)$ parallèlement à $L\big((2\,;1)\big)$

c) symétrie par rapport à $L\big((1\,;\sqrt{3})\big)$ et de direction $L\big((0\,;1)\big)$

d) projection sur $L\big((1\,;-1)\big)$ parallèlement à $L\big((1-a\,;a)\big)$

e) symétrie par rapport à $L\big((2\,;1)\big)$ et de direction $L\big((2\,;-1)\big)$

5. a) projection sur $L\big((2\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$ parallèlement à $L\big((2\,;4\,;-5)$

b) symétrie par rapport à $L\big((2\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$, de direction $L\big((2\,;4\,;-5)\big)$

c) projection sur $L\big((-1\,;1\,;0),(-1\,;0\,;1)\big)$ parallèlement à $L\big((1\,;1\,;1)$

d) symétrie par rapport à $L\big((2\,;1\,;1)\big)$ et de direction $L\big((0\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$

6. a) Si $m = 0$, $\operatorname{Im}(f_m) = L\big((1\,;2)\big)$ $\operatorname{Ker}(f_m) = L\big((1\,;1)\big)$
si $m = \frac{5}{3}$, $\operatorname{Im}(f_m) = L\big((2\,;-1)\big)$ $\operatorname{Ker}(f_m) = L\big((3\,;-2)\big)$
sinon, $\operatorname{Im}(f_m) = \mathbb{R}^2$ $\operatorname{Ker}(f_m) = \big\{(0\,;0)\big\}$

b) Si $m = 0$, h_0 est une projection sur $L\big((1\,;2)\big)$ parallèlement à $L\big((1\,;1)\big)$.

c) Si $m = 2$, h_2 est une symétrie par rapport à $L\big((1\,;0)\big)$ et de direction $L\big((1\,;-2)\big)$.

7. a) f_α n'est pas bijectif si $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) f_α est une projection sur $L\big((1\,;1)\big)$ parallèlement à $L\big((1\,;-1)\big)$ si $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) f_α est une symétrie par rapport à $L\big((1\,;1)\big)$ et de direction $L\big((1\,;-1)\big)$ si $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

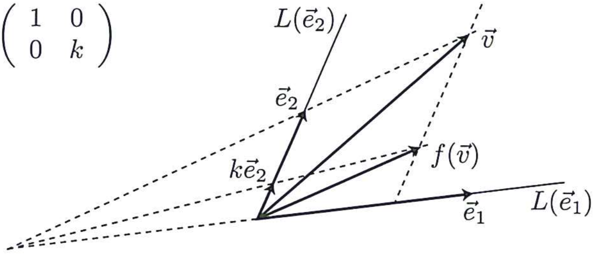
8. Les matrices associées à ces transformations, relativement à une base judicieusement choisie, sont a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. a) Si $a = 0$ et $b = -1$, h est une symétrie par rapport au plan vectoriel $L\big((1\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$ parallèlement à $L\big((0\,;1\,;1)\big)$.

b) $a = -1$, $\mathrm{Ker}(h) = L\big((1\,;-b\,;1)\big)$

10. a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

b)



c) f est bijective car $\mathrm{Det}(M) = k \neq 0$. Sa réciproque est l'affinité d'axe $L(e_1)$, de direction $L(e_2)$ et de paramètre $\frac{1}{k}$.

11. a) $\mathcal{B}' = \big((1\,;1\,;0)\,;(0\,;0\,;1)\,;(1\,;2\,;1)\big)$ b) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

12. b) $k = -3$ c) $k = -1$ ou $k = -6$

d) $\{(x\,;y\,;z) \mid 2x - y + 5z = 0\} = L\big((1\,;2\,;0),(-5\,;0\,;2)\big)$

13. b) $1\,;\ \varphi = 14.29°$ c) $\sqrt{3 - 4\ln(2)}$ d) $x \mapsto \dfrac{4(e-2)}{e^2-1}\,xe^x$

14. a) $\dim(S) = 3$ c) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

d) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

16. b) Si $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$

18. $H = \{(x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4) \mid x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0\}$
$= L\big((2\,;1\,;0\,;0),(0\,;0\,;1\,;0),(-3\,;0\,;0\,;1)\big)$

19. a) non b) oui

20. $i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\,;1\,;0)$ $j = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\,;-1\,;2)$ $k = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\,;-1\,;-1)$

22. a) $(A\cdot B)\cdot {}^t(A\cdot B) = A\cdot B\cdot {}^tB\cdot {}^tA = A\cdot {}^tA = I$

b) La composée de deux isométries est encore une isométrie.

23. a) $h(x\,;y\,;z) = \frac{1}{3}(x-2y-2z\,;-2x+y-2z\,;-2x-2y+z)$

b) L'ensemble cherché est le plan α d'équation $x+y+z=0$. L'application h est une isométrie vectorielle (qui conserve la norme et le produit scalaire). Comme il ne s'agit pas de l'identité, h est la symétrie orthogonale par rapport au plan α.

24. a) $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

25. a) $E_1 = L\big((2\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$ et $E_0 = L\big((2\,;4\,;-5)\big)$
projection sur le plan E_1 parallèlement à la droite E_0

b) $E_1 = L\big((2\,;1\,;0),(1\,;0\,;1)\big)$ et $E_{-1} = L\big((2\,;4\,;-5)\big)$
symétrie par rapport au plan E_1 parallèlement à la droite E_{-1}

c) $E_1 = L\big((2\,;1\,;1)\big)$ et $E_{-1} = L\big((1\,;0\,;1),(0\,;1\,;0)\big)$
symétrie axiale d'axe E_1 parallèlement au plan E_{-1}

26. a) $\mathcal{B}' = \big((-b\,;a)\,;(a\,;b)\big)$ b) $M = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$

27. a) Symétrie centrale ou rotation d'angle 180°

b) Symétrie orthogonale d'axe Oy

c) Rotation d'angle $-t$

d) Symétrie orthogonale d'axe $L\big((\cos(\frac{t}{2})\,;\,\sin(\frac{t}{2})\big)$

e) Rotation d'angle $-90°$

f) Symétrie orthogonale d'axe $L\big((1\,;5)\big)$

28. Pour $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, on a ${}^tM = M^{-1}$ et $\mathrm{Det}(M) = -1$.

L'application f est une symétrie orthogonale d'axe $L\big((\sqrt{3}\,;1)\big)$ qui forme avec l'axe Ox un angle de 30°.

30. $A'\left(\frac{7+2\sqrt{3}}{2}\,;\frac{3\sqrt{3}+4}{2}\right)$, $B'\left(\frac{11+2\sqrt{3}}{2}\,;\frac{7\sqrt{3}+4}{2}\right)$, $C'\left(\frac{11-\sqrt{3}}{2}\,;\frac{7\sqrt{3}+7}{2}\right)$

31. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ b) $M_g \cdot M_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, angle = 60°

32. $P'(5.2\,;4.6)$

33. a) $U = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

b) $U + V = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $U \cdot V = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ 7 & 26 \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et

$U \cdot V^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -14 & -23 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$

34. a) Symétrie orthogonale d'axe Oz

b) Rotation d'angle 36.87° autour de l'axe Oz

c) Symétrie orthogonale d'axe $L\big((6\,;-3\,;2)\big)$

d) Symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $2x+y-2z=0$

e) Rotation d'angle 73.40° autour de l'axe $L\big((-2\,;1\,;0)\big)$

f) Composée d'une rotation autour de l'axe $L\big((1\,;-4\,;-2)\big)$, d'angle 24.62°, et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x-4y-2z=0$

35. a) Le produit de deux matrices orthogonales de déterminant +1 est une matrice orthogonale de déterminant +1.

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rotation d'angle −60° autour de l'axe $L\big((1\,;-1\,;1)\big)$

36. a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -12 \\ -3 & 12 & -4 \\ -12 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 34 & -19 & 2 \\ 13 & 26 & 26 \\ -14 & -22 & 29 \end{pmatrix}$

rotation d'angle 50.13° autour de l'axe $L\big((-3\,;1\,;2)\big)$

37. a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) Rotation d'angle 120° autour de l'axe $L\big((1\,;1\,;1)\big)$

c) Matrice de t : $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

L'endomorphisme t est une symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + z = 0$.

38. $\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 11 & 2+4\sqrt{3} & 2-4\sqrt{3} \\ 2-4\sqrt{3} & 11 & 2+4\sqrt{3} \\ 2+4\sqrt{3} & 2-4\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}$ et sa transposée

39. a) $M^2 = I_3$ signifie $M^{-1} = M$.
Mais comme ${}^tM = M^{-1}$, on en déduit ${}^tM = M$.

b) Ce sont les rotations d'angle 180° autour d'un axe, les symétries orthogonales par rapport à un plan et la symétrie centrale ($-\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}$).

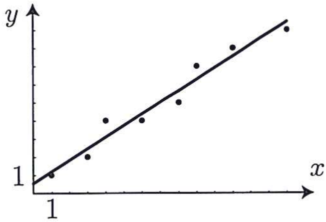
40. a) $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

41. On trouve

$$\left({}^tM \cdot M\right)^{-1} = \frac{1}{1056}\begin{pmatrix} 8 & -56 \\ -56 & 524 \end{pmatrix}$$

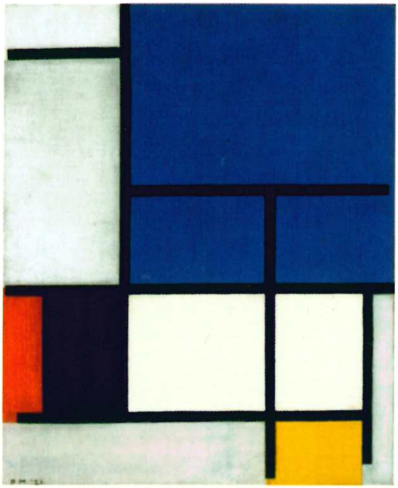
puis la droite de régression d'équation

$$y = \frac{7}{11}x + \frac{6}{11}$$



Index

Algèbre linéaire



Cette œuvre de Piet Mondrian (1872–1944) est intitulée ***Composition au grand plan bleu avec rouge, noir, jaune et gris, 1921***. Elle est exposée au Museum of Art de Dallas, Texas USA.

L'ouvrage *Algèbre linéaire* fait partie de la collection des monographies éditées par la Commission Romande de Mathématique (CRM).

On y présente la résolution de systèmes d'équations linéaires, le calcul matriciel, les notions d'espace vectoriel, d'application linéaire et d'endomorphisme. De nombreuses applications dans des domaines variés permettent de motiver l'étudiant à aborder ces notions abstraites. Le dernier chapitre est consacré aux applications à la géométrie vectorielle.

Le contenu du manuel se partage entre présentations théoriques, exemples et exercices variés dont les réponses sont données à la fin de chaque chapitre.

Cet ouvrage répond à l'un des objectifs essentiels de la série des monographies de la CRM : contribuer à une meilleure coordination entre les gymnases romands. Il constitue un solide moyen de préparation aux examens de maturité. Il peut également permettre à des étudiants motivés de s'approprier des concepts de base de l'algèbre linéaire de manière autodidacte.

Diffusion Pahud & Cie, www.diffusionpahud.ch
© 2012 Editions G d'encre, 2400 Le Locle

ISBN 978-2-940501-00-7

ISBN 978-2-940501-00-7
9 782940 501007 >