Réponses pour l'examen de maturité de Burier de juin 2021

Problème 1. (géométrie de l'espace)

a) $C(1\,;3\,;0)$; $R = 13\,[\mathrm{u}]$

b) $P \in d$ et $P \in \Gamma \Rightarrow P \in d \cap \Gamma$; $Q\left(-\frac{11}{3}\,;-\frac{26}{3}\,;\frac{10}{3}\right)$

c) $(\pi) : 4x - 3y + 12z - 164 = 0$

d) $(\alpha) : \begin{cases} x = 4 + k + \ell \\ y = -12 + 12k + \ell \\ z = 1 + 11k + \ell \end{cases} \quad (k, \ell \in \mathbb{R})$

e) $\overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_\beta} \iff \alpha \perp \beta$

f) $D\left(\frac{16}{3}\,;\frac{22}{3}\,;\frac{13}{3}\right)$ et $r' = \frac{13\sqrt{6}}{3}\,[\mathrm{u}]$

Problème 2. (algèbre linéaire)

a) $h\,(5\,;4\,;-3) = (1\,;0\,;1)$

b) $((-1\,;-1\,;1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(h)$.

c) Non, l'endomorphisme h n'est pas injectif, car $\dim(\mathrm{Ker}(h)) = 1 \neq 0$

d) $\det(H - \lambda I) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 1)$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$

Avec $\lambda_1 = 0$: Vecteur propre (provenant du noyau) : $(-1\,;-1\,;1)$

Avec $\lambda_2 = 1$: Vecteurs propres : $(1\,;0\,;1)$ et $(0\,;1\,;0)$

Base dans laquelle H est diagonale $= \big((-1\,;-1\,;1); (1\,;0\,;1); (0\,;1\,;0)\big)$

Problème 3. (analyse : étude de fonction rationnelle)

a) $ED(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) $Z_f = \{0\,;5\}$

x		-1		0		5	
$\text{sgn}(f)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$-$	0	$+$

c) AV : $x = -1$; AO : $y = x - 7$

d) $f'(x) = \dfrac{x(x+5)(x-2)}{(x+1)^3}$ $\Rightarrow Z_{f'} = \{-5\,;0\,;2\}$

x		-5		-1		0		2	
$\text{sgn}(f')$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$
variation de f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	AV	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$\text{Max}\left(-5\,;-\frac{125}{8}\right)$ $\text{Max}(0\,;0)$ $\text{Min}\left(2\,;-\frac{4}{3}\right)$

e) C'est le graphe 3.

f) $(t) : y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{9}{4} \iff (t) : 3x - 8y - 18 = 0$

g) $A = 13\ln(6) - 27.5 \cong -4.21 \Rightarrow$ l'aire géométrique $= |-4.21| = 4.21\,[\text{u}^2]$

Problème 4. (optimisation)

a) $f(900) = 2 - \text{e}^{-8} \cong 2$

b) • $f'(x) = \dfrac{1}{50}\left(-1 + \text{e}^{-\frac{x}{50}+10}\right)$

• $Z_{f'} = \{500\}$

x		400		500		900	
$\text{sgn}(f')$	/////	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	/////
variation de f	/////	$\vert$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\vert$	/////

$\text{Max}(500\,;9)$

• Le bénéfice mensuel maximal sera 9'000 CHF en produisant 500 clés USB.

Problème 5. (combinatoire)

a) 220

b) 504

c) 60

Problème 6. (probabilités)

a) 1) 1.79 %

2) 82.14 %

3) 41.76 %

b) 1) Arbre

2) 1.79 %

3) 75.59 %

4) 30.78 %

5) 46.61 % (probabilité conditionnelle)