Problème 1 (21 points)

a) On complète les carrés :

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2+10-4-9-1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$

On a donc $\boxed{C_1(2;-3;1) \text{ et } r_1=2}$.

b) Méthode 1 : On substitue la droite d dans les plans α et β.

Dans α : $(4+11k)+3(1+7k)-4(3+8k)+5=0 \Leftrightarrow 4+11k+3+21k-12-32k+5=0$

$\Leftrightarrow 0=0$ ok

Dans β : $2(4+11k)-2(1+7k)-(3+8k)-3=0 \Leftrightarrow 8+22k-2-14k-3-8k-3=0$

$\Leftrightarrow 0=0$ ok

Méthode 2 : Faire l'intersection des deux plans.

$$\begin{cases} x+3y-4z=-5 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-6y+8z=10 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow -8y+7z=13$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{7}{8}z-\frac{13}{8} \Leftrightarrow x=-3\left(\frac{7}{8}z-\frac{13}{8}\right)+4z-5=\frac{11}{8}z-\frac{79}{8}$$

z est une variable libre. On pose $8z=k$, donc $y=7k-\frac{13}{8}$ et $x=11k-\frac{79}{8}$. On obtient les équations paramétriques $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -79 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

On vérifie ensuite que le point $(4;1;3)$ appartient à cette droite. C'est le cas avec $k=\frac{3}{8}$.

c) Le vecteur normal de α est $\overrightarrow{n_\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et le vecteur normal de β est $\overrightarrow{n_\beta}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les plans sont perpendiculaires si les vecteurs normaux le sont, donc si le produit scalaire vaut 0 :

$$\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}=2-6+4=0$$

d) $P\in\alpha : 2-3-4+5=0$ ok
On cherche une droite e dans le plan α perpendiculaire à d. Comme d est la droite d'intersection des plans α et β et que ces plans sont perpendiculaires, la droite e est perpendiculaire à β. Ainsi, $\overrightarrow{d_e}=\overrightarrow{n_\beta}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus, on sait que e passe par le point P, donc

$$\boxed{e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ l\in\mathbb{R}}$$

e) Il faut montrer que $\delta(C_1;\beta) = r_1$:

$$\delta(C_1;\beta) = \frac{|2\cdot 2 - 2\cdot(-3) - 1\cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2 = r_1$$

f) Comme le rayon de la sphère Σ_2 vaut 2, il reste à trouver le centre C_2. On propose trois méthodes :

Méthode 1 : On commence par chercher le point de tangence T, qui est à l'intersection entre le plan β et la droite p' perpendiculaire au plan passant par C_1. L'équation de la droite p' est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc calculer le point d'intersection

$$2(2+2k)-2(-3-2k)-(1-k)-3 = 0 \Leftrightarrow 4+4k+6+4k-1+k-3 = 0 \Leftrightarrow 9k = -6 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

Le point de tangence est donc $T\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$. Ainsi, on a

$$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{OC_1} + 2\overrightarrow{C_1T} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : On utilise la formule du symétrique du formulaire : le centre C_2 symétrique de C_1 par rapport à β est donné par $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} - 2\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{n_\beta}}{||\overrightarrow{n_\beta}||^2}\cdot\overrightarrow{n_\beta}$ avec A un point du plan β.

Posons par exemple $A(0;0;-3)$. Alors $\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{n_\beta} = 6$ et $||\overrightarrow{n_\beta}||^2 = 9$ et on a

$$\overrightarrow{OC_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\frac{6}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8/3 \\ -8/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Méthode 3 : On normalise le vecteur $\overrightarrow{n_\beta}$: $||\overrightarrow{n_\beta}|| = 3 \Rightarrow \ \vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{n_\beta}$ est un vecteur unitaire. Comme $||\overrightarrow{C_1C_2}|| = 4$, on a

$$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} \pm 4\vec{u} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ -17/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Il faut ensuite tester lequel vérifie $\delta(C_2;\beta) = 2$. Il s'agit du deuxième.

On a ainsi trouvé $C_2\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$, donc l'équation de la sphère est

$$\boxed{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{7}{3}\right)^2 = 4}$$

g) Méthode 1 : On construit la droite p perpendiculaire au plan passant par C_1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le centre C_3 se trouve à l'intersection du plan β et de la droite p. Comme $z = 0$, on obtient $1 + m = 0 \Rightarrow m = -1$, donc $\boxed{C_3(2; -3; 0)}$.
Pour déterminer le rayon, on utilise Pythagore dans le triangle C_1C_3P avec P un point sur la sphère et sur le cercle. Comme $\overrightarrow{C_1C_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 - ||\overrightarrow{C_1C_3}||^2} = \sqrt{4-1} = \boxed{\sqrt{3}}$$

Méthode 2 : On se place dans le plan Oxy car $z = 0$ et on travaille en deux dimensions :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + 10 - 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 3$$

Le centre cherché est donc $\boxed{C_3(2; -3; 0)}$ et le rayon est $\boxed{r_3 = \sqrt{3}}$.

Problème 2 (8 points)

a) Par définition, $\operatorname{Ker}(h) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$. On échelonne la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1+L_3]{-2L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-4L_2+L_1]{-4L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_3 et x_4 sont des variables libres : on pose $x_3 = k$ et $x_4 = \ell$, où $k, \ell \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $x_1 = -k - \ell$ et $x_2 = -k - 2\ell$, d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(h) &= \big\{(-k-\ell; -k-2\ell; k; \ell) \,\big|\, k, \ell \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \mathscr{L}\left((-1;-1;1;0);(-1;-2;0;1)\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{((-1;-1;1;0);(-1;-2;0;1)) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(h).}$$

Par définition de la dimension d'un espace vectoriel, $\boxed{\dim\big(\operatorname{Ker}(h)\big) = 2}$.

b) Puisque la matrice échelonnée réduite contient des pivots dans les 1ère et 2ème colonnes, les vecteurs-colonnes correspondants de A forment une base de $\operatorname{Im}(h)$, *i.e.*,

$$\boxed{((1;2;-1);(4;3;0)) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(h)}.$$

Par définition du rang d'une application linéaire, $\boxed{\operatorname{rang}(h) = 2}$.

Problème 3 (13 points)

a)

$$h(1;2;-1) = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{(2;4;5)}$$

b)

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (8-\lambda)\cdot(5-\lambda)^2 - 16 - 16 - 4(5-\lambda) - 16(8-\lambda) - 4(5-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda = \boxed{-\lambda(\lambda-9)^2} \end{aligned}$$

Puisque les valeurs propres de h sont les zéros de $p_A(\lambda)$, on a $\boxed{\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 9}$.

c) Échelonnons $A - 0I = A$:

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2+L_3]{\frac{1}{8}\cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 1/4 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{9}\cdot L_3]{\frac{2}{9}\cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-L_2+L_3]{\frac{1}{4}\cdot L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_3 est une variable libre : on pose $x_3 = k$ où $k \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $x_1 = -\dfrac{1}{2}k$ et $x_2 = -k$, et on obtient

$$E(\lambda_1) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}k; -k; k\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{R} \right\} = \mathscr{L}\left(\left(-\frac{1}{2}; -1; 1\right)\right).$$

D'où

$$\boxed{\left(\left(-\frac{1}{2}; -1; 1\right)\right) \text{ est une base de } E(\lambda_1)}.$$

Échelonnons $A - 9\lambda$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[2L_1-L_3]{2L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_2 et x_3 sont des variables libres : on pose $x_2 = k$ et $x_3 = \ell$.
Ainsi, $x_1 = -2k + 2\ell$ et on obtient

$$E(\lambda_2) \;=\; \left\{(-2k+2\ell;k;\ell) \;\middle|\; k,\ell \in \mathbb{R}\right\} \;=\; \mathscr{L}\left((-2;1;0);(2;0;1)\right).$$

D'où

$$\boxed{((-2;1;0);(2;0;1))\ \text{ est une base de } E(\lambda_2)}.$$

d) $\boxed{\text{Puisque } \dim\big(E(\lambda_1)\big) + \dim\big(E(\lambda_2)\big) \;=\; 3 \;=\; \dim(\mathbb{R}^3),\ A \text{ est diagonalisable}}$.

De plus, P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A, et D est la matrice dont la diagonale est constituée des valeurs propres de h :

$$\boxed{P \;=\; \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}$$

On peut vérifier que $P \cdot D \;=\; A \cdot P \;\Leftrightarrow\; D \;=\; P^{-1}AP$.

Problème 4 (36 points)

a) $\boxed{ED(f) = \mathbb{R}\backslash\{-2\}}$

b) Comme $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x+2}$, on déduit que

$$\boxed{\begin{array}{c|ccccccc|c} x & & -2 & & -1 & & 2 & & \\ \hline & - & \| & + & 0 & - & 0 & + & \mathrm{sgn}(f) \end{array}}$$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x+2} = \pm\infty \quad \Rightarrow \boxed{\mathrm{AV} : x = -2}$

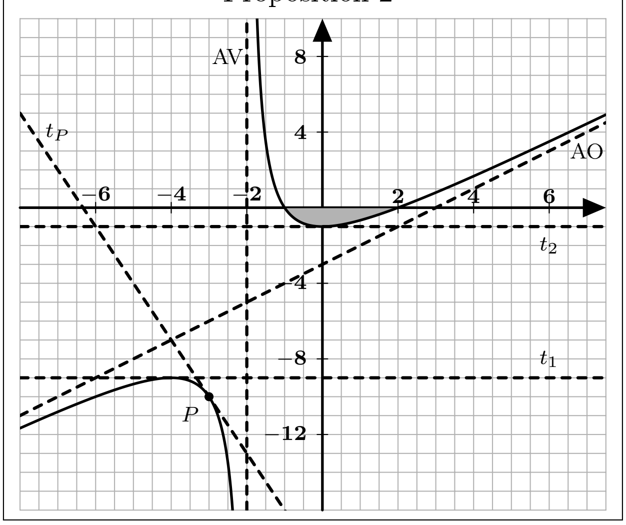
Par une division euclidienne, on obtient que $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x+2} \quad \Rightarrow \boxed{\mathrm{AO} : y = x - 3}$

d) $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\cdot(x+2) - (x^2 - x - 2)\cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

e)
$$\begin{array}{c|ccccccc|c} x & & -4 & & -2 & & 0 & & \\ \hline & + & 0 & - & \| & - & 0 & + & \mathrm{sgn}(f') \\ & \nearrow & \text{Max} & \searrow & \text{AV} & \searrow & \text{Min} & \nearrow & \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Max}(-4; f(-4)) = (-4; -9)}$ et $\boxed{\mathrm{Min}(0; f(0)) = (0; -1)}$

f)



g) On connaît tous les points à tangente horizontale grâce aux coordonnées des extrema $\Rightarrow \boxed{(t_1) : y = -9}$ et $\boxed{(t_2) : y = -1}$

h) $P(-3; f(-3)) = (-3; -10)$ et la pente est donnée par la dérivée : $m = f'(-3) = -3$
$\Rightarrow (t_P) : y = -3x + h$, et comme $P \in t_P$, on a $-10 = -3 \cdot (-3) + h \Rightarrow h = -19$
Ainsi $\boxed{(t_P) : y = -3x - 19}$

i) On réutilise la forme obtenue après division euclidienne

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2}\left(x-3+\frac{4}{x+2}\right)dx = \left(\frac{1}{2}x^2-3x+4\ln(|x+2|)\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

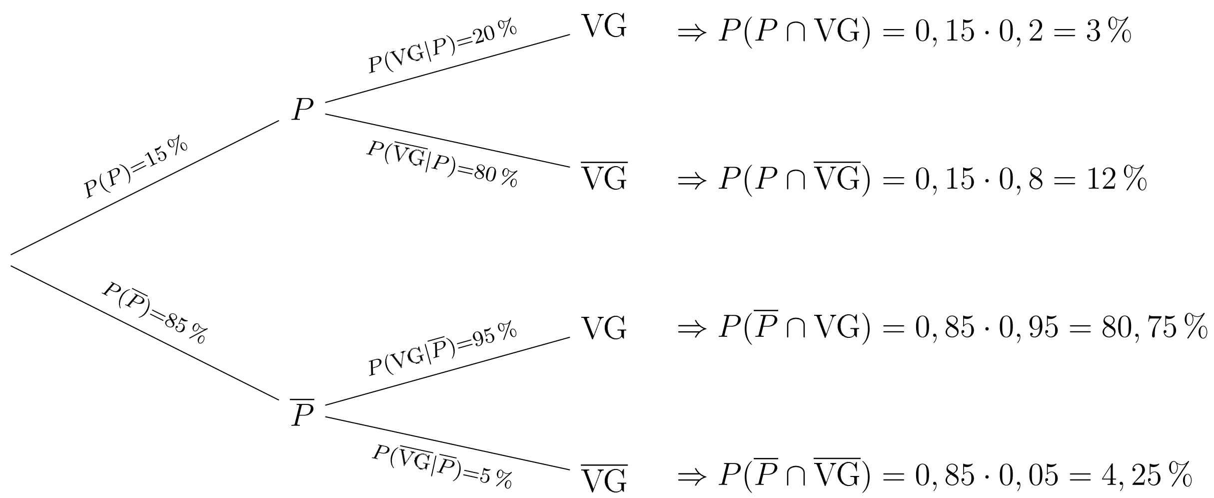
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2-3\cdot 2+4\ln(|2+2|)\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+4\ln(|(-1)+2|)\right) =$$

$$= -\frac{15}{2}+4\ln(4) \cong -1,95$$

L'aire géométrique vaut donc $|-1,95| = \boxed{1,95 \text{ u}^2}$

Problème 5 (15 points)

a) Diagramme en arbre :



où P = aquisition du Picasso $\quad\overline{P}$ = échec pour l'acquisition du Picasso

VG = aquisition du Van Gogh $\quad\overline{VG}$ = échec pour l'acquisition du Van Gogh

b) $P(VG|P) = \dfrac{P(P\cap VG)}{P(P)} = \dfrac{3\%}{15\%} = \boxed{20\%}$

c) $P(\overline{P}\cap\overline{VG}) = 85\%\cdot 5\% = \boxed{4,25\%}$

d) $P(P|\overline{VG}) = \dfrac{P(P\cap\overline{VG})}{P(\overline{VG})} = \dfrac{12\%}{12\%+4,25\%} = \boxed{73,85\%}$

e)
$$\begin{aligned} P(1 \text{ seul tableau}) &= P(P\cap\overline{VG})+P(\overline{P}\cap VG)+P(\overline{P}\cap\overline{VG}\cap M)\\ &= 12\%+80,75\%+(4,25\%\cdot 10\%)\\ &= 12\%+80,75\%+0,425\%\\ &= \boxed{93,175\%}\end{aligned}$$

Problème 6 (17 points)

a) $f(0) = 4'000 - 0 = \boxed{4'000 \text{ mètres}}$

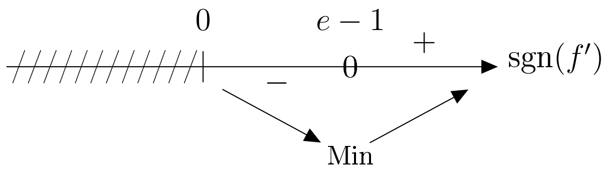
b) $f'(x) = 0 - 10'000 \dfrac{\frac{1}{x+1} \cdot (x+1) - \ln(x+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = -10'000 \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$$= 10'000 \, \frac{\ln(x+1) - 1}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{10'000 \, [\ln(x+1) - 1]}{(x+1)^2}} \qquad \text{cqfd}$$

c) Contrainte : $x \geqslant 0$ (donc la condition mathématique $x > -1$ n'a plus d'importance)

Zéro de f' : $\ln(x+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \mathrm{e} \Leftrightarrow x = \mathrm{e} - 1 \cong 1,72$

Croissance de $f(x)$:



L'avion atteindra donc son altitude minimale après 1,72 minutes environ, c'est-à-dire $\boxed{\text{1 min 43 sec}}$ environ.

d) $f(\mathrm{e} - 1) = 4'000 - \dfrac{10'000 \ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} \cong 321,2$

L'altitude minimale sera alors de $321,2$ mètres.

$\boxed{\text{Donc, en effet, l'avion ne touchera pas le sol car } 321,2 > 297}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \overset{BH}{=} 4'000 - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10'000 \frac{1}{x+1}}{1} = 4'000 - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10'000}{\underbrace{x+1}_{\to 0}} = \boxed{4'000}$