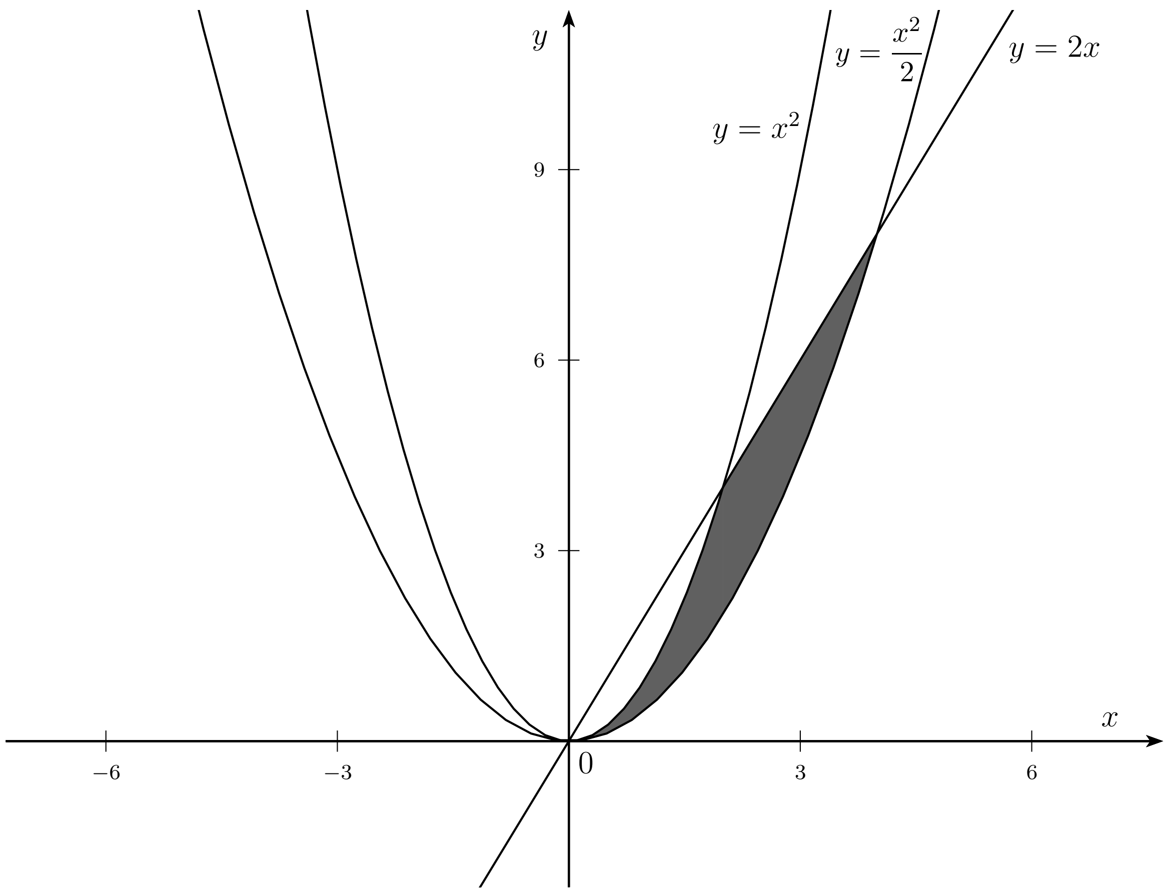
Gymnase de Burier

EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ, JUIN 2017

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Niveau renforcé

CORRIGÉ

Problème 1 (9 points)



Recherche des bornes d'intégration :

① $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

② $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } x = 2$

③ $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } x = 4$

Calcul de l'aire :

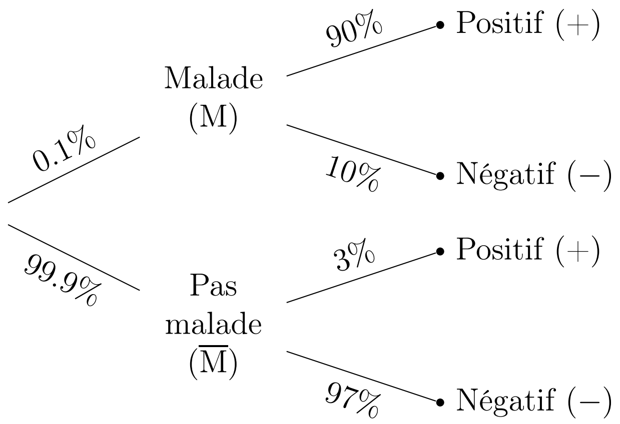
Méthode 1 :

$$\begin{aligned}
\sigma &= \underbrace{\int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx}_{= \int_0^2 \frac{x^2}{2}\, dx} + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= \underbrace{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2}_{= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2} + \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_2^4 \\
&= \frac{4}{3} + \left(16 - \frac{64}{6}\right) - \left(4 - \frac{4}{3}\right) \\
&= 12 - \frac{48}{6} = \boxed{4 \text{ u}^2}
\end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int_0^4 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) dx - \int_0^2 (2x - x^2)\, dx \\
&= \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_0^4 - \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\
&= 16 - \frac{64}{6} - \left(4 - \frac{8}{3}\right) = 12 - \frac{48}{6} = \boxed{4 \text{ u}^2}
\end{aligned}$$

Problème 2 (7 points)



a)
$$\begin{aligned} P(+) &= 0.1\% \cdot 90\% + 99.9\% \cdot 3\% \\ &= 0.0009 + 0.02997 \\ &= 0.03087 = \boxed{3.09\%} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(M|+) &= \frac{P(M \cap +)}{P(+)} \\ &= \frac{0.001 \cdot 0.9}{0.03087} \\ &= 0.029 = \boxed{2.9\%} \end{aligned}$$

Problème 3 (6 points)

Ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3-x}$:

$$3 - x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{ED}(f) =]-\infty; 3].$$

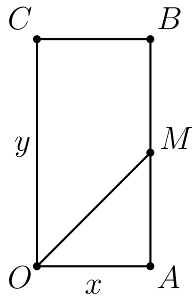
Bornes d'intégration : $x = -1$ et $x = 3$ (zéro de la fonction f)

Calcul du volume :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{3} \left(\sqrt{3-x}\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{3} (3-x)\, dx \\ &= \pi \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3} = \pi \left[\left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(-3 - \frac{1}{2}\right)\right] = \pi \cdot (12 - 4) = \boxed{8\pi \text{ u}^3} \end{aligned}$$

Problème 4 (16 points)

a)



$$xy = 32 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{32}{x}$$

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \frac{1}{2}y = \frac{32}{2x} = \frac{16}{x}$$

Théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x^4+256}{x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{x^4+256}}{x} \end{aligned}$$

CQFD

b) Condition : $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4+256)}{x^4} = \frac{4x^5 - 2x^5 - 512x}{x^4} \\ &= \frac{2x^5 - 512x}{x^4} = \frac{2x(x^4-256)}{x^4} = \frac{2x(x^2-16)(x^2+16)}{x^4} \\ &= \frac{2(x-4)(x+4)(x^2+16)}{x^3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2+16		$+$		$+$		$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$					$\|+\infty$	$\searrow$	32	$\nearrow$	$+\infty$

Donc, $x = 4$ et $y = \dfrac{32}{4} = 8$.

$$\boxed{\text{Dimensions : } 4 \text{ m} \times 8 \text{ m}}$$

c)

$$d(4) = \frac{\sqrt{4^4+256}}{4} = \frac{\sqrt{512}}{4} = \frac{16\sqrt{2}}{4} = \boxed{4\sqrt{2}\text{ m}}$$

Par le théorème de Pythagore :

$$d_{min} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = \boxed{4\sqrt{2}\text{ m}}$$

Problème 5 (21 points)

a) Ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2-3x)$:

$$x^2-3x > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x-3) > 0$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc,

$$\boxed{\text{ED}(f) =]-\infty;0[\cup]3;+\infty[}$$

b) Ensemble de définition de la fonction $g(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{-x+1}$:

$$\text{ED}(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Asymptote verticale :

$$\lim_{x\to 1} g(x) \overbrace{=}^{\frac{3\cdot 2}{0}} \infty \quad\Rightarrow\quad \boxed{\text{A. V. en } x=1}$$

Asymptote oblique $\big($car deg(numérateur) = deg(dénominateur)+1$\big)$:
Par division euclidienne, on obtient

$$\begin{array}{rr|l} & x^2+2x+3 & -x+1 \\ - & x^2-x & \hline -x-3 \\ \hline & 3x+3 & \\ - & 3x-3 & \\ \hline & 6 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{A. O. en } y=-x-3}$$

c) Soit $y = f(x) = e^{2x+4}$. Alors
$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x+4}$$
d'où
$$f'(-2) = 2 \cdot e^0 = 2 = m, \text{ la pente de la tangente } t.$$

Méthode 1 : L'équation de la tangente t est de la forme $y = mx + h$, avec $m = 2$
De plus, t passe par le point $T(-2;1)$ $(f(-2) = e^0 = 1)$:
$$1 = 2 \cdot (-2) + h \quad \Rightarrow \quad h = 5$$
Ainsi,
$$\boxed{y = 2x + 5}$$

Méthode 2 : A l'aide de la formule
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$
On a $f'(-2) = 2$ et $f(-2) = 1$. Ainsi,
$$y - 1 = 2(x + 2)$$
d'où
$$\boxed{y = 2x + 5}$$

d) (i)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2} = 0 \cdot 0 = \boxed{0}$$

(ii)
$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2 - 4} \overbrace{=}^{\frac{0}{0} \text{ (B-H)}} \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{2x} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Problème 6 (15 points)

a) $\det(H) = 147+192+192-144-224-168 = -5 \neq 0 \quad \Rightarrow \boxed{\text{oui, } h \text{ est un automorphisme}}$

b) $$\det(H-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 & -6 \\ -4 & -3-\lambda & 4 \\ 8 & 8 & -7-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2+C_3\to C_2}{\overset{C_1+C_3\to C_1}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -6 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{évidence}}{\overset{\text{mise en}}{=}} (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -7-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_3+6C_1\to C_3}{=} (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_3-4C_2\to C_3}{=} (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-5-\lambda) = 0$$

Variante Sarrus :
$\det(H-\lambda I) = (7-\lambda)(-3-\lambda)(-7-\lambda)+192+192+48(-3-\lambda)+24(-7-\lambda)-32(7-\lambda) = (-21-7\lambda+3\lambda+\lambda^2)(-7-\lambda)+384-144-48\lambda-168-24\lambda-224+32\lambda = 147+21\lambda+49\lambda+7\lambda^2-21\lambda-3\lambda^2-7\lambda^2-\lambda^3-152-40\lambda = -\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda-5$

Zéros : $\lambda^3+3\lambda^2-9\lambda+5 = 0 \underset{\text{avec } 1}{\overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}} (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda-5) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+5) = 0$

$\boxed{\text{Il y a donc 2 valeurs propres : } -5 \text{ (mult. alg. 1) et } 1 \text{ (mult. alg. 2)}}$

Espace propre associé à la valeur propre -5 :

$$H+5I = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -6 \\ -4 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3-2L_1\to L_3}{\overset{L_2-L_1\to L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3+L_2\to L_3}{\overset{2L_1+L_2\to L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4}\alpha \\ x_2 = -\frac{1}{2}\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{-5} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle} \text{ (mult. géom. 1)}$$

Espace propre associé à la valeur propre 1 :

$$H-I = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 \\ -4 & -4 & 4 \\ 8 & 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3-L_1\to L_3}{\overset{L_2-L_1\to L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha+\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \text{ (mult. géom. 2)}$$

c) $$\boxed{\mathcal{B}^* = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad H^* = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

d) en remarquant qu'il s'agit de l'image d'un vecteur propre associé à $\lambda = -5$:

$$\boxed{h^{-1}\left(\begin{pmatrix}-15\\10\\-20\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}} \text{ car } \begin{pmatrix}-15\\10\\-20\end{pmatrix} = -5\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$$

Variante 1 : en résolvant le système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{7} & 6 & -6 & -15\\ -4 & -3 & 4 & 10\\ 8 & 8 & -7 & -20\end{array}\right) \underset{7L_3-8L_1\to L_3}{\overset{7L_2+4L_1\to L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}7 & 6 & -6 & -15\\ 0 & \boxed{3} & 4 & 10\\ 0 & 8 & -1 & -20\end{array}\right) \underset{3L_3-8L_2\to L_3}{\overset{L_1-2L_2\to L_1}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}7 & 0 & -14 & -35\\ 0 & 3 & 4 & 10\\ 0 & 0 & -35 & -140\end{array}\right) \underset{-\frac{1}{35}L_3\to L_3}{\overset{\frac{1}{7}L_1\to L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & -5\\ 0 & 3 & 4 & 10\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4\end{array}\right) \underset{L_2-4L_3\to L_2}{\overset{L_1+2L_3\to L_1}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \underset{\frac{1}{3}L_2\to L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \Rightarrow \boxed{h^{-1}\left(\begin{pmatrix}-15\\10\\-20\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}}$$

Variante 2 : au cas où la matrice inverse a été utilisée : $H^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}11 & 6 & -6\\ -4 & 1 & 4\\ 8 & 8 & -3\end{pmatrix}$

Problème 7 (22 points)

a) $T \in \Sigma$ car $(10-2)^2 + (14-10)^2 + (6+2)^2 = 64 + 16 + 64 = 144$

b) on a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

ainsi $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

et donc : $(\alpha) : x + 2y + z = 10 + 2 \cdot 10 + 14 = 44 \quad \Rightarrow \boxed{(\alpha) : x + 2y + z - 44 = 0}$

Variante :

$$\begin{vmatrix} x-10 & 1 & 0 \\ y-14 & 0 & 1 \\ z-\ \ 6 & -1 & -2 \end{vmatrix} = x - 10 + 2(y-14) + z - 6 = 0$$

$\Rightarrow \boxed{(\alpha) :\ x + 2y + z - 44 = 0}$

c) soit n la normale à α passant par $C(2; 10; -2)$ le centre de la sphère Σ

on a $(n) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or K est l'intersection de n et α :

$(2+k) + 2(10+2k) + (-2+k) - 44 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6k = 24 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4$

ainsi le centre K du cercle γ : $K(2+4; 10+2\cdot 4; -2+4) \quad \Rightarrow \boxed{K(6; 18; 2)}$

cherchons le rayon r du cercle γ :

$r = \|\overrightarrow{KT}\| = \sqrt{(10-6)^2 + (14-18)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{48} = \boxed{4\sqrt{3} \text{ u}}$

d) soit β le plan tangent à Σ passant par T, il coupera n en S

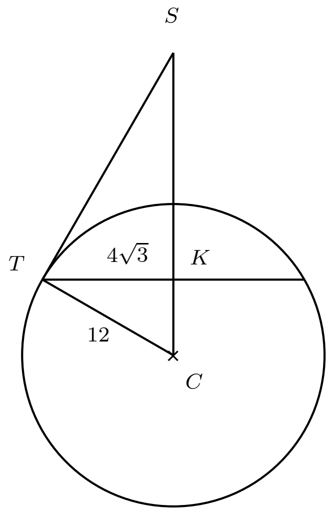
on a $\overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ et donc $(\beta) : 2x + y + 2z = 2 \cdot 10 + 14 + 2 \cdot 6 = 46$

S est donc l'intersection de n et β :

$2(2+k) + (10+2k) + 2(-2+k) - 46 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6k = 36 \quad \Leftrightarrow \quad k = 6$

ainsi le sommet S cherché est : $S(2+6; 10+2\cdot 6; -2+6) \quad \Rightarrow \boxed{S(8; 22; 4)}$

Variante :



Pythagore : $\|\overrightarrow{CK}\| = \sqrt{12^2 - 48} = 4\sqrt{6}$

Euclide : $\|\overrightarrow{CS}\| = \dfrac{144}{4\sqrt{6}} = 6\sqrt{6}$

$$\overrightarrow{CS} = \frac{6\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} \cdot \overrightarrow{CK} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6-2 \\ 18-10 \\ 2+2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 10+12 \\ -2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 22 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{S(8;22;4)}$

e) $(\Gamma) : x^2+y^2+z^2+4x-16y+12z+68=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2+(y-8)^2+(z+6)^2=36$

ainsi le centre de (Γ) est $\boxed{D(-2;8;-6)}$ et son rayon $r_\Gamma = \boxed{6 \text{ u}}$

f) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ 8-10 \\ -6-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

donc $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = 6 = r_\Sigma - r_\Gamma$ et Γ est tangente intérieurement à Σ

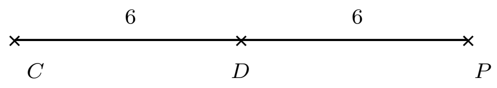
on a donc $(CD) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

reste à déterminer le point de tangence P qui est une intersection de CD avec Σ

$(2+2k-2)^2+(10+k-10)^2+(-2+2k+2) = 144 \quad \Leftrightarrow \quad 9k^2 = 144 \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm 4$

si $k = 4$ on retrouve T et pour $k = -4$ on obtient $\boxed{P(-6;6;-10)}$, qui est le point de tangence cherché

Variante :



$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ 8-2 \\ -6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{P(-6;6;-10)}$