Chapitres 1 et 2 : Suites numériques

Exercice 1. (2+2=4 pts)

Série A

a) • $u_n = 7 - 2n \;, \forall\, n \in \mathbb{N}$

• $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \;, \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

b) • $u_n = (-1)^n \cdot 3^{n+1} = 3 \cdot (-3)^n \;, \forall\, n \in \mathbb{N}$

• $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = (-3) \cdot u_n \;, \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Série B

• $u_n = 8 - 3n \;, \forall\, n \in \mathbb{N}$

• $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \;, \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

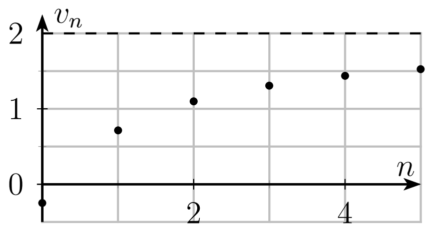
• $u_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot (-2)^n \;, \forall\, n \in \mathbb{N}$

• $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (-2) \cdot u_n \;, \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice 2. (1+3+3=7 pts)

Série A

a) $v_0 = -\dfrac{1}{4} \;; v_1 = \dfrac{5}{7} \;; v_2 = \dfrac{11}{10} \;; v_3 = \dfrac{17}{13}$



b) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{6n+5}{3n+7} - \dfrac{6n-1}{3n+4} =$

$= \dfrac{27}{(3n+7)(3n+4)} > 0 \;, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow (v_n)$ est strictement croissante

c) $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n \geq p \Rightarrow$

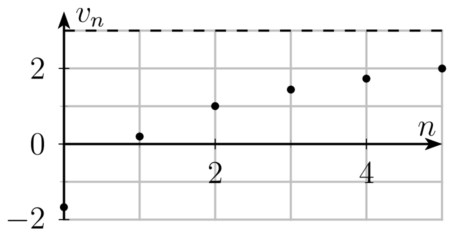
$\Rightarrow v_n > 2 - \epsilon \Rightarrow \frac{6n-1}{3n+4} > 2 - \epsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \frac{9-4\epsilon}{3\epsilon} \Rightarrow p = \left[\dfrac{9-4\epsilon}{3\epsilon}\right] + 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 2$

Série B

$v_0 = -\dfrac{5}{3} \;; v_1 = \dfrac{1}{5} \;; v_2 = 1 \;; v_3 = \dfrac{13}{9}$



$v_{n+1} - v_n = \dfrac{6n+1}{2n+5} - \dfrac{6n-5}{2n+3} =$

$= \dfrac{28}{(2n+5)(2n+3)} > 0 \;, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow (v_n)$ est strictement croissante

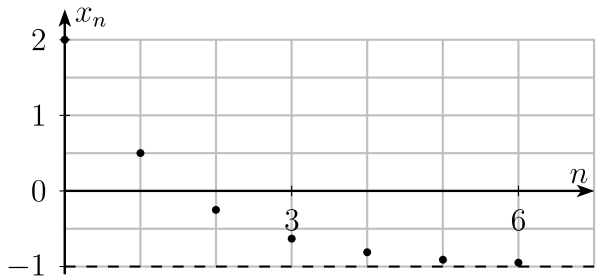
$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n \geq p \Rightarrow$

$\Rightarrow v_n > 3 - \epsilon \Rightarrow \frac{6n-5}{2n+3} > 3 - \epsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \frac{14-3\epsilon}{2\epsilon} \Rightarrow p = \left[\dfrac{14-3\epsilon}{2\epsilon}\right] + 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 3$

Exercice 3. (1+2+2+1=6 pts)



a) $x_0 = 2$; $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = -\dfrac{1}{4}$; $x_3 = -\dfrac{5}{8}$

b) 1) initialisation : $n = 0 \quad x_0 = 2 > -1$ proposition vraie

2) hypothèse de récurrence : supposons que $x_n > -1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

3) conclusion : montrons que $x_{n+1} > -1$

4) raisonnement : $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{2} = \dfrac{1}{2}(x_n - 1) > \dfrac{1}{2}(-1-1) = -1$ CQFD

c) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n - 1}{2} - x_n = \dfrac{x_n - 1 - 2x_n}{2} = \dfrac{-x_n - 1}{2} < \dfrac{1-1}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n)$ est strictement décroissante.

d) (x_n) est strictement décroissante et minorée par -1 $\Rightarrow$ (x_n) converge vers -1 $\iff$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -1$

Exercice 4. (2+1=3 pts)

a) $0 < y_n \leq 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$	$0 < y_n \leq \dfrac{1}{4}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
b) (y_n) est décroissante et minorée par 0 $\Rightarrow$	(y_n) est décroissante et minorée par 0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow (y_n)$ converge vers 0 $\iff \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$	$\Rightarrow (y_n)$ converge vers 0 $\iff \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$
