Algèbre linéaire chapitre 2 : Espaces vectoriels

Exercice 1. (3 pts)

Série A

- addition : $(x_1; x_2) + (y_1; y_2) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$
- multiplication : $\alpha * (x_1; x_2) = \left(\dfrac{x_1}{\alpha^2} \,;\, \dfrac{x_2}{\alpha^3} \right)$

$\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois n'est pas un espace vectoriel car cette propriété n'est pas vérifiée :

$(\alpha + \beta) * (x_1; x_2) \neq \alpha * (x_1; x_2) + \beta * (x_1; x_2)$

car $\alpha * (x_1; x_2) + \beta * (x_1; x_2) =$

$$= \left(\frac{x_1}{\alpha^2} \,;\, \frac{x_2}{\alpha^3} \right) + \left(\frac{x_1}{\beta^2} \,;\, \frac{x_2}{\beta^3} \right) =$$

$$= \left(\frac{x_1}{\alpha^2} + \frac{x_1}{\beta^2} \,;\, \frac{x_2}{\alpha^3} + \frac{x_2}{\beta^3} \right) \neq$$

$$\neq \left(\frac{x_1}{(\alpha+\beta)^2} \,;\, \frac{x_2}{(\alpha+\beta)^3} \right)$$

Série B

- addition : $(x_1; x_2) + (y_1; y_2) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$
- multiplication : $\alpha * (x_1; x_2) = \left(\dfrac{x_1}{\alpha^3} \,;\, \dfrac{x_2}{\alpha^2} \right)$

$\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois n'est pas un espace vectoriel car cette propriété n'est pas vérifiée :

$(\alpha + \beta) * (x_1; x_2) \neq \alpha * (x_1; x_2) + \beta * (x_1; x_2)$

car $\alpha * (x_1; x_2) + \beta * (x_1; x_2) =$

$$= \left(\frac{x_1}{\alpha^3} \,;\, \frac{x_2}{\alpha^2} \right) + \left(\frac{x_1}{\beta^3} \,;\, \frac{x_2}{\beta^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{x_1}{\alpha^3} + \frac{x_1}{\beta^3} \,;\, \frac{x_2}{\alpha^2} + \frac{x_2}{\beta^2} \right) \neq$$

$$\neq \left(\frac{x_1}{(\alpha+\beta)^3} \,;\, \frac{x_2}{(\alpha+\beta)^2} \right)$$

Exercice 2. (4 pts)

Série A

$\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3.

On nous donne trois vecteurs $u_1 = (1\,;5\,;-4)$, $u_2 = (2\,;3\,;-5)$ et $u_3 = (6\,;2\,;7)$.

Il suffit donc de prouver qu'ils forment une famille lin. indép. pour qu'ils soient une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 7 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Série B

$\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3.

On nous donne trois vecteurs $u_1 = (1\,;4\,;-5)$, $u_2 = (2\,;2\,;-3)$ et $u_3 = (5\,;-4\,;2)$.

Il suffit donc de prouver qu'ils forment une famille lin. indép. pour qu'ils soient une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & -4 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. (2+3=5 pts)

a) Soit A, B $\in$ F $= \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\}$

A+B $\in$ F et $\alpha \cdot$ A $\in$ F

$\Rightarrow$ F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2x2}$.

b) Il faut montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une base pour F, donc que c'est une famille libre (lin. indép.) et génératrice :

• lin. indép. : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

• génératrice : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = x$ et $\lambda_2 = y$

$\Rightarrow$ dim(F)=2.

Soit A, B $\in$ F $= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\}$

A+B $\in$ F et $\alpha \cdot$ A $\in$ F

$\Rightarrow$ F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2x2}$.

Il faut montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une base pour F, donc que c'est une famille libre (lin. indép.) et génératrice :

• lin. indép. : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

• génératrice : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = x$ et $\lambda_2 = y$

$\Rightarrow$ dim(F)=2.

Exercice 4. (3 pts)

G est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (plan vectoriel) et il nous faut deux vecteurs pour déterminer une base pour G.

Posons $x = 0 \Rightarrow u_1 = (0\,;1\,;-2)$

Posons $y = 0 \Rightarrow u_2 = (1\,;0\,;-1)$

Posons $z = 0 \Rightarrow u_3 = (2\,;-1\,;0)$

Il suffit donc de prouver que deux vecteurs forment une famille libre (lin. indép.) pour qu'ils soient une base de G.

G est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (plan vectoriel) et il nous faut deux vecteurs pour déterminer une base pour G.

Posons $x = 0 \Rightarrow u_1 = (0\,;-2\,;1)$

Posons $y = 0 \Rightarrow u_2 = (2\,;0\,;-1)$

Posons $z = 0 \Rightarrow u_3 = (1\,;-1\,;0)$

Il suffit donc de prouver que deux vecteurs forment une famille libre (lin. indép.) pour qu'ils soient une base de G.

Exercice 5. (1.5+1.5+2=5 pts)

Série A

	Vraie/fausse	Justification
a) La famille H=$\{-1\,;0\,;1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.	Fausse	v, w $\in$ H, v+w $\notin$ H, idem pour $\alpha \cdot$ v
b) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un espace vectoriel.	Fausse	v $\in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \cdot$ v $\notin \mathbb{Q}$ car $\alpha \in \mathbb{R}$
c) La famille $\{x^2+x\,;x^2+1\,;x+1\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$.	Vraie	famille lin. indép.

Série B

	Vraie/fausse	Justification
a) La famille H=$\{-1\,;0\,;1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.	Fausse	v, w $\in$ H, v+w $\notin$ H, idem pour $\alpha \cdot$ v
b) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un espace vectoriel.	Fausse	v $\in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \cdot$ v $\notin \mathbb{Q}$ car $\alpha \in \mathbb{R}$
c) La famille $\{x^2+x\,;x^2+1\,;x+1\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$.	Vraie	famille lin. indép.