34. a) $y = 3$ et $4x - 3y - 19 = 0$
b) $y = \sqrt{8}x + 15$, $y = -\sqrt{8}x + 15$, $y = \sqrt{3}x + 10$ et $y = -\sqrt{3}x + 10$

35. $A(\frac{3}{2}; \frac{3}{4})$ $B(-6; -3)$ $A'(-3; 3)$ $B'(\frac{6}{5}; \frac{12}{5})$ $C'(0; 0)$

36. a) $C(10; -5)$ c) 150

37. $\frac{39}{5}$

38. a) $\Gamma_1 : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$ b) $\Gamma_2 : (x-2)^2 + (y - \frac{13}{2})^2 = \frac{25}{4}$
c) $t_1 : 3x - 4y + 20 = 0$ et $t_2 : 4x + 3y - 15 = 0$

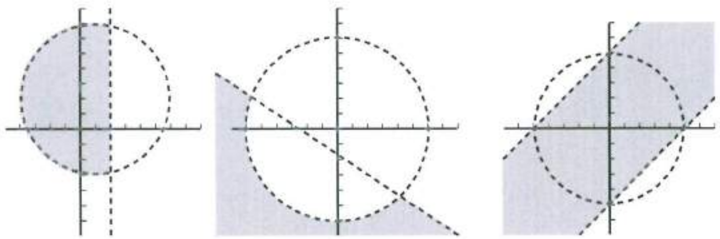
39. b) $t : 4x - 3y + 10 = 0$ c) $B(\frac{4}{5}; \frac{22}{5})$ d) $C(4; -2)$ et $D(\frac{24}{5}; -\frac{18}{5})$
e) isocèles en A et en D respectivement

40. a) $D(0; -\frac{5\sqrt{3}}{3})$ et $E(-15; 0)$ b) $I_1(\frac{5}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{6})$ et $I_2(-\frac{15}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2})$
d) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{25\sqrt{3}}{3}$

42. a) $C(3; -2)$, $r = 2$, $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$
b) $C(1; 0)$, $r = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$

43. a) intérieur et pourtour du cercle centré en l'origine et de rayon 6
b) extérieur du cercle centré en $(3; -4)$ et de rayon $\sqrt{8}$
c) intérieur du cercle centré en $(0; 3)$ et de rayon 3
d) extérieur et pourtour du cercle centré en $(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2})$ et de rayon 2

44.



45. $\begin{cases} y \geq 7 - x \\ x - 2y + 2 \leq 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 25 \end{cases}$

5 Équations de la droite et du plan dans l'espace

Explorer la géométrie de l'espace amène une plus grande richesse de notions et de situations.

Nous avons vu au chapitre 3 qu'une droite du plan peut être décrite par différentes équations : vectorielle, paramétriques et cartésiennes. Dans ce qui suit, nous allons voir qu'avec quelques ajustements c'est encore le cas dans l'espace. Il est aussi possible de décrire par les mêmes types d'équations des plans et d'étudier les positions relatives de droites et de plans. Nous calculerons aussi des angles formés par des droites et des plans.

Pour améliorer la compréhension de ce chapitre, il est judicieux de savoir représenter de manière réaliste des droites et des plans. À cet effet, l'étude de l'annexe A est recommandée.

5.1 Équations de la droite

Comme en géométrie plane, une droite de l'espace est entièrement déterminée par deux points distincts. Ceux-ci définissent un vecteur non nul, appelé **vecteur directeur** de la droite, qui indique la direction de cette droite. Pour décrire une droite dans l'espace, il suffit d'en connaître un point A et sa direction donnée par un vecteur directeur $\vec{d}$.

Pour tout point P de la droite d, les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires. Il existe donc un nombre réel k vérifiant $\overrightarrow{AP} = k\vec{d}$. Réciproquement, tout nombre réel k définit un point de la droite.

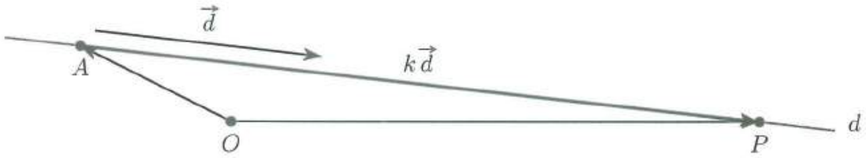
$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = k\vec{d}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Si la droite est déterminée par deux points distincts A et B, un vecteur directeur peut être $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

Considérons un point $A(x_A; y_A; z_A)$ d'une droite d et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de cette droite. Quelle condition doit vérifier un point quelconque $P(x; y; z)$ pour appartenir à la droite d ?

Comme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$, on obtient l'**équation vectorielle** de la droite d.

$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$$



Les coordonnées x, y et z d'un point P quelconque de d doivent alors vérifier la condition suivante appelée **représentation paramétrique** de la droite.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

On obtient alors les **équations paramétriques** de la droite.

$$\begin{cases} x = x_A + kd_1 \\ y = y_A + kd_2 \\ z = z_A + kd_3 \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Pour éliminer le paramètre k dans ces équations, nous pouvons utiliser la méthode des combinaisons linéaires.

$$\left\{\begin{array}{l|c|c} x = x_A + kd_1 & \cdot d_2 & \cdot d_3 \\ y = y_A + kd_2 & \cdot(-d_1) & \\ z = z_A + kd_3 & & \cdot(-d_1) \end{array}\right.$$

On obtient le **système d'équations cartésiennes** $\begin{cases} d_2 x - d_1 y = d_2 x_A - d_1 y_A \\ d_3 x - d_1 z = d_3 x_A - d_1 z_A \end{cases}$

qui peut être écrit sous la forme $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + e_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + e_2 = 0 \end{cases}$.

Exemples.

1. *Une droite d passe par le point $A(2; -1; 3)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.*

Soit $P(x; y; z)$ un point quelconque de la droite. Les différentes descriptions de d sont

Équation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$

Représentation paramétrique : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Équations paramétriques : $\begin{cases} x = \ \ 2 + k \\ y = -1 + 5k \\ z = \ \ 3 - 2k \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l|c|c} x = \ \ 2 + k & \cdot 5 & \cdot 2 \\ y = -1 + 5k & \cdot(-1) & \\ z = \ \ 3 - 2k & & \cdot 1 \end{array}\right.$$

Équations cartésiennes : $\begin{cases} 5x - y - 11 = 0 \\ 2x + z - 7 \ = 0 \end{cases}$

La droite d passe-t-elle par les points $C(5; 14; -3)$ et $D(1; -6; 3)$?

Pour le savoir, nous substituons les coordonnées de C dans l'une des différentes descriptions de d, par exemple dans les équations paramétriques.

$$\begin{cases} 5 = \ \ 2 + k \\ 14 = -1 + 5k \\ -3 = \ \ 3 - 2k \end{cases}$$

La première équation donne $k = 3$ (même valeur pour les trois équations) et donc $C \in d$.

On a aussi $\begin{cases} 5 \cdot 5 - 14 - 11 = 0 \\ 2 \cdot 5 + (-3) - 7 = 0 \end{cases}$.

Pour le point D, on a $\begin{cases} 5 \cdot 1 - (-6) - 11 = 0 \\ 2 \cdot 1 + 3 - 7 \neq 0 \end{cases}$ *et donc $D \notin d$.*

2. *Une droite d passe par le point $A(1; -2; 4)$ et est parallèle à la droite (BC) où $B(3; -2; 0)$ et $C(-5; -2; 2)$.*

La droite d a la même direction que la droite (BC).

Comme $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que tout vecteur non nul *colinéaire à un vecteur directeur d'une droite est aussi un vecteur directeur de cette droite, on peut choisir* $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *comme vecteur directeur de la droite d. On en déduit*

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 4k \\ y = -2 \\ z = 4 + k \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \\ \cdot 4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y + 2 = 0 \\ x + 4z - 17 = 0 \end{array} \right.$$

Remarques.

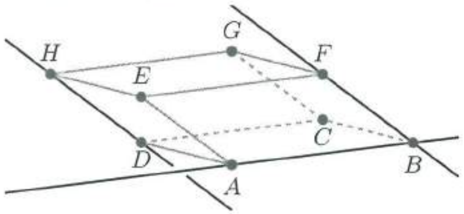
1. Dans l'exemple précédent, on observe que $\vec{d} \cdot \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

   On en déduit que $\vec{d} \perp \vec{e_2}$ et que la droite d est parallèle au plan Oxz. Plus généralement, si une composante du vecteur directeur est nulle, la droite est parallèle à un des plans de référence.
2. Si $d_1 = d_2 = 0$, nous pouvons écrire $\vec{d} \cdot \vec{e_1} = \vec{d} \cdot \vec{e_2} = 0$ et donc $\vec{d} \perp \vec{e_1}$ et $\vec{d} \perp \vec{e_2}$. Ainsi la droite d est perpendiculaire au plan Oxy et donc parallèle à l'axe Oz. Plus généralement, si deux composantes du vecteur directeur sont nulles, la droite est parallèle à un des axes.

5.2 Positions relatives de deux droites

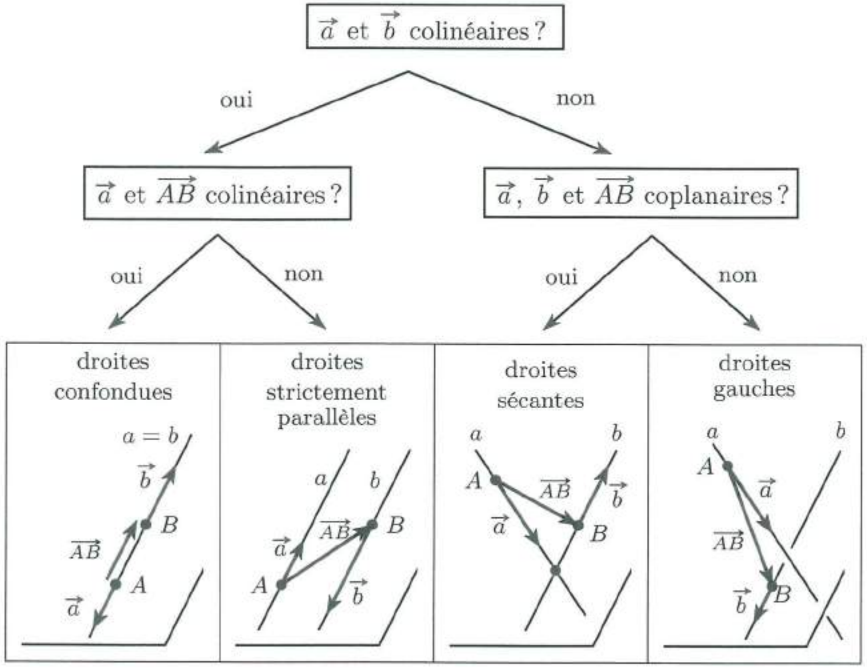
Si, dans le plan, deux droites ne peuvent être que sécantes ou parallèles, la situation est plus riche dans l'espace. Deux droites de l'espace peuvent ne pas être coplanaires. Elles sont alors dites **gauches**.

Sur la figure ci-contre, les droites (BF) et (DH) sont strictement parallèles, les droites (AB) et (BF) sont sécantes et les droites (AB) et (DH) sont gauches.



Dès lors, deux droites de l'espace peuvent être confondues, strictement parallèles, sécantes ou gauches.

Soient une droite a passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{a}$ et une droite b passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{b}$. Nous pouvons décrire leur position relative en utilisant le schéma ci-dessous.



Exemple. *Considérons la droite d passant par les points* $A(3;0;1)$ *et* $B(2;1;-1)$ *ainsi que la droite e passant par les points* $C(4;-5;2)$ *et* $D(2;1;6)$.

Les vecteurs $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{e} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *sont des vecteurs directeurs des droites d et e et ne sont pas colinéaires.*
Déterminons si $\vec{d}$, $\vec{e}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont coplanaires.*

$$\mathrm{Det}(\vec{d}; \vec{e}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

Nous en déduisons que les droites d et e sont gauches.

Remarques.

1. Les affirmations suivantes sont équivalentes.
   a) Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.
   b) Les droites a et b sont coplanaires.
   c) Il existe un plan contenant les droites a et b.
   d) Les droites a et b ne sont pas gauches.
2. Nous pouvons déterminer l'intersection de deux droites en résolvant un système d'équations décrivant ces deux droites (voir exercices) et en déduire partiellement leur position relative. Si le système est indéterminé, les droites sont confondues. Si le système admet une solution unique, les droites sont sécantes et si le système est impossible, les droites sont strictement parallèles ou gauches.
3. Si les vecteurs directeurs de deux droites sont orthogonaux, celles-ci sont orthogonales. Si de plus elles sont sécantes, on dit qu'elles sont **perpendiculaires**.

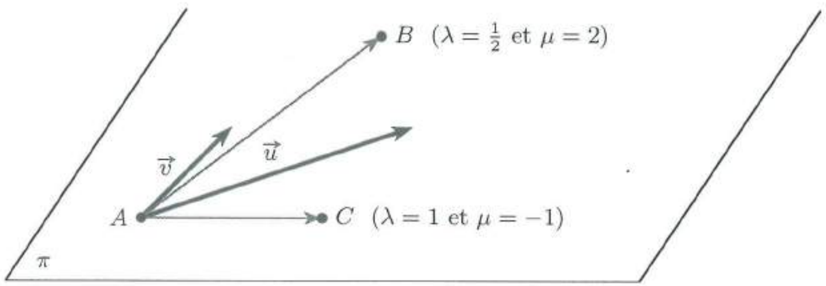
5.3 Équations du plan

Un plan de l'espace est entièrement déterminé par trois points non alignés. Ceux-ci permettent de définir deux vecteurs non colinéaires appelés **vecteurs directeurs** du plan.

Afin de décrire un plan dans l'espace, il suffit d'en connaître un point A et deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Pour tous les points P du plan π, les vecteurs $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Il existe donc deux nombres réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Réciproquement, à tout couple de nombres réels λ et μ correspond un point P du plan.

$$P \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

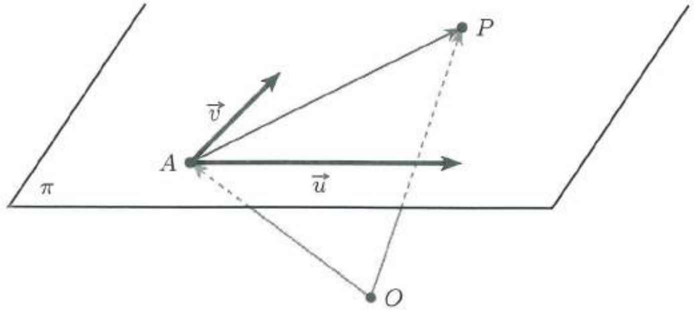


Si le plan est déterminé par trois points non alignés A, B et C, on peut choisir comme vecteurs directeurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point d'un plan π et $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs directeurs de ce plan. Quelle condition doit vérifier un point quelconque $P(x; y; z)$ pour appartenir au plan π ?

Comme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, on obtient l'**équation vectorielle** du plan π.

$$P \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$



En considérant les coordonnées des points A et P et les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on trouve la **représentation paramétrique** du plan.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On en déduit les **équations paramétriques** du plan.

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_A + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_A + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

En éliminant les paramètres λ et μ de ce système d'équations, on obtient une **équation cartésienne** du plan de la forme suivante.

$$ax + by + cz + d = 0$$

Exemple. *Soit le plan π déterminé par les points $A(-3;1;4)$, $B(-1;2;7)$ et $C(0;5;2)$.*

On note $P(x;y;z)$ un point quelconque du plan π. Ses différentes descriptions sont les suivantes.

Équation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

Représentation paramétrique : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Équations paramétriques : $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 + \lambda + 4\mu \\ z = 4 + 3\lambda - 2\mu \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -3 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 + \lambda + 4\mu \\ z = 4 + 3\lambda - 2\mu \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-2) \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y = -5 - 5\mu \\ 3x - 2z = -17 + 13\mu \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 13 \\ \cdot 5 \end{array} \right.$$

Équation cartésienne : $14x - 13y - 5z + 75 = 0$

Remarques.

1. Comme on l'a vu à la page 138, une droite peut être représentée par un système d'équations $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$. Chacune de ces équations représente un plan. Une droite de l'espace peut donc être considérée comme l'intersection de deux plans sécants.
2. L'équation cartésienne d'un plan peut aussi être établie en utilisant la notion de déterminant vue au chapitre 1.

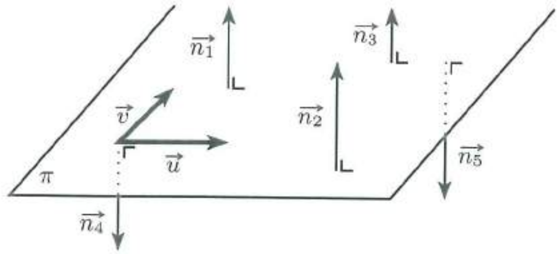
$$P \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP}, \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont coplanaires}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Det}(\overrightarrow{AP}; \vec{u}; \vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_A & u_1 & v_1 \\ y - y_A & u_2 & v_2 \\ z - z_A & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

En reprenant l'exemple précédent, on obtient

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2 & 3 \\ y-1 & 1 & 4 \\ z-4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 14x - 13y - 5z + 75 = 0$$

5.4 Vecteur normal à un plan

Soit un plan π de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On appelle **vecteur normal** au plan π tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Ce vecteur est alors orthogonal à tout vecteur directeur de ce plan (voir exercice 30).



Notons que si $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan, tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ l'est aussi.

Étant donnés deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un plan π, on montrera au chapitre 6 qu'on peut trouver un vecteur normal $\vec{n}$ en résolvant le système indéterminé $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$.

Le théorème suivant établit le lien entre l'équation cartésienne d'un plan π et un vecteur normal à ce plan.

Théorème 13. *Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan π d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.*

Exemple 1. *Reprenons l'exemple précédent où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme l'équation du plan est $14x - 13y - 5z + 75 = 0$, en vertu du théorème 13, un vecteur normal au plan est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et que $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.*

Exemple 2. *Déterminons l'équation du plan π perpendiculaire à la droite (AB) et passant par C où $A(0;2;-1)$, $B(3;-1;5)$ et $C(3;10;-2)$.*

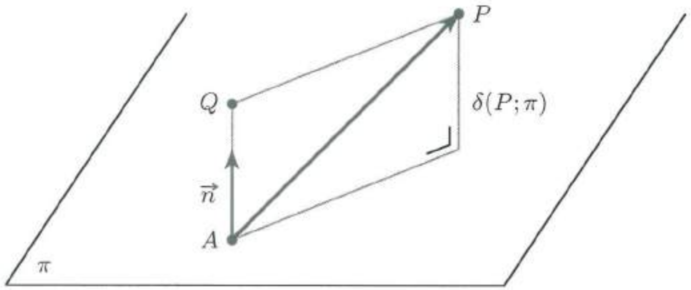
Le plan π admet pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ ou encore $\vec{n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\pi : x - y + 2z + d = 0$.
Comme $C \in \pi$, on a $3 - 10 - 4 + d = 0 \Rightarrow d = 11$.
Donc $\pi : x - y + 2z + 11 = 0$.

5.5 Distance d'un point à un plan

Soient un plan π et un point P quelconque. Nous voulons calculer la distance $\delta(P;\pi)$ du point P au plan π. Nous adoptons une démarche analogue à celle présentée au paragraphe 3.7 où nous avons calculé la distance d'un point à une droite.

Considérons un vecteur $\vec{n}$ normal au plan π et un point A de ce plan. La distance cherchée est $\delta(P;\pi) = \|\overrightarrow{AQ}\|$ où $\overrightarrow{AQ}$ est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AP}$ sur $\vec{n}$.



En utilisant le théorème 6 du chapitre 2, on trouve

$$\delta(P;\pi) = \|\overrightarrow{AQ}\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Théorème 14. *Soit le plan π d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et un point $P(x_P;y_P;z_P)$. On a*

$$\delta(P;\pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration.

Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan π. Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de π. Alors $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \\ z_P - z_A \end{pmatrix}$ et on a

$$\begin{aligned} \delta(P;\pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} &= \frac{|a(x_P - x_A) + b(y_P - y_A) + c(z_P - z_A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|ax_P + by_P + cz_P - (ax_A + by_A + cz_A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

Les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan π. Par conséquent $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$, c'est-à-dire $ax_A + by_A + cz_A = -d$ et donc

$$\delta(P;\pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

□

Exemple. *La distance entre le point $P(2;-3;5)$ et le plan π d'équation $4x + 4y - 7z + 1 = 0$ est $\delta(P;\pi) = \dfrac{|4 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 7 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-7)^2}} = \dfrac{38}{9}$.*

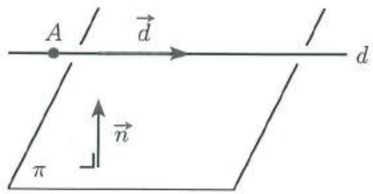
Remarque. À l'aide du théorème 14, on peut déterminer les équations des plans bissecteurs de deux plans donnés (voir paragraphe 6.3.3).

5.6 Positions relatives d'une droite et d'un plan

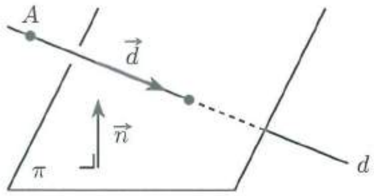
Soient une droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{d}$ et un plan π de vecteur normal $\vec{n}$.

La droite d est parallèle au plan π si et seulement si les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Si, de plus, $A \in \pi$, la droite d est contenue dans le plan π.



Dans tous les autres cas, la droite d est sécante au plan π.



Exemple. *On considère la droite* d : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et le plan* $\pi : 2x - y + 4z + 10 = 0$.

On peut prendre $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Comme* $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$, *la droite et le plan sont sécants.*

On peut déterminer le point d'intersection I *de* d *et* π *en remplaçant dans l'équation cartésienne du plan les variables* x, y *et* z *par leur expression tirée des équations paramétriques de* d. *On obtient*

$$2(2+3k) - (5+4k) + 4(-2k) + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \tfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad I(\tfrac{13}{2}; 11; -3)$$

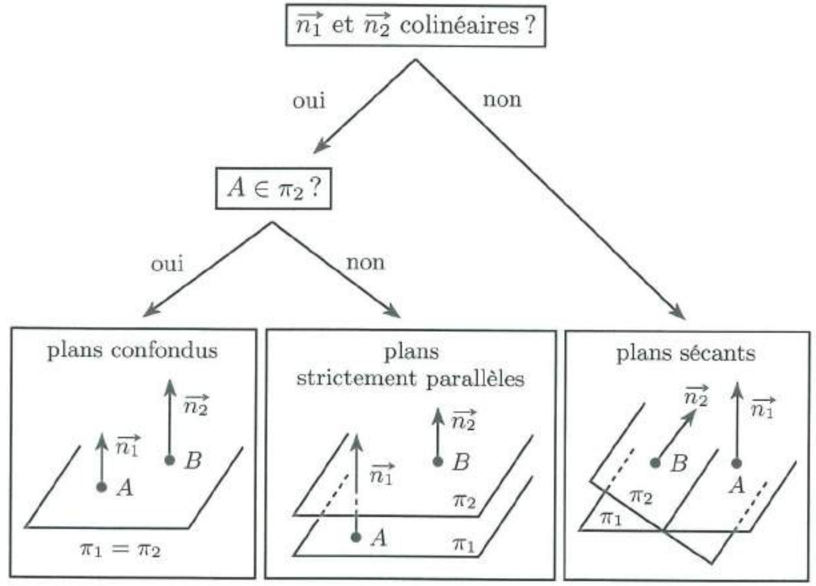
Remarques.

1. La droite d et le plan π sont perpendiculaires si et seulement si le vecteur directeur $\vec{d}$ et le vecteur normal $\vec{n}$ sont colinéaires.
2. On détermine l'intersection d'une droite et d'un plan en résolvant un système d'équations les décrivant. Si le système admet une solution unique, la droite est sécante au plan. Si le système est impossible, la droite est strictement parallèle au plan. Si le système admet une infinité de solutions, la droite est contenue dans le plan.

5.7 Positions relatives de deux plans

Deux plans peuvent être confondus, strictement parallèles ou sécants.

Soient un plan π_1 passant par A et de vecteur normal $\vec{n_1}$ ainsi qu'un plan π_2 passant par B et de vecteur normal $\vec{n_2}$. Nous pouvons décrire de façon systématique leur position relative en utilisant le schéma suivant.



Considérons les équations cartésiennes de ces deux plans.

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ et } \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

On a

$$\pi_1 \text{ et } \pi_2 \text{ parallèles} \Leftrightarrow \vec{n_1} \text{ et } \vec{n_2} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

De plus, les plans π_1 et π_2 sont confondus si $d_1 = \lambda d_2$ et strictement parallèles si $d_1 \neq \lambda d_2$.

Exemple. *On donne trois plans* $\pi_1 : 6x - 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_2 : -3x + y - z + 1 = 0$ *et* $\pi_3 : 4x - 10y - 3z + 16 = 0$.

Les plans π_1 *et* π_2 *sont strictement parallèles car* $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $5 \neq -2 \cdot 1$.

Le plan π_3 *est sécant à* π_1, *et donc à* π_2, *car* $\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *ne sont pas colinéaires.*

Pour déterminer la droite i d'intersection de π_2 et π_3, nous cherchons deux points dont les coordonnées vérifient les équations des deux plans

$$\begin{cases} -3x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 10y - 3z + 16 = 0 \end{cases}.$$

Les points $A(1;2;0)$ et $B(-1;0;4)$ appartiennent à la droite i qui peut donc être décrite par

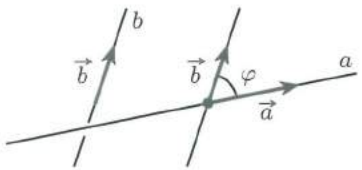
$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = -2k \end{cases}.$$

5.8 Angles entre droites et plans

Nous avons étudié la notion d'angle de deux vecteurs au chapitre 2. Nous allons appliquer le résultat obtenu au calcul de l'angle de deux droites, d'une droite et d'un plan, ainsi que de deux plans.

5.8.1 Angle de deux droites

On appelle **angles de deux droites** les angles formés par l'une de ces droites et la parallèle à l'autre menée par un point de la première.

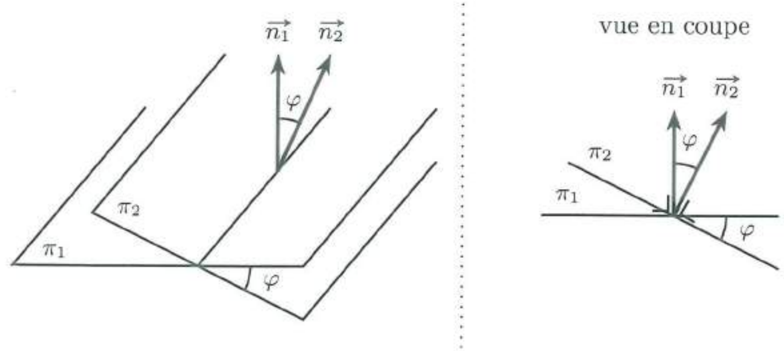


L'angle aigu φ de deux droites est l'angle entre les vecteurs directeurs de ces droites ou le supplémentaire de cet angle. Si les droites a et b ont pour vecteurs directeurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on a

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

5.8.2 Angle de deux plans sécants

Les angles de deux plans peuvent être calculés en considérant les vecteurs normaux à ces plans.



Si les plans π_1 et π_2 ont pour vecteurs normaux $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$, leur angle aigu φ est donné par

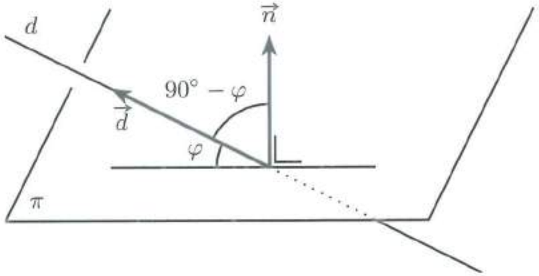
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\|\vec{n_2}\|}$$

Exemple. *L'angle aigu φ des plans $2x - y + 3z = 0$ et $x + 5y + 2z - 5 = 0$ est donné par*

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{14}\sqrt{30}} = \frac{3}{2\sqrt{105}} \Rightarrow \varphi \approx 81{,}58^\circ$$

5.8.3 Angle d'une droite et d'un plan

Si une droite n'est pas perpendiculaire à un plan, on appelle **angle de la droite et du plan** l'un des angles de cette droite avec sa projection orthogonale sur le plan. Si la droite est perpendiculaire au plan, l'angle est droit.



L'angle aigu φ formé par la droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ et le plan π de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ vérifie donc

$$\cos(90° - \varphi) = \sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{d}\|\|\overrightarrow{n}\|}$$

Exemple. *Soit le plan π d'équation cartésienne $3x - 2y + 2z - 1 = 0$ et la droite d'équations paramétriques* $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 + 3k \\ z = 4 - 5k \end{cases}$.

L'angle aigu φ formé par d et π vérifie

$$\cos(90° - \varphi) = \sin(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{35}\,\sqrt{17}} = \frac{13}{\sqrt{35}\,\sqrt{17}}$$

Ainsi $\varphi \approx 32{,}20°$.

5.9 Exercices relatifs au chapitre 5

Droite

1. Les points A, B et C ci-dessous sont-ils alignés ?

a) $A(3; 1; -1)$, $B(2; 0; 4)$ et $C(-3; 2; 5)$

b) $A(2; -1; 0)$, $B(1; 1; -2)$ et $C(4; -5; -11)$

c) $A(3; 1; \frac{1}{2})$, $B(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ et $C(9; 4; \frac{1}{2})$

d) $A(13; -22; 2)$, $B(-5; -10; 26)$ et $C(-38; 12; 60)$

e) $A(\frac{4}{3}; -1; -\frac{2}{3})$, $B(\frac{23}{6}; -\frac{11}{6}; \frac{8}{3})$ et $C(-\frac{55}{6}; \frac{5}{2}; -\frac{44}{3})$

2. Soient les droites $d_1 : \begin{cases} x = 5 - k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 + 3k \end{cases}$, $d_2 : \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 4x - 2z + 4 = 0 \end{cases}$

et $d_3 : \begin{cases} \dfrac{x-1}{5} = y + 2 \\ \dfrac{x-1}{5} = z + 1 \end{cases}$.

Les points $A(6; -10; -8)$, $B(3; 8; 9)$, $C(6; -1; 0)$ et $D(-6; 35; 36)$ appartiennent-ils aux droites d_1, d_2 ou d_3 ?

3. Trouver une représentation paramétrique et donner les équations cartésiennes de la droite

a) qui passe par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) qui passe par $A(2; 3; 5)$ et $B(1; 5; 7)$;

c) qui passe par $A(-3; 5; 2)$ et est parallèle à Oz ;

d) qui passe par $A(0; -2; -7)$ et est parallèle à Ox ;

e) qui passe par $A(8; 6; -12)$ et est parallèle à la droite (BC) où $B(4; 0; -2)$ et $C(5; -2; 3)$;

f) qui passe par $A(1; -2; 0)$ et est parallèle à la droite d : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - k \\ z = 3k \end{cases}$.

4. On donne la droite $d : \begin{cases} x = 2 - 5k \\ y = -1 + k \\ z = 3k \end{cases}$. Trouver le point de d

a) qui a une abscisse égale à 12 ;

b) qui a une ordonnée égale à 5 ;

c) qui a une cote égale à -2 ;

d) dont l'abscisse et la cote sont égales ;

e) dont la cote est égale au double de l'ordonnée.

5. Déterminer les équations cartésiennes de la droite $d : \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 8 - 5\lambda \end{cases}$.

6. a) Soient les droites $p : \begin{cases} x = 4 - 3k \\ y = 6k \\ z = 8 - 5k \end{cases}$ et $q : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases}$.

Donner pour chacune d'elles un système d'équations cartésiennes du type $\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3}$.

b) Soient les droites $r : \begin{cases} x - 2y = -13 \\ x + z = 2 \end{cases}$ et $s : \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.

Donner pour chacune d'elles les équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes du type $\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3}$.

c) Une droite t est donnée par $t : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{2}$. Donner les équations paramétriques de cette droite.

7. Montrer que les systèmes d'équations suivants déterminent la même droite.

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 5 + 2r \\ y = 3 - 2r \\ z = 2 + r \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 9 - s \\ z = -1 + \frac{1}{2}s \end{cases}$$

8. Montrer que les descriptions suivantes déterminent la même droite.

$$\begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{4}$$

Intersections et positions relatives de deux droites

9. Indiquer si les paires de droites suivantes sont sécantes, strictement parallèles, confondues ou gauches. Dans le cas où elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

a) $\begin{cases} x = -2k \\ y = 3 + 5k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 4t + 4 \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 6 - 2k \\ y = 3 + 5k \\ z = -1 - k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 1 - 10t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 6 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 6t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = k + 3 \\ y = 3 - 2k \\ z = -1 - 2k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t - 3 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2y + z = 5 \end{cases}$ et $\begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 2 + 5k \\ y = 3 + 4k \\ z = 1 + 5k \end{cases}$ et $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{6}$

10. Les droites d_1 et d_2 passant respectivement par A_1, B_1 et A_2, B_2 sont-elles sécantes, confondues, strictement parallèles ou gauches ? Dans le cas où elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

a) $A_1(1; 0; 1)$, $B_1(10; 6; 4)$ et $A_2(0; 2; 2)$, $B_2(4; 2; 2)$

b) $A_1(-4; 2; 1)$, $B_1(-1; 1; 3)$ et $A_2(0; 5; -2)$, $B_2(9; 2; 4)$

c) $A_1(8;0;3)$, $B_1(-2;4;1)$	et	$A_2(8;3;-2)$, $B_2(0;0;5)$
d) $A_1(2;-3;1)$, $B_1(3;-2;3)$	et	$A_2(0;-5;-3)$, $B_2(5;0;7)$
e) $A_1(6;4;-4)$, $B_1(4;0;-2)$	et	$A_2(7;0;-2)$, $B_2(11;-4;0)$

11. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des droites ci-dessous avec les plans Oxy, Oyz et Oxz [1].

a) $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -3 + k \\ z = 3 - 3k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 + 5k \\ z = 9 + 3k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -5 + 5k \\ y = 6 \\ z = -2 + k \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -7 \\ z = 1 \end{cases}$

12. On considère les droites $a : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, $b : \begin{cases} x = 5 + \mu \\ y = -2 + \mu \\ z = 3 + \mu \end{cases}$ et $c : \begin{cases} x = 3 + \nu \\ y = -7 + \nu \\ z = 2 + \nu \end{cases}$.

a) Montrer que les droites a et b sont orthogonales et gauches.

b) Montrer que les droites a et c sont perpendiculaires. Calculer ensuite leur point d'intersection.

13. Trouver les nombres réels p et q pour que les droites d et d' suivantes soient parallèles.

$d : \begin{cases} x = 1 + p\lambda \\ y = 2 + (1 - q)\lambda \\ z = (2q + 1)\lambda \end{cases}$ $d' : \begin{cases} x = -1 + (p - 3)\mu \\ y = 2\mu \\ z = -1 + q\mu \end{cases}$

1. Ces points sont appelés respectivement première, deuxième et troisième trace de la droite (voir annexe A).

14. On considère la droite d_1 passant par $A(2;1;1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m - 1 \end{pmatrix}$ ainsi que la droite d_2 passant par $B(-5;2;-7)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} 2 - m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Étudier les positions relatives des droites d_1 et d_2 en fonction de m.

Plan

15. Montrer que les points suivants sont coplanaires.

a) $A(0;2;4)$, $B(1;-1;3)$, $C(-8;2;1)$ et $D(-6;-4;-1)$

b) $A(5;2;1)$, $B(-6;3;-2)$, $C(2;5;2)$ et $D(0;0;-2)$

16. Déterminer z pour que les points $A(1;1;9)$, $B(5;\frac{3}{2};14)$, $C(0;-3;0)$ et $D(-\frac{8}{3};\frac{8}{3};z)$ soient coplanaires.

17. a) Montrer que les quatre points $A(-4;0;3)$, $B(-2;3;0)$, $C(0;2;1)$ et $D(2;1;2)$ sont situés dans un même plan.

b) On donne les points $A(1;1;3)$, $B(3;1;-1)$, $C(2;1;2)$, $D(4;2;2)$ et $E(3;2;4)$. Sont-ils coplanaires ? Y en a-t-il quatre qui soient coplanaires ?

18. Les points $A(0;2;2)$, $B(4;\frac{3}{2};\frac{5}{2})$ et $C(\frac{4}{5};-\frac{2}{5};\frac{7}{5})$ appartiennent-ils au plan d'équation $2x + 3y - 3z - 5 = 0$?

19. Les points $A(-2;7;8)$, $B(4;4;3)$ et $C(\frac{11}{6};-\frac{29}{6};15)$ appartiennent-ils au plan d'équation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$?

20. Trouver une représentation paramétrique et l'équation cartésienne du plan

a) qui passe par $A(1;-2;3)$ et qui admet pour vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$;

b) qui passe par O, $A(2;1;-1)$ et $B(1;3;-1)$;

c) qui passe par $A(-6;3;-2)$, $B(5;2;1)$ et $C(2;5;2)$;

d) qui passe par $A(1;1;\frac{1}{3})$, $B(2;5;\frac{4}{3})$ et $C(3;5;2)$;

e) qui passe par $A(5;2;-2)$ et qui est parallèle au plan Oxy ;

f) qui passe par $A(7;-4;6)$ et qui est parallèle au plan Oxz ;

g) qui passe par $A(\frac{9}{5};\frac{7}{5};-\frac{14}{5})$ et qui est parallèle au plan Oyz ;

h) qui passe par $A(-3;5;-4)$ et qui est parallèle au plan de la question b) ;

i) qui passe par O, par $A(-3;2;5)$ et qui est parallèle à l'axe Oz.

21. Trouver l'équation cartésienne du plan α passant par $A(4;2;1)$ et contenant la droite $d : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 - 3k \\ z = 3 + k \end{cases}$.

22. Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par le point A et parallèle au plan α dans les cas suivants.

a) $A(2;-5;3)$ et $\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A(2;2;-2)$ et $\alpha : x - 2y - 3z = 0$

23. Montrer que les descriptions paramétriques suivantes déterminent le même plan.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 7 + 4p + 2q \\ y = -4 - 6p + 4q \\ z = 2 - 2p \end{cases}$$

24. Trouver une représentation paramétrique des plans suivants.

a) $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ b) $2x - y + z - 4 = 0$

25. On donne deux droites d_1 et d_2. Montrer qu'elles se coupent en un point I et donner l'équation cartésienne du plan qu'elles déterminent.

a) $d_1 : \begin{cases} x = 5 + k \\ y = 1 \\ z = -1 - k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 5 + 2l \\ y = 9 + 4l \\ z = 7 + 2l \end{cases}$

b) $d_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ et $d_2 : \begin{cases} 3x - 2y + 7z + 32 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

26. Déterminer l'équation cartésienne du plan

a) qui passe par $A(3;4;1)$ et qui a pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$;

b) qui a pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et qui passe par $A(-2;6;7)$;

c) qui passe par $A(-6;10;16)$ et qui est perpendiculaire à la droite $\begin{cases} x = 6 - 8k \\ y = 4 + 4k \\ z = 8k \end{cases}$.

27. Déterminer l'équation cartésienne du plan

a) qui passe par $A(3;1;1)$ et qui est perpendiculaire à la droite (BC) où $B(1;0;5)$ et $C(3;-3;8)$;

b) qui passe par $A(1;-2;4)$ et qui est parallèle au plan d'équation $5x + 2y - z + 5 = 0$;

c) qui passe par $A(-3;3;2)$ et qui est parallèle au plan donné par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

d) qui passe par O et $A(1;1;1)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $x - y + z = 0$;

e) qui passe par $A(-1;-2;0)$ et $B(1;1;2)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

28. Trouver une représentation paramétrique de la droite passant par $A(2;3;5)$ et perpendiculaire au plan π d'équation $3x+2y-z=0$.

29. Trouver l'équation cartésienne du plan passant par $A(3;1;-3)$ et perpendiculaire à la droite $\begin{cases} x=1-3k \\ y=2+k \\ z=2+5k \end{cases}$.

30. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan π de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de ce plan.

Positions relatives de plans et de droites

31. Indiquer si les paires de plans suivants sont sécants, strictement parallèles ou confondus.

a) $3x-2y+5z-4=0$ et $3x+2y+5z=4$

b) $3x-2y+5z-4=0$ et $6x-4y+10z=7$

c) $3x-2y+5z-4=0$ et $-15x+10y-25z+20=0$

d) $3x-2y+5z-4=0$ et $\begin{cases} x=4+2k+5l \\ y=2+3k \\ z=-3l \end{cases}$

e) $3x-2y+5z-4=0$ et $\begin{cases} x=2+k-l \\ y=1+3k-2l \\ z=-k+l \end{cases}$

f) $\begin{cases} x=1+3k-2l \\ y=1-k+l \\ z=3+k-l \end{cases}$ et $\begin{cases} x=2+p+5q \\ y=2-2q \\ z=2+2q \end{cases}$

g) $\begin{cases} x=1+3k-2l \\ y=2-k+l \\ z=3+k-l \end{cases}$ et $\begin{cases} x=1+6p-2q \\ y=2-2p+2q \\ z=3+2p-q \end{cases}$

h) $\begin{cases} x=1+3k-2l \\ y=2+k+l \\ z=3+k-l \end{cases}$ et $\begin{cases} x=2+p+6q \\ y=2+p+2q \\ z=2+2q \end{cases}$

32. Indiquer si les paires de plans suivants sont sécants, strictement parallèles ou confondus.

a) $3x+y-2z=8$ et $6x-2y-z=3$

b) $4x-2y+5z=2$ et $-2x+y-\frac{5}{2}z=1$

c) $-x+2y+3z=3$ et $2x-4y-6z+6=0$

d) $2x-6y-5z=8$ et $6x-2y-4z-6=0$

e) $3x-8=0$ et $x=-3$

f) $z=2$ et $4y-5=0$

g) $6x+3z-4=0$ et $2x+z+1=0$

h) $-\frac{x}{5}+y-\frac{3z}{5}+9=0$ et $\frac{x}{3}-\frac{5}{3}y+z-15=0$

33. On donne les points $A(1;4;1)$, $B(-2;-8;3)$, $C(-5;-11;5)$, $D(3;5;-1)$, $E(3;-11;-1)$ et $F(0;-3;1)$. Montrer que les plans (ABC) et (DEF) sont parallèles.

34. On donne une droite d et un plan α. La droite d est-elle strictement parallèle au plan α, incluse dans α ou coupe-t-elle α ?

a) $d:\begin{cases} x=3+2k \\ y=5-2k \\ z=3+2k \end{cases}$ et $\alpha: 2x+y-z=0$

b) $d:\begin{cases} x-2y+z=4 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$ et $\alpha: 3x-2y+4z=0$

c) $d:\begin{cases} x=2-3k \\ y=3+k \\ z=1-k \end{cases}$ et $\alpha: 4x+y-11z=0$

d) $d:\begin{cases} x+y-3z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ et $\alpha:\begin{cases} x=5-k+2l \\ y=10+k-3l \\ z=5+k-l \end{cases}$

35. On donne les deux droites

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } h : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Soient P un point quelconque de g et Q un point quelconque de h. Quelle condition les paramètres k et t doivent-ils vérifier pour que la droite (PQ) soit parallèle au plan d'équation $z = 0$?

b) Cette condition étant vérifiée, quel est le lieu géométrique des milieux du segment $[PQ]$?

36. On considère deux droites g et h ainsi que deux plans α et β de l'espace. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

a) $(g \| h \text{ et } h \| \alpha) \Rightarrow g \| \alpha$

b) $(\alpha \| g \text{ et } \beta \| g) \Rightarrow \alpha \| \beta$

c) $(\alpha \| g \text{ et } \alpha \| \beta) \Rightarrow g \| \beta$

d) $(g \| \alpha \text{ et } h \| \alpha) \Rightarrow g \| h$

e) $(\alpha \| g \text{ et } \beta \| g) \Rightarrow (\alpha \cap \beta) \| g$

f) $(\alpha \| \beta \text{ et } g \nparallel \alpha) \Rightarrow g \nparallel \beta$

Intersection de plans et de droites

37. Déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite d et d'un plan α dans les cas suivants.

a) $d : \begin{cases} x = -4 - 5k \\ y = 8 + 6k \\ z = 3 - k \end{cases}$ et $\alpha : 2x + 3y - z - 5 = 0$

b) $d : \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -1 - k \\ z = 2 + k \end{cases}$ et $\alpha : 2x + y + 5z = 0$

c) $d : \begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -1 + k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$ et $\alpha : x + 2y - 5z + 9 = 0$

d) $d : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -3 + k \\ z = -2 - k \end{cases}$ et $\alpha : 2x - y + 3z + 1 = 0$

e) $d : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 + k \\ z = -k \end{cases}$ et $\alpha : 2x - y + 3z + 5 = 0$

f) $d : \begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 3 + k \\ z = 4 - k \end{cases}$ et $\alpha : \begin{cases} x = 3 + 3s - t \\ y = -2 - 5s + t \\ z = 7 + 3s - t \end{cases}$

g) $d : \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = 4 + 3k \\ z = -5 + 7k \end{cases}$ et $\alpha : \begin{cases} x = 1 + 3s - 5t \\ y = 2 + 7s + 2t \\ z = 6 + 4s + 3t \end{cases}$

h) $d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + k \\ z = -2 + k \end{cases}$ et $\alpha : \begin{cases} x = -2 + s + t \\ y = t \\ z = -5 \end{cases}$

38. Trouver le point d'intersection entre la droite passant par les points $D(1; 2; 3)$ et $E(7; 6; 5)$ et le plan d'équation $21x + 14y + 6z = 42$.

39. On donne les points $A(3; 4; 0)$, $B(-3; 8; 1)$, $C(1; 2; -3)$, $D(11; 1; 1)$, $E(3; 3; -1)$, $F(8; 3; 1)$, $G(0; 5; -1)$, $P(-5; -2; -5)$ et $Q(0; 4; -3)$.

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (PQ) et du plan (ABC).

b) Montrer que la droite (DE) est incluse dans le plan (ABC).

c) Montrer que la droite (FG) est strictement parallèle au plan (ABC).

40. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des trois plans α, β et γ dans les cas suivants.

a) $\alpha : 3x + 4y - 5z + 3 = 0$ $\quad \beta : 2x - y + 2z - 5 = 0$
$\gamma : x + y - 3z + 4 = 0$

b) $\alpha : x + 2y - 3z - 6 = 0$ $\quad \beta : 5x + 4y - 5z - 21 = 0$
$\gamma : 3x - 2y + z - 2 = 0$

c) $\alpha : 12x - 4y - 2z - 1 = 0$ $\quad \beta : 3x - 5y + z + 2 = 0$
$\gamma : 2x - y - 3z + 7 = 0$

d) $\alpha : \begin{cases} x = 6 + 3s - 2t \\ y = 6 + s - t \\ z = 2 + 2s - t \end{cases}$ $\quad \beta : \begin{cases} x = 7 + 3p - q \\ y = 6 - p + q \\ z = p - 2q \end{cases}$
$\gamma : x + 3y - z = 22$

41. Montrer que les plans d'équation $3x - y + 9z + 4 = 0$, $x + y - z = 0$ et $x + 2y - 4z = 1$ ont une infinité de points en commun. Déterminer des équations paramétriques de leur droite d'intersection.

42. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans α et β dans les cas suivants.

a) $\alpha : x - 2y + z + 3 = 0$ $\quad\quad \beta : x + y - 3z - 2 = 0$

b) $\alpha : \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 + n \\ z = 2 + n \end{cases}$ $\quad\quad \beta : \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 + 2p \\ z = -p + q \end{cases}$

c) $\alpha : x - 2y + z = 0$
β passant par $P(2; 3; 1)$, $Q(-3; 0; 2)$ et $R(1; 2; 3)$

d) α passant par $A(6; 4; 7)$, $B(9; 2; 9)$ et $C(1; 7; 0)$
β passant par $P(2; 2; 4)$, $Q(6; 13; 4)$ et $R(1; 3; 7)$

43. Soit le plan d'équation $2x + 3y + 6z = 18$. Trouver les coordonnées des points d'intersection de ce plan avec les trois axes de coordonnées et les équations paramétriques de la droite d'intersection de ce plan avec les trois plans Oxy, Oxz et Oyz.

44. On donne les points $A(-6; 9; 5)$, $B(2; 1; 1)$, $P(7; 6; 3)$ et $Q(-3; 11; 13)$. Trouver les coordonnées du point C de la droite (PQ) tel que le triangle ABC soit isocèle de sommet C.

45. Trouver la projection orthogonale du point $P(3; 1; -1)$ sur le plan d'équation $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

46. Trouver une représentation paramétrique de la projection orthogonale de la droite d d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + k \\ z = 6 - 5k \end{cases}$ sur le plan d'équation $x - 2y + z = 1$.

47. Trouver les coordonnées du symétrique P' du point P relativement au plan α dans les cas suivants.

a) $P(2; -5; 8)$ et $\alpha : x - 2y + 3z = 8$

b) $P(0; -5; 5)$ et α passant par les points $A(4; -1; 3)$, $B(2; 1; 5)$ et $C(-1; -2; 0)$

48. On donne une droite d par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et le plan α d'équation $x - 2y + z = 3$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite symétrique de d relativement à α.

49. Un rayon lumineux issu du point $P(4; 5; -1)$ se réfléchit sur un miroir plan d'équation $x + 3y - 2z - 7 = 0$. Le rayon réfléchi passe par le point $Q(-7; 8; -9)$. Trouver les coordonnées du point d'incidence M.

Angle

50. Soient les points $A(1; 2; -2)$, $B(1; 1; 1)$, $C(3; 0; -3)$ et $D(-5; 12; 0)$. Calculer une valeur de l'angle des droites (AB) et (CD).

51. Calculer l'angle aigu des droites d et e dans les cas suivants.

a) $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad\quad e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $d : \begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = 4 - k \\ z = 6 - 3k \end{cases}$ $\quad\quad e : \begin{cases} x = n \\ y = -2 - 2n \\ z = 4 + n \end{cases}$

52. Calculer l'angle aigu des plans α et β dans les cas suivants.

a) $\alpha : x + 2y - z = 0$ $\qquad \beta : 2x - 3y + 4z - 8 = 0$

b) $\alpha : x - 2y + 2z + 4 = 0$ $\qquad \beta : x + z + 3 = 0$

c) $\alpha : x - 2y + 3z = 41$ $\qquad \beta : 2x + 3y - z = 12$

d) $\alpha : x - y + 2z = 3$ $\qquad \beta : \begin{cases} x = 1 - 2k + n \\ y = 1 + k - 2n \\ z = 1 - k + 3n \end{cases}$

e) α passant par O, $A(1;2;3)$ et $B(5;4;6)$
β passant par O, $C(5;2;3)$ et $D(1;5;-4)$

53. Déterminer l'angle aigu que forme le plan d'équation $3x + 2y - 5z = 0$ avec chacun des axes de coordonnées.

54. Calculer l'angle aigu entre la droite d et le plan α dans les cas suivants.

a) $d : x - 1 = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$ $\qquad \alpha : 3x + 2y - 5z = 0$

b) $d : \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 5k \\ z = -3 + k \end{cases}$ $\qquad \alpha : 2x + 3y + 4z = 0$

55. Déterminer les équations cartésiennes des plans contenant la droite d'équation $2x = 2y = z$ et qui forment un angle de $45°$ avec le plan d'équation $x + y - z = 0$.

56. Déterminer les équations cartésiennes des plans contenant la droite (OE_3) et qui forment un angle de $60°$ avec le plan d'équation $2x + y - \sqrt{5}z = 0$.

Divers

57. On considère les points O, $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$ et $D(1;1;1)$. Montrer que la droite (OD) coupe le plan (ABC) au centre de gravité G du triangle ABC.

58. On donne le point $P(0;-1;2)$ et les deux droites

$$d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite d qui passe par P et qui coupe chacune des deux droites d_1 et d_2. Déterminer également les points d'intersection de cette droite avec d_1 et d_2.

59. Un insecte robotisé se déplace dans l'espace. On localise cet insecte par ses coordonnées $(x;y;z)$. On a programmé ce robot pour qu'il se déplace dans le plan π passant par les points $A(-5;14;9)$, $B(3;-2;5)$ et $C(-2;2;0)$.

a) Donner une équation cartésienne de π.

b) On constate que le robot se déplace le long de la droite
$d : \begin{cases} x = -\frac{3}{4}k \\ y = -2 + 2k \\ z = -1 + k \end{cases}$. Se déplace-t-il dans le plan π ?

c) Aïe ! Le robot s'est déréglé. On l'a d'abord localisé en $E(3;-4;11)$, puis il s'est rendu de E à $F(1;-2;7)$. S'il continue dans cette direction, pourra-t-il rejoindre le plan d'équation $5x + 4y + 8z + 6 = 0$?

Réponses aux exercices du chapitre 5

1. a) non b) non c) oui d) non e) oui

2. $A \notin d_1$, $A \notin d_2$ et $A \notin d_3$ $B \in d_1$, $B \notin d_2$ et $B \notin d_3$
$C \in d_1$, $C \notin d_2$ et $C \in d_3$ $D \in d_1$, $D \notin d_2$ et $D \notin d_3$

3. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x = 1 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $x - 2 = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-5}{-2}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} y = -2 \\ z = -7 \end{cases}$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $x - 8 = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z+12}{5}$

f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x = 1 \\ 3y + z + 6 = 0 \end{cases}$

4. a) $(12; -3; -6)$ b) $(-28; 5; 18)$ c) $(\frac{16}{3}; -\frac{5}{3}; -2)$ d) $(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$
e) $(12; -3; -6)$

5. $4 - x = \frac{y}{6} = \frac{8-z}{5}$

6. a) $p : \frac{x-4}{-3} = \frac{y}{6} = \frac{z-8}{-5}$ et $q : \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-2} = z - 1$

b) $r : \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 6 + k \\ z = 3 - 2k \end{cases}$, $\frac{x+1}{2} = y - 6 = \frac{z-3}{-2}$

$s : \begin{cases} x = k \\ y = 6 - 4k \\ z = 8 - 5k \end{cases}$, $x = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-8}{-5}$

c) $t : \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 1 + 7k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$

9. a) sécantes en $(0; 3; -1)$ b) strictement parallèles
c) confondues d) gauches
e) strictement parallèles f) sécantes en $(2; 3; 1)$

10. a) sécantes en $(4; 2; 2)$ b) strictement parallèles c) gauches
d) confondues e) sécantes en $(5; 2; -3)$

11. a) $(2; -2; 0)$, $(0; -4; 6)$ et $(4; 0; -6)$
b) $(2; -10; 0)$, pas de deuxième trace et $(2; 0; 6)$
c) $(5; 6; 0)$, $(0; 6; -1)$, pas de troisième trace
d) pas de première trace, $(0; -7; 1)$ et pas de troisième trace

12. b) $(3; -7; 2)$

13. $p = 9$ et $q = -2$

14. strictement parallèles si $m = 3$, sécantes si $m = -\frac{5}{3}$, gauches sinon

16. $z = \frac{26}{3}$

17. b) non ; A, B, D et E sont coplanaires

18. A non, B oui et C non

19. A oui, B non et C oui

20. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $x - y - z = 0$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $2x + y + 5z = 0$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $x + 2y - 3z - 6 = 0$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ et $8x + y - 12z - 5 = 0$

e) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $z=-2$

f) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-4\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $y=-4$

g) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{5}\\\frac{7}{5}\\-\frac{14}{5}\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $x=\frac{9}{5}$

h) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $2x+y+5z+21=0$

i) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $2x+3y=0$

21. $5x+4y+7z-35=0$

22. a) $3x-5y-4z-19=0$ b) $x-2y-3z-4=0$

24. a) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

25. a) $I(1;1;3)$ et $x-y+z-3=0$
b) $I(-1;4;-3)$ et $6x+51y-30z-288=0$

26. a) $5x-2y+5z-12=0$ b) $y=6$ c) $2x-y-2z+54=0$

27. a) $2x-3y+3z-6=0$ b) $5x+2y-z+3=0$
c) $4x-6y-z+32=0$ d) $x-z=0$ e) $2x-2y+z-2=0$

28. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$

29. $3x-y-5z-23=0$

31. a) sécants b) strictement parallèles c) confondus
d) strictement parallèles e) sécants f) confondus
g) sécants h) sécants

32. a) sécants b) strictement parallèles c) confondus d) sécants
e) strictement parallèles f) sécants
g) strictement parallèles h) confondus

34. a) strictement parallèles b) coupe c) incluse d) coupe

35. a) $3k=t+1$ b) droite d'équations $\begin{cases}x=\frac{3}{2}-2k\\y=\frac{3}{2}-2k\\z=3k\end{cases}$

36. a) oui b) non c) oui d) non e) oui f) oui

37. a) $(\frac{4}{9};\frac{8}{3};\frac{35}{9})$ b) $(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$ c) $(1;0;2)$
d) la droite est incluse dans le plan
e) la droite est parallèle au plan
f) $(1;2;5)$ g) $(-6;13;16)$ h) $(1;2;-5)$

38. $(\frac{22}{97};\frac{144}{97};\frac{266}{97})$

39. a) $(-\frac{15}{13};\frac{34}{13};-\frac{45}{13})$

40. a) $(1;1;2)$ b) $(\frac{13}{5};\frac{7}{2};\frac{6}{5})$ c) $(1;\frac{3}{2};\frac{5}{2})$ d) $(5;6;1)$

41. $\begin{cases}x=1-2k\\y=-2+3k\\z=-1+k\end{cases}$

42. a) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}13\\7\\1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$

43. $(9;0;0)$, $(0;6;0)$, $(0;0;3)$, $\begin{cases}x=3k\\y=6-2k\\z=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=9-3k\\y=0\\z=k\end{cases}$ et $\begin{cases}x=0\\y=6-2k\\z=k\end{cases}$

44. $C(3;8;7)$

45. $(5;5;5)$

46. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

47. a) $P'(-2;3;-4)$ b) $P'(2;3;-1)$

48. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$

49. $M(-1;2;-1)$

50. 86,31°

51. a) 70,71° b) 83,74°

52. a) 52,66° b) 45° c) 60° d) 82,07° e) 80,79°

53. 29,12° 18,93° 54,20°

54. a) 36,6° b) 30,6°

55. $(2-\sqrt{6})x + (2+\sqrt{6})y - 2z = 0$ et $(2+\sqrt{6})x + (2-\sqrt{6})y - 2z = 0$

56. $3x - y = 0$ et $x + 3y = 0$

58. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A(0;\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$, $B(0;1;0)$

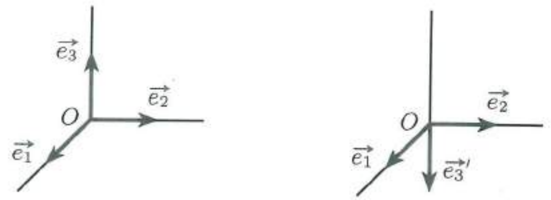
59. a) $8x + 5y - 4z + 6 = 0$ b) oui c) oui

6 Produit vectoriel et produit mixte

Ce chapitre est consacré à l'étude de deux nouvelles notions : le produit vectoriel et le produit mixte. À la différence du produit scalaire, qui est défini aussi bien dans le plan que dans l'espace, ces deux nouveaux produits sont propres à la géométrie dans l'espace. Le produit vectoriel permet de déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs. Le produit mixte permet pour sa part de calculer le volume d'un parallélépipède. Ces deux produits permettent aussi de résoudre différents problèmes métriques.

6.1 Base directe

Les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ étant deux vecteurs unitaires et orthogonaux de l'espace, il existe deux vecteurs $\vec{e_3}$ et $\vec{e_3}'$ tels que $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ et $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}')$ sont des bases orthonormées.



Dans la figure ci-dessus, la base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ est dite **directe** (ou orientée positivement). La base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}')$ est dite **rétrograde** (ou orientée négativement). L'orientation d'une base orthonormée est donnée par la règle du tire-bouchon décrite à la page 177.

Un repère orthonormé est direct (respectivement rétrograde) si la base qui lui est associée est directe (respectivement rétrograde).

Dans ce chapitre, les composantes des vecteurs seront données dans une base orthonormée $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ directe.