64. a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

65. a) 9 b) $\frac{46}{\sqrt{38}}$ c) $\frac{2}{9}$

66. a) $\begin{pmatrix} 3,52 \\ 2,64 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -155 \\ -93 \end{pmatrix}$

67. a) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 56 \\ -56 \\ 28 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-5 \\ \sqrt{2}-5 \\ 2-5\sqrt{2} \end{pmatrix}$

68. a) $P'(7;-1)$ et $P''(10;5)$ b) $P'(-1;11)$ et $P''(-9;5)$

69. a) $P(-\frac{3}{2};\frac{9}{10};\frac{6}{5})$ b) $S(-1;\frac{14}{5};\frac{2}{5})$

70. $S(-6;-6;-9)$

3 Équations de la droite dans le plan

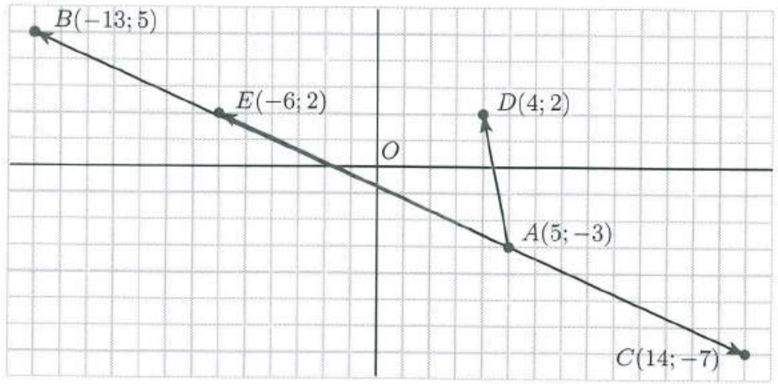
Dans les deux premiers chapitres de cet ouvrage, nous avons présenté la notion de vecteur et exposé ses propriétés essentielles.

L'ambition de ce troisième chapitre est double. Dans un premier temps, nous nous attacherons à caractériser la droite et à établir ses diverses équations en fondant notre démarche sur la notion de vecteur du plan. Par la suite, nous traiterons quelques questions d'ordre métrique telles que le calcul de l'angle de deux droites ou la distance d'un point à une droite.

3.1 Vecteur directeur d'une droite

Exemple. *Les points $A(5;-3)$, $B(-13;5)$, $C(14;-7)$, $D(4;2)$ et $E(-6;2)$ sont-ils alignés ?*

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} -18 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$.



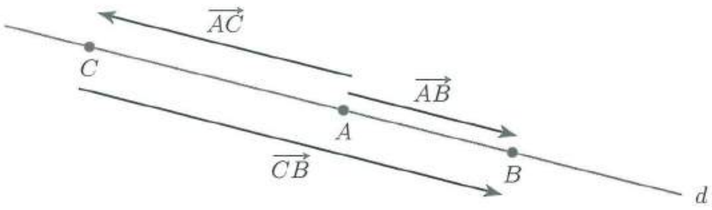
Nous constatons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, mais que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ ne leur est pas colinéaire. Nous en déduisons que les points A et B sont alignés avec C mais pas avec D.

Le dessin pourrait suggérer que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, mais le calcul montre que ce n'est pas le cas. Les points A, B et E ne sont donc pas alignés.

Dans l'exemple précédent, nous avons vu que les points A, B et C étaient alignés en remarquant que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Nous aurions aussi pu considérer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ou les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Trois points distincts A, B et C sont alignés s'ils appartiennent à une même droite d. Dans ce cas, les six vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et ont donc même direction, celle de la droite d. Ce sont des **vecteurs directeurs** de la droite d.

Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur directeur de d est aussi un vecteur directeur de d.



Une droite est déterminée par la donnée de deux points distincts ou d'un point et d'une direction, autrement dit par un point et un vecteur directeur.

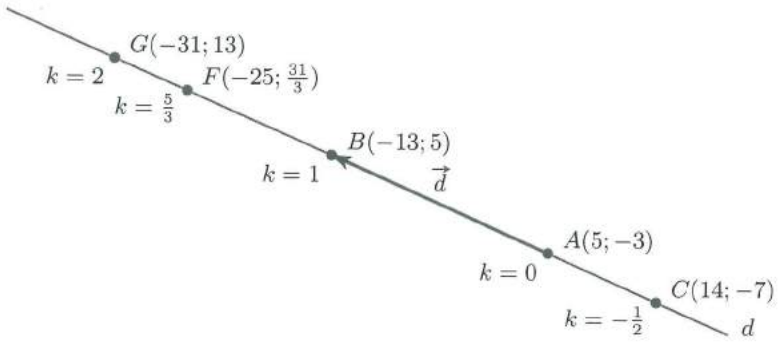
Si la droite est déterminée par deux points distincts A et B, on peut choisir comme vecteur directeur $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

Exemple. *Nous avons vu dans l'exemple précédent que les points $A(5;-3)$, $B(-13;5)$ et $C(14;-7)$ sont alignés. Considérons $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur de la droite d passant par les points A et B.*

Le point C de d vérifie $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\vec{d}$.

En considérant le point $F(-25; \frac{31}{3})$, nous trouvons que $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{3}\vec{d}$ et donc que F appartient aussi à la droite d.

Nous pouvons rapidement trouver d'autres points de d : $\overrightarrow{AG} = 2\vec{d}$ permet de trouver $G(-31;13)$.



On remarque que, pour tout point P de la droite, il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AP} = k\,\vec{d}$ et réciproquement.

3.2 Équations de la droite

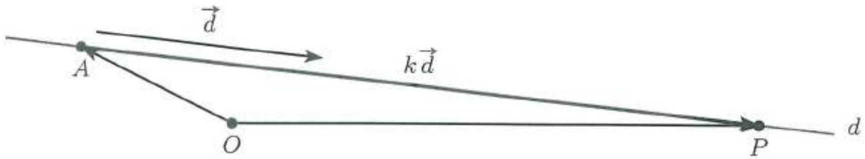
Considérons un point $A(x_A; y_A)$ d'une droite d et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de cette droite. Quelle condition doit vérifier un point quelconque $P(x;y)$ pour appartenir à la droite d?

Pour tout point P de la droite d, les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires. Il existe donc un nombre réel k vérifiant $\overrightarrow{AP} = k\,\vec{d}$. Réciproquement, tout nombre réel k définit un point de la droite.

$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = k\vec{d}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Comme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$, on obtient l'**équation vectorielle** de la droite d.

$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$$



Les coordonnées x et y d'un point P quelconque de d doivent alors vérifier la condition suivante appelée **représentation paramétrique** de la droite.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

On obtient alors les **équations paramétriques** de la droite.

$$\begin{cases} x = x_A + kd_1 \\ y = y_A + kd_2 \end{cases} \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

À toute valeur du paramètre k, la première équation associe une valeur unique de l'abscisse x et la seconde une valeur unique de l'ordonnée y d'un point $P(x;y)$ de la droite d.

Réciproquement, pour tout point $P(x;y)$ de la droite d, il existe une unique valeur du paramètre k pour laquelle les coordonnées x et y sont données par les deux équations ci-dessus.

3.2.1 Équations cartésiennes

Les équations paramétriques de la droite sont

$$\begin{cases} x = x_A + kd_1 \\ y = y_A + kd_2 \end{cases} \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Éliminons le paramètre k par la méthode des combinaisons linéaires.

$$\begin{cases} x = x_A + kd_1 \\ y = y_A + kd_2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot d_2 \\ \cdot(-d_1) \end{array} \right.$$

On obtient

$$d_2x - d_1y = d_2x_A - d_1y_A$$

$$d_2x - d_1y - d_2x_A + d_1y_A = 0$$

En posant $a = d_2$, $b = -d_1$ et $c = d_1y_A - d_2x_A$, on obtient une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

Il s'agit de l'**équation cartésienne implicite** de la droite d.

Lorsque b est non nul, on peut isoler y dans l'équation cartésienne implicite et on obtient l'**équation cartésienne explicite** de la droite d de la forme

$$y = mx + h$$

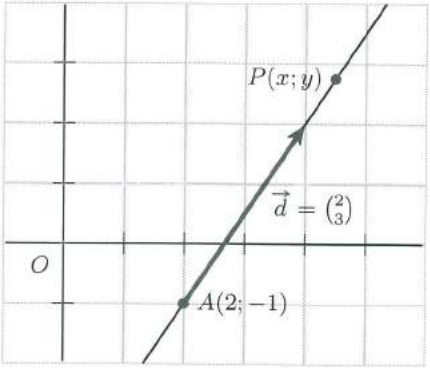
Remarques.

1. Dorénavant on parlera d'équation implicite ou d'équation explicite en omettant l'adjectif «cartésienne».

2. Il existe une infinité d'équations implicites équivalentes représentant toutes la même droite. On utilisera de préférence la forme la plus simple.
3. L'équation explicite est en revanche unique, si elle existe.
4. Les coefficients de l'équation implicite $ax + by + c = 0$ permettent de trouver un vecteur directeur de la droite.

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Exemple. *On considère une droite d passant par le point $A(2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.*



On note $P(x;y)$ un point quelconque de la droite. Les différentes descriptions de d sont

Équation vectorielle :	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{d}$
Représentation paramétrique :	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
Équations paramétriques :	$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -1 + 3k \end{cases}$
	$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -1 + 3k \end{cases} \left\| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{array} \right.$
	$3x - 2y = 8$
Équation implicite :	$3x - 2y - 8 = 0$
Équation explicite :	$y = \dfrac{3}{2}x - 4$

Le point $Q(0;-4)$ appartient-il à cette droite ?

Pour le savoir, nous substituons les coordonnées de Q dans l'une des différentes descriptions de d, par exemple dans les équations paramétriques.

$$\begin{cases} 0 = 2+2k \\ -4 = -1+3k \end{cases}$$

Ce système admet pour solution $k=-1$ (même valeur pour les deux équations) et nous en concluons que Q est bien un point de d.
Nous pouvons aussi substituer les coordonnées de Q dans l'équation implicite $3\cdot 0 - 2\cdot(-4) - 8 = 0$ ou dans l'équation explicite $-4 = \frac{3}{2}\cdot 0 - 4$.

Le point $S(-1;-5)$ appartient-il à cette droite ?

Substituons les coordonnées de S dans les équations paramétriques.

$$\begin{cases} -1 = 2+2k \\ -5 = -1+3k \end{cases}$$

La première équation donne $k=-\frac{3}{2}$ alors que la seconde donne $k=-\frac{4}{3}$. Ces deux valeurs de k étant différentes, le système est impossible et le point S n'appartient pas à la droite.
Nous laissons le lecteur contrôler que les coordonnées du point $S(-1;-5)$ ne vérifient pas non plus les autres équations.

Remarques.

1. Dans l'exemple ci-dessus, pour tout point $P(x;y)$ de la droite d, les vecteurs $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que leur déterminant est nul comme nous l'avons vu au chapitre 1. Ainsi

$$\begin{aligned} P \in d \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Det}(\overrightarrow{AP};\vec{d}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ y+1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x-2y-8=0 \end{aligned}$$

   Il s'agit de l'équation cartésienne implicite de la droite. On dispose ainsi d'une autre méthode pour obtenir une telle équation.

2. Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur directeur d'une droite est aussi un vecteur directeur de cette droite. Un choix judicieux permet de simplifier les calculs.

   Exemple. *Soit la droite d passant par les points $A(\frac{1}{6};-\frac{2}{3})$ et $B(2;-\frac{5}{2})$.*
   On a alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ -\frac{11}{6} \end{pmatrix} = \frac{11}{6}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

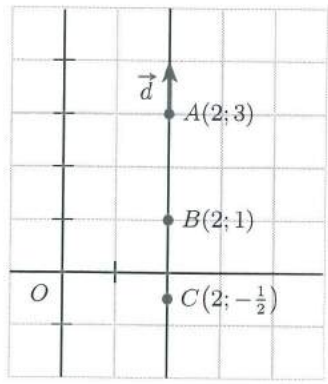
   On prendra plus volontiers $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de d.

3.2.2 Droite verticale

Exemple.
Soit la droite d donnée par le point $A(2;3)$ et par le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3+k \end{cases}$$

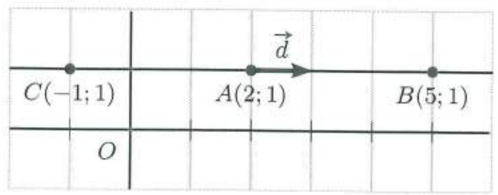
On constate que les points $B(2;1)$ et $C(2;-\frac{1}{2})$ appartiennent à cette droite, de même que tous les points d'abscisse 2.
On peut alors écrire $\begin{cases} x = 2 \\ y \text{ quelconque} \end{cases}$.



Si la première composante du vecteur $\vec{d}$ est nulle, le système d'équations $\begin{cases} x = x_A \\ y \text{ quelconque} \end{cases}$ se réduit à la seule équation $x = x_A$. Il s'agit de l'équation d'une droite parallèle à l'axe Oy. Une telle droite est **verticale**.

3.2.3 Droite horizontale

Exemple.
Soit la droite d donnée par le point $A(2;1)$ et par le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 2+k \\ y = 1 \end{cases}$.
On constate que les points $B(5;1)$ et $C(-1;1)$ appartiennent à cette droite, de même que tous les points d'ordonnée 1. On peut alors écrire $\begin{cases} x \text{ quelconque} \\ y = 1 \end{cases}$.

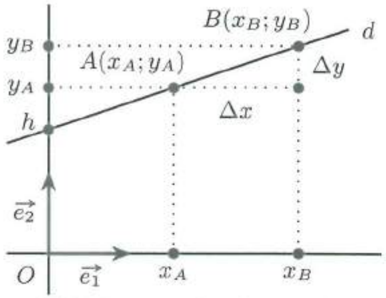


Si la deuxième composante du vecteur $\vec{d}$ est nulle, le système d'équations $\begin{cases} x \text{ quelconque} \\ y = y_A \end{cases}$ se réduit à la seule équation $y = y_A$. Il s'agit de l'équation d'une droite parallèle à l'axe Ox. Une telle droite est **horizontale**.

3.3 Pente d'une droite

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$, considérons une droite d donnée par un point $A(x_A; y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{d}$ non colinéaire au vecteur de base $\vec{e_2}$.

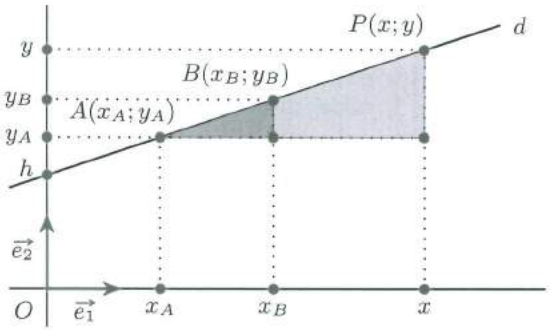
Considérons un point $B(x_B; y_B)$ de la droite d. Notons Δx la différence des abscisses des points A et B et Δy la différence de leurs ordonnées.
La **pente** m de la droite d est



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Observons que cette définition n'est pas valable lorsque la droite d est parallèle à l'axe Oy car, dans ce cas, l'abscisse du point B est égale à celle du point A et, par conséquent, Δx est nul.

Choisissons un point quelconque $P(x; y)$ de la droite d.



Le théorème de Thalès et la définition de la pente donnent

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A}.$$

D'où

$$y - y_A = m \cdot (x - x_A)$$

$$y = mx - mx_A + y_A$$

Cette dernière équation est l'équation explicite de la droite $d : y = mx + h$. Nous en déduisons le théorème suivant.

Théorème 7. *Dans l'équation explicite d'une droite, le coefficient m de x est la pente de la droite.*

Dans le cas particulier où le point B possède une abscisse égale à $x_A + 1$, on voit que $m = \Delta y$ et que le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur particulier de la droite d puisque sa première composante vaut 1 et sa deuxième composante vaut m. Nous en déduisons le théorème suivant.

Théorème 8. *Un vecteur directeur particulier d'une droite de pente m est*

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

Théorème 9. *Deux droites de même pente sont parallèles. Réciproquement, deux droites parallèles non verticales ont même pente.*

Théorème 10. *Considérons deux droites non verticales d_1 et d_2 de pentes m_1 et m_2. On a*

$$d_1 \perp d_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 m_2 = -1$$

Démonstration. Les vecteurs directeurs respectifs des droites d_1 et d_2 sont $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$.

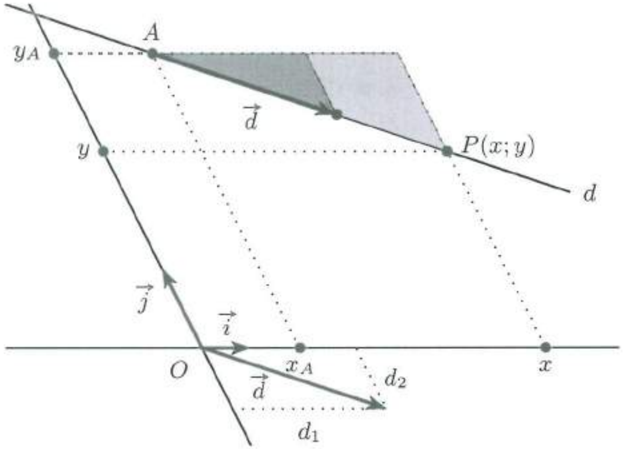
On a $d_1 \perp d_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{d_1} \perp \vec{d_2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + m_1 m_2 = 0.$$

□

Complément. Nous avons fait le choix dans ce livre de travailler dans des repères orthonormés. Il n'est toutefois pas nécessaire de munir le plan d'un repère orthonormé pour définir la notion de pente d'une droite. Si on se place dans un repère quelconque, on utilise plus volontiers le terme de coefficient directeur d'une droite.

Dans un repère quelconque $(O; \vec{i}; \vec{j})$, considérons la droite d passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ où d_1 et d_2 sont tous deux non nuls.



Pour tout point $P(x;y)$ distinct de A de la droite d, le théorème de Thalès donne

$$\frac{x-x_A}{d_1} = \frac{y-y_A}{d_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d_2}{d_1} = \frac{y-y_A}{x-x_A}$$

Le rapport $m = \dfrac{d_2}{d_1}$ est le **coefficient directeur** de la droite d.

On observe que donner la droite d par le point A et par le vecteur directeur $\vec{d}$ revient à donner d par A et par son coefficient directeur m.

On peut donc écrire $m = \dfrac{y-y_A}{x-x_A}$.

Cette égalité est équivalente à $y - y_A = m(x - x_A)$.

Remarques.

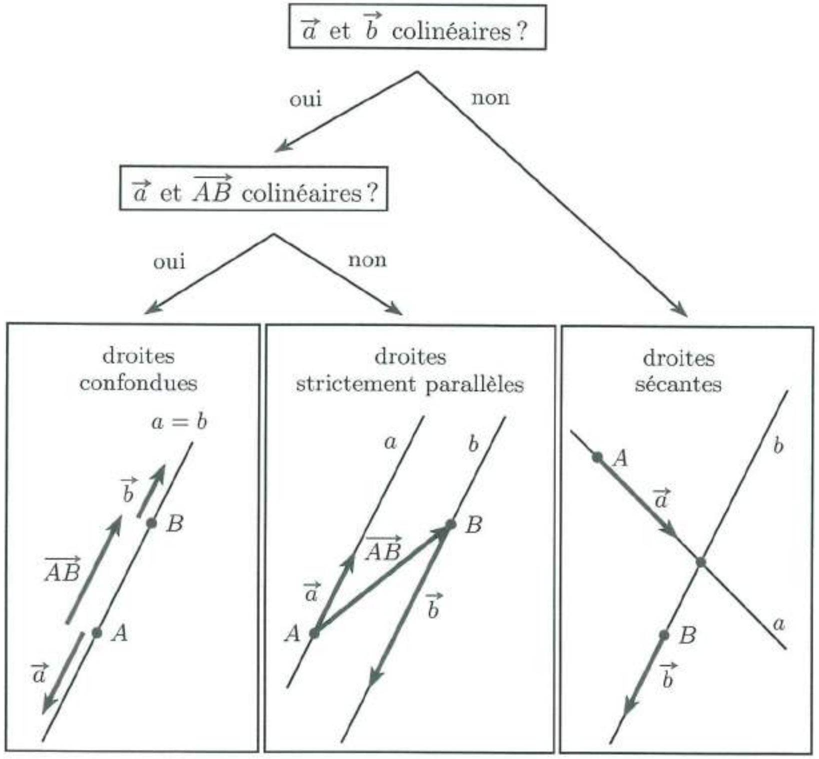
1. Le vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d de coefficient directeur m.
2. Dans le cas où la droite d est parallèle à la direction du vecteur $\vec{i}$, son coefficient directeur est nul et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
3. Dans le cas où la droite d est parallèle à la direction du vecteur $\vec{j}$, son coefficient directeur n'est pas défini.

3.4 Positions relatives de deux droites

Dans le plan, deux droites peuvent être sécantes, strictement parallèles ou confondues. Comment distinguer ces trois situations par calcul ?

Soient une droite a passant par A et de vecteur directeur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et une droite b passant par B et de vecteur directeur $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Nous pouvons décrire leur position relative en utilisant le schéma ci-dessous.



Remarque. Les droites a et b sont parallèles si et seulement si il existe un nombre réel k non nul tel que $a_2 = ka_1$ et $b_2 = kb_1$.

Exemples. *Trouver les positions relatives des droites suivantes.*

1. $a : y = -3x + 2$ et $b : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

   On trouve $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *qui sont colinéaires.*

   En posant $x = 0$ *dans l'équation de* a*, on trouve* $A(0;2)$ *et en posant* $t = 0$ *dans l'équation de* b*, on trouve* $B(2;4)$*. Donc* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$*. Ce vecteur n'est pas colinéaire à* $\vec{a}$*.*

   Les deux droites sont donc strictement parallèles.

2. $a : y = 2x - 4$ et $b : x - 3y - 2 = 0$

   On trouve $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *qui ne sont pas colinéaires.*

   Les deux droites sont donc sécantes. On trouve leur intersection en résolvant le système d'équations

   $$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases}.$$

   On obtient $x = 2$ *et* $y = 0$*. Le point d'intersection est donc* $I(2;0)$*.*

3.5 Angle de deux droites

Soient a et b deux droites sécantes de vecteurs directeurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Au chapitre 2, nous avons établi que $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}$ où φ est l'angle aigu ou obtus des droites a et b.

Remarques.

1. La mesure de l'angle aigu est obtenue par $\cos(\varphi) = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}$.
2. Si a et b sont parallèles, on obtient un angle de $0°$.

Exemple. *Considérons les droites décrites par* $a : \begin{cases} y = 3 - 5k \\ y = -2 + k \end{cases}$ *et* $b : 3x - 2y + 4 = 0$*. Un de leurs angles est donné par*

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{26}\,\sqrt{13}} = \frac{-7}{13\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 112{,}38°$$

Il s'agit de l'angle obtus.

L'angle aigu vaut $\varphi' = 180° - \varphi \approx 67{,}62°$*.*

3.6 Vecteur normal à une droite

Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{d}$. Un **vecteur normal** à la droite d est un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{d}$, c'est-à-dire tel que $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$.

Exemple. *Trouver l'équation de la droite* d *passant par* $A(5;7)$ *et de vecteur normal* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$*.*

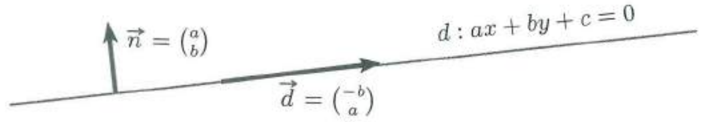
Soit $P(x;y)$ *un point quelconque de* d*. On a*

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-5 \\ y-7 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-5) - 3(y-7) = 0$$

L'équation de la droite est donc $2x - 3y - 11 = 0$*.*

On constate que les coefficients de x *et de* y *sont les composantes du vecteur* $\vec{n}$*.*

Théorème 11. *Le vecteur* $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *est un vecteur normal à la droite* d *d'équation implicite* $ax + by + c = 0$*.*



Remarques.

1. Une droite d est entièrement déterminée par la donnée d'un de ses points A et d'un vecteur normal $\vec{n}$.
2. Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à d.
3. Les angles de deux droites peuvent être calculés à l'aide de vecteurs normaux.

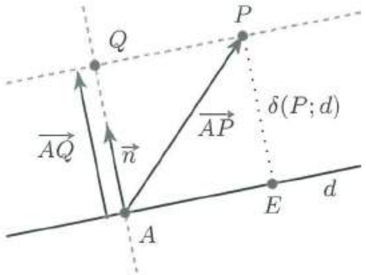
Exemple. *On donne le point* $A(-3;5)$ *et le vecteur* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ *normal à* d*. En vertu de ce qui précède, une équation implicite de la droite* d *est* $x - 4y + c = 0$*.*

Les coordonnées $x = -3$ *et* $y = 5$ *du point* A *vérifient cette équation. On en déduit que* $c = 23$*. Une équation implicite de* d *est donc* $x - 4y + 23 = 0$*.*

3.7 Distance d'un point à une droite

Soient une droite d et un point P quelconque. Nous voulons calculer la distance $\delta(P;d)$ du point P à la droite d.

Considérons un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite d et un point A de cette droite.



La distance du point P à la droite d est $\delta(P;d) = \|\overrightarrow{AQ}\|$ où $\overrightarrow{AQ}$ est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AP}$ sur le vecteur normal $\vec{n}$.

En utilisant le théorème 6 du chapitre 2, on trouve

$$\delta(P;d) = \|\overrightarrow{AQ}\| = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Théorème 12. *Soient la droite d d'équation implicite $ax+by+c=0$ et $P(x_P;y_P)$ un point du plan. On a*

$$\delta(P;d) = \frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Démonstration.

Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d. Soit $A(x_A;y_A)$ un point de d. Alors $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \end{pmatrix}$ et on a

$$\begin{aligned} \delta(P;d) &= \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_P-x_A)+b(y_P-y_A)|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{|ax_P+by_P-(ax_A+by_A)|}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

Les coordonnées du point A vérifient l'équation de la droite d.
Par conséquent $ax_A+by_A+c=0$, c'est-à-dire $ax_A+by_A=-c$ et donc $\delta(P;d) = \dfrac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. □

Exemple. *On considère la droite d d'équation $x-4y+23=0$, le point $P_1(-3;10)$ et le point $P_2(-13;\frac{5}{2})$. On a*

$$\delta(P_1;d) = \frac{|1\cdot(-3)-4\cdot10+23|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}} = \frac{20}{\sqrt{17}} = \frac{20\sqrt{17}}{17}$$

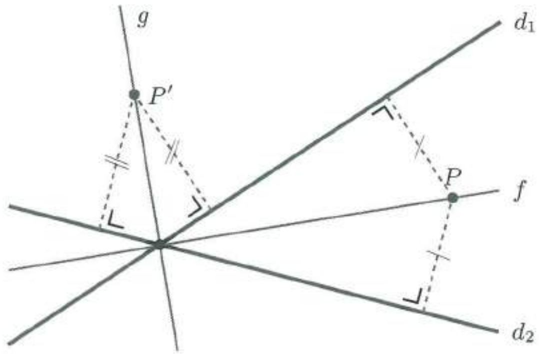
$$\delta(P_2;d) = \frac{|-13-10+23|}{\sqrt{17}} = 0$$

Le point P_2 appartient donc à la droite d.

3.8 Bissectrices de deux droites

On cherche à établir les équations des bissectrices f et g de deux droites sécantes $d_1 : a_1x+b_1y+c_1=0$ et $d_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$.

Un point $P(x;y)$ appartient à une bissectrice si et seulement si $\delta(P;d_1)=\delta(P;d_2)$.



D'où $\dfrac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \dfrac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

Les équations des bissectrices sont donc

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

et

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = -\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

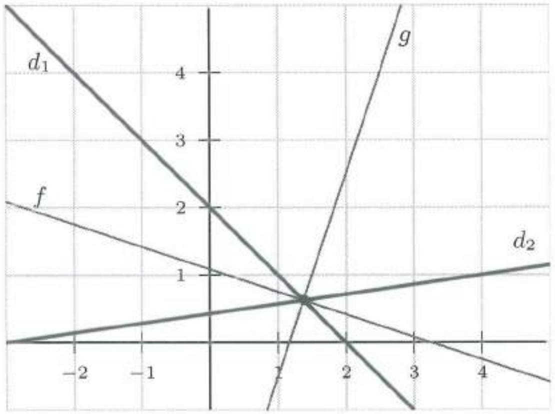
Exemple 1. *Considérons les droites d_1 et d_2 d'équations implicites respectives $x + y - 2 = 0$ et $x - 7y + 3 = 0$.*
Le point $P(x; y)$ appartient à l'une ou l'autre des bissectrices f ou g des droites d_1 et d_2 si et seulement si

$$\frac{x+y-2}{\sqrt{2}} = \pm\frac{x-7y+3}{5\sqrt{2}}$$

De l'égalité $\dfrac{x+y-2}{\sqrt{2}} = \dfrac{x-7y+3}{5\sqrt{2}}$*, on déduit que l'équation de f est* $4x + 12y - 13 = 0$.

De l'égalité $\dfrac{x+y-2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{x-7y+3}{5\sqrt{2}}$*, on déduit que l'équation de g est* $6x - 2y - 7 = 0$.

Ces bissectrices sont perpendiculaires car $\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = 0$. *De manière générale, les bissectrices de deux droites sont perpendiculaires.*



Exemple 2. *On considère le triangle ABC avec $A(4; 6)$, $B(5; -1)$ et $C(-3; -1)$. On veut déterminer une équation de la bissectrice intérieure issue du sommet A de ce triangle.*
Équation de la droite (AB) : $7x + y - 34 = 0$

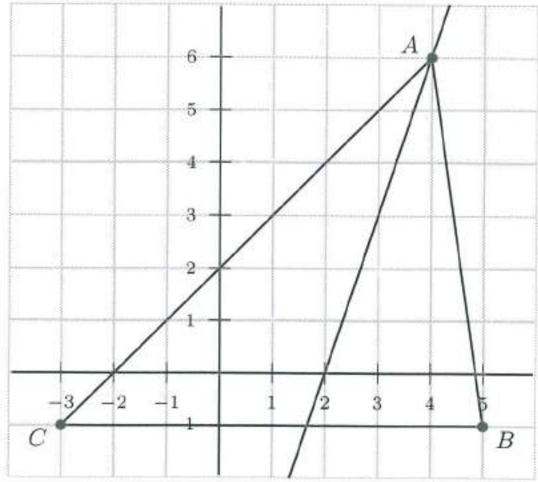
Équation de la droite (AC) : $x - y + 2 = 0$

Les équations des bissectrices sont $\dfrac{7x+y-34}{5\sqrt{2}} = \pm\dfrac{x-y+2}{\sqrt{2}}$.

L'équation $\dfrac{7x+y-34}{5\sqrt{2}} = \dfrac{x-y+2}{\sqrt{2}}$ *conduit à* $y = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3}$. *Il s'agit de l'équation d'une droite de pente négative.*

L'équation $\dfrac{7x+y-34}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{x-y+2}{\sqrt{2}}$ *conduit à* $y = 3x - 6$. *Il s'agit de l'équation d'une droite de pente positive.*

Cette seconde équation est celle que nous cherchions comme le montre le dessin.
Nous remarquons ainsi que l'équation de la bissectrice de pente positive ne provient pas forcément du choix du signe + de l'équation initiale.



On peut également déterminer l'équation d'une bissectrice intérieure d'un triangle à partir de sa construction à la règle et au compas. En effet lorsqu'on additionne deux vecteurs de même norme, leur somme est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle qu'ils forment (car une diagonale d'un losange est également une de ses bissectrices).

Ainsi, pour déterminer un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$, on prend un vecteur $\overrightarrow{AB'}$ de même direction et même sens que $\overrightarrow{AB}$ et un vecteur $\overrightarrow{AC'}$ de même direction et même sens que $\overrightarrow{AC}$ tels que $||\overrightarrow{AB'}|| = ||\overrightarrow{AC'}||$ (on choisit généralement les vecteurs unitaires $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{||\overrightarrow{AB}||}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{||\overrightarrow{AC}||}\cdot\overrightarrow{AC}$). Le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ est alors un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle α. Il suffit ensuite de considérer le point A pour obtenir l'équation de cette bissectrice.

Exemple. *Soient les points $A(4;8)$, $B(4;2)$ et $C(1;4)$. Pour déterminer la bissectrice de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$, on calcule*

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Un vecteur directeur de la bissectrice est alors donné par

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix} \text{ colinéaire à } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'équation de la bissectrice de l'angle α est $b_\alpha : y = 3x - 4$.

3.9 Exercices relatifs au chapitre 3

Équations de la droite

1. Déterminer α et β afin que les points $A(2;-3)$, $B(4;7)$, $C(-1;\alpha)$ et $D(\beta-1;1-2\beta)$ soient alignés.

2. On donne une droite d par la représentation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Représenter les points de d correspondant aux valeurs suivantes du paramètre k : -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; 1 ; 2 ; π.

3. Déterminer si les points $A(6;-1)$, $B(3;-2)$, $C(1;0)$, $D(-9;8)$, $E(-6;\frac{31}{5})$ et $F(-\frac{3}{2};4)$ appartiennent à la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1 - 5k \\ y = 2 + 3k \end{cases}$.

4. Trouver une représentation paramétrique de la droite

a) qui passe par $A(3;5)$ et qui a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) qui passe par $A(-3;-2)$ et $B(4;-5)$;

c) qui passe par $A(5;2)$ et qui est parallèle à la droite (BC), où $B(1;1)$ et $C(-3;2)$;

d) qui passe par $A(0;-2)$ et qui est parallèle à l'axe Ox ;

e) qui passe par $A(8;12)$ et qui est parallèle à l'axe Oy.

5. On donne une droite d par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le point de d

a) situé sur l'axe Ox et celui situé sur l'axe Oy ;

b) qui possède une abscisse égale à 7 ;

c) qui possède une ordonnée égale à -2 ;

d) dont les deux coordonnées sont égales.

6. Déterminer si les points $A(1;-3)$, $B(3;2)$, $C(2;-4)$, $D(-3;-13)$, $E(\frac{1}{2};-\frac{17}{4})$ et $F(-\frac{4}{3};-\frac{5}{6})$ appartiennent à la droite d'équation implicite $5x-2y-11=0$.

7. Calculer les coordonnées de quelques points situés sur chacune des droites suivantes et dessiner ces droites.

a) $x+2y-12=0$ b) $y=\frac{3}{5}x+3$ c) $4x-3y=0$

d) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}$ e) $y-4=0$ f) $2x+7=0$

8. On donne la droite d d'équation $2x+5y-20=0$. Déterminer le point de la droite d

a) situé sur l'axe Ox ;

b) situé sur l'axe Oy ;

c) qui possède une abscisse égale à 3 ;

d) qui possède une ordonnée égale à 15 ;

e) dont les deux coordonnées sont égales ;

f) qui est situé sur la droite d'équation $3x-2y-11=0$.

9. Soit une droite d passant par $A(-3;1)$ de vecteur directeur $\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

a) Trouver des équations paramétriques de d et calculer les coordonnées des points correspondant aux valeurs suivantes du paramètre : 1 ; 0 ; 2 ; -1 ; -3 ; $\frac{3}{2}$.

b) Dessiner cette droite à l'aide des points trouvés ci-dessus.

c) Trouver l'équation explicite et l'équation implicite de cette droite.

d) Le point $C(12;5)$ appartient-il à cette droite ?

e) Trouver les nombres α et β pour que les points $D(15;\alpha)$ et $E(\beta;-7)$ appartiennent à la droite d.

10. Trouver des équations paramétriques et l'équation explicite de la droite passant par $A(5;2)$ et $B(8;-1)$.

11. Trouver l'équation implicite, puis explicite, de chacune des droites données à l'exercice 4.

12. a) Trouver l'équation explicite de la droite passant par $A(5;-7)$ et $B(-4;8)$.

b) Les points $C(\frac{1}{2};0)$ et $D(-\frac{3}{5};\frac{7}{3})$ appartiennent-ils à cette droite ?

c) Trouver le point E de cette droite dont l'ordonnée est $-\frac{1}{2}$.

13. Trouver l'équation implicite de la droite passant par

a) $A(-5;3)$ et $B(7;3)$ b) $A(4;6)$ et $B(4;-2)$

14. Déterminer la pente m et un vecteur directeur $\vec{d}$ des droites suivantes.

a) $5x-6y-7=0$ b) $x+y-5=0$

c) $4x-3y=0$ d) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{15}=0$

e) $\sqrt{5}x-4y-5=0$ f) $3y-8=0$

g) $x=0$ h) $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-3}{4}$

15. Trouver l'équation implicite de la droite d donnée par les systèmes suivants.

a) $\begin{cases}x=4-3k\\y=1+k\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=7-4k\\y=3+5k\end{cases}$

16. Trouver une représentation paramétrique de chacune des droites données à l'exercice 14.

17. Montrer que les descriptions suivantes définissent toutes la même droite.

a) $3x+2y-11=0$ b) $6x+4y-22=0$

c) $\begin{cases}x=3+2k\\y=1-3k\end{cases}$ d) $\begin{cases}x=5-2k\\y=-2+3k\end{cases}$

e) $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{11}{2}$ f) $\dfrac{x-9}{-2}=\dfrac{y+8}{3}$

18. a) Donner l'équation explicite de la droite de pente 3 et passant par $A(2;-5)$.

b) Calculer les coordonnées de deux autres points B et C de cette droite.

c) Déterminer les points d'intersection de cette droite avec l'axe Ox et avec l'axe Oy.

19. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles dans les cas suivants ?

a) $A(1;1)$, $B(1;0)$, $C(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ et $D(\frac{1}{2};0)$

b) $A(1;-1)$, $B(1;1)$, $C(-1;-\frac{1}{2})$ et $D(2;1)$

c) $A(1;-1)$, $B(2;-1)$, $C(1;-1)$ et $D(2;1)$

20. a) Soit d la droite d'équation $2x-3y+7=0$. Déterminer l'équation explicite de la parallèle à d passant par le point $A(2;-5)$.

b) Soit d la droite d'équation $x-2y+4=0$. Déterminer l'équation explicite de la parallèle à d passant par le point $A(4;-10)$.

21. Montrer que l'équation de toute droite parallèle à la droite d'équation $ax+by+c=0$ peut s'écrire sous la forme $ax+by+d=0$ où $d \in \mathbb{R}$.

22. Indiquer si les droites d_1 et d_2 ci-dessous sont sécantes, strictement parallèles ou confondues.

a) $d_1 : 4x-2y-1=0$ et $d_2 : -2x+y-5=0$

b) $d_1 : 3x+y-8=0$ et $d_2 : y=3x-\frac{3}{2}$

c) $d_1 : 8x-4y-2=0$ et $d_2 : -4x+2y+1=0$

d) $d_1 : \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{4}$ et $d_2 : 3x+4y-5=0$

23. Indiquer si les droites d_1 et d_2 ci-dessous sont sécantes, strictement parallèles ou confondues.

a) $d_1 : -x+2y-3=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=-1+2k \\ y=1+k \end{cases}$

b) $d_1 : 3x+2y-7=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=4+2k \\ y=3-3k \end{cases}$

c) $d_1 : 6x+y-9=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=1-k \\ y=3+2k \end{cases}$

d) $d_1 : \begin{cases} x=7+k \\ y=8-k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x=5-3t \\ y=10+3t \end{cases}$

e) $d_1 : y=\dfrac{1}{2}x-2$ et $d_2 : \begin{cases} x=6-2t \\ y=3-t \end{cases}$

f) $d_1 : \begin{cases} x=2k \\ y=3+5k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x=4+3k \\ y=1-2k \end{cases}$

Intersection de deux droites

24. Déterminer les points d'intersection des droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 4x-3y-6=0$ et $d_2 : 6x+y-20=0$

b) $d_1 : y=\frac{3}{7}x-\frac{57}{7}$ et $d_2 : 2x+3y+8=0$

c) $d_1 : 4x+5y+33=0$ et $d_2 : y=3x-56$

d) $d_1 : 4x-6y-3=0$ et $d_2 : y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

e) $d_1 : x-2y+26=0$ et $d_2 : 5y+8=0$

f) $d_1 : 2x-7y+9=0$ et $d_2 : \dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-1}{2}$

g) $d_1 : -7x-8y+2=0$ et $d_2 : 4x-3y+4=0$

h) $d_1 : 3x+2y-4=0$ et $d_2 : \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-6}{-4}$

25. Déterminer les points d'intersection des droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 2x-9y-8=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=16-4k \\ y=-6+2k \end{cases}$

b) $d_1 : 5x+4y-7=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=7-4k \\ y=1+k \end{cases}$

c) $d_1 : 2x+3y+5=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=7-3k \\ y=3+2k \end{cases}$

d) $d_1 : x+y-3=0$ et $d_2 : \begin{cases} x=1+k \\ y=2+k \end{cases}$

26. Déterminer les points d'intersection des droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

b) $d_1 : \begin{cases} x = -2 + k \\ y = -5 + 2k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$

c) $d_1 : \begin{cases} x = 8 - \frac{3}{2}k \\ y = 1 + \frac{1}{2}k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 3k \\ y = \frac{7}{2} - k \end{cases}$

27. Déterminer les points d'intersection des droites (AB) et (CD) ci-dessous.

a) $A(0;1)$, $B(0;0)$, $C(1;1)$, $D(-1;\frac{1}{2})$
b) $A(0;1)$, $B(2;\frac{1}{2})$, $C(1;-\frac{1}{2})$, $D(0;\frac{1}{2})$
c) $A(\frac{1}{2};1)$, $B(0;\frac{1}{2})$, $C(1;0)$, $D(-1;\frac{1}{2})$
d) $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(\frac{1}{2};1)$, $D(1;\frac{1}{2})$
e) $A(2;3)$, $B(-1;2)$, $C(-9;-3)$, $D(-7;-7)$
f) $A(4;4)$, $B(5;1)$, $C(1;-2)$, $D(-1;4)$

28. On considère la droite d passant par $A(-1;5)$ et $B(4;6)$ et la droite d' passant par $C(7;3)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le point d'intersection I de ces deux droites.

29. Soient les points $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

a) Déterminer le point d'intersection K des droites (AD) et (BC) et le point d'intersection L des droites (AC) et (BD), ainsi que le milieu M du segment $[AB]$.
b) Montrer que les points K, L et M sont alignés.

30. Soient les points $A(0;1)$, $B(1;2)$, $C(1;0)$ et $D(0;2)$. .

a) Déterminer le point d'intersection I des droites (AB) et (CD).
b) Pour quel nombre réel λ la droite passant par les points $P(\lambda;0)$ et $Q(1;1)$ contient-elle aussi le point I ?

31. Soient les points $A(0;0)$, $B(2;-1)$, $C(4;0)$, $D(5;2)$, $E(4;4)$, $F(2;5)$, $G(0;4)$ et $H(-1;2)$.

a) Trouver les coordonnées du milieu P de $[BD]$ et du milieu N de $[FH]$.
b) Calculer les coordonnées du point d'intersection M des droites (AE) et (GC).
c) Les points M, N et P sont-ils alignés ?

32. Soient les points $A(1;0)$, $B(\frac{3}{2};0)$, $C(3;0)$, $D(0;1)$, $E(0;2)$ et $F(0;3)$.

a) Déterminer le point d'intersection X des droites (AE) et (BD), le point d'intersection Y des droites (AF) et (CD) et le point d'intersection Z des droites (CE) et (BF).
b) Montrer que les points X, Y et Z sont alignés [1].

33. Soient les points $A(3;0)$, $A'(9;0)$, $B(1;1)$, $B'(9;9)$, $C(0;6)$ et $C'(0;9)$.

a) Vérifier que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourrantes.
b) Soient I le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$, J le point d'intersection des droites (AC) et $(A'C')$ et K le point d'intersection des droites (BC) et $(B'C')$. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
c) Montrer que les points I, J et K sont alignés [2].

34. Les supports des côtés d'un triangle sont les droites d'équation $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$ et $x - 2 = 0$. Trouver les coordonnées des sommets de ce triangle.

1. Cet exercice illustre le théorème de Pappus :
Soient d_1 et d_2 deux droites, A, B et C trois points distincts de d_1, D, E et F trois points distincts de d_2. Soient X le point d'intersection des droites (AE) et (BD), Y le point d'intersection des droites (AF) et (CD) et Z le point d'intersection des droites (CE) et (BF). Les points X, Y et Z sont alignés.

2. Cet exercice illustre le théorème de Desargues :
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en un point O. Soient I, J et K les points d'intersection des paires de côtés correspondant dans chaque triangle : ces trois points sont alignés. Réciproquement, si ces points sont alignés, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point O.

35. Les supports des côtés d'un triangle sont les droites d'équation $y = 11 - 3x$, $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + k \end{cases}$ et $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{-3}$. Trouver les coordonnées des sommets de ce triangle.

36. Soit le triangle de sommets $A(3;1)$, $B(7;3)$ et $C(4;8)$. Trouver l'équation de la médiane issue de C.

37. On donne trois sommets consécutifs $A(1;2)$, $B(6;0)$ et $C(9;2)$ d'un parallélogramme $ABCD$. Trouver les équations des côtés et des diagonales de ce parallélogramme, ainsi que les coordonnées du quatrième sommet D.

38. Un parallélogramme $ABCD$ est donné par les équations de deux côtés et d'une diagonale :

$(AB) : x - 2y - 4 = 0$ $\qquad$ $(BC) : x + 5y + 24 = 0$
$(AC) : 2x + 3y + 13 = 0$

Trouver l'équation de la seconde diagonale et les coordonnées des sommets.

39. Déterminer les équations des médianes et les coordonnées du centre de gravité G des triangles donnés par les équations suivantes.

a) $2x - 3y + 5 = 0$, $5x - 2y - 26 = 0$ et $3x + y - 9 = 0$

b) $2x - y = 0$, $2x + y - 12 = 0$ et $y = 0$

40. Un quadrilatère $ABCD$ est donné par les équations de ses côtés :

$(AB) : 7x + 2y - 20 = 0$ $\qquad$ $(BC) : y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$
$(CD) : 5x - 2y + 14 = 0$ $\qquad$ $(DA) : y = -\frac{1}{8}x - \frac{7}{2}$

a) Déterminer les coordonnées des sommets du quadrilatère.

b) Déterminer les équations des diagonales.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des diagonales.

41. Soit le triangle de sommets $A(3;1)$, $B(-2;5)$ et $C(-6;-1)$.

a) Trouver l'équation explicite de la droite (AB).

b) Trouver l'équation explicite de la droite (BC).

c) Trouver l'équation implicite de la médiane issue de A.

d) Trouver l'équation implicite de la médiane issue de B.

e) En déduire les coordonnées du centre de gravité du triangle.

f) Vérifier que les trois médianes se coupent en un même point.

42. On considère les points $A(2;4)$, $B(5;6)$ et $P(10;6)$, ainsi que les droites $b : \begin{cases} x = 1 + 6k \\ y = 4k \end{cases}$ et $c : 2x + y - 10 = 0$.

a) Trouver une représentation paramétrique de la droite a passant par A et B.

b) Trouver l'équation explicite de la droite a.

c) Trouver l'équation implicite de la droite b.

d) Trouver une représentation paramétrique de la droite c.

e) Trouver le point d'intersection des droites b et c.

f) Déterminer si le point P appartient à la droite b.

g) Chercher le point C d'abscisse 6 de la droite c.

h) Montrer que les droites a et b sont parallèles.

i) Trouver l'équation explicite de la droite parallèle à c passant par l'origine.

43. On donne les points $A(1;0)$, $B(0;\lambda)$ et $C(1-\lambda;\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

a) Représenter sur une même figure les points correspondant à $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 4$.

b) Quel est le lieu géométrique des points d'intersection des droites (AB) et (OC) ?

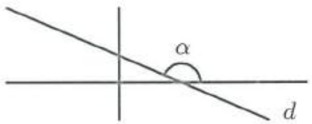
Angle de deux droites

44. a) On considère une droite de pente m positive formant un angle aigu α avec l'axe Ox. Démontrer que $m = \tan(\alpha)$.

b) Compléter le tableau suivant.

α			$45°$	$30°$		
m	0,1	$\frac{1}{2}$			300%	$\sqrt{3}$

c) Que se passe-t-il si la pente m est négative ?



45. Calculer l'angle aigu des droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 3x - 5y + 4 = 0$ et $d_2 : x + y - 2 = 0$

b) $d_1 : 5x - 8\sqrt{3}y + 7 = 0$ et $d_2 : 3x + 4\sqrt{3}y - 3 = 0$

c) $d_1 : 2x + 4y - 5 = 0$ et $d_2 : \begin{cases} x = a + k \\ y = b + \sqrt{3}k \end{cases}$

46. Déterminer l'équation implicite de la droite d_1 passant par le point

a) $P(3; -4)$ et formant avec la droite d_2 d'équation $3x + 2y - 5 = 0$ un angle de $45°$;

b) $P(-1; 2)$ et formant avec la droite d_2 d'équation $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$ un angle de $60°$.

Vecteur normal

47. Soit la droite d'équation $3x + y - 17 = 0$. Trouver les vecteurs directeurs unitaires et les vecteurs normaux unitaires à cette droite.

48. Trouver l'équation de la droite passant par un point P et perpendiculaire à une droite d dans les cas suivants.

a) $P(5; 2)$ et $d : 3x - 5y + 4 = 0$

b) $P(-4; 6)$ et $d : y = 52 - \frac{1}{2}x$

c) $P(-\frac{5}{3}; -\frac{9}{8})$ et $d : -4x + 5y = 0$

d) $P(7; -3)$ et $d : 15y + 8 = 0$

e) $P(8; -3)$ et $d : \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+8}{2}$

f) $P(\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$ et $d : \begin{cases} x = -3 + 8k \\ y = 5 + 3k \end{cases}$

49. Déterminer le nombre k pour que les droites $kx + (k-1)y = 2(k+2)$ et $3kx - (3k+1)y = (5k+4)$ soient perpendiculaires. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

50. Les équations de deux côtés d'un rectangle sont respectivement $2x - y + 11 = 0$ et $2x - y + 1 = 0$. L'équation d'une de ses diagonales est $y = 3$. Trouver les coordonnées des sommets de ce rectangle.

51. Déterminer les coordonnées des sommets B, C et D du rectangle $ABCD$ connaissant le sommet $A(2; 5)$, le centre de symétrie $S(\frac{13}{2}; \frac{17}{2})$ et la pente $m = -\frac{2}{3}$ de la droite (AB).

52. Des perpendiculaires sont abaissées du point $P(9; 5)$ sur les côtés du triangle de sommets $A(8; 8)$, $B(0; 8)$ et $C(4; 0)$. Montrer que les pieds de ces perpendiculaires sont alignés.

53. Déterminer les équations des hauteurs et des médiatrices du triangle de sommets $A(5; 3)$, $B(6; -2)$ et $C(-3; -8)$.

54. On considère les points $A(3;-4)$ et $B(2;1)$. Trouver le point P de la droite d

a) d'équation $3x - 5y + 6 = 0$ qui est équidistant des points A et B ;

b) d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + 8k \\ y = 2 - 5k \end{cases}$ qui est équidistant des points A et B.

55. Trouver la projection orthogonale du point $A(2;6)$ sur la droite d d'équation $2x - 3y + 1 = 0$.

56. On considère les points $A(-2;1)$, $B(1;\frac{5}{2})$ et $C(1;-1)$. Déterminer le point M de la droite (OC) dont la projection orthogonale sur la droite (AB) est le point $M'(0;2)$.

57. Trouver le point B symétrique du point

a) $A(7;3)$ relativement à la droite d d'équation $3x + 5y - 2 = 0$;

b) $A(-2;5)$ relativement à la droite d d'équation $3x - 2y + 12 = 0$.

58. Trouver l'équation de la droite d' symétrique de la droite d par rapport à la droite a dans les cas suivants.

a) $d : 5x - 2y - 11 = 0$ et $a : x - y - 1 = 0$

b) $d : y = 0$ et $a = (CD)$ avec $C(3;0)$ et $D(-5;2)$

59. Un rayon lumineux se déplace suivant la droite a d'équation $x-2y+5 = 0$. Après avoir atteint la droite d d'équation $3x-2y+7 = 0$, le rayon est réfléchi. Déterminer l'équation de la droite b qui porte le rayon réfléchi.

60. On donne les deux points $B(2;0)$ et $C(6;3)$. Trouver les coordonnées du sommet A de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle ABC.

61. On donne un sommet $A(6;12)$ d'un triangle ABC ainsi que deux de ses hauteurs $h_B : 2x + 7y - 65 = 0$ et $h_C : 2x - 5y + 17 = 0$. Calculer les coordonnées des deux autres sommets de ce triangle.

62. Déterminer les coordonnées des sommets B, C et D d'un carré $ABCD$ connaissant l'équation de la droite $(BD) : 7x+2y-11 = 0$ et le point $A(-4;-7)$.

63. Déterminer les coordonnées des sommets B, C et D d'un carré $ABCD$ connaissant le point $A(3;1)$ et l'équation de la droite $(CD) : 2x-y = 0$.

Distance d'un point à une droite

64. Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants.

a) $P(3;-2)$ et $d : 4x + 3y + 9 = 0$

b) $P(-2;-4)$ et $d : y = \frac{5}{12}x - 1$

c) $P(-2;3)$ et $d : y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

d) $P(3;-5)$ et $d : 2x - 7y + 8 = 0$

e) $P(2;1)$ et $d : \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0$

f) $P(4;-3)$ et $d : 2x - 5y = 0$

g) $P(5;9)$ et $d : \begin{cases} x = 5 + 5k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$

65. Calculer la distance de M à la droite (CD) dans les cas suivants.

a) $C(8;-1)$, $D(2;7)$ et $M(7;17)$

b) $C(-3;9)$, $D(2;-3)$ et $M(19;-10)$

66. On donne un sommet $A(-2;1)$ d'un rectangle. Deux de ses côtés se trouvent sur les droites d'équations $3x - 2y - 5 = 0$ et $2x + 3y + 7 = 0$. Calculer l'aire de ce rectangle.

67. Calculer les longueurs des hauteurs du triangle déterminé par les droites d'équations suivantes. Calculer ensuite l'aire de ce triangle.

a) $2x - y + 1 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$ et $x + y - 4 = 0$

b) $2x + 3y = 0$, $x + 3y + 3 = 0$ et $x + y + 1 = 0$

68. Trouver les équations des droites passant par le point $A(1;1)$ et dont la distance au point $B(-6;2)$ est égale à 5.

69. Calculer la distance entre les droites parallèles d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 3x + 4y - 13 = 0$ et $d_2 : 3x + 4y - 3 = 0$

b) $d_1 : x - 2y + 9 = 0$ et $d_2 : x - 2y - 1 = 0$

70. Montrer que d_1 est parallèle à d_2 et calculer la distance entre ces deux droites dans les cas suivants.

a) d_1 passe par $(2;1)$ et $(1;-1)$ et d_2 par $(0;1)$ et $(1;3)$.

b) d_1 passe par $(1;1)$ et $(-2;2)$ et d_2 par $(1;-2)$ et $(4;-3)$.

71. Trouver l'équation de la droite équidistante des droites parallèles d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 5x + 2y - 3 = 0$ et $d_2 : 5x + 2y - 9 = 0$

b) $d_1 : 2x - 9y + 4 = 0$ et $d_2 : 2x - 9y - 6 = 0$

72. Déterminer les équations des droites situées à une distance 3 de la droite d'équation $4x - 3y - 8 = 0$.

73. On donne un triangle par les équations de ses côtés $a : 5x - 12y + 7 = 0$, $b : x + 21y - 22 = 0$ et $c : 4x - 33y + 146 = 0$. Calculer la distance du centre de gravité de ce triangle à la droite a.

Bissectrices

74. Déterminer les équations des bissectrices des droites d'équations $x - 3y + 8 = 0$ et $3x - y - 1 = 0$.

75. Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle aigu formé par les droites d'équations $3x + 4y - 1 = 0$ et $5x + 12y - 2 = 0$.

76. Déterminer l'ensemble des points du plan équidistants des deux droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 20x + 21y - 19 = 0$ et $d_2 : 7x - 24y - 38 = 0$

b) $d_1 : 2x - 3y + 6 = 0$ et $d_2 : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$

77. Deux droites d_1 et d_2 ont pour bissectrice la droite d'équation $3x - 2y + 16 = 0$. Trouver l'équation de d_1 connaissant l'équation de $d_2 : y = \frac{1}{2}x + 4$.

78. Les côtés d'un triangle ABC sont donnés par les droites $(AB) : y = 5 - x$, $(BC) : x + 7y - 7 = 0$ et $(AC) : y = -7x - 14$.

a) Trouver l'équation de la bissectrice intérieure de l'angle en B.

b) Trouver l'équation de la bissectrice extérieure de l'angle en C.

79. On donne les droites $a : x + 7y - 23 = 0$ et $b : y = x + 9$ ainsi que les points $R(3;0)$ et $S(-9;6)$. Chercher les points P et Q équidistants à la fois des droites a et b et des points R et S.

80. On considère le triangle formé par les trois droites a, b et c. Déterminer les équations des bissectrices intérieures, le centre I et le rayon ρ du cercle inscrit dans ce triangle dans les cas suivants.

a) $a : x = 8$ $\quad b : 3x - 4y + 56 = 0$ $\quad c : 4x + 3y + 58 = 0$

b) $a : y = \frac{4}{3}x + 8$ $\quad b : 12x + 5y - 33 = 0$ $\quad c : 3x + 4y + 11 = 0$

c) $a : y = 4 - x$ $\quad b : y = -7x - 2$ $\quad c : x - 7y = 12$

d) $a : y = \frac{4}{3}x - \frac{65}{3}$ $\quad b : 7x - 24y + 55 = 0$ $\quad c : 3x + 4y - 5 = 0$

Divers

81. Déterminer les équations des côtés d'un triangle ABC connaissant le sommet $B(2; -1)$ ainsi que les équations de la hauteur h_A d'équation $3x - 4y + 27 = 0$ issue du sommet A et de la bissectrice intérieure $b_C : x + 2y - 5 = 0$ issue du sommet C.

82. Déterminer les équations des côtés d'un triangle connaissant le sommet $A(1; 3)$ et deux médianes d'équations $y - 1 = 0$ et $x - 2y + 1 = 0$.

83. Trouver une droite passant par le point $A(3; 1)$ et qui forme un triangle isocèle avec les deux droites d'équations $2x - y + 5 = 0$ et $3x + 6y - 16 = 0$.

84. On donne les trois points $A(0; 20)$, $B(-15; 0)$ et $C(48; 0)$.

a) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

b) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

c) Déterminer les coordonnées du centre K du cercle circonscrit au triangle ABC, ainsi que le rayon r de ce cercle.

d) Déterminer les coordonnées du centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC, ainsi que le rayon ρ de ce cercle.

e) Montrer que G, H et K sont alignés.

f) Calculer le rapport $\dfrac{\|\overrightarrow{GH}\|}{\|\overrightarrow{GK}\|}$.

g) Donner l'équation cartésienne de la droite passant par G, H et K, appelée *droite d'Euler* du triangle ABC.

85. Représenter l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'inéquation donnée dans les cas suivants.

a) $x + 3y - 12 > 0$ $\qquad$ b) $2x - 3y \leq 0$

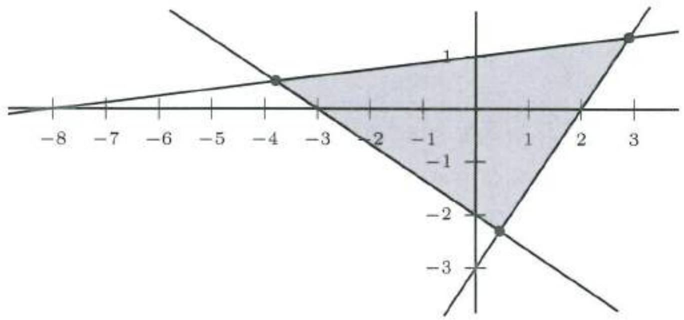
c) $y \leq \dfrac{3}{5}x + 3$ $\qquad$ d) $y + 2 < 0$

86. Représenter l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient le système d'inéquations donné dans les cas suivants.

a) $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ y \geq 4 \\ 2x + y - 8 \leq 0 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 3x - 2y - 6 < 0 \\ 3x - 5y + 12 \geq 0 \\ y \geq -2x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y < 6 \\ 3x - 5y + 12 \geq 0 \\ 2x + y \leq 0 \end{cases}$ $\qquad$ d) $\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ x - 7 < 0 \\ 2x + y > 4 \end{cases}$

87. Trouver un système d'inéquations qui détermine la portion du plan représentée ci-dessous (y compris les frontières).



Réponses aux exercices du chapitre 3

1. $\alpha = -18$ et $\beta = \frac{19}{7}$

3. oui non non oui oui non

4. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. a) $(\frac{9}{2}; 0)$ et $(0; 9)$ b) $(7; -5)$ c) $(\frac{11}{2}; -2)$ d) $(3; 3)$

6. oui oui non oui oui non

8. a) $(10; 0)$ b) $(0; 4)$ c) $(3; \frac{14}{5})$ d) $(-\frac{55}{2}; 15)$ e) $(\frac{20}{7}; \frac{20}{7})$ f) $(5; 2)$

9. a) $\begin{cases} x = -3 + 5k \\ y = 1 + 2k \end{cases}$ et $(2; 3)$, $(-3; 1)$, $(7; 5)$, $(-8; -1)$, $(-18; -5)$, $(\frac{9}{2}; 4)$

c) $y = \frac{2}{5}x + \frac{11}{5}$ et $2x - 5y = -11$ d) non e) $\alpha = \frac{41}{5}$ et $\beta = -23$

10. $\begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = 7 - k \end{cases}$

11. a) $x + 4y - 23 = 0$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}$ b) $3x + 7y + 23 = 0$, $y = -\frac{3}{7}x - \frac{23}{3}$

c) $x + 4y - 13 = 0$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ d) $y + 2 = 0$, $y = -2$

e) $x - 8 = 0$, pas d'équation explicite

12. a) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$ b) C : non, D : oui c) $x = \frac{11}{10}$

13. a) $y = 3$ b) $x = 4$

14. a) $m = \frac{5}{6}$ et $\vec{d} = \binom{6}{5}$ b) $m = -1$ et $\vec{d} = \binom{1}{-1}$

c) $m = \frac{4}{3}$ et $\vec{d} = \binom{3}{4}$ d) $m = 1$ et $\vec{d} = \binom{1}{1}$

e) $m = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $\vec{d} = \binom{4}{\sqrt{5}}$ f) $m = 0$ et $\vec{d} = \binom{1}{0}$

g) m n'existe pas et $\vec{d} = \binom{0}{1}$ h) $m = \frac{4}{5}$ et $\vec{d} = \binom{5}{4}$

15. a) $x + 3y - 7 = 0$ b) $5x + 4y - 47 = 0$

16. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{2} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

18. a) $y = 3x - 11$ c) $D(\frac{11}{3}; 0)$ et $E(0; -11)$

19. a) oui b) non c) non

20. a) $y = \frac{2}{3}x - \frac{19}{3}$ b) $y = \frac{1}{2}x - 12$

22. a) parallèles b) sécantes c) confondues d) sécantes

23. a) confondues b) parallèles c) sécantes
d) confondues e) parallèles f) sécantes

24. a) $(3; 2)$ b) $(5; -6)$ c) $(13; -17)$
d) néant e) $(-\frac{146}{5}; -\frac{8}{5})$ f) droites confondues
g) $(-\frac{26}{53}; \frac{36}{53})$ h) $(0; 2)$

25. a) $(4; 0)$ b) $(-1; 3)$ c) néant d) $(1; 2)$

26. a) $(-5; 7)$ b) $(2; 3)$ c) droites confondues

27. a) $(0; \frac{3}{4})$ b) $(-\frac{2}{3}; \frac{7}{6})$ c) $(-\frac{1}{5}; \frac{3}{10})$
d) néant e) $(-10; -1)$ f) néant

28. $I(9; 7)$

29. a) $K(0; 2)$, $L(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ et $M(1; 0)$

30. a) $I(\frac{1}{3}; \frac{4}{3})$ b) $\lambda = 3$

31. a) $P(\frac{7}{2}; \frac{1}{2})$ et $N(\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$ b) $M(2; 2)$ c) oui

32. a) $X(\frac{3}{4}; \frac{1}{2})$, $Y(\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$ et $Z(\frac{3}{4}; \frac{3}{2})$

33. a) $I(9; -3)$, $J(-3; 12)$ et $K(-\frac{3}{5}; 9)$

34. $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$ et $C(2; 4)$

35. $A(4;-1)$, $B(3;2)$ et $C(7;-4)$

36. $y=-6x+32$

37. $(AB): 2x+5y-12=0$ $\quad$ $(BC): 2x-3y-12=0$
$(CD): 2x+5y-28=0$ $\quad$ $(DA): 2x-3y+4=0$
$D(4;4)$
$(AC): y-2=0$ $\quad$ $(BD): 2x+y-12=0$

38. $(BD): y+4=0$ $\quad$ $A(-2;-3)$, $B(-4;-4)$, $C(1;-5)$ et $D(3;-4)$

39. a) $8x-y-35=0$, $x+4y-14=0$, $7x-5y-21=0$, $G(\frac{14}{3};\frac{7}{3})$
b) $2x+3y-12=0$, $2x-3y=0$, $x-3=0$, $G(3;2)$

40. a) $A(4;-4)$, $B(2;3)$, $C(-2;2)$ et $D(-4;-3)$
b) $(AC): x+y=0$, $(BD): x-y+1=0$ $\quad$ c) $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

41. a) $y=-\frac{4}{5}x+\frac{17}{5}$ $\quad$ b) $y=\frac{3}{2}x+8$ $\quad$ c) $y=-\frac{1}{7}x+\frac{10}{7}$
d) $y=-10x-15$ $\quad$ e) $G(-\frac{5}{3};\frac{5}{3})$

42. a) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ b) $y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ $\quad$ c) $2x-3y-2=0$
d) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$
e) $G(4;2)$ $\quad$ f) oui $\quad$ g) $C(6;-2)$ $\quad$ i) $y=-2x$

43. droite d'équation $2x+y-1=0$ sans les points $(1;-1)$ et $(\frac{1}{2};0)$

44.

α	5,71°	26,56°	45°	60°	71,56°	60°
p	0,1	$\frac{1}{2}$	1	173%	300%	$\sqrt{3}$

45. a) 75,96° $\quad$ b) 43,25° $\quad$ c) 86,57°

46. a) $5x-y-19=0$ ou $x+5y+17=0$
b) $\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}-2=0$ ou $y=2$

47. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

48. a) $5x+3y-31=0$ $\quad$ b) $2x-y+14=0$ $\quad$ c) $5x+4y+\frac{77}{6}=0$
d) $x-7=0$ $\quad$ e) $5x+2y-34=0$ $\quad$ f) $8x-3y-23\sqrt{2}=0$

49. $k=-\frac{1}{2}$ et $I(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$

50. $(-3;5)$, $(-4;3)$, $(0;1)$ et $(1;3)$

51. $B(5;3)$, $C(11;12)$ et $D(8;14)$

53. $h_A: 3x+2y-21=0$ et $m_A: 6x+4y+11=0$
$h_B: 8x+11y-26=0$ et $m_B: 16x+22y+39=0$
$h_C: x-5y-37=0$ et $m_C: x-5y-3=0$

54. a) $P(-8;-\frac{18}{5})$ $\quad$ b) $P(\frac{235}{33};-\frac{19}{33})$

55. $(4;3)$

56. $M(2;-2)$

57. a) $B(1;-7)$ $\quad$ b) $P(-\frac{2}{13};\frac{49}{13})$

58. a) $2x-5y+4=0$ $\quad$ b) $8x+15y-24=0$

59. $29x-2y+33=0$

60. $A_1(\frac{5}{2};\frac{7}{2})$ et $A_2(\frac{11}{2};-\frac{1}{2})$

61. $B(8;7)$ et $C(4;5)$

62. $B(1;2)$, $C(10;-3)$ et $D(5;-12)$

63. $B_1(4;3)$, $C_1(2;4)$ et $D_1(1;2)$ $\quad$ ou $\quad$ $B_2(2;-1)$, $C_2(0;0)$ et $D_2(1;2)$

64. a) 3 $\quad$ b) 2 $\quad$ c) 4 $\quad$ d) $\frac{49}{\sqrt{53}}$ $\quad$ e) $\frac{3}{5}$ $\quad$ f) $\frac{23}{\sqrt{29}}$ $\quad$ g) $\frac{25}{\sqrt{29}}$

65. a) 10 $\quad$ b) 13

66. 6

67. a) $\frac{9}{\sqrt{5}}$, $\frac{9}{\sqrt{5}}$ et $\frac{9}{\sqrt{2}}$; aire $=\frac{27}{2}$ $\quad$ b) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ et $\sqrt{2}$; aire $=3$

68. $4x+3y-7=0$ et $3x-4y+1=0$

69. a) 2 $\quad$ b) $2\sqrt{5}$

70. a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ b) $\frac{9\sqrt{10}}{10}$

71. a) $5x+2y-6=0$ $\quad$ b) $2x-9y-1=0$

72. $4x-3y-23=0$ $\quad$ $4x-3y+7=0$

73. 3

74. $2x+2y-9=0$ $\quad$ et $\quad$ $4x-4y+7=0$

75. $64x+112y-23=0$

76. a) $9x+37y+19=0$ et $37x-9y-83=0$ b) $8x-12y+7=0$

77. $29x-2y+120=0$

78. a) $3x+6y-16=0$ b) $8x+8y+7=0$

79. $P(-2;5)$, $Q(-4;1)$

80. a) $b_A : x+7y+2=0$, $b_B : 3x+y+6=0$, $b_C : 2x-y+4=0$, $I(-2;0)$ et $\rho=10$
b) $b_A : 9x+7y-2=0$, $b_B : x-7y+13=0$, $b_C : 16x-2y+21=0$, $I(-\frac{11}{10};\frac{17}{10})$ et $\rho=\frac{29}{10}$
c) $b_A : 4x-3y-5=0$, $b_B : x+3y-2=0$, $b_C : 2x+y-3=0$, $I(\frac{7}{5};\frac{1}{5})$ et $\rho=\frac{6\sqrt{2}}{5}$
d) $b_A : 2x+11y-20=0$, $b_B : 7x+y-70=0$, $b_C : 9x-13y-90=0$, $I(10;0)$ et $\rho=5$

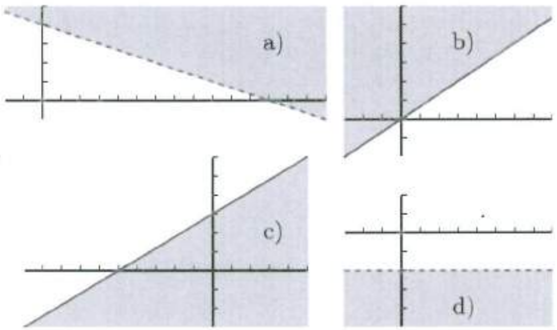
81. $4x+7y-1=0$, $y-3=0$ et $4x+3y-5=0$

82. $x+2y-7=0$, $x-4y-1=0$ et $x-y+2=0$

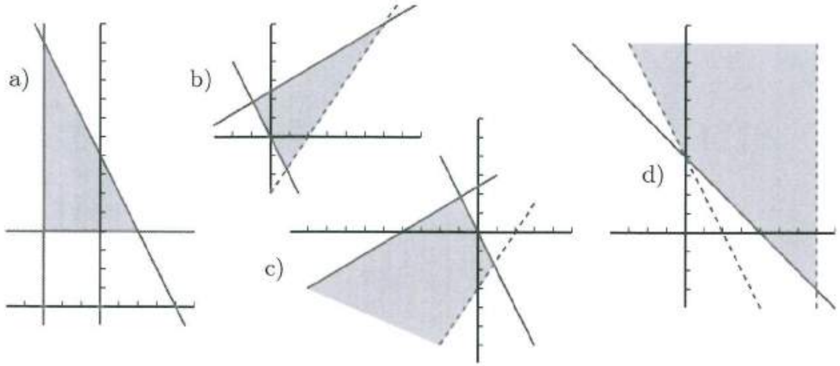
83. $x-3y=0$, $3x+y-10=0$

84. a) $G(11;\frac{20}{3})$ b) $H(0;36)$ c) $K(\frac{33}{2};-8)$, $r=\frac{65}{2}$
d) $I(3;9)$, $\rho=9$ f) 2 g) $8x+3y-108=0$

85.



86.



87. $\begin{cases} x-8y+8\geq 0 \\ 2x+3y+6\geq 0 \\ 3x-2y-6\leq 0 \end{cases}$