§ 3. DÉRIVÉE

1. Présentation

1.1 Vitesse instantanée

Un corps en chute libre, lâché sans vitesse initiale, parcourt en t secondes la distance $s(t)$ donnée en mètres par $s(t) = \frac{g}{2}t^2$ (où $g \cong 9,81\ \mathrm{m/s^2}$).

La **vitesse moyenne** entre les temps t_0 et t_0+h $(h \neq 0)$ est donnée par le rapport de la distance parcourue au temps mis à la parcourir, à savoir

$$\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = \frac{g}{2}\cdot\frac{2t_0h+h^2}{h} = \frac{g}{2}\cdot(2t_0+h)$$

On définit la **vitesse instantanée** $v(t_0)$ au temps t_0 par la limite suivante

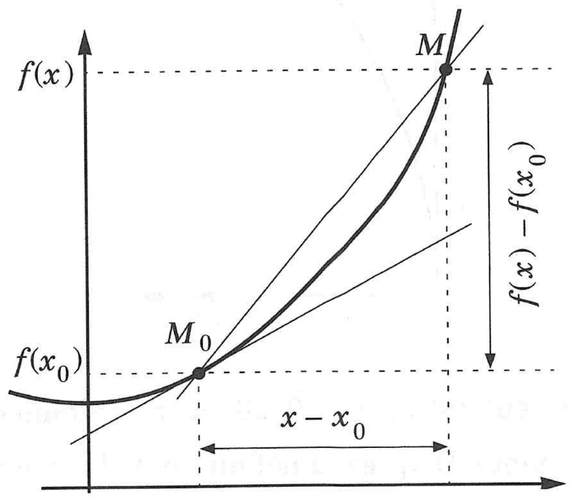
$$v(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g}{2}\cdot(2t_0+h) = gt_0$$

1.2 Tangente

On a représenté ci-contre le graphe d'une fonction au voisinage d'un point M_0. On considère la droite (appelée sécante) passant par les points $M_0(x_0\,;f(x_0))$ et $M(x\,;f(x))$.

La pente de cette sécante est égale à

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



En faisant tendre x vers x_0, le point M s'approche de M_0 et la sécante (M_0M) pivote et tend vers une droite limite appelée la **tangente** en M_0.

Lorsque la tangente n'est pas verticale, on définit la pente m de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point M_0 par la limite

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

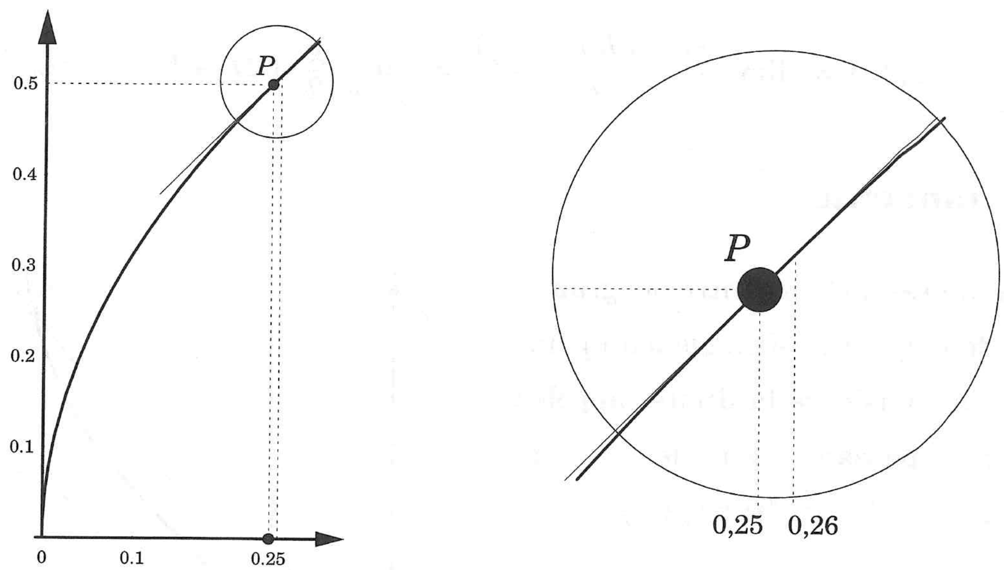
Cette limite se notera $f'(x_0)$

L'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point $(x_0\,; f(x_0))$ est donnée par

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

1.3 Approximation

Dans le but de donner une estimation de $\sqrt{0,26}$, on a esquissé le graphe de la fonction f: $x \mapsto \sqrt{x}$ au voisinage du point $P\,(\,0{,}25\,;\,0{,}5\,)$, ainsi que la tangente au graphe en P .



On peut estimer $\sqrt{0,26}$ par l'ordonnée du point d'abscisse $0,26$ situé sur la tangente. D'après la définition de la tangente, on a
$f(0,26) \cong f(0,25) + 0,01 \cdot f'(0,25)$.

On peut montrer que $f'(0,25) = 1$ (page 72)

On a alors $\sqrt{0,26} \cong \sqrt{0,25} + 0,01 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{0,25}} = \dfrac{1}{2} + 0,01 \cdot 1 = 0,51$

Une valeur plus précise est $0,5099019$

2. Définitions

2.1 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.

Définitions

La fonction f est **dérivable** en x_0 si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Ce nombre réel, noté $f'(x_0)$, est appelé **nombre dérivé** de f en x_0

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

En posant $h = x - x_0 = \Delta x$ et $f(x) - f(x_0) = \Delta f$, on obtient la définition équivalente suivante

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Le quotient $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ s'appelle le **taux de variation** de f entre x_0 et x_0+h.

Sa limite $f'(x_0)$ lorsque h tend vers 0 s'appelle le **taux instantané de variation** de f en x_0.

Nombre dérivé à gauche (à droite)

La notion de limite à gauche (respectivement à droite) permet de définir le nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction en un point.

On a alors l'équivalence suivante

$$\boxed{f'(x_0) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Exemples

a) Soit $f(x) = ax + b$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x - x_0} = a$$

b) Soit $f(x) = \sqrt{x}$.

$$f'(0,25) = \lim_{x \to 0,25} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0,25}}{x-0,25} = \lim_{x \to 0,25} \frac{x-0,25}{(x-0,25)(\sqrt{x}+\sqrt{0,25})} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{0,25}} = 1$$

$$f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

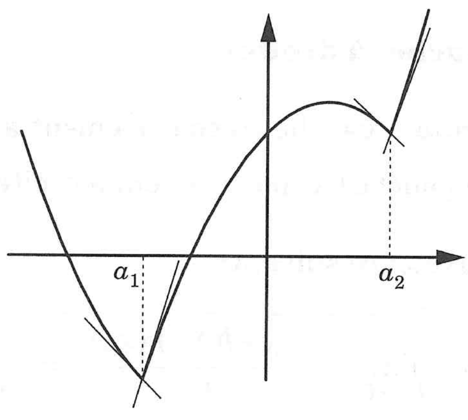
donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

c) Soit $f(x) = |x|$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas, la fonction f n'est pas dérivable en 0 . En revanche, elle est dérivable à droite et à gauche en 0 ; la dérivée à gauche en ce point vaut -1 et la dérivée à droite vaut 1 .

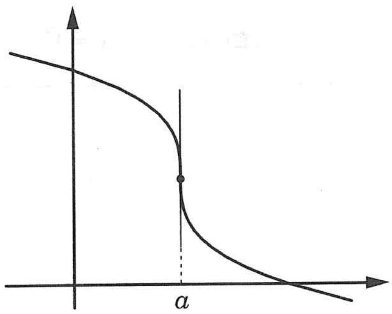
Point anguleux, point à tangente verticale, point de rebroussement

> Le graphe d'une fonction f admet un **point anguleux** $(a\,;f(a))$ si f est continue en a et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f'(x)$

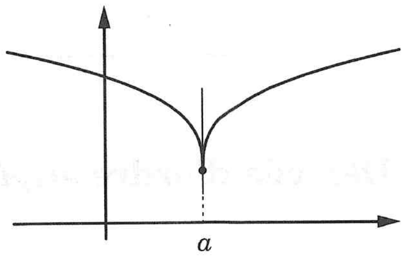


Le graphe d'une fonction f admet une **tangente verticale** au point $(a\,;f(a))$ si f est continue en a et si $\lim\limits_{x \to a} |f'(x)| = +\infty$.

Ce point est un **point de rebroussement** si de plus $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ n'existe pas.



tangente verticale
pas de point de rebroussement



tangente verticale
point de rebroussement

2.2 Fonction dérivée

Définition

Une fonction f est **dérivable** sur une partie A de $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout point de A. On définit la **fonction dérivée** de f par

$$\begin{aligned} f' :\ & A \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Dérivées de fonctions élémentaires

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
$x^n \qquad n \in \mathbb{N}^*$	$n \cdot x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$

$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\lvert x \rvert$	$\operatorname{sgn}(x)$	$x \neq 0$

2.3 Dérivée d'ordre supérieur

Définition

On appelle **dérivée seconde** de f la fonction dérivée de f' ; on la note f'' . On a donc $f''(x) = (f')'(x)$

Plus généralement, on appelle **dérivée d'ordre *n*** de f la fonction $f^{(n)}$ définie par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$

3. Propriétés des fonctions dérivables

Toute fonction dérivable en a est continue en a .

La réciproque est fausse. La fonction valeur absolue est continue en 0, mais non dérivable en ce point.

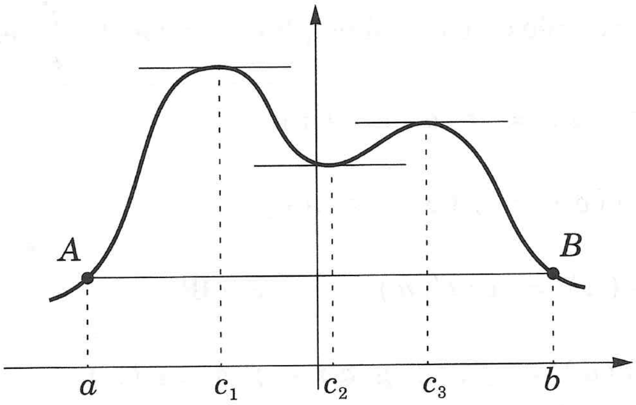
Si la fonction f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors $f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse. La fonction $f(x) = x^3$ n'a pas d'extremum en 0 bien que $f'(0) = 0$

Théorème de Rolle

> Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$, dérivable sur l'intervalle $]\,a\,;b\,[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un nombre c dans $]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

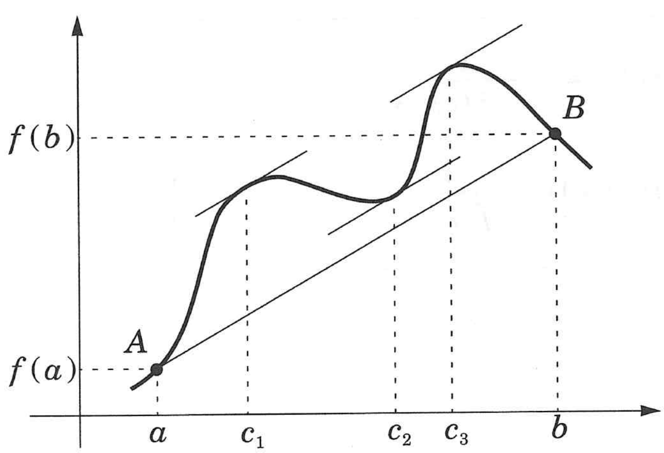
En d'autres termes, entre les points A et B de même ordonnée, il existe au moins un point du graphe à tangente horizontale.



Théorème des accroissements finis

> Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur l'intervalle $]\,a\,;b\,[$, alors il existe au moins un nombre c dans $]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En d'autres termes, entre les points A et B, il existe au moins un point du graphe où la tangente est parallèle à la sécante AB.



Corollaire

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

4. Règles de dérivation

Si f et g sont deux fonctions dérivables en a et si $c \in \mathbb{R}$, alors $f+g$, $f-g$, $c \cdot f$ et $f \cdot g$ sont dérivables en a. Si de plus $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Si f est une fonction dérivable en a et si g est une fonction dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est une fonction dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Soit une fonction f bijective et continue sur un intervalle contenant a. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors ${}^{r}f$ est dérivable en $b = f(a)$ et

$$({}^{r}f)'(b) = \frac{1}{f'({}^{r}f(b))}$$

$$({}^{r}f)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

4.1 Dérivées de fonctions particulières

Pour autant que les expressions ci-dessous aient un sens, on a

$f(x)$	$f'(x)$
$x^q \qquad q \in \mathbb{Q}$	$q\,x^{q-1}$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$\dfrac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

5. Primitives d'une fonction

5.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (ou plus généralement sur une partie de $\mathbb{R}$). Une fonction dérivable F est une **primitive de** $\boldsymbol{f}$ **sur** $\boldsymbol{I}$ si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemples

$f(x) = x$ $\qquad$ $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \pi$

$g(x) = \sin(x)$ $\qquad$ $G(x) = -\cos(x) + 3$

$h(x) = 0$ $\qquad$ $H(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent par une constante.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On désigne usuellement par $\int f(x)\,dx$ l'ensemble des primitives de f sur I. On l'appelle **intégrale indéfinie** de f.

Intégrer une fonction f sur un intervalle I, c'est chercher toutes les primitives de f sur I.

Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors toute primitive de f est de la forme $F(x)+c$, avec $c \in \mathbb{R}$. On convient d'écrire

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

5.2 Primitives des fonctions élémentaires

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
1	$x+c \qquad c \in \mathbb{R}$
$x^q \qquad q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{q+1}}{q+1}+c \qquad c \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)+c \qquad c \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c \qquad c \in \mathbb{R}$

5.3 Propriétés élémentaires

Soit f et g deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle I

$$\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

$$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,dx = G(f(x))+c\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

où G est une primitive de g

En particulier si $q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, $\int f^q(x)\cdot f'(x)\,dx = \dfrac{1}{q+1} f^{q+1}(x)+c\ ,\ c \in \mathbb{R}$.

Exemples

a) $\int (3x^2-2x+1)\,dx = \int 3x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 1\,dx = x^3 - x^2 + x + c$

b) $\int (1-x)^5\,dx = -\int (1-x)^5\,(-1)\,dx = -\frac{1}{6}(1-x)^6 + c$

c) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{1/2}\cdot(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(x^2-1)^{3/2}\right) + c =$
$\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + c$

5.4 Mouvement uniformément accéléré

Une pierre est lancée verticalement vers le haut à partir d'un point situé à x_0 mètres au dessus du sol. Sa vitesse initiale est de v_0 m/s . Trouver la position de la pierre après t secondes.

Solution

On définit un axe vertical orienté vers le haut. Relativement à cet axe, l'accélération est $a(t) = -g$. Comme l'accélération est la dérivée de la vitesse $(a(t) = v'(t))$, on a $v(t) = \int a(t)\,dt = -gt + c_1$. Au temps $t = 0$, on a $v(0) = v_0$, donc $v(t) = -gt + v_0$.

Comme la vitesse est la dérivée de la position $(v(t) = x'(t))$, on obtient

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int (-gt + v_0)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + c_2 .$$

Puisque $x(0) = x_0$, $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$.

Exercices

Présentation

3.1 Quelle est la vitesse d'impact au sol d'un corps lâché sans vitesse initiale d'une hauteur de 25 m ?

3.2 Sur la courbe d'équation $y = x^3$, on considère les points P , Q et H d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2} + h$, $h \neq 0$.

1) Calculer la pente de la sécante (PQ) .

2) Calculer, en fonction de h , la pente de la sécante (PH), H étant un point voisin de P .

3) Calculer la pente de la tangente à la courbe au point P .

4) Refaire l'exercice avec la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.

3.3 Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ au point $(2\,;4)$?

3.4 La période T d'un pendule de longueur l est donnée par $T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ où $g \cong 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. On donne $l = 1\ \mathrm{m}$. Calculer $T'(1)$ et en déduire une valeur approchée de $T(1{,}01)$.

3.5 Deux mobiles se déplacent sur l'axe Ox. Les horaires (qui donnent la position en fonction du temps) sont donnés par $x_1(t) = (t-1)^2$ pour le premier et par $x_2(t) = 1 + 4t - t^2$ pour le second. Déterminer, graphiquement et par le calcul, les dates t où les mobiles se rencontrent, et celle où ils ont la même vitesse.

3.6 Un mobile se déplace le long de l'axe Ox . Sa position $x(t)$ en fonction du temps est donnée par

1) $x(t) = t^2 - 4t + 3$ 2) $x(t) = 5 + 7t - t^2$ 3) $x(t) = t^3 - 9t + 2$

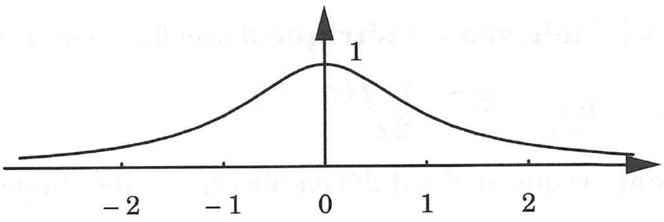
Déterminer dans chaque cas les intervalles de temps durant lesquels le mobile se déplace « vers la droite ».

3.7 La distance parcourue sur la piste par un avion qui s'apprête à décoller est donnée par $d(t) = t^2$, où t est mesuré en secondes à partir du moment où les freins sont desserrés et $d(t)$ est mesuré en mètres à partir du point de départ. En supposant que la vitesse au décollage de l'avion est de 200 km/h , quelle distance va-t-il parcourir avant de décoller ?

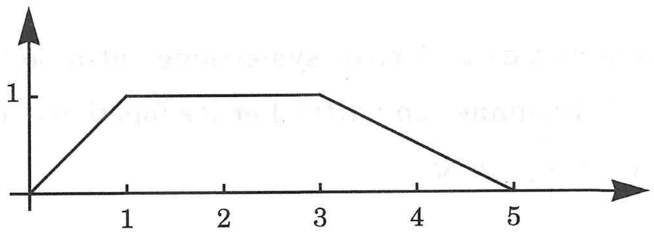
Définitions

3.8 On donne le graphe d'une fonction. Esquisser le graphe de sa dérivée

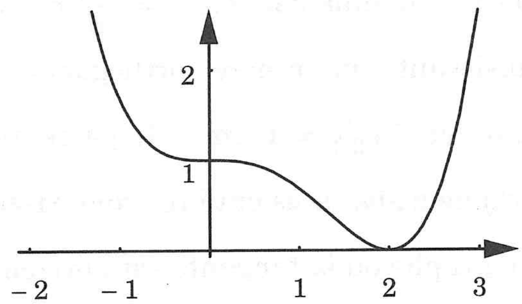
1)



2)



3)



3.9 A partir de la définition, calculer le nombre dérivé de la fonction f au point a

1) $f(x) = x+3$ $\quad a = 2$ $\qquad$ 2) $f(x) = x+3$ $\quad a \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2+3x+1$ $\quad a = -3$ $\qquad$ 4) $f(x) = x^2+3x+1$ $\quad a \in \mathbb{R}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ $\quad a = 1$ $\qquad$ 6) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad a = 4$

7) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ $\quad a \neq -1$ $\qquad$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad a > 0$

3.10 Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en a ?

1) $f(x) = |x-2|$ $\qquad a = 2$

2) $f(x) = x\sqrt{|x|}$ $\qquad a = 0$

3) $f(x) = \sqrt{1+\sin(2x)}$ $\qquad a = -\dfrac{\pi}{4}$

4) $f(x) = |x^2-1|-2$ $\qquad a = -1$

3.11 On appelle **dérivée symétrique** d'une fonction f en a le nombre

$$f^s(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}.$$

1) Montrer que si f est dérivable en a, alors la dérivée symétrique existe et $f^s(a) = f'(a)$.

2) L'existence de la dérivée symétrique entraîne-t-elle celle de la dérivée en a ? Examiner en particulier les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ en 0.

3.12 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{6}(x^3-9x)$. Dessiner le graphe de f en choisissant un repère orthogonal $(O\,;\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2})$ tel que $\|\overrightarrow{e_1}\| = 2$ cm et $\|\overrightarrow{e_2}\| = 1$ cm. Représenter, avec leurs tangentes, les points du graphe d'abscisses entières comprises entre -5 et 5, ainsi que les points du graphe où la tangente est horizontale.

3.13 Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant les définitions

1) $f(x) = x^3$ $\qquad$ 2) $f(x) = 4x^2+5x+6$

3) $f(x) = x^3+3x$ $\qquad$ 4) $f(x) = x^4$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

7) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ 8) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3.14 Démontrer que, si elle existe, la dérivée

1) d'une fonction paire est une fonction impaire;

2) d'une fonction impaire est une fonction paire;

3) d'une fonction périodique est une fonction périodique.

3.15 En quel point de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 8x$ la tangente est-elle parallèle à l'axe Ox ?

3.16 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

3.17 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3.18 Sachant que le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est un demi-cercle, calculer la dérivée de f en $a \in]-1\,;1[$ et étudier la dérivabilité de f en -1 et 1.

3.19 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$ telle que $f^2(x) \leq x^4$ pour tout x appartenant à I. Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

3.20 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Sous quelle(s) condition(s) la fonction $|f|$ est-elle dérivable ?

3.21 Soit trois fonctions f, g et h telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x réel.

1) Démontrer que, si $f(a) = g(a) = h(a)$ et si $f'(a) = h'(a)$, alors g est dérivable en a et $f'(a) = g'(a) = h'(a)$.

2) Montrer que si la condition $f(a) = g(a) = h(a)$ n'est pas remplie, alors on ne peut pas conclure.

3.22 Le fait que $f+g$ est dérivable en a implique-t-il que f et g sont dérivables en a ?

Propriétés des fonctions dérivables

3.23 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3-27}$ sur l'intervalle $[0;3]$. Montrer qu'il existe un point du graphe de f où la pente de la tangente est égale à 1.

3.24 On donne la fonction g par $g(x) = |x|-1$. Alors $g(-1) = g(1) = 0$, mais g' ne s'annule pas dans $[-1;1]$. Est-ce un contre-exemple au théorème de Rolle ?

3.25 Supposons que lors d'une course, deux chevaux passent la ligne d'arrivée au même instant et avec la même vitesse. Peut-on dire qu'à un même moment de la course ils ont eu la même accélération ?

Règles de dérivation

3.26 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x) = 2x^2-4x+3$

2) $f(x) = x^3+5x^2-2x+4$

3) $f(x) = 3x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{3}{4}x^2-x+17$

4) $f(x) = \dfrac{4-3x}{2x-1}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

6) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+4}{5x^2-8x-10}$

7) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^3+2x^2+x-10}$

8) $f(x) = \dfrac{5}{2x^2-1}$

9) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

10) $f(x) = \tan(x)\cdot\cos(x)$

11) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

12) $f(x) = \dfrac{\sin(x)-1}{2\sin(x)+1}$

13) $f(x) = \dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{\cos(x)+x\sin(x)}$

14) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)\cdot\sin(x)}$

15) $f(x) = (2\cos(x) - 3) \cdot (4\sin(x) - 1)$

3.27 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x) = (3 - x)^5$

2) $f(x) = (2x^2 - 3)^2$

3) $f(x) = (x^2 + a^2)^5$

4) $f(x) = (2x^2 + 3x + 4)^3$

5) $f(x) = \sin^2(x)$

6) $f(x) = \sin(2x)$

7) $f(x) = 2\sin(x) + \cos(3x)$

8) $f(x) = \tan(ax + b)$

9) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(2x)$

10) $f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(3x)$

11) $f(x) = \sin^3(4x)$

12) $f(x) = \tan^2(5x)$

13) $f(x) = \dfrac{(3x - 2)^2 - 1}{3x - 2}$

14) $f(x) = \dfrac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2}$

15) $f(x) = (x + 5)^2 (x - 1)(2x + 3)^3$

16) $f(x) = (2x + 1)^2 \cdot (1 - 3x)^3$

17) $f(x) = (3x^2 + 4)^5 \cdot (2x^2 - 3x)^6$

18) $f(x) = \dfrac{\cos^2(2x)}{\tan(x)}$

19) $f(x) = \sin\left(\left(\dfrac{2x - 1}{x}\right)^2\right)$

20) $f(x) = \cos(x) \cdot (\sin^2(x) + 2)$

3.28 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

3) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

7) $f(x) = \sqrt{8x^2 - 2x + 3}$

8) $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$

9) $f(x) = \sqrt{(4x^2 - 2x)^3}$

10) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

11) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x^2)^2}$ 12) $f(x) = (1+\sqrt[3]{x})^3$

13) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$ 14) $f(x) = (a+x)\sqrt{a-x}$

15) $f(x) = \sqrt{4\sin(x)\cdot\cos(x)}$ 16) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

17) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 18) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

3.29 En notant f', g' et h' les dérivées des fonctions f, g et h, calculer la dérivée des fonctions k suivantes

1) $k = f\cdot g\cdot h$ 2) $k = \sqrt{g\cdot h}$

3) $k = \dfrac{f\cdot g}{h^3}$ 4) $k = \dfrac{f}{(g\cdot h)^2}$

5) $k = \dfrac{f\cdot\sqrt{g}}{h}$ 6) $k = f\circ g\circ h$

3.30 Pour les fonctions f suivantes, donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a

1) $f(x) = 5x^2-6x+2$ $a = 1$

2) $f(x) = \sqrt{x}$ $a = 4$

3) $f(x) = \dfrac{3x-2}{5x+1}$ $a = 0$

3.31 Pour quels réels a et b la courbe d'équation $y = x^3+ax^2+bx$ admet-elle au point $(1\,;1)$ une tangente horizontale ?

3.32 Pour quels réels a et b la courbe d'équation $y = x^3+ax^2+bx$ admet-elle pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y = x+4$?

3.33 Quels sont les points de la courbe d'équation $y = x^3+x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ?

3.34 Quels sont les points de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ en lesquels la tangente passe par le point $(-3\,;1)$?

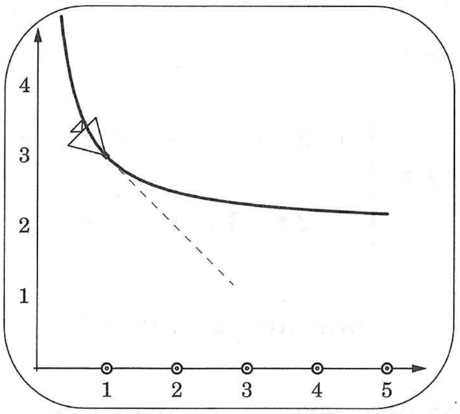
3.35 Pour les fonctions f suivantes, déterminer les équations des tangentes au graphe de f issues du point P

1) $f(x) = x^2$ $\qquad P(1\,;0)$

2) $f(x) = x^3$ $\qquad P(0\,;-2)$

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$ $\qquad P(0\,;0)$

3.36 Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure, on peut voir des avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire d'équation $y = \frac{2x+1}{x}$ et qui tirent des balles selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3, 4 et 5



1) Une cible sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en $P(1\,;3)$? en $Q(\frac{3}{2}\,;\frac{8}{3})$?

2) Déterminer les positions de l'avion permettant d'atteindre chacune des cibles.

3.37 Pour quelles valeurs de a la courbe d'équation $y = x^3 + a\,x^2 + x$ n'admet-elle aucun point à tangente horizontale ?

3.38 On considère la fonction $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$. Déterminer les conditions à imposer aux coefficients a, b, c et d pour que le graphe de f n'ait pas de tangente horizontale .

3.39 On donne la fonction $f: x \mapsto \dfrac{ax-2}{8-bx}$. Calculer a et b de telle manière que le graphe de f passe par le point $\left(1\,;\dfrac{1}{3}\right)$ et que la tangente au graphe de f au point $(2\,;f(2))$ ait une pente égale à $\dfrac{7}{2}$.

3.40 Dans chacun des cas suivants, déterminer les abscisses en lesquelles les graphes des fonctions f et g admettent des tangentes parallèles

1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ $\qquad g(x) = x - 4$

2) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ $\qquad g(x) = -\dfrac{1}{4}x^2$

3) $f(x) = \cos(x)$ $\qquad g(x) = \sin(x)$

3.41 Soit une fonction f dérivable sur $[0\,;1]$ telle que $f(0) = f(1)$ et la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que g est continue sur $[0\,;1]$.

2) Quelle condition doit vérifier f' pour que la fonction g soit dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$?

3) Soit $f(x) = \sin(\pi x)$. Tracer le graphe de g.

3.42 Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(n)}(x)$ pour les fonctions suivantes

1) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

2) $f(x) = -\dfrac{1}{1+x}$ $\qquad$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

4) $f(x) = \sin(x)$ $\qquad$ 5) $f(x) = \sqrt{x}$

3.43 Calculer la dérivée et la dérivée seconde de chacune des fonctions suivantes

1) $x(t) = \frac{1}{2} a\, t^2 + v_0 t + x_0$

2) $y(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$

3) $y(t) = \sin(\omega t + \varphi)$

4) $C(q) = \frac{1}{3} q^3 - 2q^2 + 8q$

5) $q(p) = 250 - 10p - 2p^2$

6) $S(m) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + m\beta_i)^2$

3.44 Déterminer la fonction f sachant que

1) $f(x) = a\,x^2 + bx + c$, $f(0) = 3$, $f(3) = 1$, $f'(4) = 1$

2) $f(x) = x^3 + a\,x^2 + bx + 4$, $f'(-1) = 3$, $f''(-1) = 6$

3) $f(x) = -x^3 + a\,x^2 + bx + c$, $f(2) = -1$, $f'(2) = f''(2) = 0$

4) $f(x) = x^3 + a\,x^2 + bx + c$, $f'(-1) = f'(2) = 0$, $f(1) = 3$

3.45 Déterminer la valeur à attribuer au réel m pour que la tangente à la courbe d'équation $y = x^2 + m\,x + 5$ au point où elle coupe Oy soit parallèle à la droite d'équation $3x - 2y = 0$.

3.46 Déterminer la valeur à attribuer au réel m pour que la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{x^2 + m\,x - 10}{x^2 - 2x - 3}$ au point où elle coupe Oy soit parallèle à la droite d'équation $20x + 9y = 0$.

3.47 Déterminer les équations des tangentes à la courbe d'équation $y = \frac{x^2 - 8x + 12}{\sqrt{x+9} - 4}$ aux points où celle-ci coupe les axes de coordonnées.

3.48 Déterminer si le graphe de f admet une tangente verticale, un point de rebroussement ou un point anguleux en $(0\,;0)$

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

3) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$

4) $f(x) = 7\sqrt[4]{x^2}$

5) $f(x) = |x^2 + 4x|$ 6) $f(x) = |\sin(x)|$

3.49 Soit la fonction g donnée par $g(x) = f(x) \cdot (x-a)^{p/q}$, f étant une fonction dérivable en a, p un entier pair et q un entier impair avec $0 < p < q$. Si $f(a) \neq 0$, montrer que le graphe de g possède un point de rebroussement en $x = a$.

3.50 On considère les points P et Q de la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 7$ dont les abscisses sont respectivement égales à 2 et à 6. Déterminer l'équation de la tangente à la parabole qui est parallèle à la droite (PQ).

3.51 Quels sont les points de la courbe γ en lesquels la tangente à γ est de pente m ?

1) $\gamma : y = x^3$ $m = 12$

2) $\gamma : xy = 1$ $m = -3$

3) $\gamma : x = y^2$ $m = 4$

3.52 Déterminer les coefficients a, b et c de telle manière que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par le point $(5;8)$ et admette au point $(2;2)$ une tangente de pente -4.

3.53 Déterminer les coefficients a, b, c et d de telle manière que la cubique d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passe par les points $(-2;11)$ et $(-3;10)$ et qu'en chacun de ces points la tangente à la courbe soit horizontale.

3.54 Déterminer le nombre a de telle manière que les courbes γ_1 et γ_2 soient tangentes et calculer les coordonnées du point de contact

1) $\gamma_1 : y = ax^2$ $\gamma_2 : y = 6x - 3$

2) $\gamma_1 : y = x^3 - ax + \frac{1}{4}$ $\gamma_2 : y = 0$

3) $\gamma_1 : y = \sqrt{x} + a$ $\gamma_2 : y = \frac{x}{2} + 3$

3.55 En quels points la tangente à la courbe γ est-elle parallèle à la droite d ?

1) $\gamma : y = \dfrac{x-3}{x+1}$ $\qquad d : y = 9x - 21$

2) $\gamma : xy = 2x^2 - 2y$ $\qquad d : 6x + y - 34 = 0$

3.56 Prouver que $f(x) = \cos^6(x) + \sin^6(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x)$ est une fonction constante.

3.57 Soit f une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 4. Prouver que $f(b) - f(a) = \dfrac{b-a}{6}\left(f'(a) + 4f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f'(b)\right)$.

3.58 La tangente au point A d'abscisse a à l'hyperbole γ d'équation $xy = 1$ coupe l'axe Oy en I et l'axe Ox en J. Démontrer que A est le milieu du segment $[IJ]$.

3.59 Démontrer que si f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 telle que $f'(a) = f(a) = 0$, alors $f(x)$ est divisible par $(x-a)^2$.

3.60 On considère deux points A et B de la parabole d'équation $y = ax^2$. Démontrer que la pente de la sécante (AB) à la parabole est égale à la moyenne arithmétique des pentes des tangentes à la parabole en A et en B.

3.61 On considère deux points A et B de la parabole d'équation $y = ax^2$. Prouver que l'abscisse du point d'intersection des tangentes à la parabole en A et en B est la moyenne arithmétique des abscisses de A et de B.

3.62 Prouver que toutes les paraboles d'équation $y = ax^2 + 5x - 7$ (où a est un paramètre non nul) sont tangentes entre elles.

3.63 Soit m et n deux entiers supérieurs à 0 et a, b deux réels tels que $a < b$. Prouver que la dérivée de $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$ s'annule en un point de $]a\,;b[$.

3.64 Soit f et g deux fonctions telles que $f(a) = g(a)$. L'**angle entre deux courbes** d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$ est l'angle aigu entre les droites tangentes aux deux courbes en ce point.

On considère la courbe γ d'équation $xy = x^2 + 1$. Déterminer l'équation de la droite d passant par l'origine et coupant orthogonalement γ. Montrer que d est bissectrice des asymptotes de γ.

3.65 Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer l'angle de la courbe $y = f(x)$ avec l'axe Ox en chaque point d'intersection

1) $f(x) = x$
2) $f(x) = x^2$
3) $f(x) = x^2 - 1$
4) $f(x) = x^3 - 3x$
5) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
6) $f(x) = x^3 - 6x$
7) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$
8) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

3.66 Déterminer l'angle des courbes ci-dessous en leurs points d'intersection

1) $y = x^2$ $\quad$ $y = x^3$
2) $y = x^2$ $\quad$ $y = \dfrac{x^2}{4} + 3$
3) $y = \sin(x)$ $\quad$ $y = \cos(x)$
4) $y = \sin(2x)$ $\quad$ $y = \dfrac{1}{2}\tan(x)$
5) $y = x^2 - 2x$ $\quad$ $x = 2y$
6) $x^2 = 4y$ $\quad$ $y = -x^2 + 10x - 15$
7) $y = x^3 - 4x$ $\quad$ $y = x^3 - 2x^2$

3.67 Quelles valeurs faut-il donner au réel a pour que les graphes des fonctions f et g ci-dessous se coupent à angle droit ?

1) $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \frac{1}{2} - a x^2$

2) $f(x) = a x^2$ $\qquad g(x) = \frac{1 - x^2}{a}$

3) $f(x) = 2x^2 - a$ $\qquad g(x) = \frac{x^2}{a}$

3.68 Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe d'équation $x^3 + 8y = 0$ avec sa tangente au point d'abscisse 2 .

3.69 Déterminer les nombres réels a et b pour que les courbes d'équations $y = x^2 - 6x$ et $y = x^3 + a x^2 + b x$ soient tangentes au point d'abscisse 4 .

3.70 Calculer l'angle sous lequel se coupent la parabole d'équation $y^2 = x$ et l'hyperbole d'équation $xy = 1$.

3.71 Montrer que la courbe d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $x + 4y = 18$ se coupent à angle droit en l'un de leurs points d'intersection.

3.72 A l'aide de dérivées, calculer une valeur approchée de $\sqrt{4,01}$, $10,002^4$, $99,9^5$, $\sqrt[3]{1002}$ et $\sin(46°)$. Comparer avec les valeurs données par une calculette.

3.73 Un disque a 3 cm de rayon. Son rayon augmente de $0,04$ cm . A l'aide d'une dérivée, donner une valeur approchée de l'augmentation que subit l'aire de ce disque.

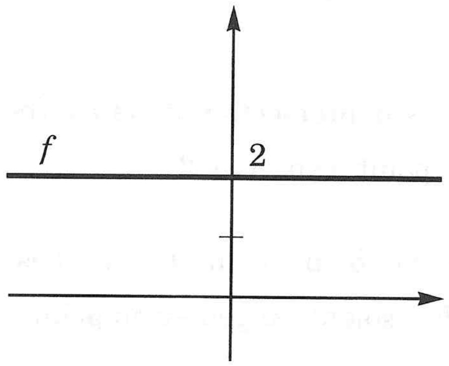
3.74 Le rayon de la base circulaire d'un cylindre droit, de hauteur donnée, passe de 4 cm à $3,96$ cm . A l'aide d'une dérivée, donner une approximation de la variation de son volume.

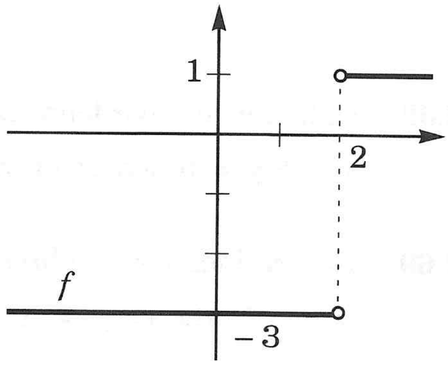
3.75 Si l'on parcourt 1 km en $60 + t$ secondes, montrer qu'une bonne approximation de la vitesse moyenne, pour t petit, est de $60 - t$ kilomètres par heure.

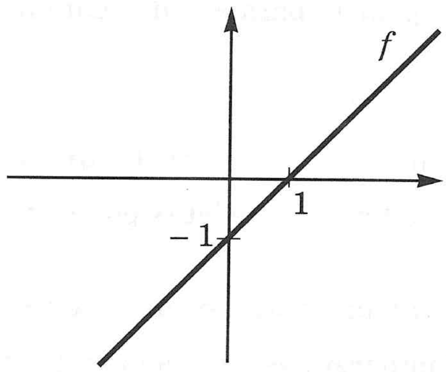
Calculer l'erreur de l'approximation si t prend les valeurs 1 , -1 , 5 , -5 , 10 ou -10 .

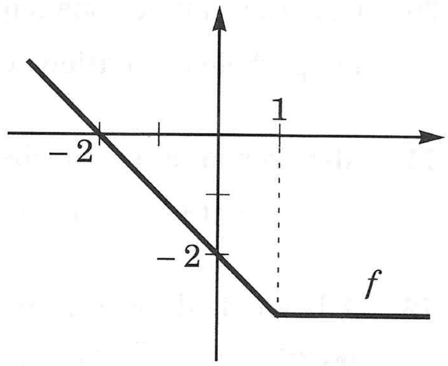
Primitives d'une fonction

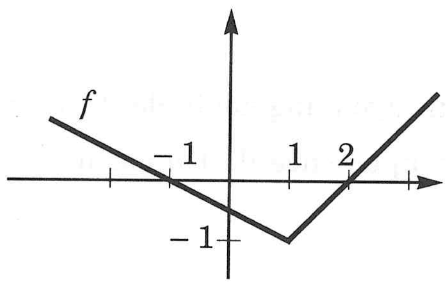
3.76 Esquisser le graphe d'une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants

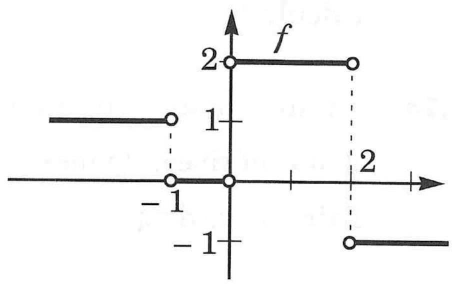
1) 

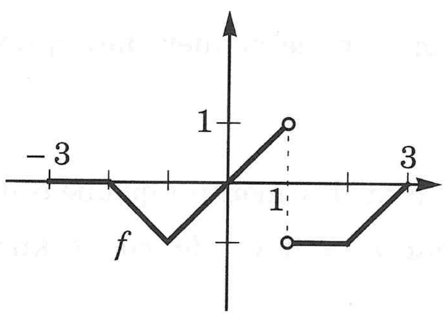
2) 

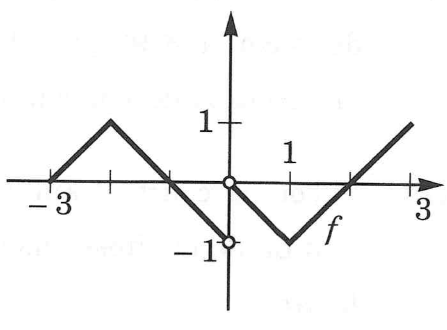
3) 

4) 

5) 

6) 

7) 

8) 

3.77 Vérifier les égalités suivantes

1) $\displaystyle\int \frac{7}{\sqrt{x^9}}\,dx = \frac{-2}{x^3\sqrt{x}} + c$ 2) $\displaystyle\int \frac{6x}{(2-x^2)^2}\,dx = \frac{2x^2-1}{2-x^2} + c$

3) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^3}}\,dx = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} + c$

4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+c$

3.78 Calculer

1) $\int 3\,dx$ 2) $\int 5x\,dx$

3) $\int (2x+1)\,dx$ 4) $\int (5x-4)\,dx$

5) $\int (2x^2-3x+2)\,dx$ 6) $\int 5x^3\,dx$

7) $\int -3x^4\,dx$ 8) $\int (3x^5+2x^4-1)\,dx$

9) $\int (1+\tan^2(x))\,dx$ 10) $\int \tan^2(x)\,dx$

3.79 Calculer

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$ 2) $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x^3}$

3) $\displaystyle\int \frac{-7\,dx}{x^5}$ 4) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$

5) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

3.80 Calculer

1) $\int \cos(3x)\,dx$ 2) $\displaystyle\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx$

3) $\int (x+3)^3\,dx$ 4) $\int (2x-1)^2\,dx$

5) $\int (7x-2)^5\, dx$

6) $\int (3x^2+x)^3(6x+1)\, dx$

7) $\int (4x^2+3)^4 x\, dx$

8) $\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\, dx$

9) $\int \dfrac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}\, dx$

10) $\int \sqrt{x+3}\, dx$

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

12) $\int \dfrac{(x+1)\, dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

3.81 Calculer en utilisant judicieusement des formules trigonométriques

1) $\int \cos^2(x)\, dx$

2) $\int \sin^2(x)\, dx$

3) $\int \cos^3(x)\, dx$

4) $\int \sin^4(x)\, dx$

3.82 Calculer

1) $\int (3x^2-2x+3)\, dx$

2) $\int \dfrac{3x^4-3x^2-7}{4x^2}\, dx$

3) $\int 7\sqrt[4]{x^3}\, dx$

4) $\int (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\, dx$

5) $\int (2\sin(x)-3\cos(x))\, dx$

6) $\int \cos(2x)\, dx$

7) $\int \left(\dfrac{5}{\cos^2(x)}+5\cos(x)\right) dx$

8) $\int \left(8\sin(x)+\dfrac{4}{\sqrt{2x}}\right) dx$

9) $\int (3x^2-7)^2\, dx$

10) $\int \sqrt{x}\,(x^2-5)\, dx$

11) $\int (3x-5)^6\, dx$

12) $\int \dfrac{12}{(4-3x)^4}\, dx$

13) $\int \sqrt[3]{(3x-8)^2}\, dx$

14) $\int \dfrac{6}{\cos^2(3x)}\, dx$

15) $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

16) $\int \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}\, dx$

3.83 Déterminer la fonction f sachant que

1) $f'(x) = 3x^2-4\ ,\ f(5) = 54$

2) $f'(x) = 5 - x$, $f(-2) = -f(2)$

3) $f''(x) = 2x$, $f'(2) = 8$, $f(-2) = -8$

4) $f''(x) = (x+1)(x-2)$, $f(1) = 8$, $f(-1) = -4$

5) $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(9) = 2$, $f(1) = 2f(4)$

3.84 Déterminer la primitive F des fonctions ci-dessous, en tenant compte des conditions imposées

1) $f(x) = 3x^2 - 6x$, $F(2) = 3$

2) $f(x) = \dfrac{18}{x^2} + \sqrt{x}$, $F(9) = 16$

3) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ 6 - x & \text{si } x > 4 \end{cases}$, $F(0) = 1$

3.85 Déterminer une fonction f dont on connaît la dérivée seconde, en tenant compte des conditions imposées

1) $f''(x) = x^2 - 3x + 1$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$

2) $f''(x) = \dfrac{10}{\sqrt[3]{x}}$, $f(0) = -1$, $f(1) = 8$

3) $f''(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$, $f(6) = 19$, $f'(0) = 0$

3.86 Déterminer la fonction f sachant qu'elle admet pour asymptote la droite d'équation $x - 2y + 8 = 0$ et que $f''(x) = \dfrac{-8}{x^3}$.

3.87 Un objet qui tombe en chute libre près de la surface de la terre est soumis à une accélération constante g , pour autant que l'on néglige la résistance de l'air. Déterminer sa position au temps t si l'on sait qu'au temps 0 , sa position est x_0 et sa vitesse v_0 .

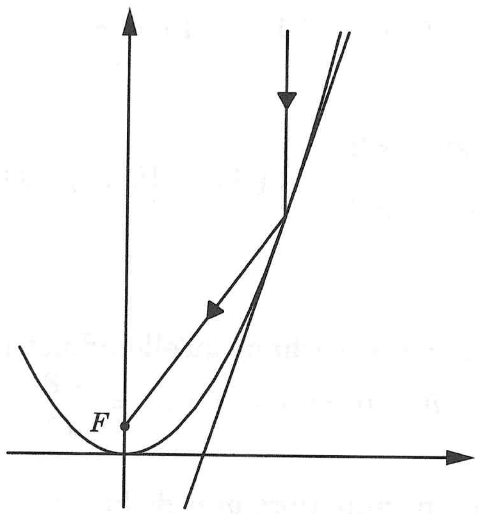
3.88 Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ et telles que f' et g' sont continues sur $]\,a\,;b\,[$. Si l'on admet que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$, montrer qu'il existe un nombre $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que la tangente au graphe de la fonction f en $(c\,;f(c))$ est parallèle à la tangente au graphe de la fonction g en $(c\,;g(c))$.

Exercices d'application

3.89 Un véhicule effectue sur l'axe Ox un mouvement rectiligne à vitesse constante v_0. En notant $\omega(t)$ sa vitesse angulaire apparente au temps t pour un observateur placé en $A(0\,;1)$, calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t)$.

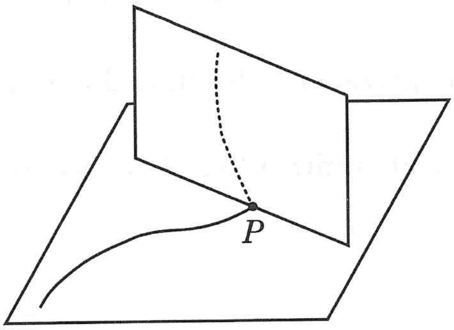
3.90 Deux longs trains A et B circulent sur des lignes parallèles. Les positions horaires des locomotives sont données par les équations $A(t) = t^3 + 2t$ et $B(t) = \dfrac{7t^2}{2} + 8$. Déterminer les temps les plus propices pour un cascadeur voulant sauter d'un wagon du train B à un wagon du train A.

3.91 La courbe $y = x^2$ représente un miroir parabolique. Montrer que tout rayon arrivant parallèlement à l'axe Oy est réfléchi en un même point $F\left(0\,;\dfrac{1}{4}\right)$, appelé foyer.

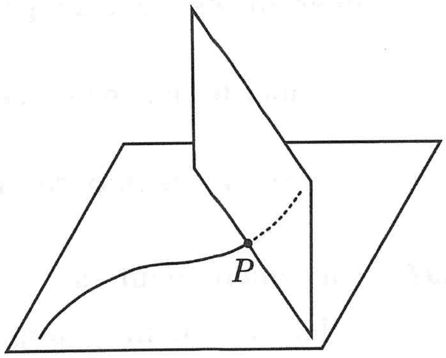


3.92 Une courbe est tracée sur une feuille de papier et un point P est choisi sur la courbe. Tenons un miroir perpendiculairement à la feuille en P et faisons-le tourner jusqu'à ce que la courbe et son image forment une ligne non anguleuse en P (voir les deux figures). Expliquer pourquoi le miroir est alors perpendiculaire à la tangente à la courbe en P.

a) faux



b) juste



3.93 Sur la piste de décollage, t secondes après le départ, un Boeing 747 contient $25'000 - 80t + 2t^2 + 0,2t^3$ gallon (1 gallon $\cong$ 3,8 litres) de carburant ($0 \leq t \leq 8$). Quelle est la consommation instantanée en gallon par seconde 2 secondes après le départ ?

3.94 Le nombre P de personnes infectées t jours après le début d'une épidémie de grippe est donné par la formule $P(t) = 30t^2 + 100t$. Calculer, en nombre de personnes par jour, la vitesse d'extension de cette épidémie le cinquième jour.

3.95 Le coût $C(t)$ du carburant, en centimes par kilomètre, peut être calculé comme le produit $C = fp$, f étant la consommation moyenne de la voiture en litres par kilomètre et p le prix du carburant en centimes par litre. Si f et p dépendent du temps t (le moteur de la voiture s'use, les prix de l'essence fluctuent), le coût C aussi.

1) Calculer le taux instantané de variation du coût $C(t)$.

2) Donner une interprétation de chacun des termes apparaissant dans ce taux.

3.96 Lorsque l'on change rapidement d'altitude une différence de pression s'installe entre l'intérieur et l'extérieur du tympan, différence qui peut "boucher" les oreilles. Trois variables interviennent dans ce phénomène:

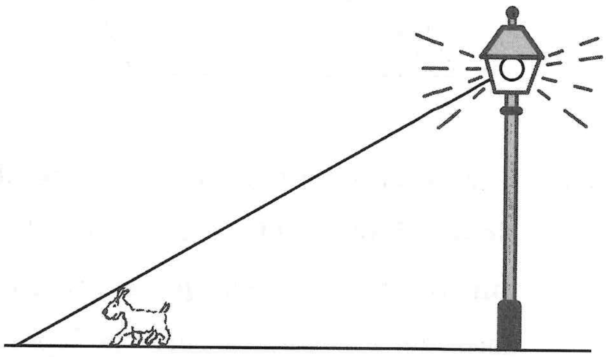
le temps t, l'altitude h et la pression atmosphérique p.

Supposons qu'un véhicule descende une route de montagne à raison de 2 m de dénivellation par seconde et que la variation de la pression atmosphérique est de $0{,}12$ grammes par centimètre carré, par mètre descendu.

Calculer le taux de variation de la pression en fonction du temps t.

Remarque: ce taux de variation peut suffire à "boucher" les oreilles.

3.97 Un chien haut de 50 cm s'éloigne d'un lampadaire d'une hauteur égale à $2{,}50$ m à la vitesse de 75 cm par seconde. A quelle vitesse se déplace l'ombre de son oreille droite ?



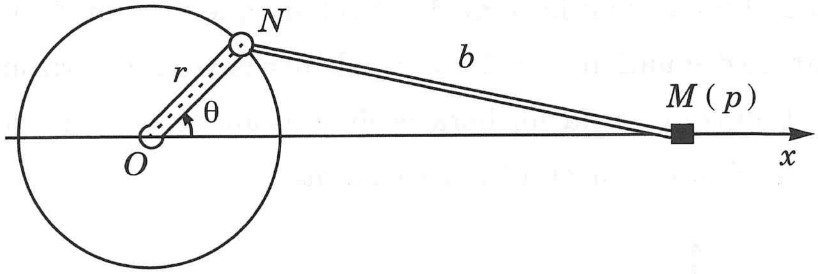
3.98 Le prix des œufs valable pour les grossistes, en francs par douzaine, est donné par l'expression $P(q) = \dfrac{847 \cdot 10^6}{(q - 10'000)^2}$ où q désigne la quantité d'œufs disponibles sur le marché chaque mois. Supposons que l'approvisionnement au 1er juillet 1997 est donné par $q = 21'000$ et qu'il chute de $3\ \%$ par mois. Quel est, en centime par mois, le taux instantané d'augmentation du prix correspondant ?

3.99 Pour une personne dont la taille est x cm ($75 \leq x \leq 185$), le nombre moyen p de pulsations cardiaques peut être estimé par $p(x) = \dfrac{938}{\sqrt{x}}$ battements par minute.

1) Comparer le taux instantané de variation de p pour $x = 162{,}5$ cm avec le taux de variation de p entre $162{,}5$ et $163{,}5$ cm.

2) Selon ce modèle, les enfants ont-ils un taux instantané de variation de pulsations plus élevé que celui des adultes ?

3.100 Soit le système bielle-manivelle suivant



1) Calculer, en fonction de r, b et θ, l'abscisse p de M.
   Application numérique: $r = 1$, $b = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

2) On pose $r = 1$ et $b = 2$. Le point N tourne à une vitesse constante de 1 tour par seconde.

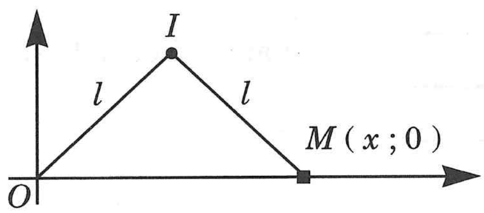
   Calculer la position p de M sur l'axe Ox en fonction du temps t, exprimé en secondes (au temps $t = 0$, l'angle $\theta = 0$).

   Déterminer la vitesse moyenne de M entre les temps 0 s et 0,5 s.

   Déterminer la vitesse instantanée au temps 0,25 s.

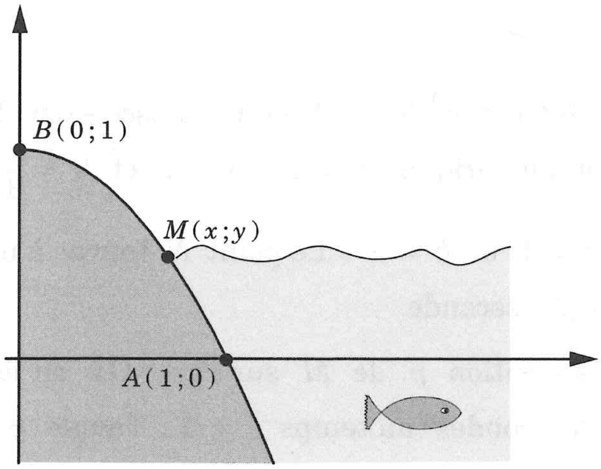
3.101 La figure ci-dessous représente deux tiges articulées ayant chacune pour longueur l. Le point O est fixe, alors que le point M se déplace à droite sur l'axe Ox avec une vitesse de 1 m/s. Calculer la composante verticale de la vitesse du point I en fonction de x.

Application numérique: $x = 6$ et $l = 5$.

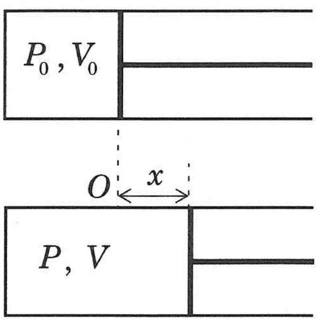


3.102 Deux récipients recueillent l'eau d'un orage. L'un est de forme cylindrique, de base circulaire ayant un diamètre de 37,5 cm. L'autre est de forme conique (cône renversé) de base circulaire égale à celle du cylindre et d'une hauteur égale à 75 cm. Le niveau d'eau monte de 5 cm par heure dans le réservoir cylindrique. A quelle vitesse monte le niveau d'eau dans le réservoir conique lorsque celui-ci est rempli aux deux tiers ?

3.103 La figure ci-dessous représente une coupe d'un bord de mer lorsque le niveau de l'eau atteint le point M. Sachant que le point M se déplace sur la parabole d'équation $y = 1 - x^2$, calculer la vitesse horizontale du point M au temps t si la loi horaire du niveau de la mer est donnée par $y(t) = \sin^2(\omega t)$, ω étant une constante.



3.104 La pression P et le volume V de l'air situé à gauche d'un piston cylindrique vérifient la loi physique $P \cdot V^{3/2} = \alpha$, α étant une constante donnée. Notons x l'abscisse (en centimètres) du piston à partir d'une position de départ O où la pression est égale à 1 atmosphère et le volume à 1 dm^3.



$P_0 = 1$ atmosphère

$V_0 = 1 \text{ dm}^3$

diamètre de la base du piston : $2r = 10$ cm

1) Calculer la pression P en fonction de x et son taux de variation moyen entre $x = 0$ et $x = 0,5$. Calculer son taux de variation instantané pour tout x.

2) Le piston effectue un va-et-vient d'amplitude A (de chaque côté de sa position initiale O). Calculer l'amplitude maximale A pour que le taux de variation instantané de la pression ne dépasse en aucun cas 4 atm/cm.

3.105 Soit $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable. Alors que la dérivée de f est la limite du rapport des variations absolues $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, on appelle **élasticité** de f et on note $E_x(f)$ la limite du rapport des variations relatives

$$E_x(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Cette notion est utilisée en finance et en économie.

1) Etablir la formule $E_x(f) = f'(x) \cdot \dfrac{x}{f(x)}$.
2) Donner une interprétation géométrique de $E_x(f)$ faisant appel aux pentes de la tangente au graphe de f en $M(x;f(x))$ et de la droite (OM).
3) Que peut-on dire de la tangente au graphe de f en un point x_0 où $E_{x_0}(f) = 1$?
4) Soit $g(x) = x \cdot f(x)$. Prouver que $g'(x) = 0 \Leftrightarrow E_x(f) = -1$.
5) Soit $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Montrer que $g'(x) = 0 \Leftrightarrow E_x(f) = 1$

3.106 Calculer l'élasticité de chacune des fonctions f suivantes

1) $f(x) = \sqrt{x}$
2) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$
3) $f(x) = \dfrac{a}{x}$
4) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

3.107 On considère la fonction f donnée par $f(x) = x^2 + x + 1$

1) Trouver les points en lesquels l'élasticité vaut 1.
2) Trouver les points en lesquels l'élasticité est nulle.
3) Marquer en couleur sur le graphe de f les points dits **élastiques**, c'est-à-dire ceux dont l'abscisse x vérifie $|E_x(f)| > 1$.

3.108 La dépense d d'un consommateur selon son revenu Y est donnée par $d = 0{,}8\,Y + 64$. Calculer l'élasticité $E_Y(d)$ de sa dépense lorsque son revenu est de 5'400 francs.

3.109 La quantité annuelle Q de repas pris au restaurant par un consommateur est donnée par $Q = -5p + 270$, p étant le prix du repas. Sa demande $d = Q \cdot p$ est-elle élastique ($|E_p(d)| > 1$) quand $p = 9$?

3.110 La fonction de demande q d'un certain produit est donnée par la relation $p = 40 - 5q$ entre le prix p et la quantité q .

1) Calculer l'élasticité $E_p(q)$ de la demande lorsque le prix p est fixé à 5 francs.

2) Calculer, en fonction du prix p , la dépense $d = q \cdot p$ que le consommateur est prêt à consentir pour acheter ce produit. Tracer le graphe de la fonction $d(p)$.

3) Calculer l'élasticité $E_p(d)$ de la dépense lorsque le prix p est de 5 francs. En déduire l'évolution de la dépense du consommateur en cas de petite modification de prix.

4) Pour une fonction de demande arbitraire $q(p)$ d'élasticité $E_p(q)$, démontrer que la dérivée de la dépense d par rapport au prix est donnée par $d' = (1 + E_p(q))q$. En déduire que $E_p(d) = 1 + E_p(q)$

3.111 Un consommateur dispose d'un revenu de Y francs. Il dépense $a(Y)$ pour son alimentation, $h(Y)$ pour ses habits, $l(Y)$ pour son logement et $t(Y)$ pour ses transports.

Si son revenu Y vaut 6'000 francs, il en dépense le 60 % pour son alimentation, le 14 % pour ses habits, le 15 % pour son logement et le reste pour ses transports ; l'élasticité de chaque poste est alors donnée par les nombres $E_Y(a) = 0,6$, $E_Y(h) = 1,3$, $E_Y(l) = 0,1$ et $E_Y(t) = 1$.

1) Calculer l'élasticité $E_Y(d)$ de sa dépense totale d lorsque son revenu vaut 6'000 francs.

2) On suppose que son revenu s'accroît de 5 % . Estimer ses nouvelles dépenses de consommation poste par poste, ainsi que le montant e disponible pour l'épargne.

3.112 Une courbe de Engel représente la relation entre la quantité Q demandée d'un bien X et le revenu Y du consommateur, le prix du bien étant constant.

1) Montrer que si l'élasticité $E_Y(Q)$ de la consommation du bien X par rapport au revenu est supérieure à 1, le consommateur accroît la part de son revenu consacré à X lorsque son revenu augmente. Que conclure si l'élasticité vaut 1 ? et si l'élasticité est inférieure à 1 ?

2) Que vaut $E_Y(Q)$ si la courbe de Engel est une droite passant par l'origine ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

3.1 $22,15$ m/s

3.2 1) $\dfrac{13}{4}$ 2) $h^2 + \dfrac{3}{2}h + \dfrac{3}{4}$ 3) $\dfrac{3}{4}$

4) $-\dfrac{4}{3}$ $\dfrac{-4}{2h+1}$ -4

3.3 $y = 4x - 4$

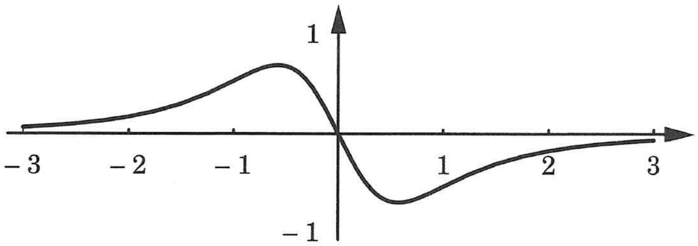
3.4 $1,005 \cdot \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}$

3.5 Les mobiles se rencontrent aux dates 0 et 3. Ils ont même vitesse lorsque $t = \dfrac{3}{2}$.

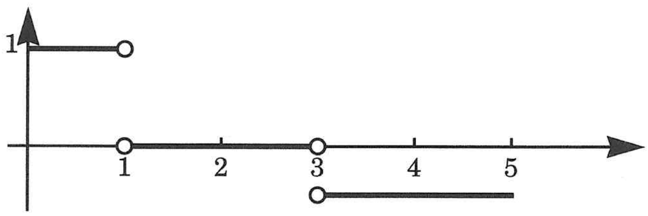
3.6 1) $[\,2\,;+\infty\,[$ 2) $]\,-\infty\,;\dfrac{7}{2}\,]$ 3) $]\,-\infty\,;-\sqrt{3}\,]\cup[\,\sqrt{3}\,;+\infty\,[$

3.7 $771,6$ m

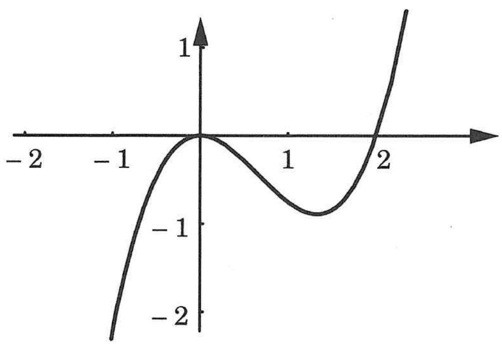
3.8 1)



2)



3)



3.9 1) $f'(2) = 1$ 2) $f'(a) = 1$ 3) $f'(-3) = -3$

4) $f'(a) = 2a + 3$ 5) $f'(1) = \frac{-2}{9}$ 6) $f'(4) = \frac{1}{4}$

7) $f'(a) = \dfrac{3}{(a+1)^2}$ 8) $f'(a) = \dfrac{-1}{2\sqrt{a^3}}$

3.10 1) non 2) oui 3) non 4) non

3.11 2) non

3.13 1) $f'(x) = 3x^2$ 2) $f'(x) = 8x+5$ 3) $f'(x) = 3x^2+3$

4) $f'(x) = 4x^3$ 5) $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ 6) $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

7) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 8) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3.15 Au point $(2\,;-8)$

3.17 2) f n'est pas dérivable en 0 .

3.18 $f'(a) = \dfrac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$. La fonction n'est dérivable ni en 1 , ni en -1 .

3.19 $f'(0) = 0$

3.20 $|f|$ est dérivable en 0 si $f'(x) = 0$ lorsque $f(x) = 0$.

3.22 Non

3.24 Non

3.25 Oui

3.26 1) $4x - 4$ 2) $3x^2 + 10x - 2$

3) $15x^4 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ 4) $\dfrac{-5}{(2x-1)^2}$

5) $\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ 6) $\dfrac{9x^2-80x+82}{(5x^2-8x-10)^2}$

7) $\dfrac{-6x^3-21x^2-20x-35}{(x^3+2x^2+x-10)^2}$ 8) $\dfrac{-20x}{(2x^2-1)^2}$

9) $\dfrac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$ 10) $\cos(x)$

11) $\dfrac{1}{1+\cos(x)}$ 12) $\dfrac{3\cos(x)}{(2\sin(x)+1)^2}$

13) $\dfrac{x^2}{(\cos(x)+x\cdot\sin(x))^2}$ 14) $\dfrac{-4\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

15) $8\cos^2(x)-8\sin^2(x)-12\cos(x)+2\sin(x)$

3.27 1) $-5(3-x)^4$ 2) $8x(2x^2-3)$

3) $10x(x^2+a^2)^4$ 4) $3(4x+3)(2x^2+3x+4)^2$

5) $2\sin(x)\cdot\cos(x)$ 6) $2\cos(2x)$

7) $2\cos(x)-3\sin(3x)$ 8) $a(1+\tan^2(ax+b))$

9) $3\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos(2x)-2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin(2x)$

10) $2\cos(2x)\cdot\cos(3x)-3\sin(2x)\cdot\sin(3x)$

11) $12\sin^2(4x)\cdot\cos(4x)$ 12) $\dfrac{10\tan(5x)}{\cos^2(5x)}$

13) $\dfrac{3(9x^2-12x+5)}{(3x-2)^2}$ 14) $\dfrac{(x-1)^2\cdot(x+5)}{(x+1)^3}$

15) $(x+5)\cdot(2x+3)^2\cdot(12x^2+39x-21)$

16) $-5(6x+1)\cdot(2x+1)\cdot(1-3x)^2$

17) $4(3x^2+4)^4\cdot(2x^2-3x)^5\cdot(33x^3-36x^2+24x-18)$

18) $\dfrac{\cos(2x)\cdot(2\cos^2(2x)-\cos(2x)-2)}{\sin^2(x)}$

19) $2\,\dfrac{2x-1}{x^3}\cdot\cos\left(\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2\right)$ 20) $-3\sin^3(x)$

3.28 1) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 2) $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

3) $\dfrac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$ 4) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

5) $\dfrac{-1}{4\sqrt[4]{x^5}}$ 6) $\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

7) $\dfrac{8x-1}{\sqrt{8x^2-2x+3}}$ 8) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

9) $3(4x-1)\cdot\sqrt{4x^2-2x}$ 10) $\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$

11) $\dfrac{-4x}{3\sqrt[3]{1-x^2}}$

12) $\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$

13) $\dfrac{5}{2(x+1)^2\cdot f(x)}$

14) $\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$

15) $\dfrac{\sqrt{2}\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$

16) $\dfrac{-1}{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}$

17) $\dfrac{1}{(1-x)^2\cdot f(x)}$

18) $\dfrac{4x^2+1}{x^2\cdot\sqrt{(1+x^2)^3}}$

3.29 1) $f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$

2) $\dfrac{g\cdot h'+g'\cdot h}{2\sqrt{g\cdot h}}$

3) $\dfrac{f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h-3f\cdot g\cdot h'}{h^4}$

4) $\dfrac{f'gh-2fg'h-2fgh'}{(gh)^3}$

5) $\dfrac{2f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h-2f\cdot g\cdot h'}{2h^2\sqrt{g}}$

6) $(f'\circ g\circ h)\cdot(g'\circ h)\cdot h'$

3.30 1) $4x-y-3=0$ 2) $x-4y+4=0$ 3) $13x-y-2=0$

3.31 $a=-3\ ;\ b=3$

3.32 $a=-2\ ;\ b=-6$

3.33 Aux points $(0\,;0)$ et $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{8}\right)$

3.34 Aux points $(-1\,;-1)$ et $\left(3\,;\dfrac{1}{3}\right)$

3.35 1) $y=0$ et $y=4x-4$ 2) $y=3x-2$

3) $y=4x$ et $y=3x$

3.36 1) en P : oui ; en Q : non

2) les points de la courbe dont les abscisses sont $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$; 1 ; $\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$

3.37 Pour $a\in\,]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\,[$

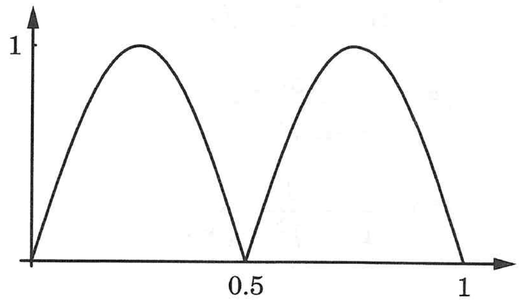
3.38 $b^2<3ac$

3.39 $(a\,;b)=(3\,;5)$ ou $(a\,;b)=\left(\dfrac{34}{9}\,;\dfrac{8}{3}\right)$

3.40 1) $x = 1$ 2) $x = \pm 2$

3) $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

3.41 2) $f'(0) = f'(1)$ 3)



3.42 1) $f^{(n)}(x) = a_n \cdot n!$ 2) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$

3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

4) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ \cos(x) & \text{si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -\sin(x) & \text{si } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -\cos(x) & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$

5) $\dfrac{(-1)^n \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot x^{n - \frac{1}{2}}}$

3.43 1) $x'(t) = at + v_0$ $x''(t) = a$

2) $y'(t) = \dfrac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2}$ $y''(t) = \dfrac{2t(3-t^2)}{(t^2+1)^3}$

3) $y'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$ $y''(t) = -\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

4) $C'(q) = q^2 - 4q + 8$ $C''(q) = 2q - 4$

5) $q'(p) = -10 - 4p$ $q''(p) = -4$

6) $S'(m) = 2 \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(\alpha_i + m\beta_i)$ $S''(m) = 2 \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2$

3.44 1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{3}x + 3$ 2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 4$

3) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 7$ 4) $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + \dfrac{19}{2}$

3.45 $m = \dfrac{3}{2}$

3.46 $m = 0$

3.47 $y = \dfrac{4}{4-\sqrt{11}}(x-2)$; $y = \dfrac{-4}{4-\sqrt{15}}(x-6)$ et $y = 6x-12$

3.48 1) Tangente verticale
2) Point de rebroussement
3) Point de rebroussement
4) Point de rebroussement
5) Point anguleux
6) Point anguleux

3.50 $y = 4x-9$

3.51 1) $(-2\,;-8)$ et $(2\,;8)$
2) $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\,;-\sqrt{3}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right)$
3) $\left(\dfrac{1}{64}\,;\dfrac{1}{8}\right)$

3.52 $a = 2$; $b = -12$ et $c = 18$

3.53 $a = -2$; $b = -15$; $c = -36$ et $d = -17$

3.54 1) $a = 3$; point de contact $(1\,;3)$
2) $a = \dfrac{3}{4}$; point de contact $\left(\dfrac{1}{2}\,;0\right)$
3) $a = \dfrac{5}{2}$; point de contact $\left(1\,;\dfrac{7}{2}\right)$

3.55 1) $\left(-\dfrac{1}{3}\,;-5\right)$ et $\left(-\dfrac{5}{3}\,;7\right)$
2) $(-1\,;2)$ et $(-3\,;-18)$

3.64 L'équation de d est $y = (1+\sqrt{2})x$

3.65 1) $45\,°$
2) $0\,°$
3) $\pm\, 63,43\,°$
4) $80,54\,°$ et $-71,57\,°$
5) $\pm\, 80,54\,°$ et $\pm\, 85,24\,°$
6) $-80,54\,°$ et $85,24\,°$
7) $-45\,°$
8) $\pm\, 38,66\,°$

3.66 1) $0\,°$ et $8,13\,°$
2) $30,96\,°$
3) $70,53\,°$
4) $36,87\,°$ et $71,57\,°$
5) $90\,°$ et $45\,°$
6) $35,54\,°$ et $45\,°$

7) $75,96\,°$ et $6,91°$

3.67 1) $a = 1$ 2) $a = \pm\sqrt{3}$ 3) impossible

3.68 $(2\,;-1)$ et $(-4\,;8)$

3.69 $a = -7$ et $b = 10$

3.70 $71,57\,°$

3.72 $2,0025$; $10'008$; $995 \cdot 10^7$; $\dfrac{3'002}{300}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 + \dfrac{\pi}{180}\right)$

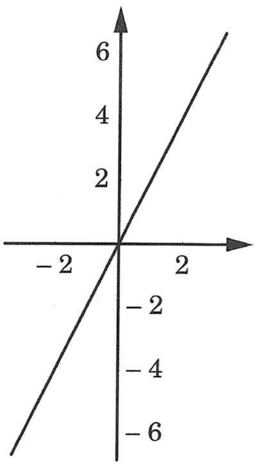
3.73 $0,24\,\pi$ cm^2

3.74 $0,32\,\pi\,h$ cm^3 où h est la hauteur du cylindre

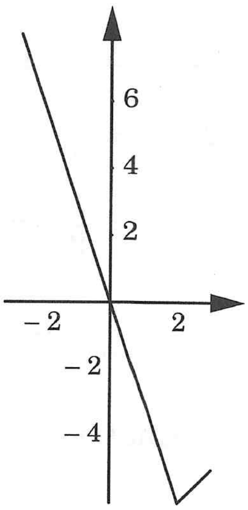
3.75 Erreur en km/h : $0,016$; $0,017$; $0,385$; $0,455$; $1,429$; 2 .

3.76

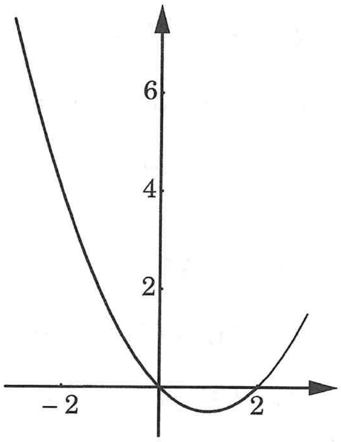
1)



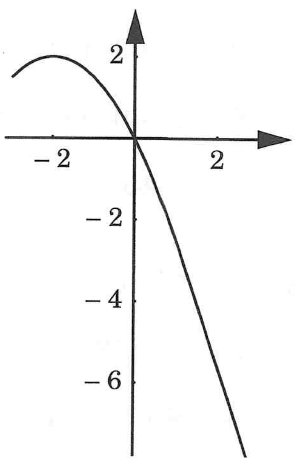
2)



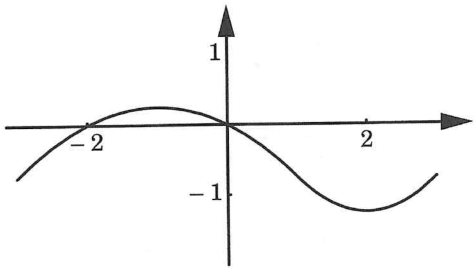
3)



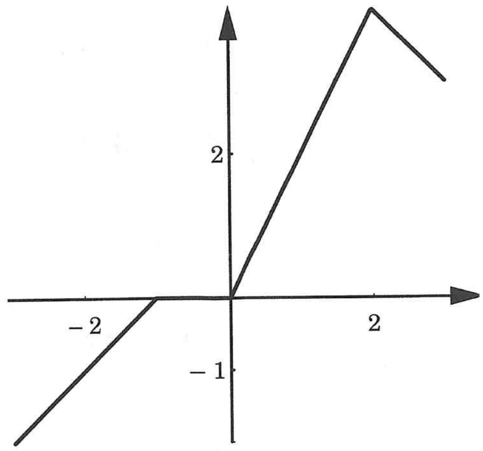
4)



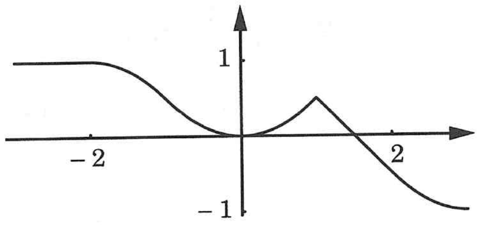
5)



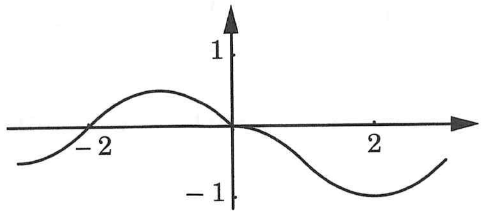
6)



7)



8)



3.78 1) $3x + c$ 2) $\frac{5}{2}x^2 + c$

3) $x^2 + x + c$ 4) $\frac{5}{2}x^2 - 4x + c$

5) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$ 6) $\frac{5}{4}x^4 + c$

7) $-\frac{3}{5}x^5 + c$ 8) $\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - x + c$

9) $\tan(x) + c$ 10) $\tan(x) - x + c$

3.79 1) $\frac{-1}{x} + c$ 2) $\frac{-1}{x^2} + c$

3) $\frac{7}{4x^4} + c$ 4) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

5) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$ 6) $2\sqrt{x} + c$

7) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

3.80 1) $\frac{1}{3}\sin(3x) + c$ 2) $-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

3) $\frac{1}{4}(x+3)^4 + c$ 4) $\frac{1}{6}(2x-1)^3 + c$

5) $\frac{1}{42}(7x-2)^6+c$

6) $\frac{1}{4}(3x^2+x)^4+c$

7) $\frac{1}{40}(4x^2+3)^5+c$

8) $\frac{1}{3}\sin^3(x)+c$

9) $\frac{1}{3}\tan^3(x)+c$

10) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}+c$

11) $\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+c$

12) $\sqrt{x^2+2x}+c$

3.81 1) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)+c$

2) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)+c$

3) $\frac{1}{3}\sin(x)\cdot(3-\sin^2(x))+c$

4) $\frac{12x-8\sin(2x)+\sin(4x)}{32}+c$

3.82 1) x^3-x^2+3x+c

2) $\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4x}+c$

3) $4\sqrt[4]{x^7}+c$

4) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+c$

5) $-2\cos(x)-3\sin(x)+c$

6) $\frac{1}{2}\sin(2x)+c$

7) $5\tan(x)+5\sin(x)+c$

8) $-8\cos(x)+4\sqrt{2x}+c$

9) $\frac{9}{5}x^5-14x^3+49x+c$

10) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}-\frac{10}{3}\sqrt{x^3}+c$

11) $\frac{1}{21}(3x-5)^7+c$

12) $\frac{4}{3(4-3x)^3}+c$

13) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x-8)^5}+c$

14) $2\tan(3x)+c$

15) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c$

16) $2\sqrt{x^2-x-1}+c$

3.83 1) $f(x) = x^3-4x-51$

2) $f(x) = 5x-\frac{x^2}{2}+2$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3+4x+\frac{8}{3}$

4) $f(x) = \frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{37}{6}x+\frac{35}{12}$

5) $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 4x + 8$

3.84 1) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 2) $F(x) = -\frac{18}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

3) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ -\frac{x^2}{2} + 6x - 9 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

3.85 1) $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + 3x + 2$ 2) $f(x) = 9\sqrt[3]{x^5} - 1$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{13}{3} & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^3}{12} + x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

3.86 $f(x) = \frac{x^2 + 8x - 8}{2x}$

3.87 $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

3.89 0

3.90 $t = 2$ et $t = \frac{1}{3}$

3.93 69, 6 gallon /s

3.94 400 personnes par jour

3.95 $f' \cdot p + f \cdot p'$

3.96 0, 24 gramme par cm^2 par seconde

3.97 $\frac{15}{16}$ m/s

3.98 $3,81 \cdot 10^{-3}$ centime par mois

3.100 1) $p = r\cos(\theta) + \sqrt{b^2 - r^2\sin^2(\theta)}$. Application: $p = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

2) $p(t) = \cos(2\pi t) + \sqrt{4 - \sin^2(2\pi t)}$

vitesse moyenne: -4 unités /s

Vitesse instantanée: -2π unités /s

3.101 Vitesse: $\dfrac{-x}{2\sqrt{4l^2 - x^2}}$. Application: $-\dfrac{3}{8}$ m/s

3.102 $6,55$ cm/h

3.103 $x'(t) = -\omega \sin(\omega t) \cdot \operatorname{sgn}(\cos(\omega t))$

3.104 1) $P(x) = \dfrac{80\sqrt{10}}{\sqrt{(40 + \pi x)^3}}$

taux de variation moyen: $-0,0561$ atm/cm

taux instantané de variation: $-120\pi\sqrt{10} \cdot (40 + \pi x)^{-5/2}$ atm/cm

2) $9,62$ cm

3.105 3) la tangente au graphe passe par l'origine

3.106 1) $\dfrac{1}{2}$ 2) 3 3) -1 4) -2

3.107 1) $x = -1$, $x = 1$ 2) $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 0$ 3) $x < -1$ ou $x > 1$

3.108 $0,98540$

3.109 Non. La diminution relative de sa demande d est inférieure à l'augmentation relative du prix p

3.110 1) $-\dfrac{1}{7}$ 2) $d = \dfrac{40p - p^2}{5}$

3) $\dfrac{6}{7}$. Si le prix p augmente de x % , la dépense d augmente de $\dfrac{6}{7}\,x$ %

3.111 1) $0,667$

2) a : $3'708$ h : $894,6$ l : $904,5$ t : 693 e : $99,90$

3.112 1) si $E_Y(Q) = 1$, la part du revenu consacré à X reste constante

si $0 < E_Y(Q) < 1$, la part du revenu consacré à X diminue

2) 1