canton de vaud
LIBERTÉ ET PATRIE

Gymnase de Burier

Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz

gymnase BURIER

EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE CULTURE GÉNÉRALE

JUIN 2021

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

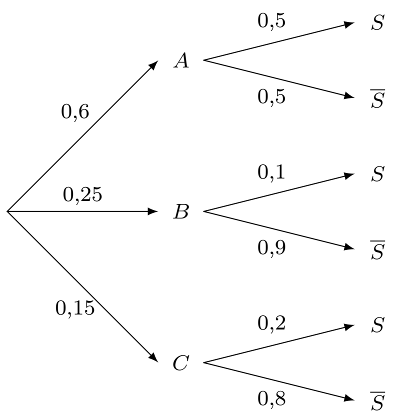
CORRIGÉ

Problème 1 (11 points)

Un sondage a été effectué auprès des élèves mangeant au restaurant du gymnase :

- 60 % des élèves choisissent le repas A « Street food »
- 25 % des élèves choisissent le repas B « Classique »
- 15 % des élèves choisissent le repas C « Pâtes »
- 50 % des élèves choisissant le repas A prennent une boisson sucrée
- 10 % des élèves choisissant le repas B prennent une boisson sucrée
- 20 % des élèves choisissant le repas C prennent une boisson sucrée

a) Illustrer cette situation à l'aide d'un diagramme en arbre :



$\Rightarrow$ $P(A\cap S) = 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}30 = 30\%$

$\Rightarrow$ $P(A\cap \overline{S}) = 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}30 = 30\%$

$\Rightarrow$ $P(B\cap S) = 0{,}25\cdot 0{,}1 = 0{,}025 = 2{,}5\%$

$\Rightarrow$ $P(B\cap \overline{S}) = 0{,}25\cdot 0{,}9 = 0{,}225 = 22{,}5\%$

$\Rightarrow$ $P(C\cap S) = 0{,}15\cdot 0{,}2 = 0{,}03 = 3\%$

$\Rightarrow$ $P(C\cap \overline{S}) = 0{,}15\cdot 0{,}8 = 0{,}12 = 12\%$

On choisit au hasard un élève ayant répondu au sondage. Quelle est la probabilité

b) qu'il prenne le repas C « Pâtes » et une boisson sucrée ?

$P(\text{"Pâtes et boisson sucrée"}) = 0{,}15\cdot 0{,}2 = 0{,}03 = 3\%.$

c) qu'il prenne une boisson sucrée ?

$P(\text{"boisson sucrée"}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}300 + 0{,}025 + 0{,}030 = 0{,}355 =$
$30\% + 2{,}5\% + 3\% = 35{,}5\%$.

d) qu'il prenne une boisson sucrée, sachant qu'il prend un repas B « Classique » ?

$P(\text{"boisson sucrée"} \mid \text{"repas B"}) = 10\%$ (Cf. diagramme en arbre).

e) qu'il prenne un repas A « Street food », sachant qu'il prend une boisson sucrée ?

$$P(\text{"repas A"} \mid \text{"boisson sucrée"}) = \frac{P(\text{"repas A" et "boisson sucrée"})}{P(\text{"boisson sucrée"})} = \frac{30}{35{,}5} \simeq 0{,}845 \simeq$$

$84{,}5\%$.

Problème 2 (11 points)

On cherche à estimer la proportion de la population d'un pays de 8,5 millions d'habitants ayant dans leur sang le gène lié à une maladie.

Pour le faire, on choisit au hasard 10'000 personnes, et on détermine à l'aide d'une prise de sang si les personnes possèdent le gène ou non.

On attribue à la variable X la valeur 1 si la personne possède ce gène et la valeur 0 si elle ne le possède pas.

Le tableau ci-dessous résume les résultats :

Valeur (X)	Effectif
0	9'260
1	740
Total	10'000

a) Calculer la moyenne $\overline{x}$ de cet échantillon :

$$\overline{x} = \frac{1}{10'000}\left[0 \cdot 9'260 + 1 \cdot 740\right] = \frac{740}{10'000} = 0{,}074.$$

b) Quel pourcentage de l'échantillon testé possède le gène ?

$0{,}074 = 7{,}4\%$.

Pour la suite du problème, on admettra que l'écart-type corrigé de cet échantillon vaut 0,26.

c) Construire un intervalle de confiance à 95% pour déterminer le pourcentage de la population du pays entier possédant le gène :

Comme $n \geq 30$, on peut utiliser le TCL.

$n < \frac{N}{20}$? $\qquad 10'000 < \frac{8{,}5 \cdot 10^6}{20}$? Oui ! C'est donc un petit échantillon.

$\widehat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}26}{\sqrt{10'000}} = \frac{0{,}26}{100} = 0{,}0026.$

Le niveau de confiance est de 95%.

Donc le seuil de l'intervalle de confiance $= \alpha = 100\% - 95\% = 5\%$.
Ainsi $1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 1 - 0{,}025 = 0{,}9750$. Donc $q_{1-\alpha/2} = q_{0{,}9750} = 1{,}96$.

$E = q_{1-\alpha/2} \cdot \widehat{\sigma}_{\overline{X}} = 1{,}96 \cdot 0{,}0026 = 0{,}005096 \simeq 0{,}005.$

$\overline{x} - E \simeq 0{,}074 - 0{,}005 \simeq 0{,}069$ et $\overline{x} + E \simeq 0{,}074 + 0{,}005 \simeq 0{,}079.$

Donc $\mu \in [\,\overline{x} - E\ ;\ \overline{x} + E\,] \simeq [\,0{,}069 ; 0{,}079\,] \simeq [\,6{,}9\%\ ;\ 7{,}9\%\,]$.

d) Compléter la phrase suivante :

Il y a 95% de chances que le pourcentage réel de la population possédant ce gène se situe entre 6,9% et 7,9%.

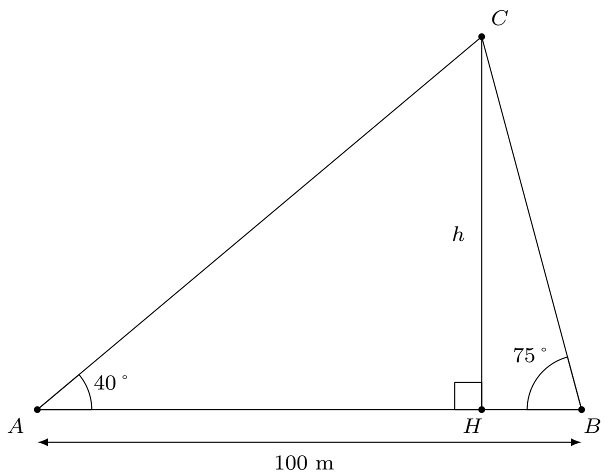
e) Quelle est la probabilité que le taux réel de présence du gène soit supérieur aux valeurs contenues dans cet intervalle ?

$\alpha/2 = 2{,}5\%$.

Problème 3 (11 points)

Afin de pouvoir visualiser leurs parcelles, des agriculteurs réalisent une cartographie aérienne par drone.

Deux agriculteurs A et B sont placés face à face à 100 mètres de distance. Ils observent le drone (point C) en vol stationnaire au dessus d'eux. Le premier le voit sous un angle d'élévation de 40° et le deuxième, sous un angle de 75°.
A, B et C sont dans un même plan vertical.



a) Quelle est la distance entre le drone et chacun des agriculteurs ?

$\gamma = \widehat{ACB} = 180° - 40° - 75° = 65°.$

Théorème du sinus :
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin(40°)} = \frac{100}{\sin(65°)} \quad \Rightarrow$$

Distance $BC = a = \dfrac{100 \cdot \sin(40°)}{\sin(65°)} \simeq 70{,}9$ m.

Théorème du sinus :
$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{\sin(75°)} = \frac{100}{\sin(65°)} \quad \Rightarrow$$

Distance $AC = b = \dfrac{100 \cdot \sin(75°)}{\sin(65°)} \simeq 106{,}6$ m.

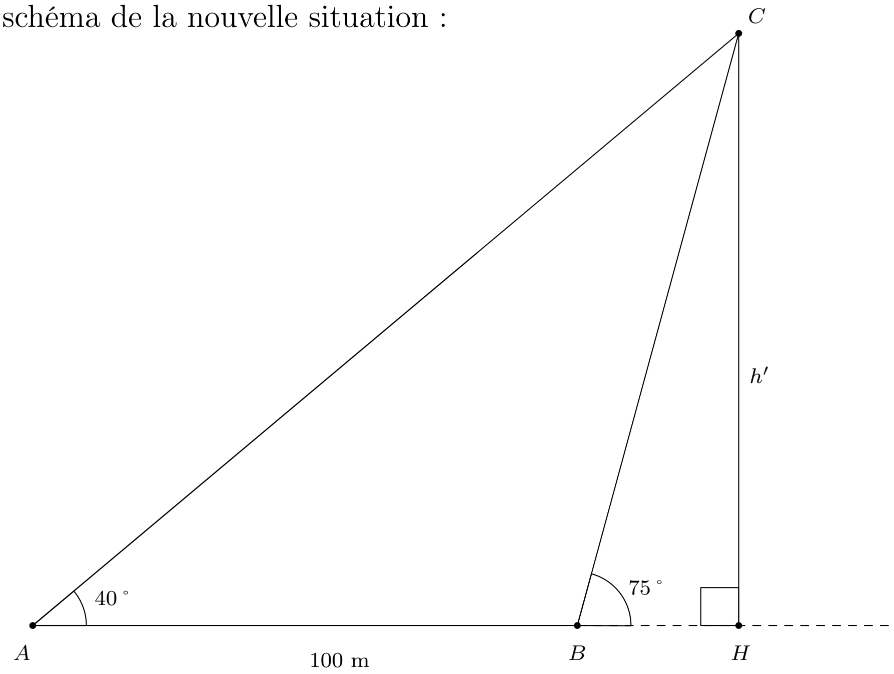
b) À quelle hauteur h se trouve le drone ?

Le triangle BCH est rectangle en H :

$$\frac{h}{BC} = \sin(75°) \;\Rightarrow\; \frac{h}{70{,}9} = \sin(75°) \;\Rightarrow\; h = 70{,}9 \cdot \sin(75°) \simeq 68{,}5 \text{ m.}$$

Après quelques minutes, le drone change de position. Les deux agriculteurs le voient maintenant sous les mêmes angles d'élévation qu'avant, mais désormais, leurs regards s'orientent dans la même direction.

c) Faire un schéma de la nouvelle situation :



d) À quelle hauteur se trouve alors le drone ?

$\beta = \widehat{ABC} = 180° - 75° = 105°.$

$\gamma = \widehat{ACB} = 180° - 40° - 105° = 35°.$

Théorème du sinus :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \;\Rightarrow\; \frac{a}{\sin(40°)} = \frac{100}{\sin(35°)} \;\Rightarrow$$

Distance $BC = a = \dfrac{100 \cdot \sin(40°)}{\sin(35°)} \simeq 112{,}1$ m.

Le triangle BCH est rectangle en H :

$$\frac{h'}{BC} = \sin(75°) \;\Rightarrow\; \frac{h'}{112{,}1} = \sin(75°) \;\Rightarrow\; h' = 112{,}1 \cdot \sin(75°) \simeq 108{,}2 \text{ m.}$$

Problème 4 (9 points)

Une classe ECG compte 20 élèves.

a) On veut former un comité de trois élèves choisis parmi les 20 élèves de la classe. Combien y a-t-il de comités possibles ?

$C_3^{20} = 1'140.$

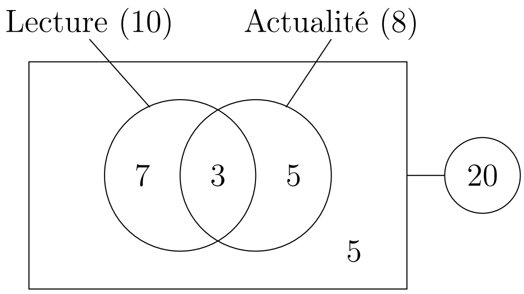
b) On veut former un comité de trois élèves choisis parmi les 20 élèves de la classe. Combien y a-t-il de comités possibles, sachant qu'il faut un responsable du comité, un responsable du courrier et un responsable de l'ordre ?

$A_3^{20} = 6'840.$

Un sondage a été effectué dans cette classe ECG de 20 élèves :

- 10 élèves lisent régulièrement
- 8 élèves suivent l'actualité régulièrement
- 3 élèves lisent régulièrement et suivent l'actualité régulièrement

c) Illustrer cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn :



d) On veut former un comité de trois élèves, comprenant :

- un élève lisant régulièrement mais ne s'intéressant pas régulièrement à l'actualité
- un élève s'intéressant régulièrement à l'actualité mais ne lisant pas régulièrement
- un élève lisant régulièrement et s'intéressant régulièrement à l'actualité

Combien y a-t-il de comités possibles ?

$7 \cdot 3 \cdot 5 = 105.$

Problème 5 (10 points)

Un ébéniste fabrique deux modèles de meubles, un modèle de style *traditionnel* et un modèle de style *design*.

Pour chacun des meubles qu'il fabrique, il doit utiliser deux types de bois : du hêtre et du frêne, dont il dispose sous forme de planches.

Dans le cas d'un meuble de style *traditionnel*, il lui faut 1,5 planches de hêtre et 1 planche de frêne. Pour un meuble de style *design*, il utilise 1 planche de hêtre et 3 planches de frêne.

Il commande 11 planches de hêtre et 12 planches de frêne, qu'il utilisera durant 1 mois de travail.

L'ébéniste sait qu'il vendra tous les meubles qu'il peut fabriquer, en réalisant un profit de 200 francs sur chaque meuble de style *traditionnel* et un profit de 300 francs sur chaque meuble de style *design*.

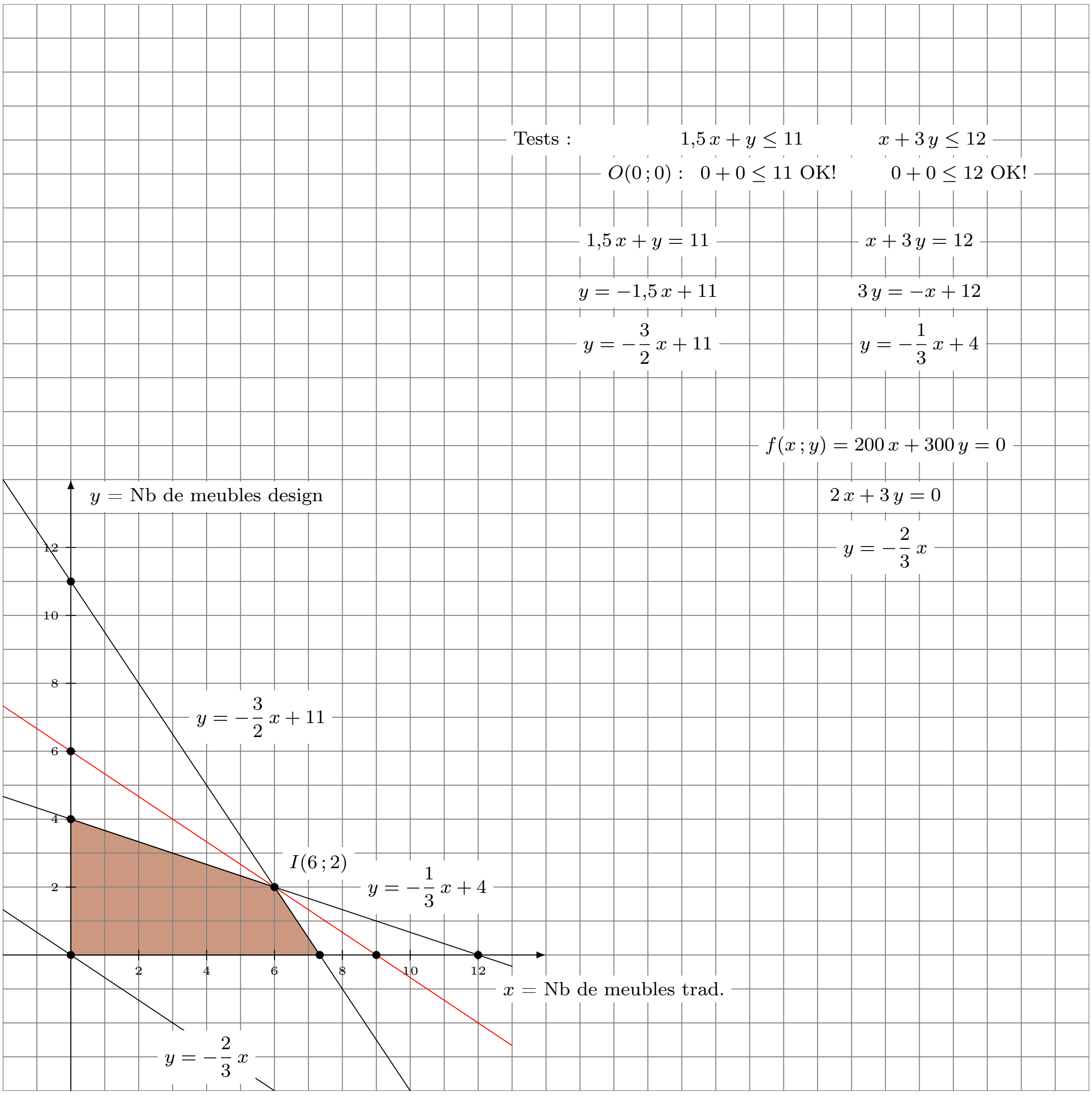
a) Déterminer les contraintes du problème, en posant x pour le nombre de meubles de style *traditionnel* et y pour le nombre de meubles de style *design* :

	x = nb meubles trad.	y = nb meubles design	Contraintes
Hêtre	1,5	1	$1{,}5\,x + y \leq 11$
Frêne	1	3	$x + 3\,y \leq 12$
Contraintes	$x \geq 0$	$y \geq 0$	

b) Déterminer la fonction objectif permettant de maximiser son profit :

$f(x; y) = 200\,x + 300\,y$.

c) Représenter le polygone des contraintes et la fonction objectif :



d) Combien de meubles de style *traditionnel* et combien de meubles de style *design* devrait-il fabriquer ce mois, s'il veut maximiser son profit ?

Pour maximiser son profit, il doit fabriquer 6 meubles de style *traditionnel* et 2 meubles de style *design*.

Problème 6 (11 points)

Aux guichets de la poste d'une ville de la région, on a noté le temps d'attente de 25 personnes. Ce temps est compris entre 1 et 5 minutes. On a établi ci-dessous une partie de la distribution de cette variable, pour l'échantillon concerné :

Temps x_i (en min)	Effectif n_i	Fréquence f_i (%)
1	12	48
2	5	20
3	2	8
4	4	16
5	2	8
Total	25	100

a) Compléter le tableau ci-dessus.

b) Calculer la moyenne de cette distribution :

$$\overline{x} = \frac{1}{25}\left[1 \cdot 12 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2\right] = \frac{1}{25}\left[12 + 10 + 6 + 16 + 10\right] = \frac{54}{25} = 2{,}16'.$$

c) Calculer l'écart-type de cette distribution :

Variance : $S^2 = \dfrac{1}{25}\left[12 \cdot (1 - 2{,}16)^2 + 5 \cdot (2 - 2{,}16)^2 + 2 \cdot (3 - 2{,}16)^2 + 4 \cdot (4 - 2{,}16)^2 + 2 \cdot (5 - 2{,}16)^2\right] =$

$$\frac{1}{25}\left[12 \cdot 1{,}3456 + 5 \cdot 0{,}0256 + 2 \cdot 0{,}7056 + 4 \cdot 3{,}3856 + 2 \cdot 8{,}0656\right] =$$

$$\frac{1}{25}\left[16{,}1472 + 0{,}128 + 1{,}4112 + 13{,}5424 + 16{,}1312\right] = \frac{47{,}36}{25} = 1{,}8944.$$

Écart-type : $S = \sqrt{1{,}8944} \simeq 1{,}376'$.

d) Calculer les quartiles de cette distribution :

Médiane :

$n = 25$ est impair. La médiane est donc la 13ème valeur. Donc $\widetilde{x} = Q_2 = 2$.

Q_1 :

$\frac{1}{4} \cdot 25 = 6{,}25$. Le 1er quartile est donc la 7ème valeur. Donc $Q_1 = 1$.

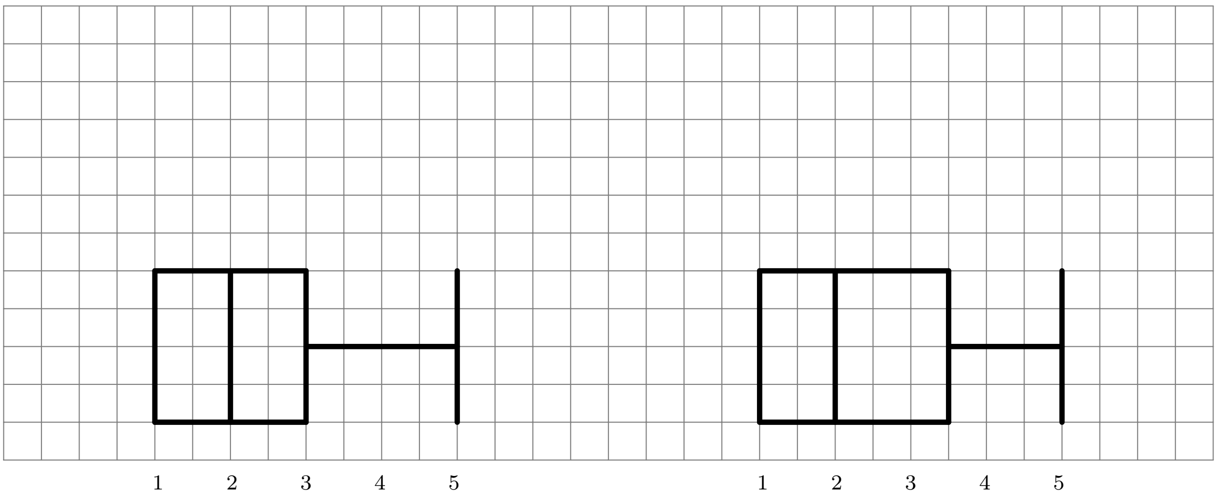
Variante : Q_1 est la moyenne de la 6ème et de la 7ème valeur. Donc $Q_1 = 1$.

Q_3 :

$\frac{3}{4} \cdot 25 = 18{,}75$. Le 3ème quartile est donc la 19ème valeur. Donc $Q_3 = 3$.

Variante : Q_3 est la moyenne de la 19ème et de la 20ème valeur. Donc $Q_3 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

e) Dessiner la boîte à moustaches (boxplot) de cette distribution :



Min $= 1$, $Q_1 = 1$, $Q_2 = 2$, $Q_3 = 3$, Max $= 5$

Min $= 1$, $Q_1 = 1$, $Q_2 = 2$, $Q_3 = 3{,}5$, Max $= 5$