Gymnase de Burier

Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz

EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE CULTURE GÉNÉRALE

JUIN 2019

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES, CORRIGÉ

Problème 1 (17 points)

Les parties A et B ci-dessous sont indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A

Pour ses vacances d'été, Antoine décide de faire de la randonnée. Il choisit 7 randonnées différentes qu'il répartit, une par semaine, sur ses 7 semaines de vacances.

a) De combien de manières différentes Antoine peut-il planifier ses vacances d'été ?

$7! = 5040$ possibilités

b) Vu que 2 des 7 randonnées se trouvent dans la même région, il décide de les placer sur deux semaines consécutives. De combien de manières différentes peut-il planifier son été ?

$2! \cdot 6! = 1440$ possibilités

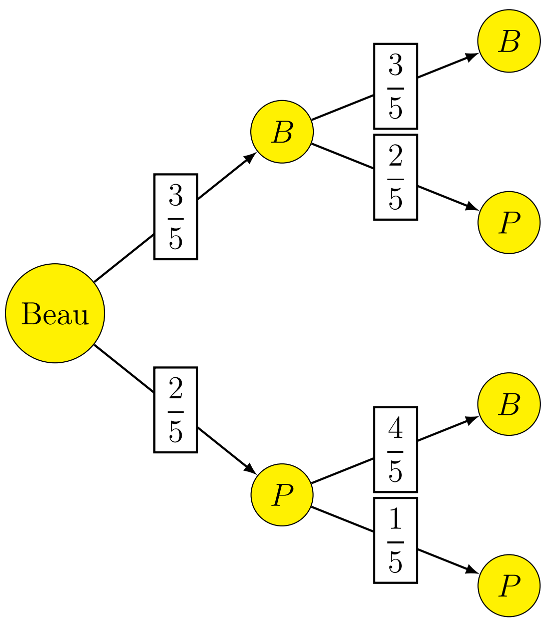
c) Malheureusement Antoine a trop de travail et ne peut pas prendre 7 semaines de vacances. Il n'aura que 5 semaines de vacances. Puisque 2 des 7 randonnées se ressemblent beaucoup, s'il fait l'une des deux, il ne fera pas l'autre. De combien de manières différentes peut-il planifier ses 5 semaines de vacances ?

Soit il en fait une des deux : $C_1^2 \cdot C_4^5 \cdot 5! = 1'200$
Soit il n'en fait aucune des deux : $5! = 120$
Donc un total de $1'200 + 120 = 1320$ possibilités.

PARTIE B

Une des randonnées qu'Antoine veut faire dure 3 jours et se trouve dans les Grisons. Lorsqu'Antoine part le premier jour, il fait beau. Une étude statistique montre que dans cette région, s'il fait beau un jour, il y a 3 chances sur 5 qu'il fasse beau le lendemain, alors que s'il pleut, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est de 20 %.

d) Construire l'arbre des probabilités de la météo pour ces 3 jours dans les Grisons.



e) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le 2^e jour et qu'il pleuve le 3^e jour de cette randonnée dans les Grisons ?

$$P(BP) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 24\,\%$$

f) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le 3^e jour de cette randonnée dans les Grisons ?

$$P(3B) = P(BB\,ou\,PB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{17}{25} = 68\,\%$$

g) Le 3^e jour, lorsqu'Antoine termine sa randonnée, il fait beau. Quelle est la probabilité qu'il ait fait beau le 2^e jour également ?

$$P(2B\,|\,3B) = \frac{P(BB)}{P(3B)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{9}{17} \simeq 52{,}94\,\%$$

Problème 2 (16 points)

Un atelier d'art fabrique des bracelets et des colliers.

- Il faut 50 g de métal et 1 heure de travail pour fabriquer un bracelet.
- Il faut 100 g de métal et 3 heures de travail pour fabriquer un collier.

L'atelier dispose au maximum de 2 kg de métal par jour.
Au total, les ouvriers peuvent travailler au maximum 50 heures par jour.
Comme tous les ouvriers ne maîtrisent pas la fabrication des colliers, il est possible de fabriquer au maximum 12 colliers par jour.
Un bracelet rapporte un bénéfice de 30 francs et un collier rapporte un bénéfice de 50 francs.

a) Compléter le tableau suivant :

	x bracelets	y colliers	À disposition (au maximum)
Métal $[grammes]$	$50x$	$100y$	$2'000$
Main d'oeuvre $[heures]$	$1x$	$3y$	50

b) Déterminer le système de contraintes en lien avec les conditions de fabrication.

$$\begin{cases} 50x + 100y \leq 2'000 \\ x + 3y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 12 \end{cases}$$

c) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système du point b) dans le système d'axes ci-dessous.

$50x + 100y = 2'000$

$5x + 10y = 200$

$x + 2y = 40$

$2y = -x + 40$

$y = -\frac{1}{2}x + 20$

$x + 3y = 50$

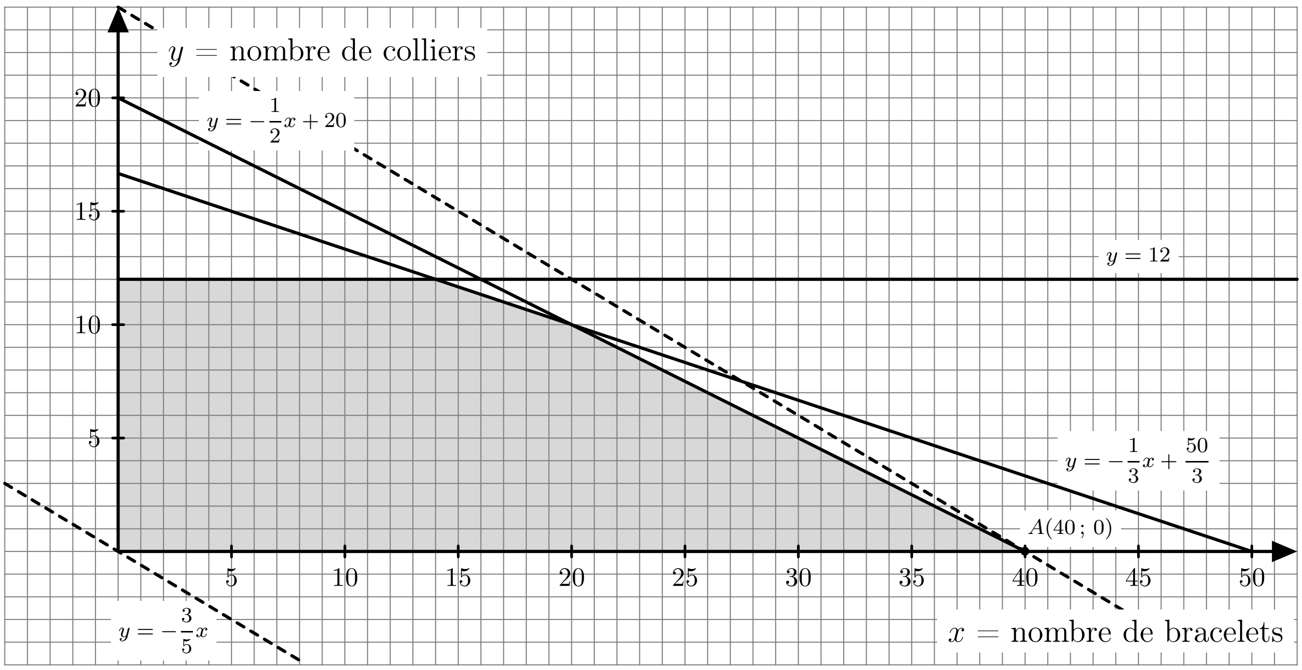
$3y = -x + 50$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{50}{3}$

$x + 3y = 50$

$(50\,;\,0)$

$(20\,;\,10)$



d) Déterminer le nombre de bracelets et de colliers qu'il faut fabriquer chaque jour afin d'obtenir un bénéfice maximum, puis calculer ce bénéfice.

Fonction objectif : $f(x\,;\,y) = 30x + 50y$

$30x + 50y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 5y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5y = -3x \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{5}x$

La // à cette droite la plus éloignée de l'origine passe par le point A, intersection entre $y = -\frac{1}{2}x + 20$ et $y = 0$. Ainsi, en résolvant $-\frac{1}{2}x + 20 = 0$, on obtient $x = 40$.

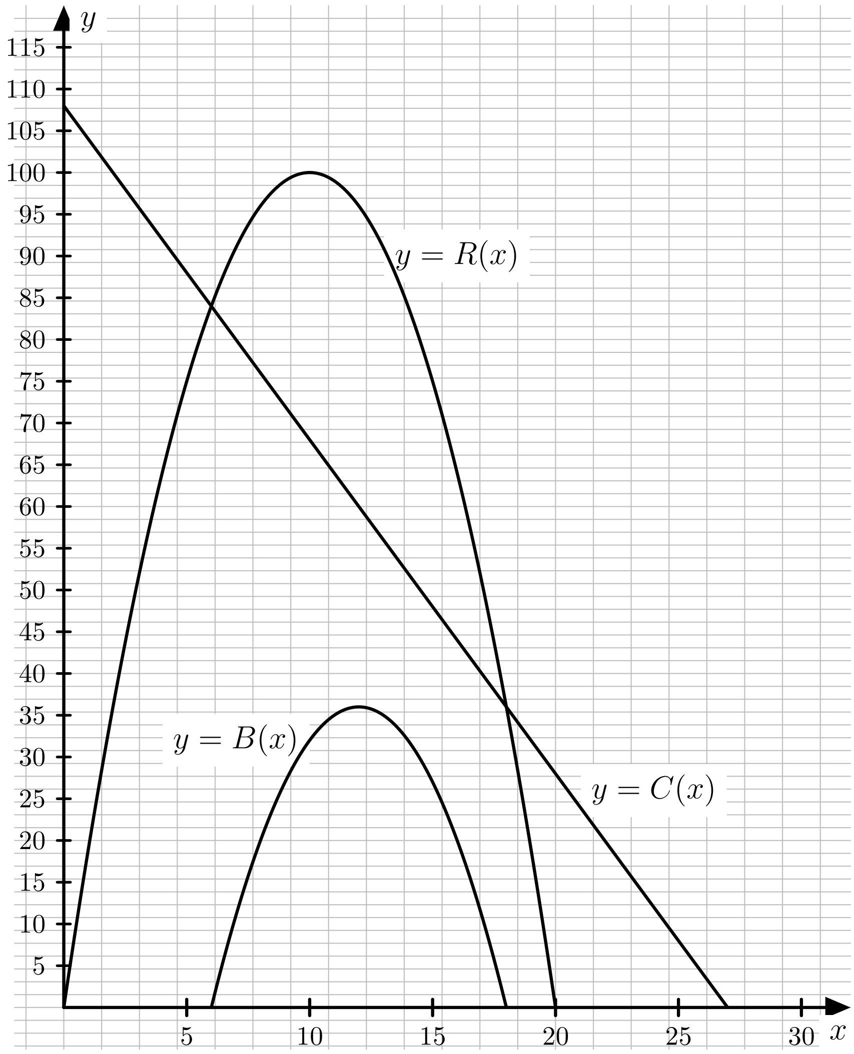
Il faut donc fabriquer 40 bracelets et 0 collier.

Bénéfice maximum : $f(40\,;\,0) = 30 \cdot 40 + 50 \cdot 0 = 1'200$ francs.

Problème 3 (11 points)

On a représenté le graphe de trois fonctions sur le graphe ci-dessous :

$y = R(x)$, $y = C(x)$ et $y = B(x)$



a) Que vaut l'ordonnée à l'origine de C ? 108

b) Quels sont les zéros de B ? 6 et 18

c) Combien vaut $R(10)$? 100

d) Quelles sont les solutions de l'équation $R(x) = 75$? 5 et 15

e) Pour quelle valeur de x la fonction B prend-elle une valeur maximale ? 12

f) Quelles sont les solutions de l'équation $R(x) = C(x)$? 6 et 18

On considère maintenant que :

- $R(x)$ est le revenu (en francs) obtenu par la vente de x objets
- $C(x)$ est le coût de fabrication (en francs) de x objets
- $B(x)$ est le bénéfice (en francs) obtenu par la vente de x objets

g) Quel est le revenu maximal ? 100 francs

h) Pour combien d'objets vendus le bénéfice est-il maximal ? 12 objets

i) Calculer $R(12) - C(12)$. Quel est le lien avec B ?

$R(12) - C(12) = 96 - 60 = 36 = B(12)$

j) De manière générale, que peut-on dire de $R(x) - C(x)$?

$R(x) - C(x) = B(x)$

Problème 4 (9 points)

Antoine veut s'acheter une voiture et il hésite entre deux modèles A et B.

- Pour le modèle A, la valeur (en francs) de la voiture est donnée par la formule suivante :

$$A(t) = 30'000 \cdot 0{,}8^t$$

où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

- Pour le modèle B, la voiture coûte 25'000 francs à l'achat.
Ensuite, la voiture perd 40 % de sa valeur chaque année.

a) Quel est le prix d'achat du modèle A ?

$A(0) = 30'000 \cdot 0{,}8^0 = 30'000$ francs

b) Trouver la fonction $B(t)$ exprimant la valeur (en francs) du modèle B, où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

Comme la voiture perd 40% de sa valeur, il reste 60% de sa valeur.

$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$25'000.-$	$15'000.-$	$9'000.-$	$5'400.-$	$3'240.-$	$1'944.-$

$B(t) = 25'000 \cdot 0{,}6^t$ où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

c) Quelle est, en %, la perte annuelle du modèle A ?

La voiture garde 80% de sa valeur. La perte annuelle est donc de 20%.

d) Quelles sont les valeurs des deux voitures 5 ans après leur achat ?

Voiture A : $A(5) = 30'000 \cdot 0{,}8^5 = 9'830{,}40$ francs

Voiture B : $B(5) = 25'000 \cdot 0{,}6^5 = 1'944$ francs

e) Sachant qu'Antoine va revendre sa voiture après 5 ans, quel modèle doit-il acheter s'il veut minimiser ses coûts ? Justifier.

Voiture A : $30'000 - 9'830{,}40 = 20'169{,}60$ francs.

Voiture B : $25'000 - 1'944 = 23'056$ francs.

Il devrait acheter la voiture A : $23'056 - 20'169{,}60 = 2'886{,}40$ francs d'économie.

Problème 5 (10 points)

L'office fédéral de la statistique a publié les chiffres ci-dessous pour l'année 2017 (effectifs en milliers). On a compté le nombre de pièces par logement pour les immeubles locatifs à plusieurs logements dans toute la Suisse.

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

On étudie le nombre de pièces par logement, variable quantitative discrète.

b) Compléter la colonne des fréquences dans le tableau de distribution de cette variable. Les autres colonnes vides sont à votre disposition pour d'éventuels calculs.

Nb de pièces x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i [%]	$x_i \cdot f_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert^2$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert^2 \cdot f_i$
1	150	6	6	2,28	5,20	0,312
2	400	16	32	1,28	1,64	0,262
3	800	32	96	0,28	0,08	0,025
4	900	36	144	0,72	0,52	0,1866
5	250	10	50	1,72	2,96	0,2958
TOTAL	2500	100				1,081

c) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette distribution. Justifier.

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 16 + ... + 5 \cdot 10}{100} = \frac{328}{100} = 3{,}28$$

$$\sigma^2 = \frac{1^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 16 + ... + 5^2 \cdot 10}{100} - \bar{x}^2 = 1{,}0816 \Rightarrow \sigma = 1{,}04$$

Problème 6 (10 points)

Lors de la course populaire reliant Montreux aux Rochers de Naye, on a relevé les temps en minutes des femmes de la catégorie « élite » et on les a répartis en classes dans le tableau de distribution ci-dessous :

Temps $[min]$	Fréquence [%]	Fréquence cumulée [%]
$[105; 120[$	1.9	1.9
$[120; 135[$	2.8	4.7
$[135; 150[$	7	11.7
$[150; 165[$	16.8	28.5
$[165; 180[$	18.7	47.2
$[180; 195[$	21.5	68.7
$[195; 210[$	15.4	84.1
$[210; 225[$	8.9	93
$[225; 240[$	4.2	97.2
$[240; 255[$	2.8	100

a) Donner le type de la variable étudiée.

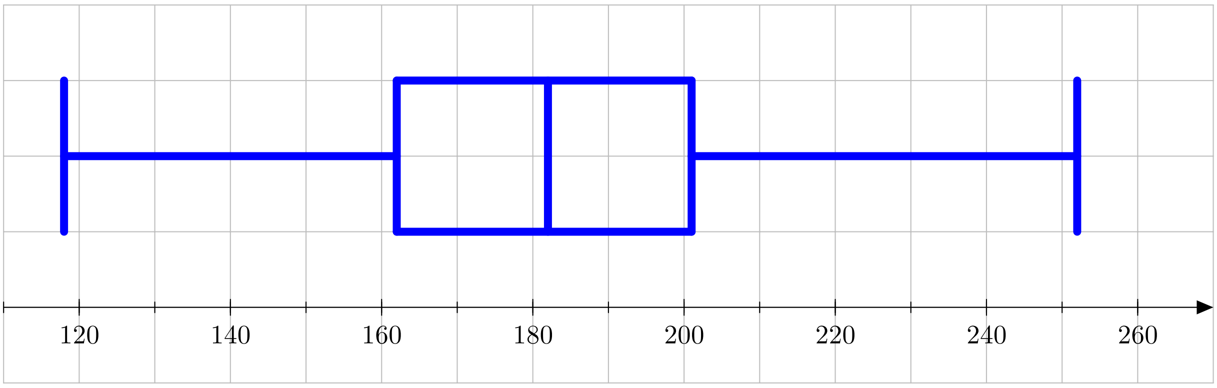
Variable quantitative continue

b) Montrer que la valeur arrondie à l'unité du troisième quartile q_3 est 201 minutes. Donner les détails de vos calculs.

Le 75% se trouve dans la classe $[195; 210[$,

$$\begin{array}{c|c} 15{,}4\% & 15 \\ \hline 6{,}3\% & x \end{array} \qquad \Rightarrow x = \frac{6{,}3 \cdot 15}{15{,}4} \cong 6{,}14 \ \Rightarrow \ q_3 \cong 195 + 6 = 201.$$

c) On donne le premier quartile, $q_1 = 162$ minutes et la médiane $q_2 = 182$ minutes.
Dans le système d'axes donné ci-dessous, dessiner la boîte à moustaches (boxplot) de cette distribution. Les valeurs extrêmes exactes sont 118 et 252 minutes.



d) Que dire de la répartition des données au vu de la forme de cette boîte à moustaches (boxplot) ?

La répartition est symétrique par rapport à la médiane. (Les valeurs suivent vraisemblablement une loi normale...)

Problème 7 (12 points)

Lors d'une course populaire, on a mesuré le temps en minutes réalisé par les 261 coureurs. On suppose que la distribution de ces temps suit un modèle normal dont la moyenne vaut 151 minutes et l'écart-type 25 minutes.

On prélève un échantillon aléatoire de 50 sportifs parmi les 261 coureurs.

a) Pourquoi peut-on dire que la distribution de la moyenne des temps de ces 50 sportifs suit une loi normale ? Justifier la réponse.
Car la population elle-même suit une loi normale.
Ou alors car l'échantillon est de plus que 30.

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

$n = 50 > \dfrac{261}{20} = 13{,}05$ donc on a un grand échantillon.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{25}{\sqrt{50}} \cdot \sqrt{\frac{211}{260}} \cong 3{,}19$$

$\bar{X} \sim \mathcal{N}(151; 3{,}19^2)$

c) Quelle est la probabilité que la moyenne des temps de ces 50 coureurs soit supérieure à 161 minutes ? Justifier la réponse.

$P(\bar{X} > 161) = P\left(Z > \dfrac{161 - 151}{3{,}19}\right) = 1 - P\,(Z < 3{,}13) = 0{,}09\%$

d) Après la course, on calcule que le temps moyen de ces 50 coureurs est de 142 minutes. Ces 50 coureurs sont-ils significativement meilleurs que les autres ? Justifier avec un test d'hypothèse en utilisant un seuil de signification de 1 %.

H_0 : Le temps moyen est de 151 minutes.
H_1 : Le temps moyen est de moins de 151 minutes.
Seuil de 1 % et test unilatéral :

$P(Z > a) = 0{,}99 = P(Z < -a) \Rightarrow a = -2{,}33$

Test : $\dfrac{142 - 151}{3{,}19} \cong -2{,}82.$

Ainsi, puisque $-2{,}82 < -2{,}33$, H_0 est rejetée et on peut donc supposer H_1 vraie.
Ces 50 coureurs sont significativement meilleurs que les autres.