Gymnase de Burier

Case postale 96
Rte de Chailly 170
1814 La Tour-de-Peilz

EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE CULTURE GÉNÉRALE

JUIN 2019

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

Durée de l'épreuve : 4 heures

Consignes : La rédaction de vos réponses (avec détails des calculs) se fait en-dessous de chaque question. Si vous manquez de place, prière d'utiliser les feuilles quadrillées à disposition.

Matériel autorisé : Formulaires officiels non annotés
Calculatrice Texas Instruments TI 30 ECO RS

Problème 1 (17 points)

Les parties A et B ci-dessous sont indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A

Pour ses vacances d'été, Antoine décide de faire de la randonnée. Il choisit 7 randonnées différentes qu'il répartit, une par semaine, sur ses 7 semaines de vacances.

a) De combien de manières différentes Antoine peut-il planifier ses vacances d'été ?

b) Vu que 2 des 7 randonnées se trouvent dans la même région, il décide de les placer sur deux semaines consécutives. De combien de manières différentes peut-il planifier son été ?

c) Malheureusement Antoine a trop de travail et ne peut pas prendre 7 semaines de vacances. Il n'aura que 5 semaines de vacances et ne fera donc que 5 randonnées.
Puisque 2 des 7 randonnées se ressemblent beaucoup, s'il fait l'une des deux, il ne fera pas l'autre. De combien de manières différentes peut-il planifier ses 5 semaines de vacances ?

PARTIE B

Une des randonnées qu'Antoine veut faire dure 3 jours et se trouve dans les Grisons. Lorsqu'Antoine part le premier jour, il fait beau. Une étude statistique montre que dans cette région, s'il fait beau un jour, il y a 3 chances sur 5 qu'il fasse beau le lendemain, alors que s'il pleut, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est de 20 %.

d) Construire l'arbre des probabilités de la météo pour ces 3 jours dans les Grisons.

e) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le 2e jour et qu'il pleuve le 3e jour de cette randonnée dans les Grisons ?

f) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le 3e jour de cette randonnée dans les Grisons ?

g) Le 3e jour, lorsqu'Antoine termine sa randonnée, il fait beau. Quelle est la probabilité qu'il ait fait beau le 2e jour également ?

Problème 2 (16 points)

Un atelier d'art fabrique des bracelets et des colliers.

- Il faut 50 g de métal et 1 heure de travail pour fabriquer un bracelet.
- Il faut 100 g de métal et 3 heures de travail pour fabriquer un collier.

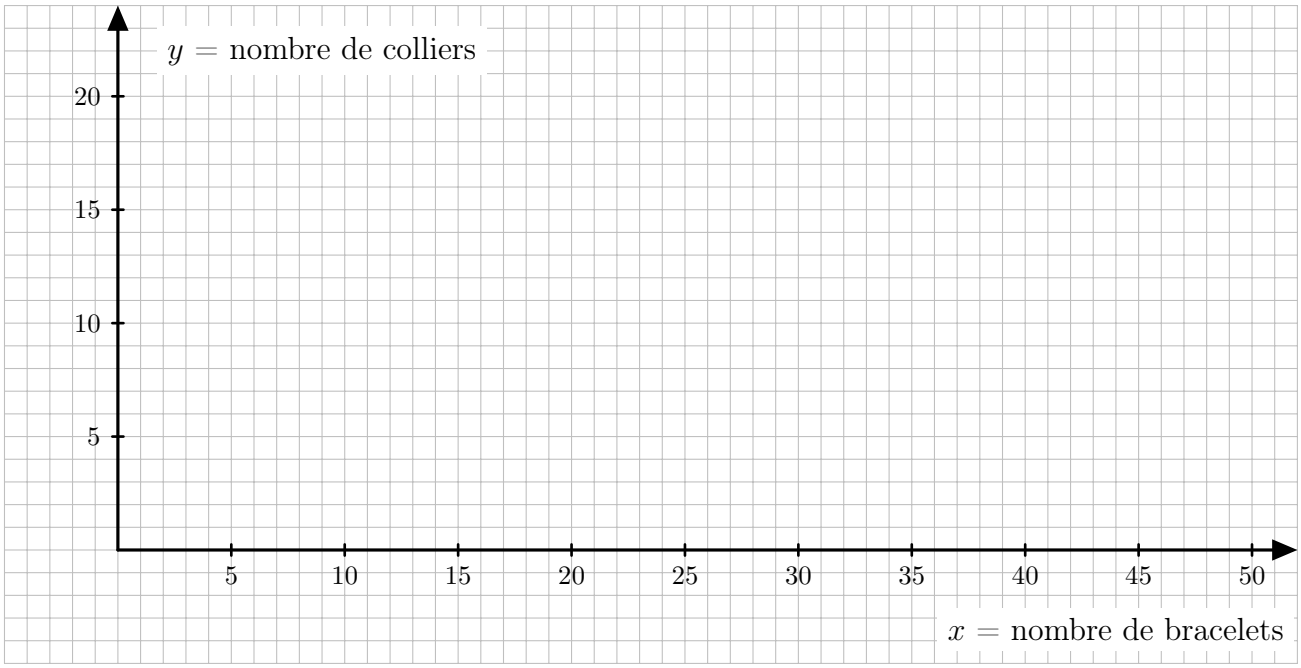
L'atelier dispose au maximum de 2 kg de métal par jour.
Au total, les ouvriers peuvent travailler au maximum 50 heures par jour.
Comme tous les ouvriers ne maîtrisent pas la fabrication des colliers, il est possible de fabriquer au maximum 12 colliers par jour.
Un bracelet rapporte un bénéfice de 30 francs et un collier rapporte un bénéfice de 50 francs.

a) Compléter le tableau suivant :

	x bracelets	y colliers	À disposition (au maximum)
Métal [*grammes*]			
Main d'oeuvre [*heures*]			

b) Déterminer le système de contraintes en lien avec les conditions de fabrication.

c) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système du point b) dans le système d'axes ci-dessous.

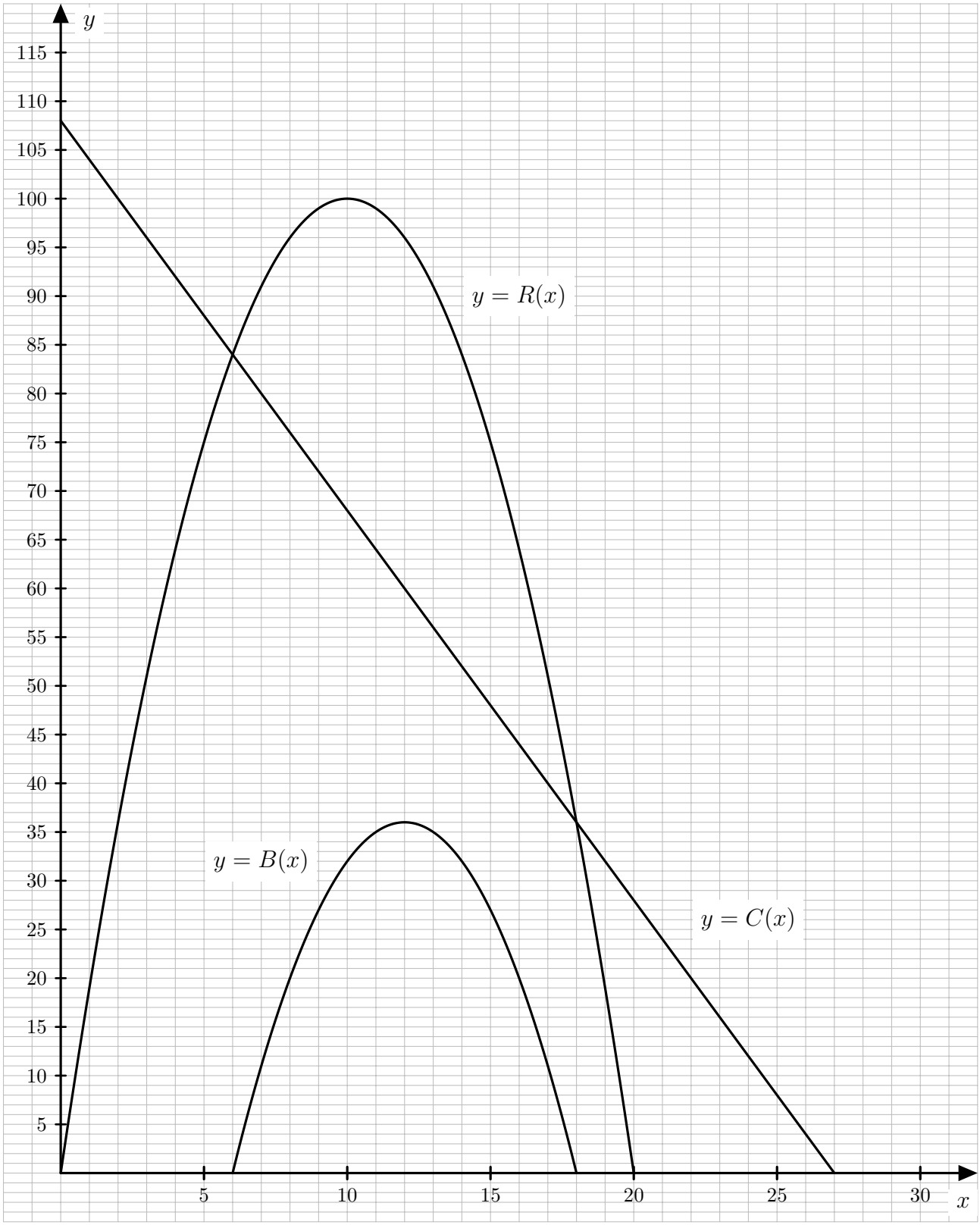


d) Déterminer le nombre de bracelets et de colliers qu'il faut fabriquer chaque jour afin d'obtenir un bénéfice maximum, puis calculer ce bénéfice.

Problème 3 (11 points)

On a représenté le graphe de trois fonctions sur le graphe ci-dessous :

$y = R(x)$, $y = C(x)$ et $y = B(x)$



a) Que vaut l'ordonnée à l'origine de C ?

b) Quels sont les zéros de B ?

c) Combien vaut $R(10)$?

d) Quelles sont les solutions de l'équation $R(x) = 75$?

e) Pour quelle valeur de x la fonction B prend-elle une valeur maximale ?

f) Quelles sont les solutions de l'équation $R(x) = C(x)$?

On considère maintenant que :

- $R(x)$ est le revenu (en francs) obtenu par la vente de x objets
- $C(x)$ est le coût de fabrication (en francs) de x objets
- $B(x)$ est le bénéfice (en francs) obtenu par la vente de x objets

g) Quel est le revenu maximal ?

h) Pour combien d'objets vendus le bénéfice est-il maximal ?

i) Calculer $R(12) - C(12)$. Quel est le lien avec B ?

j) De manière générale, que peut-on dire de $R(x) - C(x)$?

Problème 4 (9 points)

Antoine veut s'acheter une voiture et il hésite entre deux modèles A et B.

- Pour le modèle A, la valeur (en francs) de la voiture est donnée par la formule suivante :

$$A(t) = 30'000 \cdot 0{,}8^t$$

  où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

- Pour le modèle B, la voiture coûte 25'000 francs à l'achat.
  Ensuite, la voiture perd 40 % de sa valeur chaque année.

a) Quel est le prix d'achat du modèle A ?

b) Trouver la fonction $B(t)$ exprimant la valeur (en francs) du modèle B, où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

c) Quelle est, en %, la perte annuelle du modèle A ?

d) Quelles sont les valeurs des deux voitures 5 ans après leur achat ?

e) Sachant qu'Antoine va revendre sa voiture après 5 ans, quel modèle doit-il acheter s'il veut minimiser ses coûts ? Justifier.

Problème 5 (10 points)

L'office fédéral de la statistique a publié les chiffres ci-dessous pour l'année 2017 (effectifs en milliers). On a compté le nombre de pièces par logement pour les immeubles locatifs à plusieurs logements dans toute la Suisse.

a) Décrire la variable statistique étudiée et donner son type.

b) Compléter la colonne des fréquences dans le tableau de distribution de cette variable. Les autres colonnes vides sont à votre disposition pour d'éventuels calculs.

Nb de pièces x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i				
1	150					
2	400					
3	800					
4	900					
5	250					
TOTAL	2500					

c) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette distribution. Justifier.

Problème 6 (10 points)

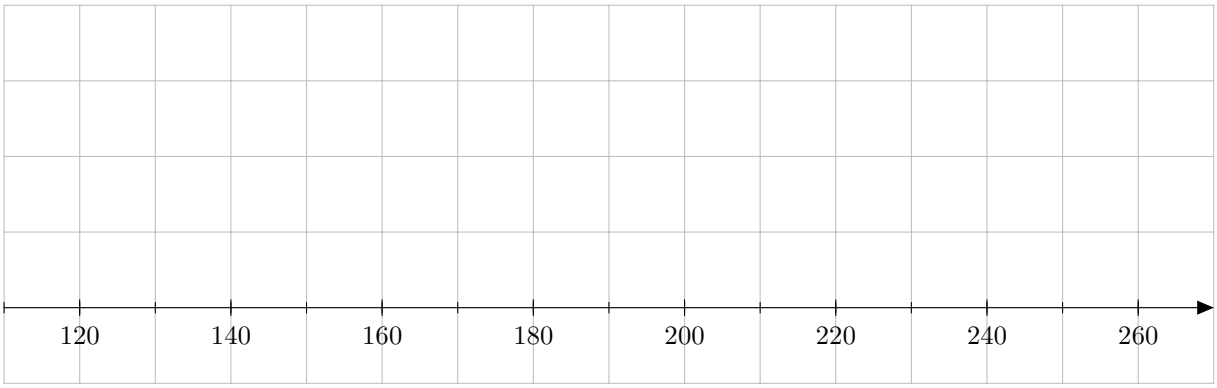
Lors de la course populaire reliant Montreux aux Rochers de Naye, on a relevé les temps en minutes des femmes de la catégorie « élite » et on les a répartis en classes dans le tableau de distribution ci-dessous :

Temps $[min]$	Fréquence [%]	Fréquence cumulée [%]
$[105; 120[$	1.9	1.9
$[120; 135[$	2.8	4.7
$[135; 150[$	7	11.7
$[150; 165[$	16.8	28.5
$[165; 180[$	18.7	47.2
$[180; 195[$	21.5	68.7
$[195; 210[$	15.4	84.1
$[210; 225[$	8.9	93
$[225; 240[$	4.2	97.2
$[240; 255[$	2.8	100

a) Donner le type de la variable étudiée.

b) Montrer que la valeur arrondie à l'unité du troisième quartile q_3 est 201 minutes. Donner les détails de vos calculs.

c) On donne le premier quartile, $q_1 = 162$ minutes et la médiane $q_2 = 182$ minutes.
Dans le système d'axes donné ci-dessous, dessiner la boîte à moustaches (boxplot) de cette distribution. Les valeurs extrêmes exactes sont 118 et 252 minutes.



d) Que dire de la répartition des données au vu de la forme de cette boîte à moustaches (boxplot) ?

Problème 7 (12 points)

Lors d'une course populaire, on a mesuré le temps en minutes réalisé par les 261 coureurs. On suppose que la distribution de ces temps suit un modèle normal dont la moyenne vaut 151 minutes et l'écart-type 25 minutes.

On prélève un échantillon aléatoire de 50 sportifs parmi les 261 coureurs.

a) Pourquoi peut-on dire que la distribution de la moyenne des temps de ces 50 sportifs suit une loi normale ? Justifier la réponse.

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que la moyenne des temps de ces 50 coureurs soit supérieure à 161 minutes ? Justifier la réponse.

d) Après la course, on calcule que le temps moyen de ces 50 coureurs est de 142 minutes. Ces 50 coureurs sont-ils significativement meilleurs que les autres ? Justifier avec un test d'hypothèse en utilisant un seuil de signification de 1 %.