5 Inférence statistique

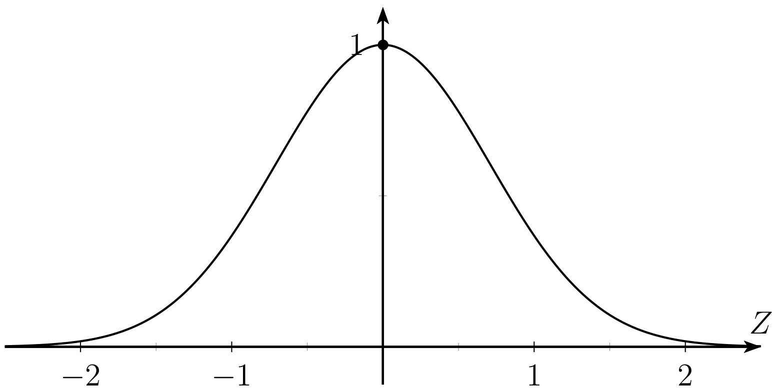
5.1 Loi normale

Modèle 29. Résoudre l'exercice 5.4 (d et h)

Normalisation

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, alors

$$X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$$



Modèle 30. Résoudre l'exercice 5.6

a) • $\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

• $X \sim \mathcal{N}(50\,;16) \quad \Rightarrow \ldots$

• $z_{60} = \ldots$

• $P(X > 60) = \ldots$

f) • $\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

• $X \sim \mathcal{N}(0\,;10) \quad \Rightarrow \ldots$

• $z_1 = \ldots$

• $P(|X| > 1) = \ldots$

5.2 Théorème central limite (TCL)

Notations : Population de taille N et échantillon de taille n.

Condition : $n \geq 30$ ou population qui suit une loi normale.

Si X_1, X_2, $\ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et suivent la même loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, alors

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu\,;\frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{si } n \to +\infty$$

et

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \sim \mathcal{N}(0\,;1) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\bar{X}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{si } n < \dfrac{N}{20} \text{ (petit échantillon)} \\[2ex] \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} & \text{sinon (grand échantillon)} \end{cases}$$

Modèle 31. Résoudre l'exercice 5.14.

$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

Taille population : $N = \ldots$ et taille échantillon : $n = \ldots$

5.3 Intervalles de confiance

Condition : population qui suit une loi normale.
Notations :

///////////	Population	Échantillon
Taille	N	n
Moyenne	μ	$\bar{x}$
Variance	σ^2	s^2

I est un intervalle de confiance au niveau de confiance $1-\alpha$ (en %) pour μ si

$$P(\mu \in I) = 1-\alpha$$

α s'appelle le **seuil de l'intervalle de confiance**. Il représente le risque d'erreur.

La marge d'erreur se détermine comme suit :

$$E = q_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{X}}$$

où $q_{1-\alpha/2} = z \iff \Phi(z) = 1-\alpha/2$ (voir loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ formulaires p.28).

Alors l'intervalle de confiance I pour μ est : $\boxed{I = [\,\bar{x}-E\,;\bar{x}+E\,]}$

Modèle 32. Résoudre l'exercice 5.22.

Taille échantillon : $n = \ldots$

5.4 Test d'hypothèses

Tests d'hypothèse pour une moyenne

Condition : population qui suit une loi normale.

Soit H_0 une hypothèse appelée hypothèse nulle : l'échantillon provient d'une population de moyenne $\mu = \mu_0$

Soit H_1 une autre hypothèse appelée hypothèse alternative : l'échantillon provient d'une population de moyenne $\mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)

On définit le **seuil de signification** appelé α (compris entre 1% et 5%) tel que :

$$\alpha = \text{ probabilité de se tromper en rejetant } H_0$$

Le test d'hypothèse pour une moyenne comporte quatre étapes :

1. Hypothéses et seuil de signification :
   $H_0 : \mu = \mu_0$
   $H_1 : \mu < \mu_0$: test unilatéral à gauche (ou $\mu > \mu_0$: test unilatéral à droite)
2. Conditions d'application et représentation graphique (voir formulaires p.26) :
   Si $n \geq 30$, alors $\bar{X}$ suit approximativement une loi normale de moyenne $\mu_{\bar{x}}$ et d'écart-type $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
3. Point critique :
   $z = q_{1-\alpha} \iff \Phi(z) = 1 - \alpha$ (selon p.28)
   $E = z \cdot \sigma_{\bar{X}} \Rightarrow c = \mu - E$ (ou $c = \mu + E$ si test unilatéral à droite)
4. Règle de décision :
   Rejeter H_0 si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est inférieure à c
   (ou supérieure à c si test unilatéral à droite).

Modèle 33. Résoudre l'exercice 5.30.

Population : $\mu = \ldots$
Echantillon : $n = \ldots$; $\bar{x} = \ldots$; $\hat{\sigma} = \ldots$