

Exercice 5.17.

- X : âge des femmes ayant donné naissance à un enfant en Suisse en 2015
- $\mu = 32$ ans et $\sigma = 5$ ans
- Échantillon : $n = 100$ femmes

a) Par le TCL, car $n = 100 \geq 30 \Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma_{\bar{X}}^2)$

b) $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{5^2}{100} = 0.25 \Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}(32; 0.25)$

Remarque : $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{0.25} = 0.5$

c) • $c =$ écart en années par rapport à μ

$$\bullet z_{32-c} = \frac{32 - c - 32}{0.5} = \frac{-c}{0.5} \quad ; \quad z_{32+c} = \frac{32 + c - 32}{0.5} = \frac{c}{0.5}$$

$$\bullet P(|\bar{X} - 32| < c) = 100\% - 5\% \Rightarrow P(32 - c < \bar{X} < 32 + c) = 95\% \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{c}{0.5} < Z < \frac{c}{0.5}\right) = 0.95 \Rightarrow P\left(|Z| < \frac{c}{0.5}\right) = 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{0.5}\right) - 1 = 0.95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c}{0.5}\right) = 0.975 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{0.5} \cong 1.96 \Rightarrow c \cong 0.98$$

• La moyenne des réponses des 100 femmes doit se situer entre 31 et 33 ans environ ($32 - 0.98 = 31.02$ et $32 + 0.98 = 32.98$).

d) • $z_{33.7} = \frac{33.7 - 32}{0.5} = 3.4$

$$\bullet P(\bar{X} \geq 33.7) = P(Z \geq 3.4) = 1 - P(Z < 3.4) =$$

$$= 1 - \Phi(3.4) \cong 1 - 0.9997 \cong 0.03\%$$

Oui, c'est étonnant, car cette situation a 0.03% de chances de se produire.