Exercice 5.16.

- X : âge des 200 travailleurs d'une usine
- $\mu = 38.2\,\text{ans}$ et $\sigma = 5.4\,\text{ans}$
- Population : $N = 200$ travailleurs et échantillon : $n = 25$ travailleurs

a) On a $n = 25 \leq 30$, mais on sait que les données de base suivent déjà une loi normale.

b) • $\dfrac{N}{20} = \dfrac{200}{20} = 10 < 25 \Rightarrow n > \dfrac{N}{20} \Rightarrow$ grand échantillon

• $\sigma_{\bar{X}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n} \cdot \dfrac{N-n}{N-1} = \dfrac{5.4^2}{25} \cdot \dfrac{200-25}{200-1} \cong 1.0257 \Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}(38.2\,;1.0257)$

Remarque : $\sigma_{\bar{X}} \cong \sqrt{1.0257} \cong 1.0128$

c) • $z_{35} = \dfrac{35-38.2}{1.0128} = -3.16 \quad ; \quad z_{40} = \dfrac{40-38.2}{1.0128} = 1.78$

• $P(35 < \bar{X} < 40) = P(-3.16 < Z < 1.78) = P(Z < 1.78) - P(Z < -3.16) =$

$= \Phi(1.78) - \Phi(-3.16) = \Phi(1.78) - [1 - \Phi(3.16)] \cong 0.9625 - 1 + 0.9992 \cong 96.17\%$

d) • $c =$ écart en années par rapport à μ

• $z_{38.2-c} = \dfrac{38.2-c-38.2}{1.0128} = \dfrac{-c}{1.0128} \quad ; \quad z_{38.2+c} = \dfrac{38.2+c-38.2}{1.0128} = \dfrac{c}{1.0128}$

• $P(|\bar{X} - 38.2| < c) = 100\% - 1\% \Rightarrow P(38.2 - c < \bar{X} < 38.2 + c) = 99\% \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\dfrac{-c}{1.0128} < Z < \dfrac{c}{1.0128}\right) = 0.99 \Rightarrow P\left(|Z| < \dfrac{c}{1.0128}\right) = 0.99 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \Phi\left(\dfrac{c}{1.0128}\right) - 1 = 0.99 \Rightarrow \Phi\left(\dfrac{c}{1.0128}\right) = 0.995 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{c}{1.0128} \cong 2.575 \Rightarrow c \cong 2.6$

• La moyenne d'âge de ces 25 travailleurs doit se situer entre $38.2 - 2.6 = 35.6$ ans et $38.2 + 2.6 = 40.8$ ans.