Modèle 31 : Théorème Central Limite (TCL)

Notations : Population de taille N et échantillon de taille n.

Condition : $n \geq 30$ ou population qui suit une loi normale.

Si X_1, X_2, $\ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et suivent la même loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, alors

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu\,;\sigma^2_{\bar{X}}\right) \quad \text{si } n \to +\infty$$

et

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \sim \mathcal{N}(0\,;1) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\bar{X}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{si } n < \dfrac{N}{20} \text{ (petit échantillon)} \\[2ex] \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} & \text{sinon (grand échantillon)} \end{cases}$$

Exercice 5.14.

• X : revenu annuel (en francs) des 3'000 médecins d'une région

• Population : $N = 3'000$ médecins et échantillon : $n = 100$ médecins

• $\mu = 200'000.-$ et $\sigma = 20'000.-$

a) Par le TCL, car $n = 100 \geq 30 \Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu\,;\sigma^2_{\bar{X}}\right)$

b) • $\dfrac{N}{20} = \dfrac{3'000}{20} = 150 > 100 \Rightarrow n < \dfrac{N}{20} \Rightarrow$ petit échantillon

• $\sigma^2_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{20'000^2}{100} = 4'000'000 \Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}(200'000\,;4'000'000)$

Remarque : $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{4'000'000} = 2'000$

c) $P(\bar{X} = 200'000) = 0\%$

d) • $z_{195'000} = \dfrac{195'000 - 200'000}{2'000} = -2.5 \quad ; \quad z_{205'000} = \dfrac{205'000 - 200'000}{2'000} = 2.5$

• $P(195'000 < \bar{X} < 205'000) = P(-2.5 < Z < 2.5) = P(|Z| < 2.5) =$

$= 2 \cdot \Phi(2.5) - 1 \cong 2 \cdot 0.9938 - 1 \cong 98.76\%$

e) • $z_{198'000} = \dfrac{198'000 - 200'000}{2'000} = -1 \quad ; \quad z_{202'000} = \dfrac{202'000 - 200'000}{2'000} = 1$

• $P(|\bar{X} - 200'000| > 2'000) = P(\bar{X} < 198'000) + P(\bar{X} > 202'000) =$

$= P(Z < -1) + P(Z > 1) = P(|Z| > 1) = 2[1 - P(Z < 1)] =$

$= 2[1 - \Phi(1)] \cong 2 \cdot 0.1587 \cong 31.74\%$