GYMNASE DE BURIER

2C Théorie de mathématiques

Claude Chevalley

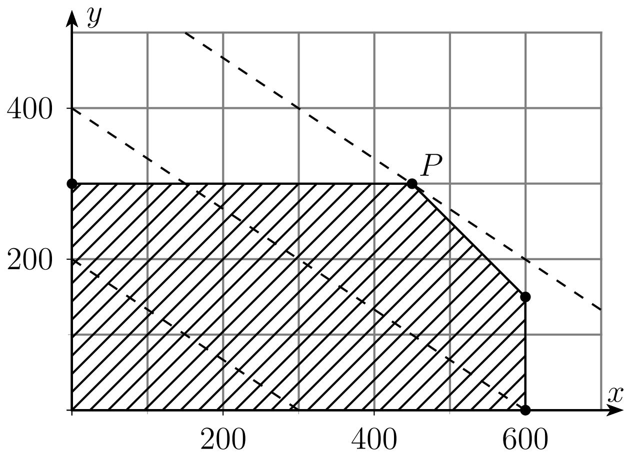


Table des matières

1 Programmation linéaire

1.1 Introduction à la programmation linéaire

1.1.1 Inéquations linéaires

Modèle 1. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une inéquation du type

$$ax + by + c < 0 \quad (\text{ou } > 0) \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$$

Méthode :

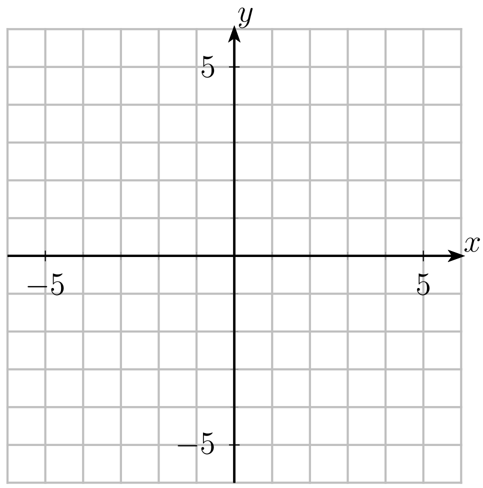
1) Ecrire l'équation $ax + by + c = 0$ associée à l'inéquation, puis isoler "y".
2) Représenter la droite **frontière** d'équation : $y = mx + h$.
3) Vérifier si l'origine satisfait l'inéquation.
4) Hachurer le demi-plan contenant tous les points solutions de l'inéquation.

Exemples :

$3x - 4y > 12$

1)

2) 4)

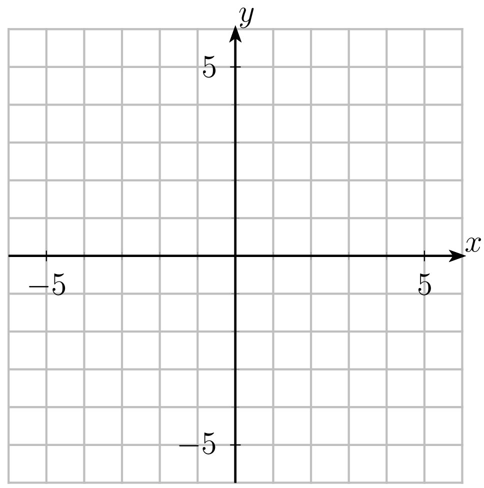


3)

$x + y \leq 3$

1)

2) 4)



3)

TRUC :

Remarque :

1.1.2 Systèmes d'inéquations linéaires

Modèle 2. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système d'inéquations.

Méthode :

1) Ecrire l'équation $ax + by + c = 0$ associée à chaque inéquation, puis isoler "y".
2) Représenter la droite associée à chaque équation.
3) Vérifier si l'origine satisfait chaque inéquation.
4) Hachurer les demi-plans contenant tous les points solutions de chaque inéquation.
5) Hachurer la **région R** du plan contenant tous les points solutions du système d'inéquations : c'est l'intersection des demi-plans de la partie 4).

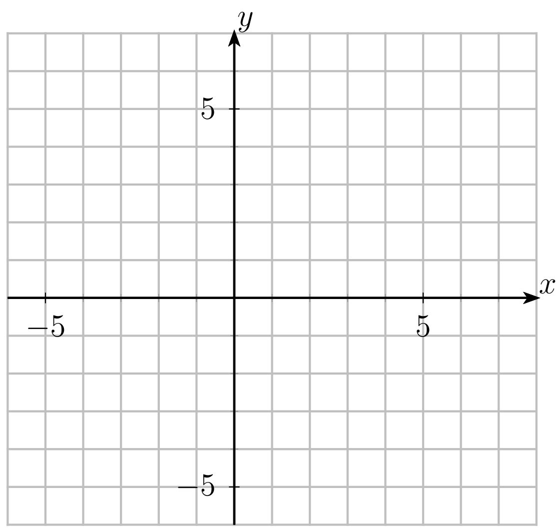
Exemple :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$

1)

1)

2) 4) 5)



3)

3)

1.1.3 Polygones des contraintes

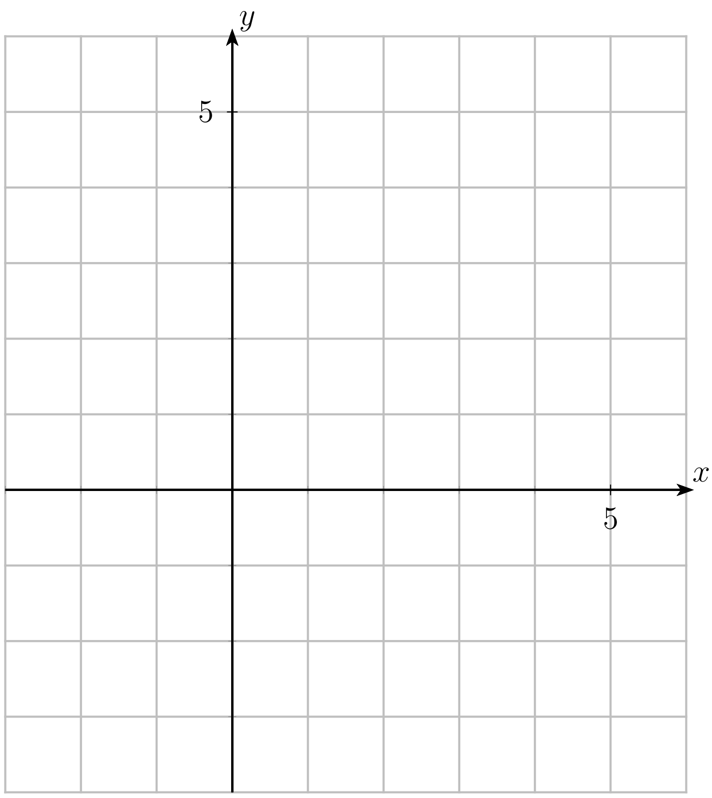
Modèle 3. Déterminer les sommets du polygone de solutions d'un système d'inéquations.

Méthode :

1) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations.
2) Déterminer algébriquement les coordonnées des sommets du **polygone des contraintes** : ce sont les sommets du polygone convexe délimitant la région R vue au modèle 2.

Exemple :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



1.1.4 Optimisation d'une fonction à deux variables

Modèle 4. Dans le polygone des contraintes, déterminer le maximum (ou le minimum) d'une fonction f appelée **fonction économique** (ou fonction objectif).

Méthode :

1) Représenter le polygone des contraintes.
2) Déterminer les coordonnées des sommets du polygone des contraintes.
3) Calculer la valeur prise par la fonction f en chacun des sommets.

Exemple :
On donne le système d'inéquations suivant (vu au modèle 3) :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

On considère la fonction économique f définie par

$$f(x; y) = 5x + 2y$$

a) Parmi les deux points $D(1\,;2)$ et $E(2\,;1)$, lequel maximise-t-il le mieux la fonction f ?

- $f(1\,;2) = ...$
- $f(2\,;1) = ...$

$\Rightarrow$ le point ... maximise le mieux la fonction f.

b) Quel pourrait être le point $P(x; y)$ du polygone des contraintes $OABC$ maximisant la fonction f ?

Selon le modèle 3, les sommets du polygone des contraintes $OABC$ sont :

$A(9/5\,;0)$; $B(21/8\,;11/8)$; $C(0\,;4)$

- $f(9/5\,;0) = ...$
- $f(21/8\,;11/8) = ...$
- $f(0\,;4) = ...$

$\Rightarrow$ le point maximisant la fonction f est en fait le sommet ... .

1.1.5 Problème de programmation linéaire à deux variables

Modèle 5. Résoudre l'exercice 1.7.

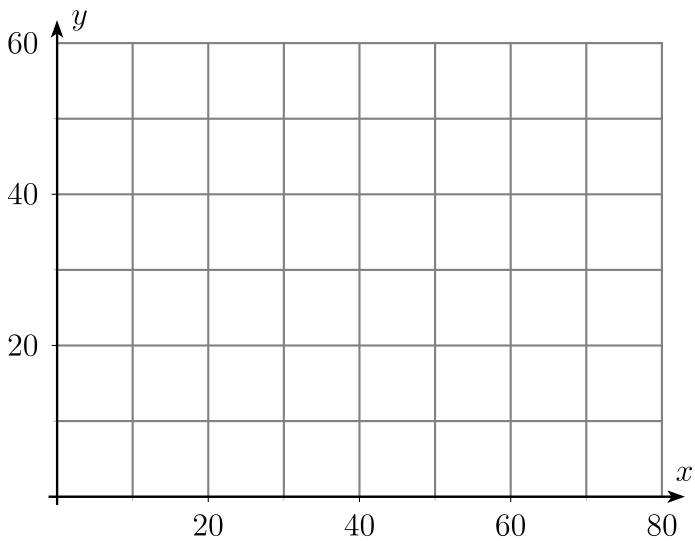
a) • Variables : $x = ...$ $y = ...$

• Fonction économique (objectif) : $f(x;y) = ...\,x + ...\,y$

• Contraintes :

$$\begin{cases} ... \\ ... \\ ... \\ ... \end{cases}$$

b) Polygone des contraintes :



c) Profit maximal :

1.2 Problèmes

Modèle 6. Résoudre un problème de programmation linéaire à deux variables.

Méthode :

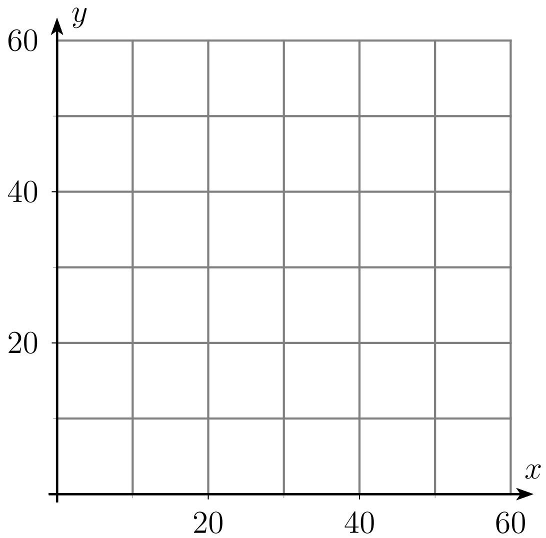
1) Définir les deux variables (souvent x et y).
2) Traduire toutes les contraintes en un système d'inéquations.
3) Exprimer la fonction économique f à optimiser.
4) Représenter le polygone des contraintes.
5) Par l'origine, tracer la droite d représentant la fonction f.
6) Lors de la translation de la droite d, déterminer graphiquement le point optimal P comme le dernier point du polygone des contraintes touché par d'.
7) Déterminer algébriquement les coordonnées du point optimal P.
8) Répondre au problème par une phrase.

Exemple : exercice 1.8 a)

1) Variables : $x = ...$ $y = ...$
2) Système des contraintes :

$$\begin{cases} ... \\ ... \\ ... \\ ... \end{cases}$$

3) Fonction économique : $f(x; y) = ...\, x + ...\, y$
4) Polygones des contraintes :



5) sur le graphique
6) sur le graphique
7) ...

8) ...

2 Fonctions quadratiques, graphes et optimisation

2.1 Généralités et esquisse du graphe

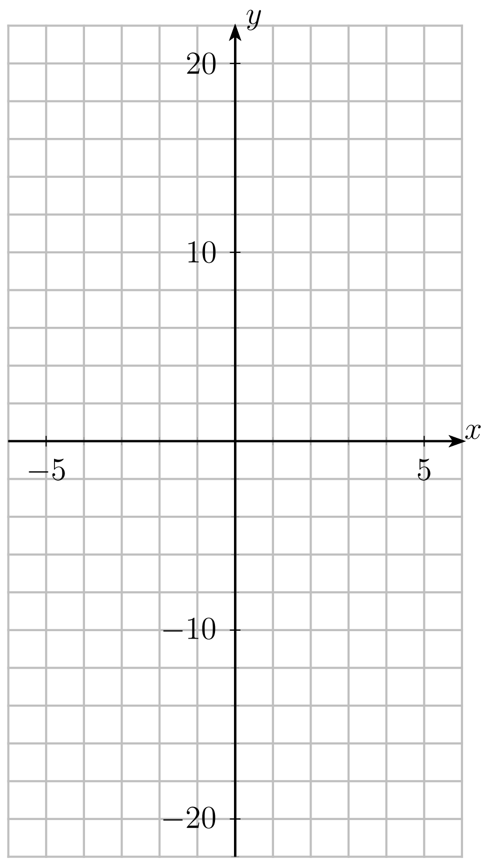
2.1.1 Esquisse du graphe d'une fonction quadratique

Modèle 7. Résoudre l'exercice 2.1 (la fonction f).

• Tableau de valeurs :

x	$f(x) = 2x^2 - 4x - 16$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	

• Graphe de f :



2.1.2 Caractéristiques de la parabole associée à une fonction quadratique

Modèle 8. Suite de l'exercice 2.1 avec $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$.

$$a = \ldots\ldots\,;\ b = \ldots\ldots\,;\ c = \ldots\ldots$$

Méthode :

1) Déterminer **l'orientation** de la parabole en déterminant le signe de a.
2) Déterminer **les zéros** de f s'ils existent en résolvant $f(x) = 0$.
3) Déterminer **l'ordonnée à l'origine** de f en calculant $f(0) = c$.
4) Déterminer les coordonnées du **sommet** S de la parabole : $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

1) Orientation : ...

2) Zéros de f : $Z_f = \{\,\ldots\ldots\,;\,\ldots\ldots\,\} \Rightarrow Z_1(\,\ldots\ldots\,;\,0\,)\,;\ Z_2(\,\ldots\ldots\,;\,0\,)$

...

3) Ordonnée à l'origine : $f(0) = \ldots\ldots \Rightarrow H(\,0\,;\,\ldots\ldots\,)$

4) Sommet S : ...

2.2 Problèmes d'optimisation

Modèle 9. Résoudre l'exercice 2.8.

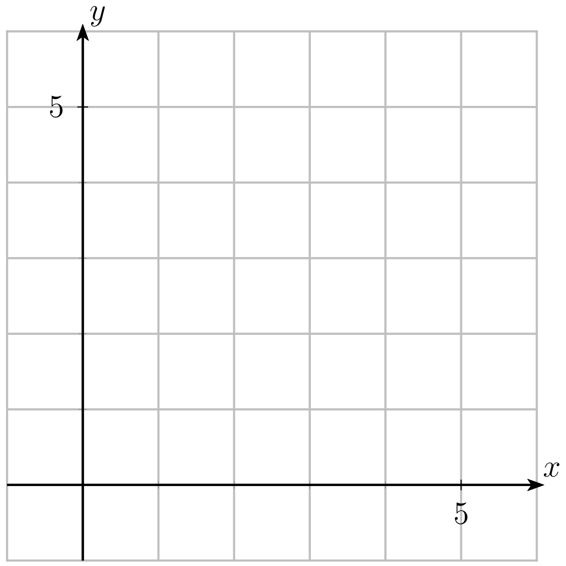
Méthode :

1) Lire attentivement la donnée, esquisser la situation à l'aide d'un schéma et définir les deux variables (souvent x et y).
2) Exprimer la quantité Q à optimiser comme une fonction à deux variables.
3) Etablir une équation liant les deux variables.
4) Transformer Q en une fonction à une seule variable.
5) Esquisser le graphe de Q.
6) Répondre au problème par une phrase.

Remarque : si une variable suffit, les étapes 2 et 3 n'ont pas lieu d'être.

1) Variables : $x = ...$ $y = ...$

2) Fonction pour l'aire : $A(x; y) = ...$
3) Equation pour le périmètre : ...
4) $\Rightarrow A(x) = ...$
5) Graphe de A :



6) ...

3 Puissances

3.1 Puissances à exposants entiers

3.1.1 Puissances à exposants entiers positifs

Modèle 10. Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$; $n, m \in \mathbb{N}$

Propriétés	Exemples
a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^5 = \ldots$
b) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(3^2)^5 = \ldots$
c) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $n \geq m$	$\dfrac{2^7}{2^4} = \ldots$
d) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(3 \cdot 5)^4 = \ldots$
e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \ldots$

3.1.2 Puissances à exposants entiers

Modèle 11. Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$; $n \in \mathbb{N}$

Propriétés	Exemples
f) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$3^{-5} = \ldots$
g) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} = \ldots$

3.2 Puissances à exposants rationnels

Modèle 12. Soit $a, r \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Propriété	Exemple
$\sqrt[n]{a} = r \iff r^n = a$	$\sqrt[3]{8} = ...\iff ...$

Rappels sur l'extraction de facteurs d'une racine :

1) $\sqrt{12} = ...$

2) $\sqrt{45} = ...$

3) $\sqrt{50} = ...$

4) $\sqrt[3]{64} = ...$

5) $\sqrt[3]{16} = ...$

6) $\sqrt{8} + \sqrt{64} = ...$

Modèle 13. Soit $a \in \mathbb{R}$; $n, m \in \mathbb{N}^*$

Propriétés	Exemples
Cas général : $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$	$\sqrt[4]{3^8} = ...$
$m = 1$: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$	$\sqrt[5]{11} = ...$

Modèle 14. Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$; $n, m \in \mathbb{N}^*$

Propriétés	Exemples
a) $\sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt[7]{13^7} = ...$
b) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = ...$
c) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{4}{25}} = ...$
d) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt{11})^2 = ...$
e) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = ...$

3.3 Equations à exposants entiers

Modèle 15. Résoudre l'équation suivante :

$$3x^7 = 400$$

3.4 Problèmes

Modèle 16. Résoudre l'exercice 3.20.

Méthode **V/E/R/S** :

1) VAR : Définir la variable (souvent x).
2) EQ : Etablir une équation.
3) RES : Résoudre cette équation.
4) SOL : donner la solution au problème avec une phrase.

1) VAR : $x = ...$

2) EQ : ...

3) RES : ...

4) SOL : ...

4 Exponentielles et logarithmes

4.1 Equations

4.1.1 Equations exponentielles

Modèle 17. Résoudre une équation exponentielle en égalisant les bases.

Exemples :

a) $2^{3x} = 16$

b) $3^{x+1} = 27$

4.1.2 Propriétés des logarithmes

Modèle 18. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; $a, b \in \mathbb{R}$

Propriétés	Exemples
$\log(x) = a \iff x = 10^a$	$\log(x) = 3 \iff x = \ldots$
$\ln(x) = b \iff x = \mathrm{e}^b$	$\ln(x) = 3 \iff x = \ldots$

Exemples :

a) $\log(100) = \ldots$

b) $\log(0,1) = \ldots$

c) $\log(-10) = \ldots$

d) $\ln(1) = \ldots$

e) $\ln(0) = \ldots$

f) $\ln(\mathrm{e}^2) = \ldots$

4.1.3 Equations exponentielles (suite)

Modèle 19. Résoudre une équation exponentielle avec un logarithme.

Exemples :

a) $2^x = 1'000$

b) $3 \cdot 10^{x+1} = 450$

4.2 Intérêts

Modèle 20. Résoudre l'exercice 4.5.

Méthode **V/E/R/S** :
1) VAR : Définir la variable.
2) EQ : Etablir une équation.
3) RES : Résoudre cette équation.
4) SOL : donner la solution au problème avec une phrase.

a) 1) VAR : ...

 2) EQ : ...

 3) RES : ...

 4) SOL : ...

b) 1) VAR : ...

 2) EQ : ...

 3) RES : ...

 4) SOL : ...

c) 1) VAR : ...

 2) EQ : ...

 3) RES : ...

 4) SOL : ...

d) 1) VAR : ...

2) EQ : ...

3) RES : ...

4) SOL : ...

4.3 Applications aux sciences sociales, expérimentales ou économiques

Modèle 21. Résoudre l'exercice 4.17.

a) $N(t) = ...$

b) $N(24) = ...$

c) 1) VAR : ...

2) EQ : ...

3) RES : ...

4) SOL : ...

5 Trigonométrie

5.1 Le triangle rectangle

Modèle 22. Soit un triangle ABC rectangle au sommet C.

Rappels :

- $\sin(\alpha) = ...$
- $\sin(\beta) = ...$
- $\cos(\alpha) = ...$
- $\cos(\beta) = ...$
- $\tan(\alpha) = ...$
- $\tan(\beta) = ...$

5.2 Le triangle quelconque

5.2.1 Construction d'un triangle quelconque

Modèle 23. Résoudre l'exercice 5.1.

a) ...

b) ...

c) ...

5.2.2 Le théorème du cosinus

Modèle 24. Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés diminuée du double-produit de ces deux côtés multiplié par le cosinus de l'angle compris entre ces deux côtés.

5.2.3 Le théorème du sinus

Modèle 25. Dans tout triangle, les trois rapports d'un côté par le sinus de son angle opposé sont égaux.

5.2.4 Le théorème de l'aire

Modèle 26. Dans tout triangle, l'aire est donnée par la moitié du produit de deux côtés multipliée par le sinus de l'angle compris entre eux.

6 Combinatoire

6.1 Principes fondamentaux

6.2 La notation factorielle

Modèle 27. Calculer l'exercice 6.12.

c) $10! = ...$ e) $5! = ...$

f) $50! = ...$ g) $6! = ...$

6.3 Les permutations

Modèle 28. Résoudre l'exercice 6.15.

6.4 Les arrangements

Modèle 29. Résoudre l'exercice 6.24.

6.5 Les combinaisons

Modèle 30. Résoudre l'exercice 6.32.

6.6 Problèmes mélangés

Permutation - Arrangement - Combinaison :
quelle méthode de dénombrement choisir ? P_n ; $\overline{P}_n(r)$; A_p^n ; $\overline{A}_p^n$; C_p^n **? ? ?**

Modèle 31. Une urne contient les 6 jetons suivants :

1 2 3 4 5 6

a) On tire simultanément 5 jetons. Combien de tirages différents contenant 2 chiffres pairs et 3 impairs peut-on avoir ?
- ordre :
- répétition :
- nb. de jetons tirés :

---

b) On tire successivement les 6 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents formés des 6 chiffres peut-on ainsi avoir ?
- ordre :
- répétition :
- nb. de jetons tirés :

---

c) On tire successivement 4 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents peut-on avoir ?
- ordre :
- répétition :
- nb. de jetons tirés :

---

d) On tire simultanément 4 jetons. Combien de tirages différents peut-on avoir ?
- ordre :
- répétition :
- nb. de jetons tirés :

---

e) On répète 4 fois l'opération suivante :
On tire un jeton, on note le chiffre obtenu puis on le remet dans l'urne.
Combien de nombres différents peut-on avoir ?
- ordre :
- répétition :
- nb. de jetons tirés :