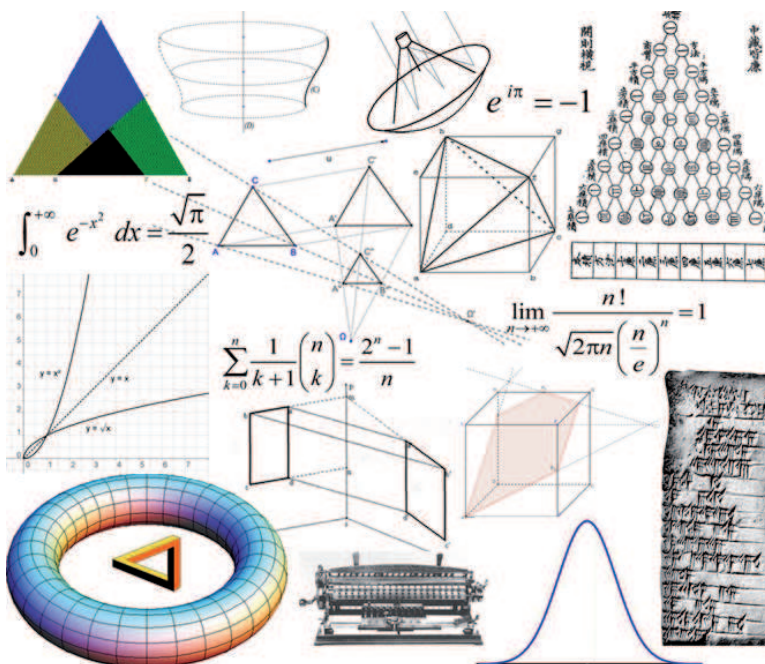


Mathématiques

ANALYSE

2^{ème} année Maturité

niveau standard



GYMNASSE DE BURIER

Table des matières

Avant-propos	4
1 Généralités sur les fonctions	5
1.1 Fonctions réelles d'une variable réelle	5
1.2 Graphe d'une fonction	11
1.3 Caractéristiques d'une fonction	15
1.3.1 Zéro et pôle d'une fonction	15
1.3.2 Signe d'une fonction	15
1.4 Croissance et décroissance d'une fonction	19
1.5 Extremums d'une fonction	19
1.6 Opérations sur les fonctions	23
1.7 Composée de fonctions	25
1.8 Fonctions réciproques	29
1.9 Exercices	31
1.10 Réponses	36
2 Limites finies et infinies	45
2.1 Notion intuitive de limite finie	45
2.2 Limite finie	47
2.3 Limites à gauche et limites à droite	49
2.4 Calculs de limites	51
2.4.1 Opérations sur les limites	51
2.4.2 Calculs de limite en un point défini	51
2.4.3 Calculs de la limite en un pôle	53
2.5 Limites infinies	57
2.5.1 Algèbre de l'infini	59
2.6 Exercices	61
2.7 Réponses	64

3	Limites à l'infini, asymptotes	65
3.1	Limites à l'infini	65
3.2	Asymptotes	69
3.3	Recherche d'asymptotes	73
3.4	Exercices	79
3.5	Réponses	81
4	Dérivée	83
4.1	Exemple d'introduction : vitesse instantanée	83
4.2	Nombre dérivé d'une fonction en un point	87
4.3	Fonction dérivée	89
4.4	Règles de dérivation	91
4.5	Exercices	101
4.6	Réponses	103
5	Applications de la dérivée	105
5.1	Tangentes	105
5.1.1	Tangente à une courbe du plan	105
5.1.2	Tangentes au graphe d'une fonction	107
5.2	Croissance d'une fonction	111
5.3	Extremums et paliers	113
5.4	Problèmes d'optimisation	117
5.5	Etude d'une fonction rationnelle	121
5.6	Exercices	123
5.7	Réponses	132
6	Fonctions trigonométriques	141
6.1	Les fonctions trigonométriques	141
6.1.1	Fonctions trigonométriques	141
6.1.2	Périodicité	143
6.1.3	Propriétés fondamentales	145
6.2	Equations trigonométriques	147
6.3	Dérivée des fonctions trigonométriques (en radians)	153
6.4	Etude d'une fonction trigonométrique	155
6.5	Exercices	157
6.6	Réponses	160

Avant-propos

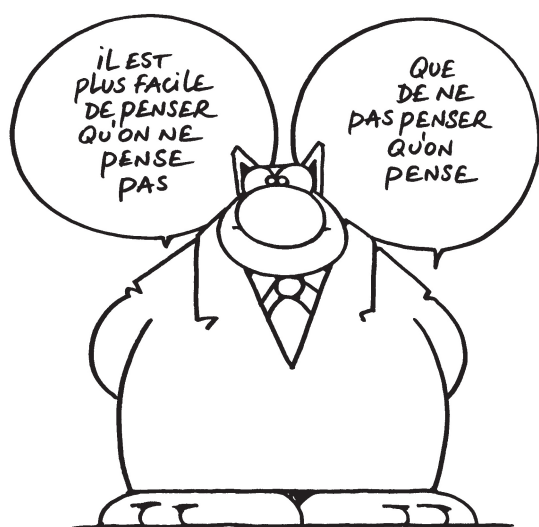
Le paradoxe du mouvement

Un personne qui veut aller vers un mur, ne pourra jamais parcourir la distance qui la sépare du mur. Parce que d'abord elle doit atteindre la moitié de la distance qui la sépare de ce mur. Mais avant d'atteindre le milieu de cette distance qui la sépare au mur, elle doit d'abord parcourir la moitié de celle-ci. Mais avant, la moitié de la moitié de celle-ci... Et ceci éternellement jusqu'à l'infini... D'un point de vue purement théorique, une personne ne peut pas parcourir une certaine distance. Elle est condamnée à rester immobile, parce qu'elle doit toujours parcourir la moitié de la moitié de la moitié de la distance qui la sépare de sa destination. Cela pourrait laisser sous-entendre qu'au bout du compte le mouvement physique est impossible et n'existe pas et que le mouvement n'est qu'une illusion. Mais on se rend bien compte que dans la réalité ce n'est pas comme cela... il est possible de se déplacer d'un point à un autre.

Subtilités mathématiques pour résoudre ce paradoxe

L'erreur mathématique dans le raisonnement introduit dans ce paradoxe consiste à affirmer que la somme d'une infinité d'événements de plus en plus brefs tend vers l'infini. C'est James Gregory (1638-1675), un mathématicien écossais du XII^e siècle qui a démontré qu'une somme infinie de nombre peut avoir un résultat fini. On imagine bien que la moitié de la distance plus la moitié de la moitié de la distance plus la moitié de la moitié de la moitié de la distance... aboutit à une distance et un temps finis.

On peut donc parcourir un nombre infini de moitiés en un temps fini.



DESSIN CI-CONTRE DE PHILIPPE GELUCK

6^{ème} édition, La Tour-de-Peilz, juillet 2021

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

1.1 Fonctions réelles d'une variable réelle

Une fonction réelle d'une variable réelle est donnée par

- Un ensemble de départ $A \subset \mathbb{R}$
- Un ensemble d'arrivée $B \subset \mathbb{R}$
- Une relation faisant correspondre à **chacun des éléments** de A **un et un seul élément** de B .

L'unique correspondant de $x = a$ par f est noté $f(a)$ et est appelé l'**image de a par f**

On note la fonction f comme suit :

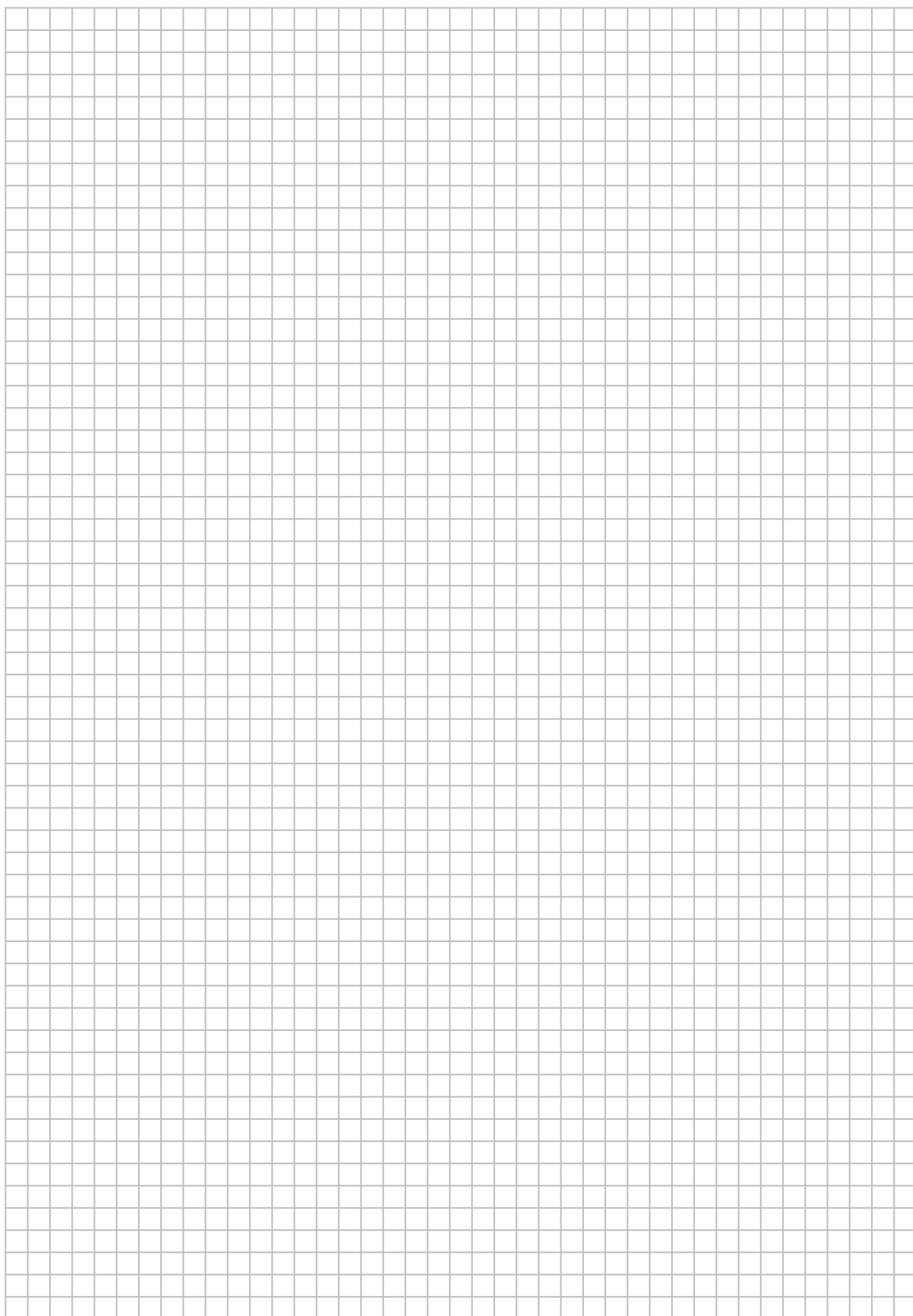
$$\boxed{\begin{array}{ccc} f & : & A \longrightarrow B \\ & & x \longmapsto f(x) \end{array}}$$

Exemple 1.1.

On achète des carottes à 2.8 francs le kilogramme. Donner la fonction f qui associe à la quantité (en kg) de carottes achetées son prix (en francs).

Exemple 1.2.

Déterminer deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que $f : A \longrightarrow B, f(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction réelle.



Ensemble de définition

Soit f une fonction réelle donnée par son expression algébrique $f(x)$.

Rappelons qu'un nombre réel $x = a$ est une **indéfinition** de f si $f(a)$ n'existe pas.

Ensemble de définition de f :

$$ED(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \setminus \{ \text{indéfinitions} \}$$

On note alors

$$\begin{array}{ccc} f : ED(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad f(x) = \dots\dots \text{ avec } ED(f) = \dots\dots$$

Plus simplement, une fonction réelle d'une variable réelle sera appelée une fonction.

Exemple 1.3.

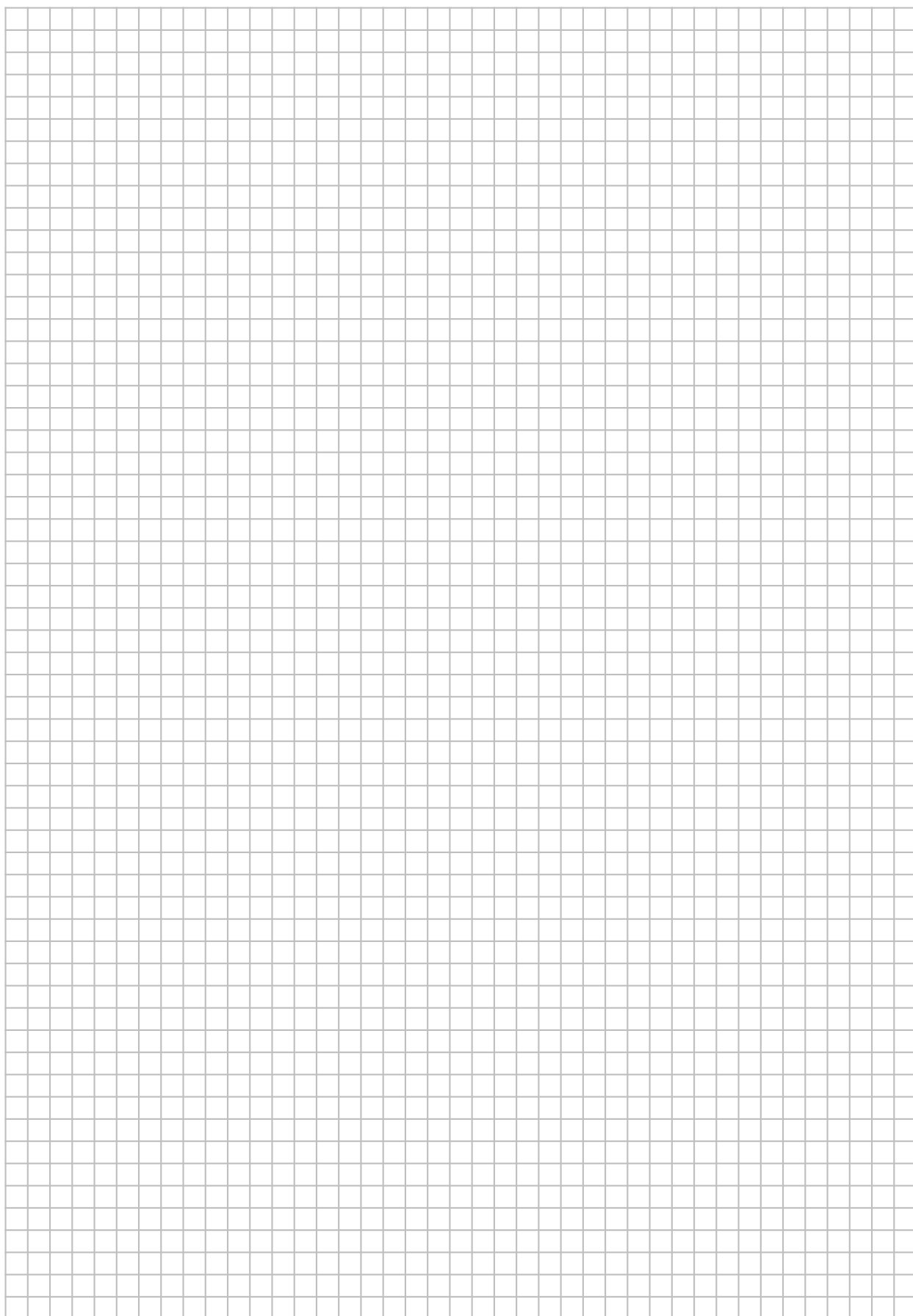
Compléter

$$1) \quad \begin{array}{ccc} f : & & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto 2x - 1 \end{array}$$

Déterminer l'image de $x = 0$ par f , de $x = a$ par f .

$$2) \quad \begin{array}{ccc} f : & & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \frac{x}{x^2 - 1} \end{array}$$

Déterminer l'image de $x = -2$ par f , l'image de $x = 0$ par f .



Remarque 1.1.

Les principales fonctions étudiées dans le cadre du cours de deuxième année sont les fonctions **polynomiales, rationnelles, irrationnelles et trigonométriques.**

Exemple 1.4.

Préciser le type des fonctions suivantes et donner leur ensemble de définition.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 24$

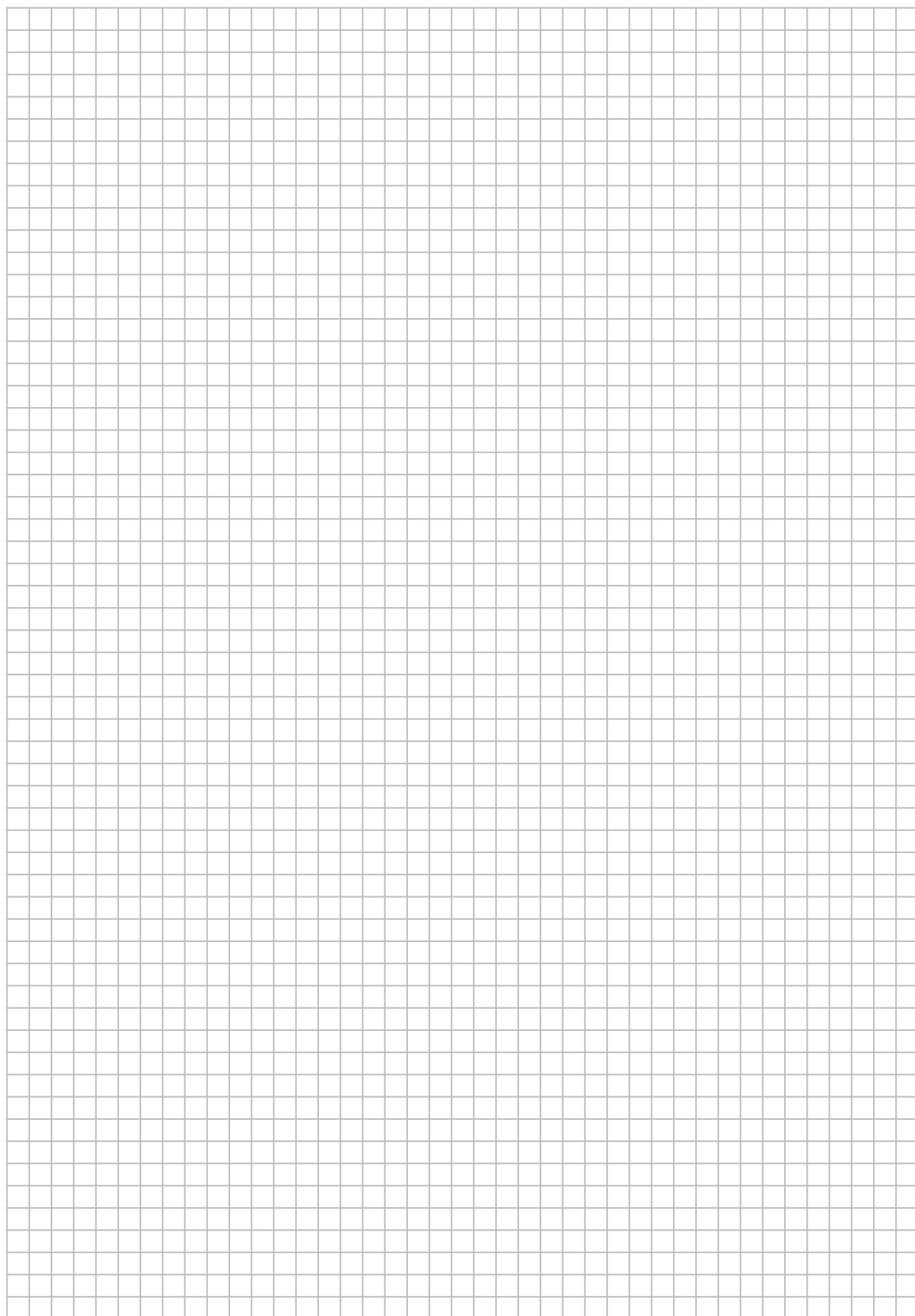
b) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 8}$

c) $f(x) = \sqrt{x + 6}$

d) $f(x) = \frac{x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

e) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{1 - x}}$

f) $f(x) = \sin(x)$



1.2 Graphe d'une fonction

Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble des couples $(x; f(x))$ où $x \in ED(f)$.

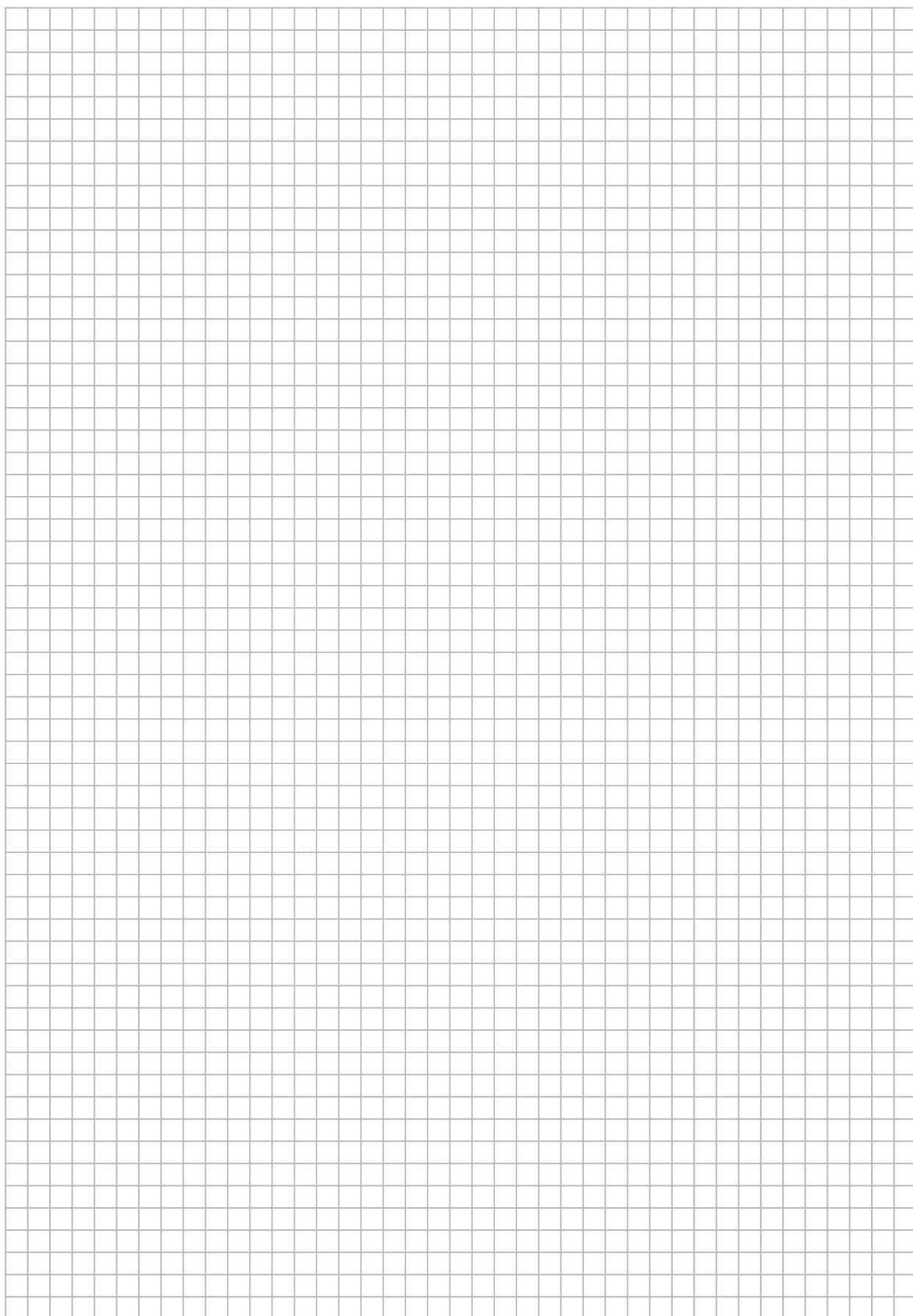
- En général, on représente le graphe d'une fonction dans un système d'axes Oxy .
- La représentation graphique de f est appelée **courbe représentative de f** ou plus simplement **graphe de f** .
- Les points du graphe de f sont les solutions de l'équation $y = f(x)$, appelée **équation cartésienne** du graphe de f .
- Une courbe donnée par son équation cartésienne en x et y peut représenter le graphe d'une fonction, mais ce n'est pas toujours le cas !

Exemple 1.5.

a) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Donner son ensemble de définition et représenter son graphe. Pour quelle valeur de a le point $(a; 2)$ appartient-il au graphe de f ?

b) La courbe d'équation $3x - 4y - 6 = 0$ est-elle le graphe d'une fonction ?

c) La courbe d'équation $y^2 = x + 2$ est-elle le graphe d'une fonction ?



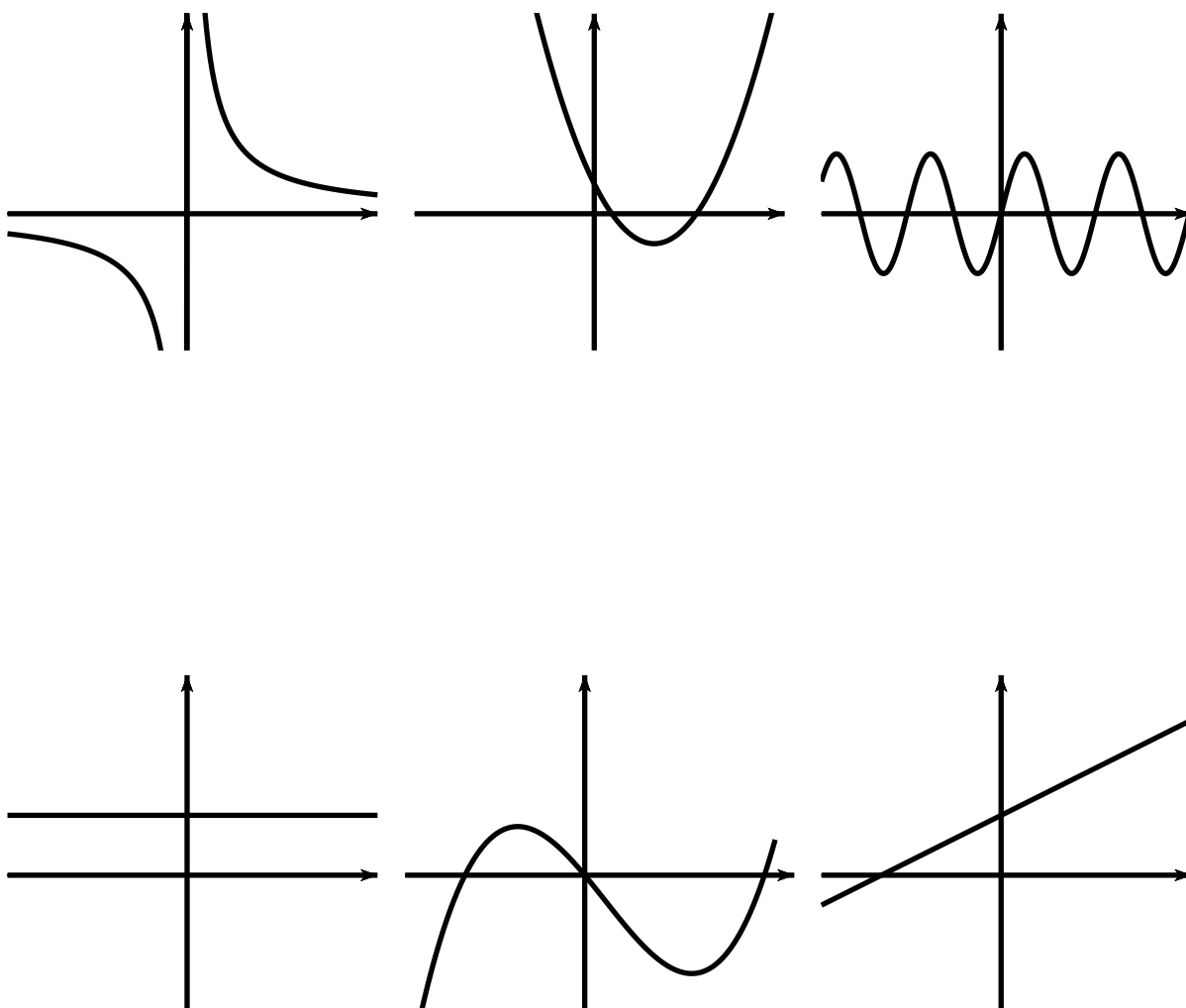
Graphes de quelques fonctions d'usage courant

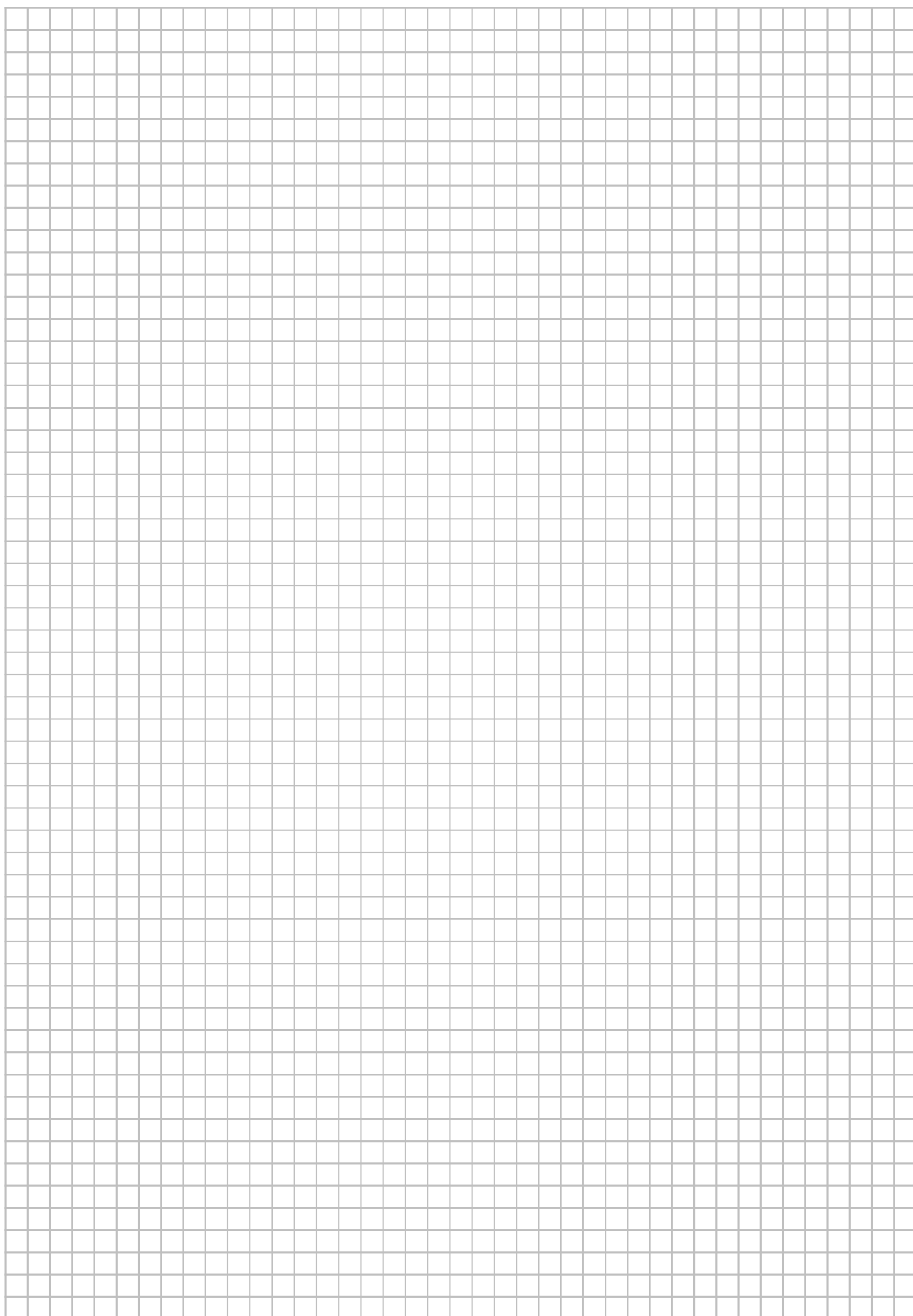
Ce sont les fonctions :

- constante
- identité
- affine
- valeur absolue
- quadratique
- cubique
- racine carrée
- inverse
- cubique
- puissance
- sinus
- cosinus
- tangente

Exemple 1.6.

Nommer les fonctions d'usage courant dont les graphes sont donnés ci-dessous.





1.3 Caractéristiques d'une fonction

1.3.1 Zéro et pôle d'une fonction

- Un nombre réel $a \in ED(f)$ est un **zéro** de f si $f(a) = 0$.
- Une indéfinition $b \notin ED(f)$ est un **pôle** de f s'il existe un intervalle ouvert $]c; d[$ contenant b avec f définie sur $]c; b[$ ou sur $]b; d[$ ou sur les deux intervalles.

Remarque 1.2.

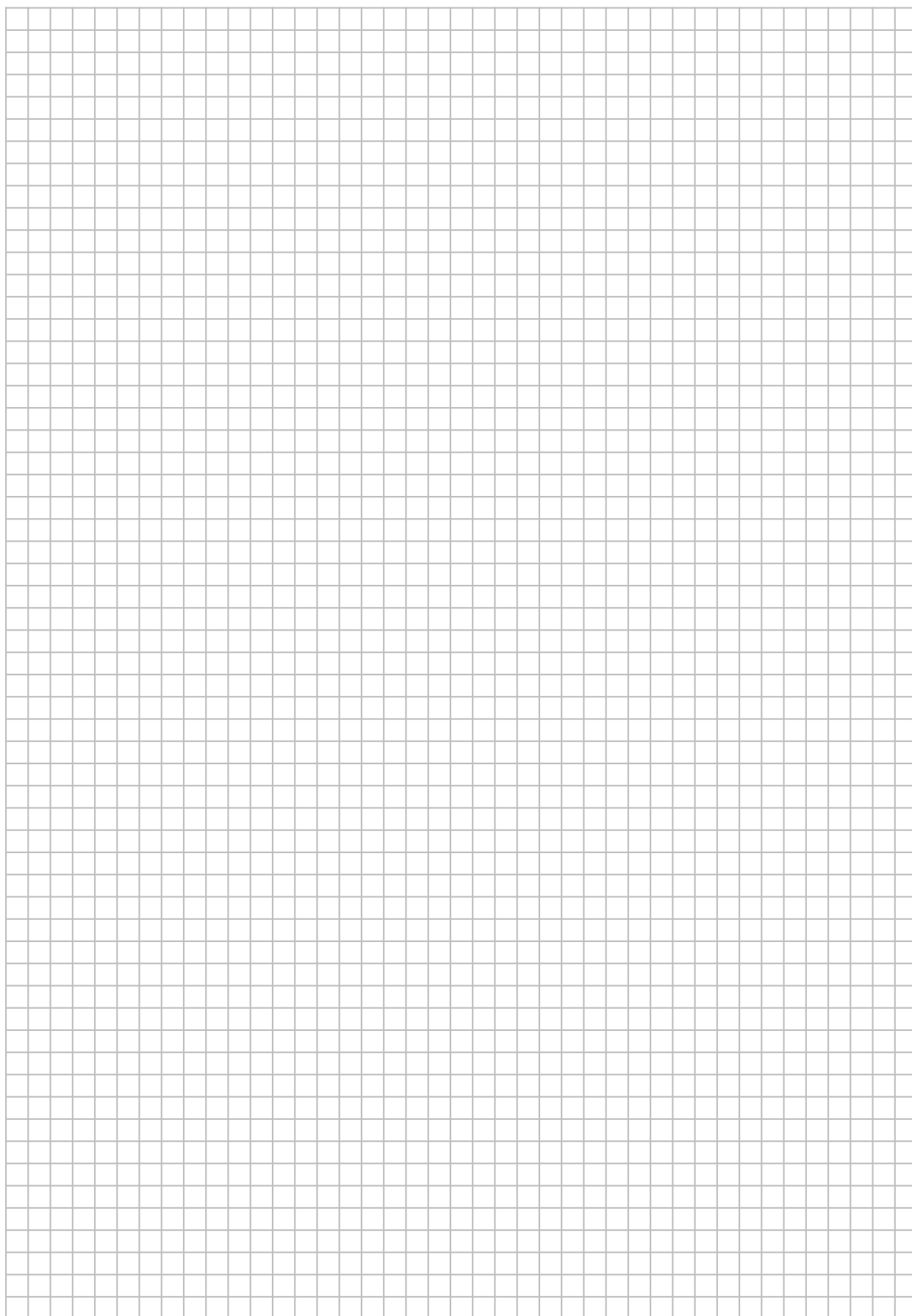
- a) Les zéros de f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Graphiquement, les zéros de f sont les abscisses des points où le graphe de f coupe l'axe Ox .
- b) Un pôle est une indéfinition qui est au « milieu » ou au « bord » de l'ensemble de définition.
Par exemple, pour la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$, les nombres réels $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$ sont des indéfinitions de f , mais seul $x_1 = 2$ est un pôle.

1.3.2 Signe d'une fonction

L'axe Ox partage le plan en deux demi-plans. L'étude du signe de la fonction f permet de connaître les parties de $ED(f)$ pour lesquelles le graphe de f se situe au-dessus ou au-dessous de l'axe Ox .

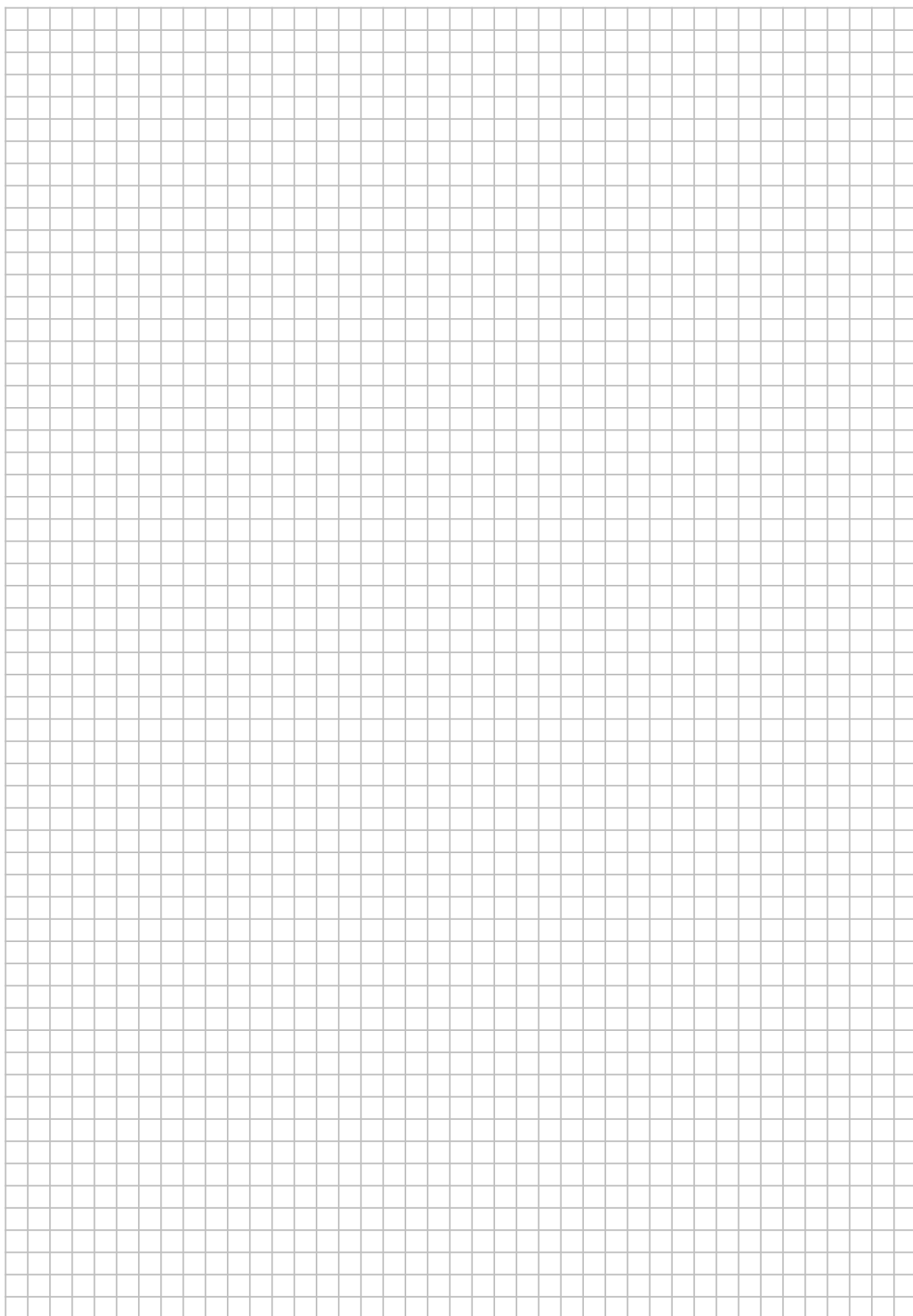
Exemple 1.7.

- a) Déterminer $ED(f)$, les zéros, les pôles et le signe de f donnée par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$.



b) Déterminer $ED(f)$, les zéros, les pôles et le signe de f donnée par $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$.

c) Déterminer $ED(f)$, les zéros, les pôles et le signe des fonctions f et g données par :
 $f(x) = \sqrt{5 - x}$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{5 - x}}$.



1.4 Croissance et décroissance d'une fonction

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $I =]a; b[$.

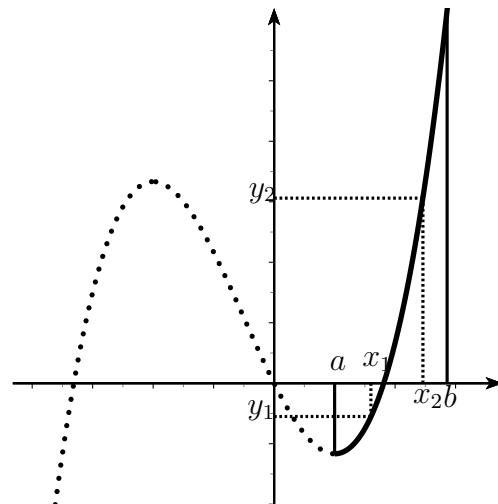
La fonction f est **croissante** (**strictement croissante**) sur I si pour tout $x_1, x_2 \in I$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{resp } f(x_1) < f(x_2))$$

Le graphe d'une fonction croissante sur $I =]a; b[$ « monte » lorsqu'on le parcourt I de gauche à droite.

On note

x	a	b
$f(x)$		



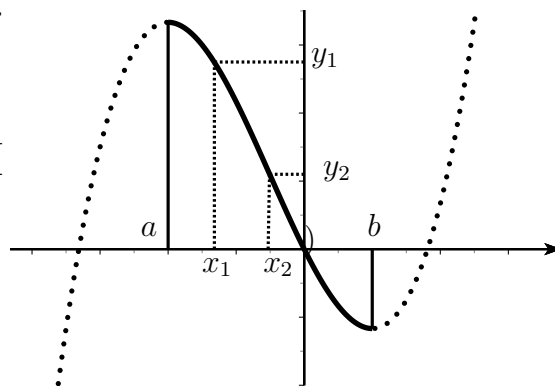
La fonction f est **décroissante** (**strictement décroissante**) sur I si pour tout $x_1, x_2 \in I$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{resp } f(x_1) > f(x_2))$$

Le graphe d'une fonction décroissante sur $I =]a; b[$ « descend » lorsqu'on parcourt I de gauche à droite.

On note

x	a	b
$f(x)$		



1.5 Extremums d'une fonction

Intuitivement, un extremum est un point du graphe de f situé « au-dessus de tous ses voisins » (pour un maximum), ou « au-dessous de tous ses voisins » (pour un minimum).

Soit f une fonction et $ED(f)$ son ensemble de définition.

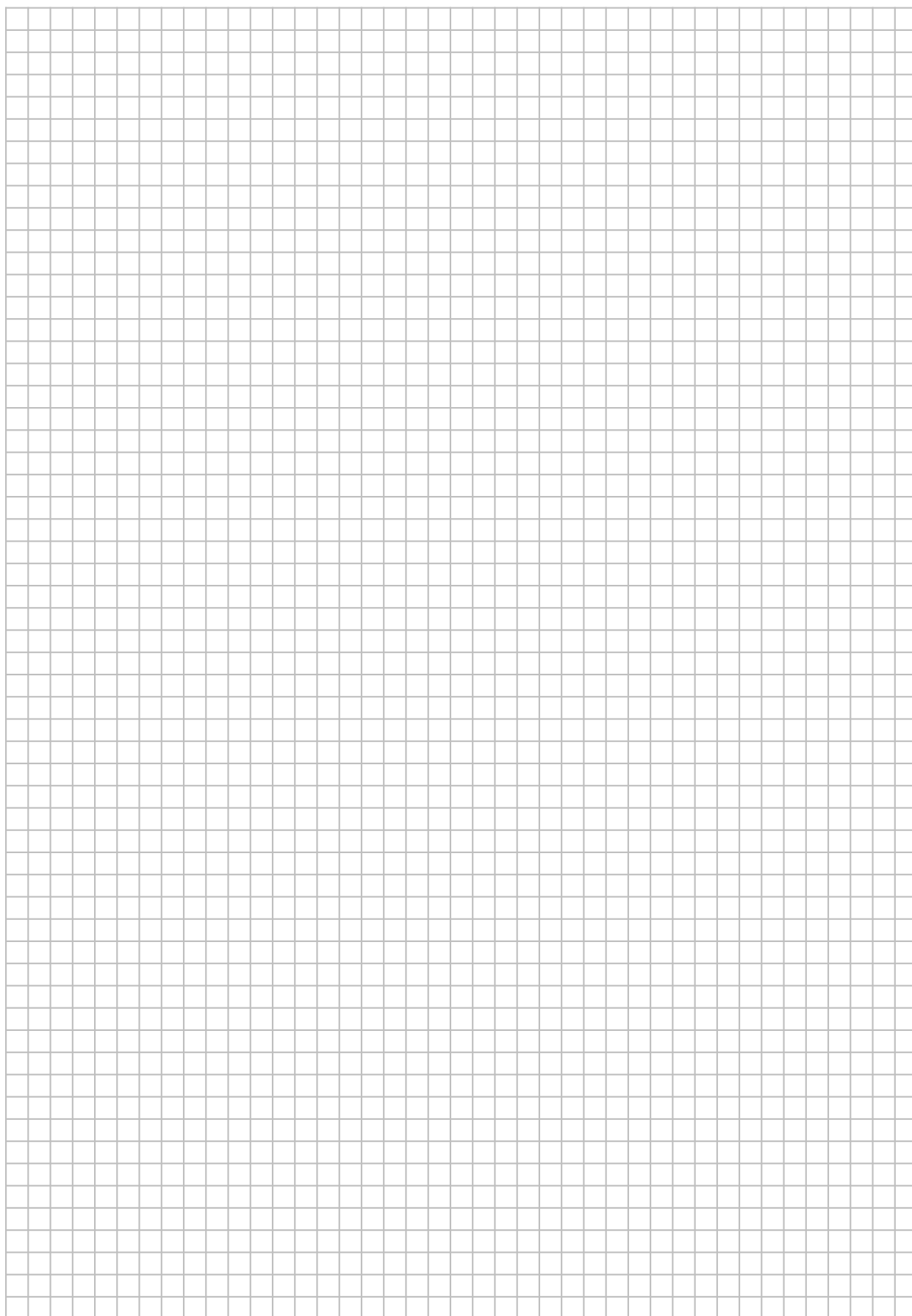
f admet un **maximum** en $c \in ED(f)$, s'il existe un intervalle ouvert I contenant c , tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in I \cap ED(f)$.

f admet un **minimum** en $c \in ED(f)$, s'il existe un intervalle ouvert I contenant c , tel que $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in I \cap ED(f)$.

Un **extremum** désigne soit un maximum soit un minimum.

Remarque 1.3.

- On parle indistinctement d'extremum en c ou d'extremum de coordonnées $(c; f(c))$ du graphe de f .
- Un extremum est **absolu** si en ce point la fonction prend sa plus grande (ou sa plus petite) valeur sur tout son ensemble de définition. Sinon l'extremum est dit **local**.

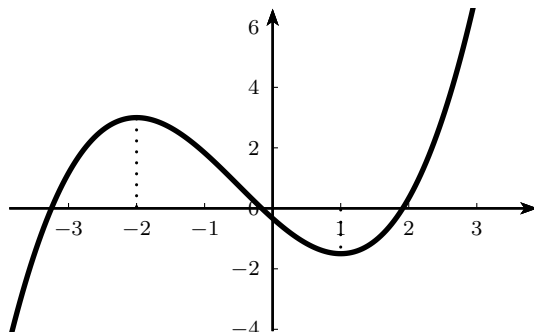


- c) La recherche des extremums d'une fonction débouche fréquemment sur des calculs compliqués, même pour des fonctions qui s'expriment simplement. La théorie sur les dérivées nous fournira une méthode très pratique pour résoudre ce type de problème.

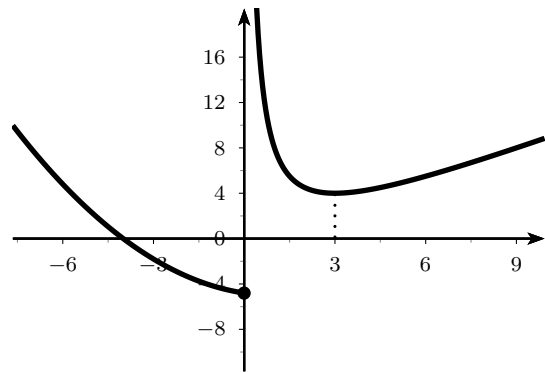
Exemple 1.8.

- a) En consultant le graphe des fonctions suivantes, établir leur tableau de croissance. Les extremums sont-ils absolus ?

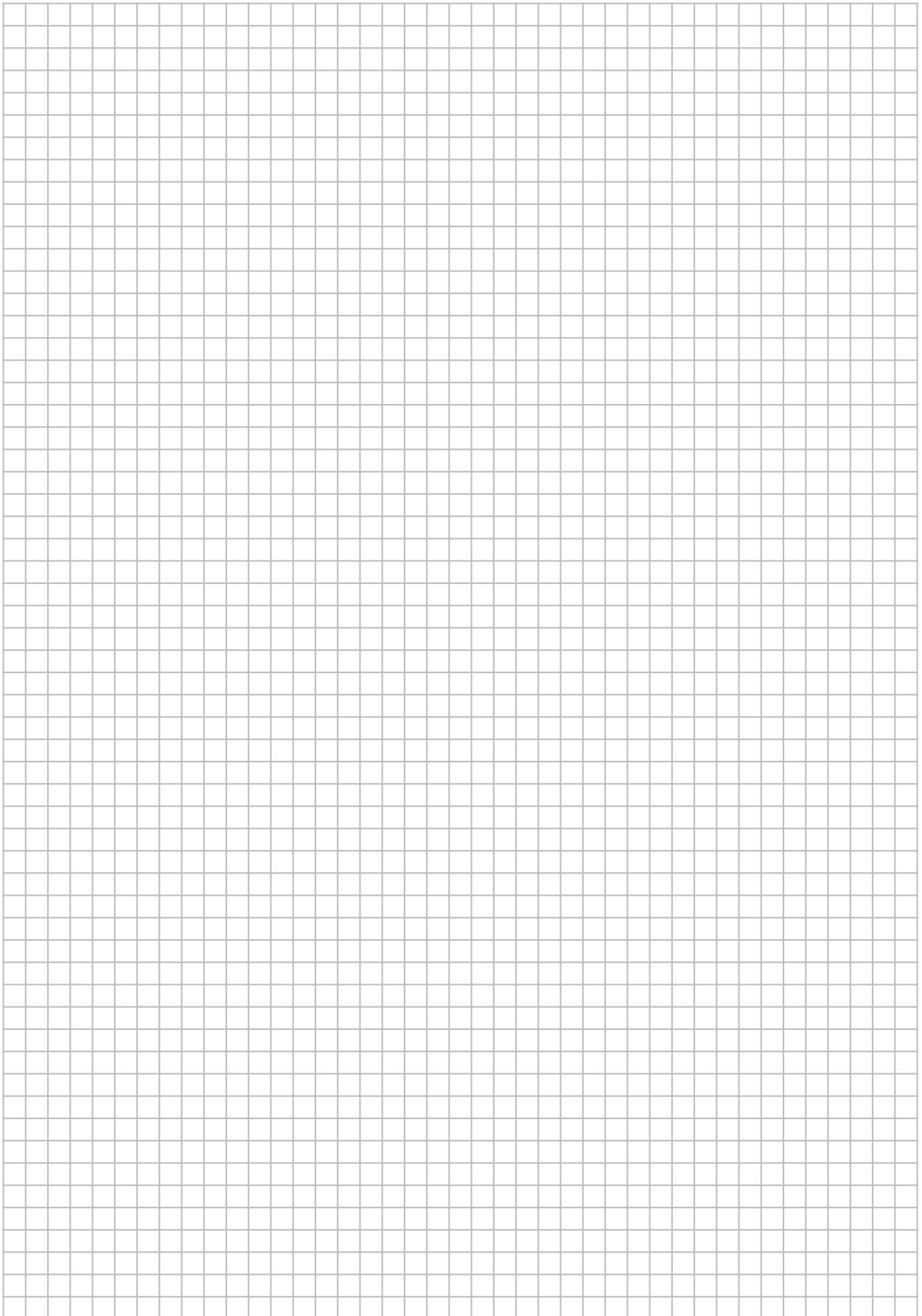
1)



2)



- b) Etudier la croissance de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 4x + 5$.
L'extremum est-il absolu ?



1.6 Opérations sur les fonctions

On considère f et g deux fonctions avec $A = ED(f)$ et $B = ED(g)$.

1) La **somme** de f et g est la fonction $f + g$ définie par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ avec } ED(f + g) = A \cap B$$

2) La **différence** de f et g est la fonction $f - g$ définie par

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ avec } ED(f - g) = A \cap B$$

3) Le **produit** de f par un nombre réel c est la fonction $c \cdot f$ définie par

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x) \text{ avec } ED(c \cdot f) = A$$

4) Le **produit** de f et g est la fonction $f \cdot g$ définie par

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ avec } ED(f \cdot g) = A \cap B$$

5) Le **quotient** de f et g est la fonction $\frac{f}{g}$ définie par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ avec } ED\left(\frac{f}{g}\right) = A \cap \{x \in B \mid g(x) \neq 0\}$$

Exemple 1.9.

Compléter :

$$\begin{array}{ccc} f & : & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} g & : & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x-3} \end{array}$$

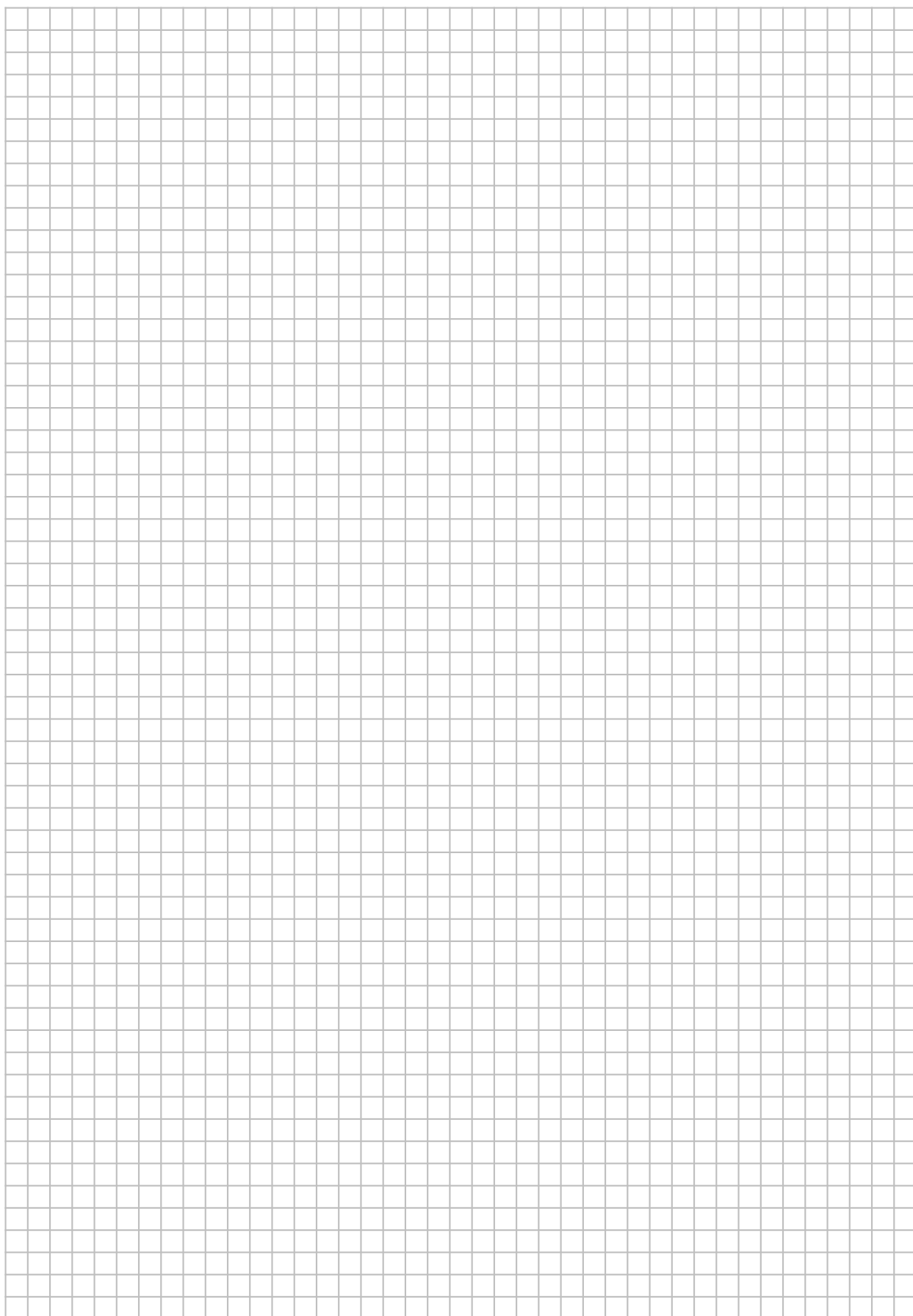
$$\begin{array}{ccc} f + g & : & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f - g & : & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 5 \cdot f & : & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f \cdot g & : & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{f}{g} & : & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \end{array}$$



1.7 Composée de fonctions

Une fonction peut-être comparée à une machine.

Par exemple

- La fonction f donnée par $f(x) = 5x$ peut être vue comme une machine qui multiplie par 5 l'élément qui est entré dans la machine.
- La fonction g donnée par $g(x) = x^2 - 9$, peut être vue comme une machine qui met au carré l'élément qui est entré dans la machine, puis ôte la valeur 9 au résultat.

Il est possible de mettre ces deux machines l'une après l'autre :

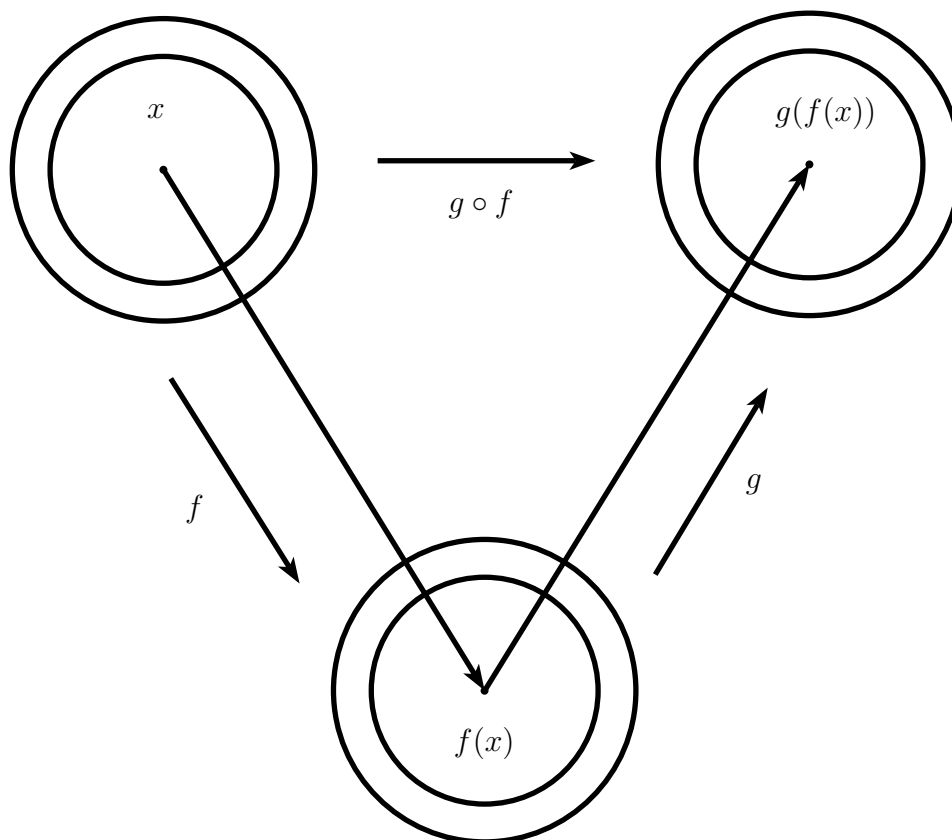
- si l'on met d'abord la machine f puis la machine g , $x \xrightarrow{f} 5x \xrightarrow{g} (5x)^2 - 9 = 25x^2 - 9$
- si l'on met d'abord la machine g puis la machine f , $x \xrightarrow{g} x^2 - 9 \xrightarrow{f} 5(x^2 - 9) = 5x^2 - 45$

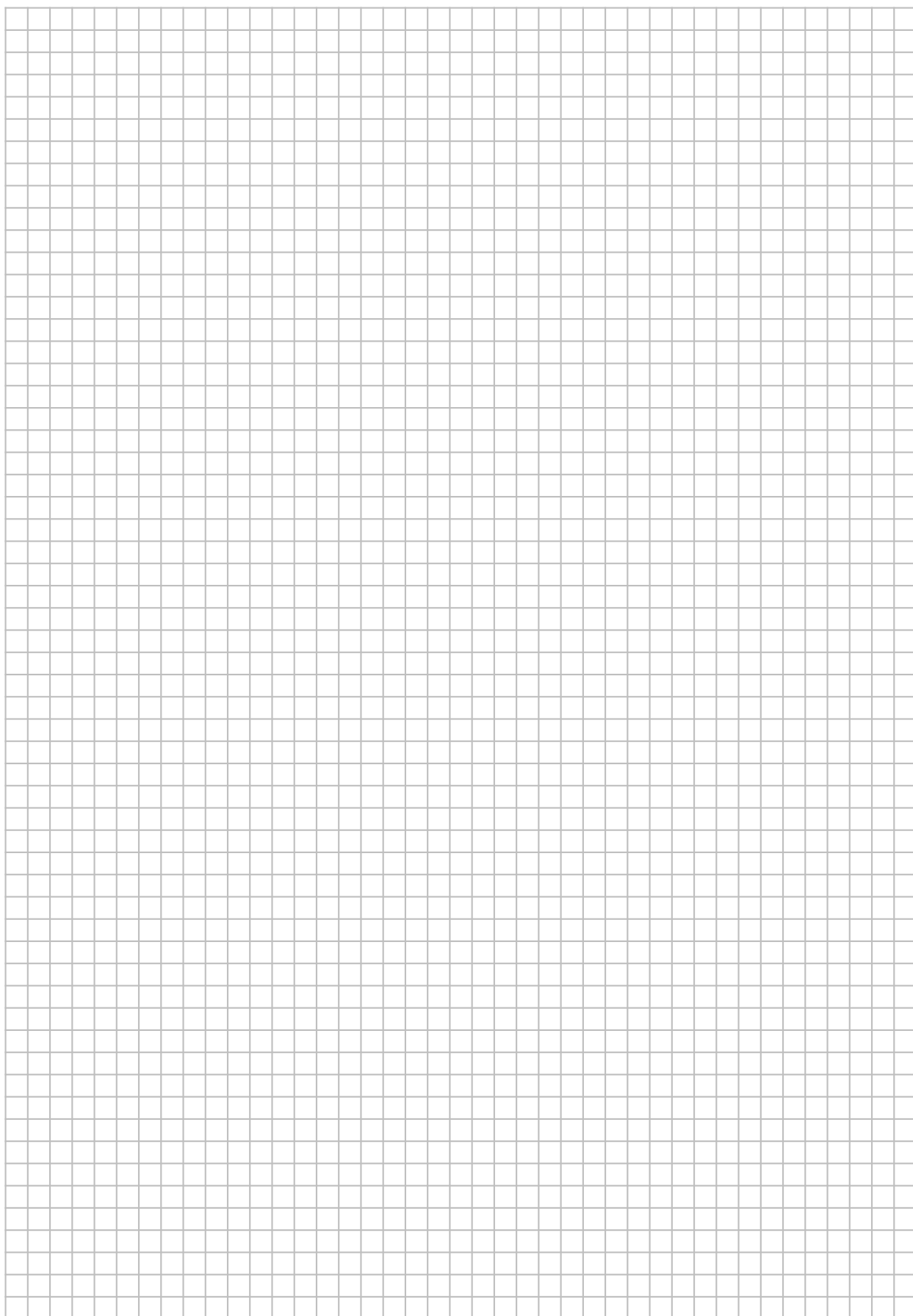
Cette opération se nomme la **composée** de fonctions.

On considère f et g deux fonctions avec $A = ED(f)$ et $B = ED(g)$.

La **composée** de f et g , prise dans cet ordre (autrement dit on applique d'abord la fonction f puis la fonction g), est la fonction $g \circ f$ définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ avec } ED(g \circ f) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$





Remarque 1.4.

- a) Dans la notation $g \circ f$, la première fonction qui agit est écrite à droite. Il s'agit en fait d'une convention en harmonie avec la définition de $g \circ f$, puisque $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. On cherche en effet d'abord l'image de x par f , puis l'image de cette image par g .
- b) $g \circ f$ et $f \circ g$ sont en général des fonctions différentes.

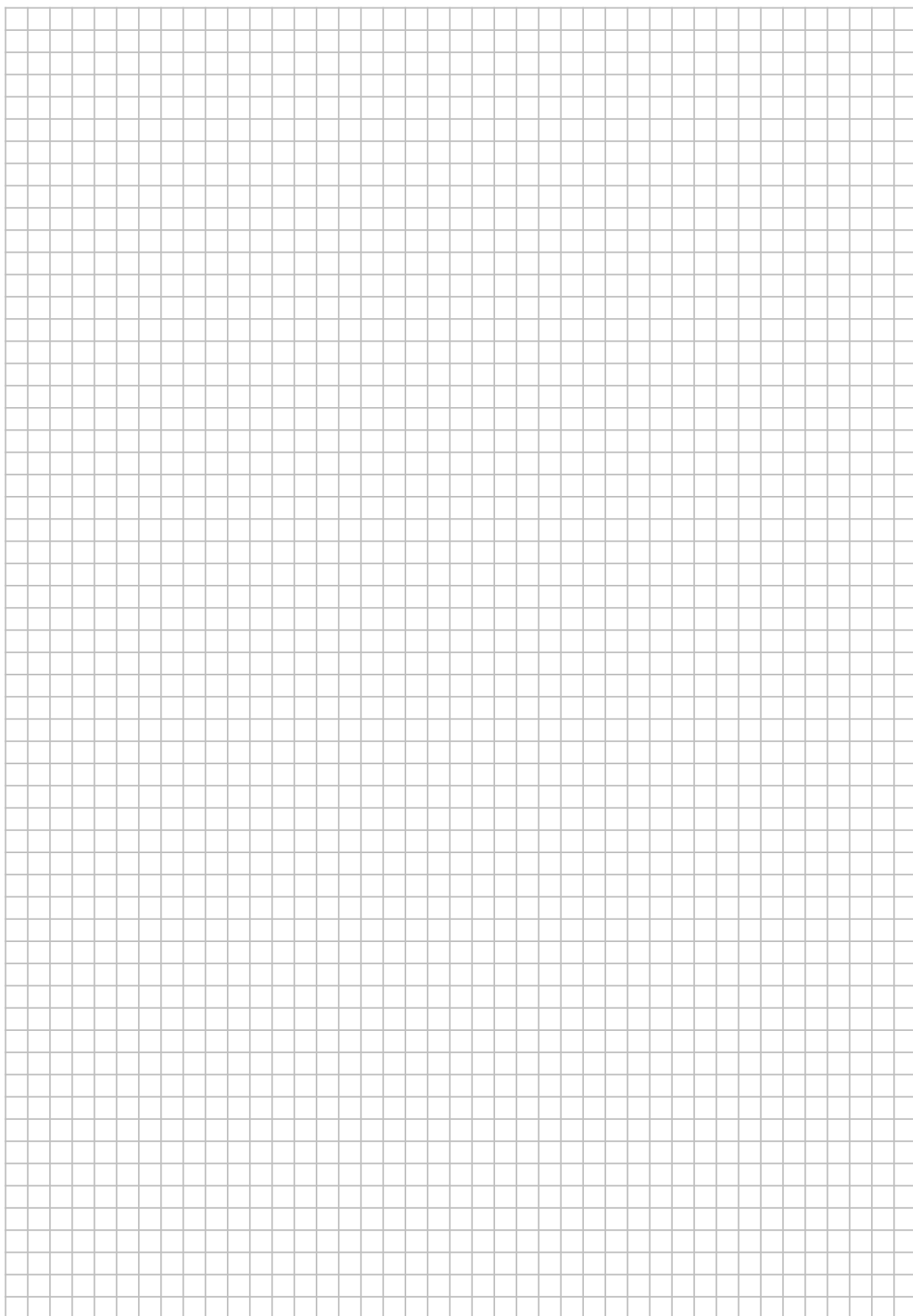
Exemple 1.10.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x-1} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} - \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+1}{x-2} \end{array}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.



1.8 Fonctions réciproques

Une fonction réelle $f : A \rightarrow B$ est dite **bijjective** s'il existe une fonction $g : B \rightarrow A$ telle que $(g \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in A$ et $(f \circ g)(y) = y$ pour tout $y \in B$.

La fonction g est appelée la **réciproque** de f .

Exemple 1.11.

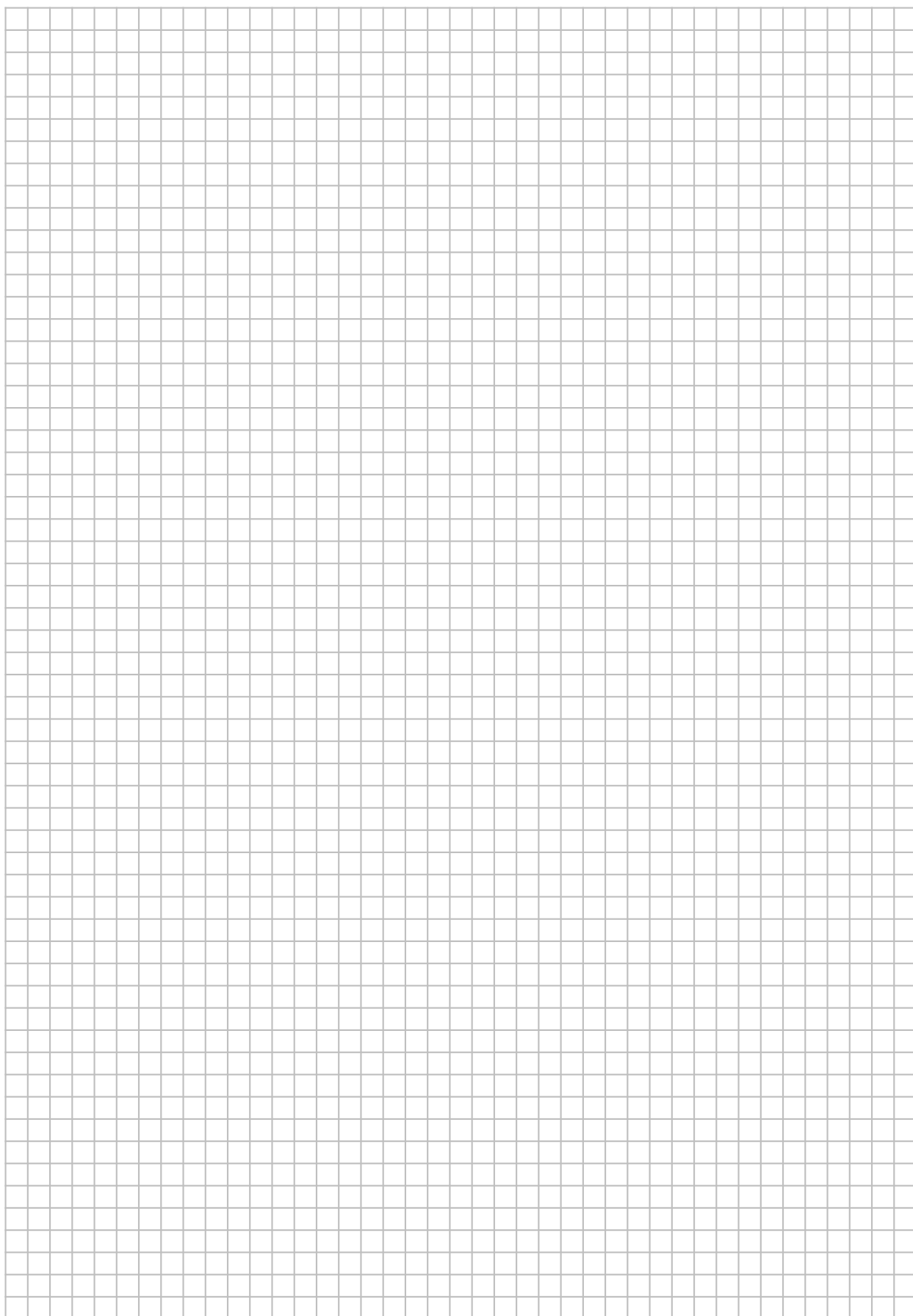
Pour les fonctions f suivantes, déterminer deux ensembles A et B tels que $f : A \rightarrow B$ soit bijective et déterminer la fonction réciproque $g : B \rightarrow A$.

a) $f(x) = -\frac{2}{x}$

b) $f(x) = x^5$

c) $f(x) = -x^2$

d) $f(x) = \frac{x-2}{x}$



1.9 Exercices

1.1

Pour les fonctions suivantes

- 1) Donner l'ensemble de définition.
- 2) Donner une équation cartésienne du graphe.
- 3) Esquisser le graphe des fonctions proposées.

a) $f(x) = 2$

c) $f(x) = -x^2 + x + 15$

e) $f(x) = \sqrt{x^2}$

b) $f(x) = -2x + 8$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

f) $f(x) = \sqrt{x}$

1.2

Pour les courbes géométriques suivantes

- 1) Donner, lorsque c'est possible, l'expression $f(x)$ de la fonction associée.
- 2) Esquisser les courbes géométriques proposées aux questions b), c), e) et f).

a) $3x - 2y = 6$

c) $x = y^2$

e) $y = 9 - x^2$

b) $y = x^2$

d) $x = \frac{1}{y-1}$

f) $x = y^2 + 5$

1.3

Donner $ED(f)$ puis étudier le signe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3x - 4$

f) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x}$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

g) $f(x) = \frac{-1}{x^3+3x^2+4x+12}$

c) $f(x) = x^2 + 7x + 12$

h) $f(x) = x^3 - 4x$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+8x+15}$

i) $f(x) = \frac{(x+4)^3}{(x-5)^2}$

e) $f(x) = x + 5 - \frac{6}{x}$

j) $f(x) = \frac{(x^2+4x)(3x-1)}{15x^2+x-2}$

1.4

Donner $ED(f)$ puis étudier le signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -\sqrt{-x}$

f) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)(x-5)}$

b) $f(x) = \frac{5x\sqrt{x+2}}{x-7}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}}$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

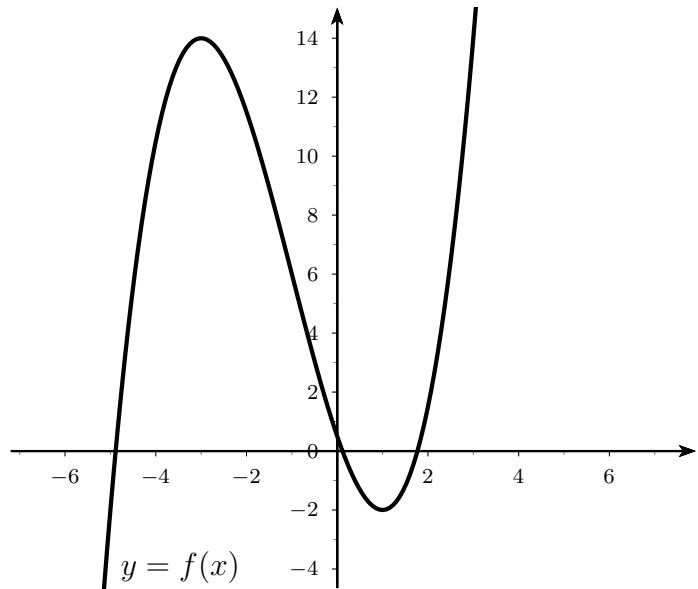
h) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-4}}$

d) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

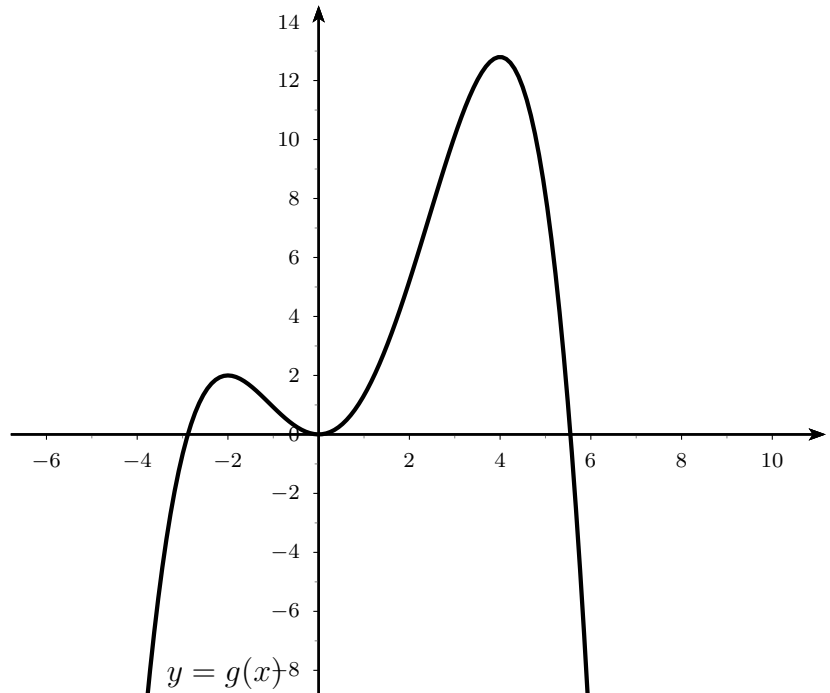
e) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x+2}\sqrt{x-5}$

1.5

1) Établir le tableau de croissance de la fonction f représentée ci-contre par son graphe. Donner les coordonnées des extremums éventuels (les coordonnées sont entières).



2) Établir le tableau de croissance de la fonction g représentée ci-contre par son graphe. Donner les coordonnées des extremums éventuels (les coordonnées sont entières).



1.6

Donner l'ensemble de définition, le signe et le tableau de croissance des fonctions suivantes.

1) $f(x) = x^2 + 2x - 24$

3) $f(x) = -2x^2 - x + 15$

2) $f(x) = 2x^2 + 10x - 48$

4) $f(x) = \frac{16}{x^2 + 4}$

1.7

Un maraîcher doit décider du nombre x de pommiers à planter sur une parcelle donnée. Des études ont montré que si l'on plante x pommiers sur la parcelle, chaque pommier produit $N(x) = 888 - 12x$ pommes (pour $x \geq 20$).

- 1) Si $x = 30$, déterminer le nombre total T de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle.
- 2) Soit T le nombre total de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle. Exprimer T en fonction de x .
- 3) Le maraîcher souhaite que le nombre total de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle soit maximal. Combien de pommiers doit-il planter et quel est le maximum de pommes produites par tous les pommiers de la parcelle ? Justifier à l'aide d'un tableau de croissance.

1.8

Un quincaillier a 300 tondeuses à gazon à vendre pour la saison. Il sait qu'au prix de 400 francs, il les vendra toutes. Il suppose que pour chaque augmentation de 10 francs du prix, il perdra 4 ventes.

- 1) Déterminer le nombre N de tondeuses à gazon vendues en fonction du prix p de vente.
- 2) Quel prix devrait-il vendre ses tondeuses à gazon s'il souhaite avoir un revenu maximal ? Quels sont alors le revenu maximal et le nombre de tondeuses non vendues. Justifier à l'aide d'un tableau de croissance.

1.9

On donne

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2 - 2x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 6 - x - x^2 \end{array}$$

Définir avec la même présentation les fonctions :

- | | | | | |
|-------------|------------------|------------------|----------------|----------------|
| a) $f + g$ | c) $f \cdot g$ | e) $\frac{5}{g}$ | g) $f \circ f$ | i) $g \circ g$ |
| b) $f - 3g$ | d) $\frac{f}{g}$ | f) $f \circ g$ | h) $g \circ f$ | |

1.10

On donne

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} g : \mathbb{R} - \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x+1} \end{array}$$

Définir avec la même présentation les fonctions :

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| a) $f \circ g$ | b) $f \circ f$ | c) $g \circ g$ | d) $g \circ f$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|

1.11

Ecrire les fonctions suivantes comme composée de plusieurs autres fonctions.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x}$

e) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^4}$

b) $f(x) = (x^4 - 2x^2 + 5)^5$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2}$

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 16}$

g) $f(x) = 4 + \sqrt{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 3x - 5)^3}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

1.12

Pour les fonctions f suivantes, déterminer deux ensembles A et B tels que $f : A \rightarrow B$ soit bijective et déterminer la fonction réciproque $g : B \rightarrow A$.

a) $f(x) = 3x$

d) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

b) $f(x) = 3 - 2x$

e) $f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = x^3$

1.13

Etudier la position relative des courbes représentant les graphes des fonctions f et g définies par :

a) $f(x) = 4(x^2 - x - 2)$ et $g(x) = 3x(x - 2)$

b) $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$ et $g(x) = 4x^2 + 6x - 1$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ et $g(x) = 3x^2 + 7x$

d) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - x + 6}{x^2 - 1}$ et $g(x) = 2x - 3$

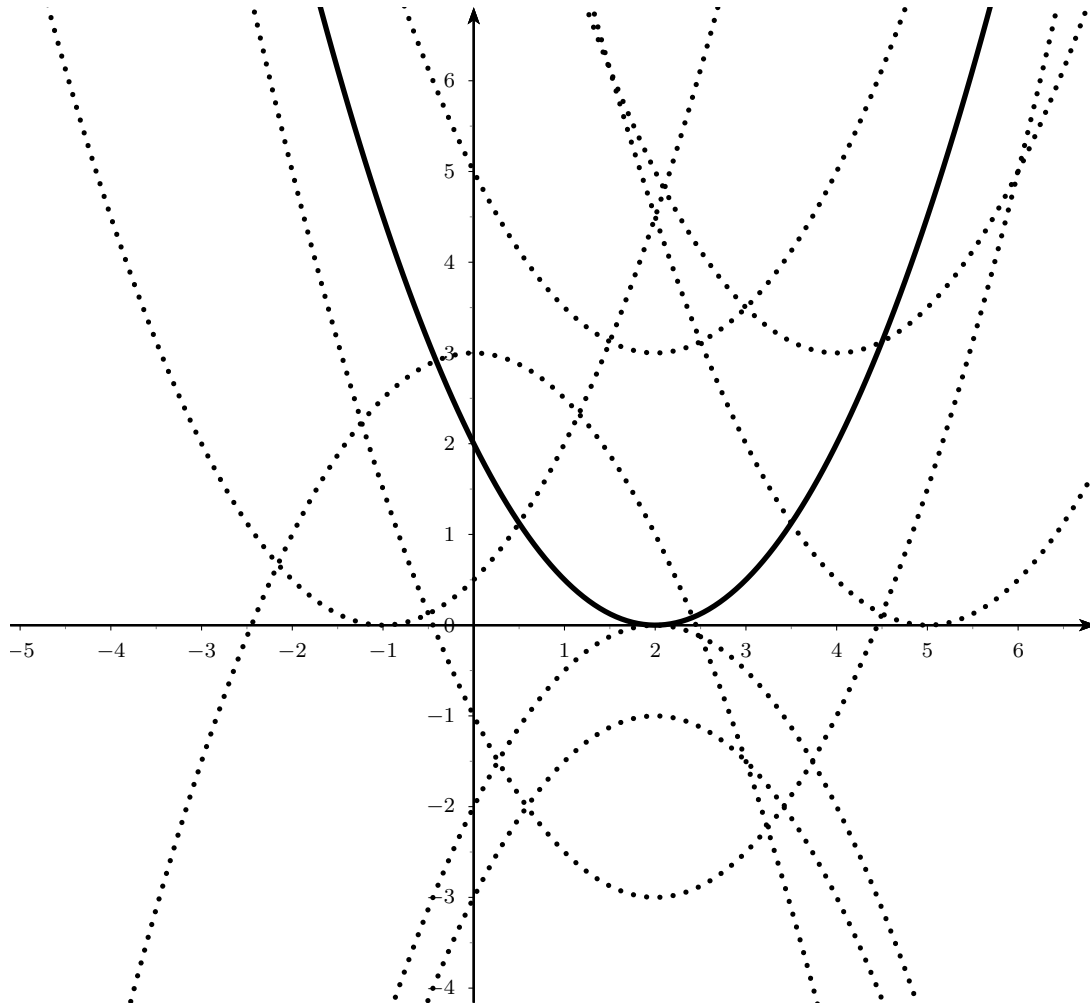
1.14

M. Picsou achète une action à la bourse au prix de 1000 fr. Le contexte économique fait en sorte que la valeur de cette action augmente régulièrement de 20 fr par jour pendant 30 jours, reste stable pendant les 10 jours suivants, puis diminue de 10 % par jour pour tous les jours qui suivent. Trouver une fonction f qui exprime la valeur de cette action en fonction du nombre n de jours écoulés depuis l'achat.

1.15

Le dessin ci-dessous donne (en gras) la courbe représentant le graphe d'une fonction f . Retrouver sur ce même dessin les graphes des fonctions données par :

- $g(x) = f(x + 3)$
- $h(x) = f(x - 3)$
- $i(x) = f(x) + 3$
- $j(x) = f(x) - 3$
- $k(x) = -f(x)$
- $l(x) = -f(x) - 1$
- $m(x) = -f(x + 2) + 3$
- $n(x) = f(x - 2) + 3$



1.10 Réponses

1.1

a) $ED(f) = \mathbb{R}, y = 2$

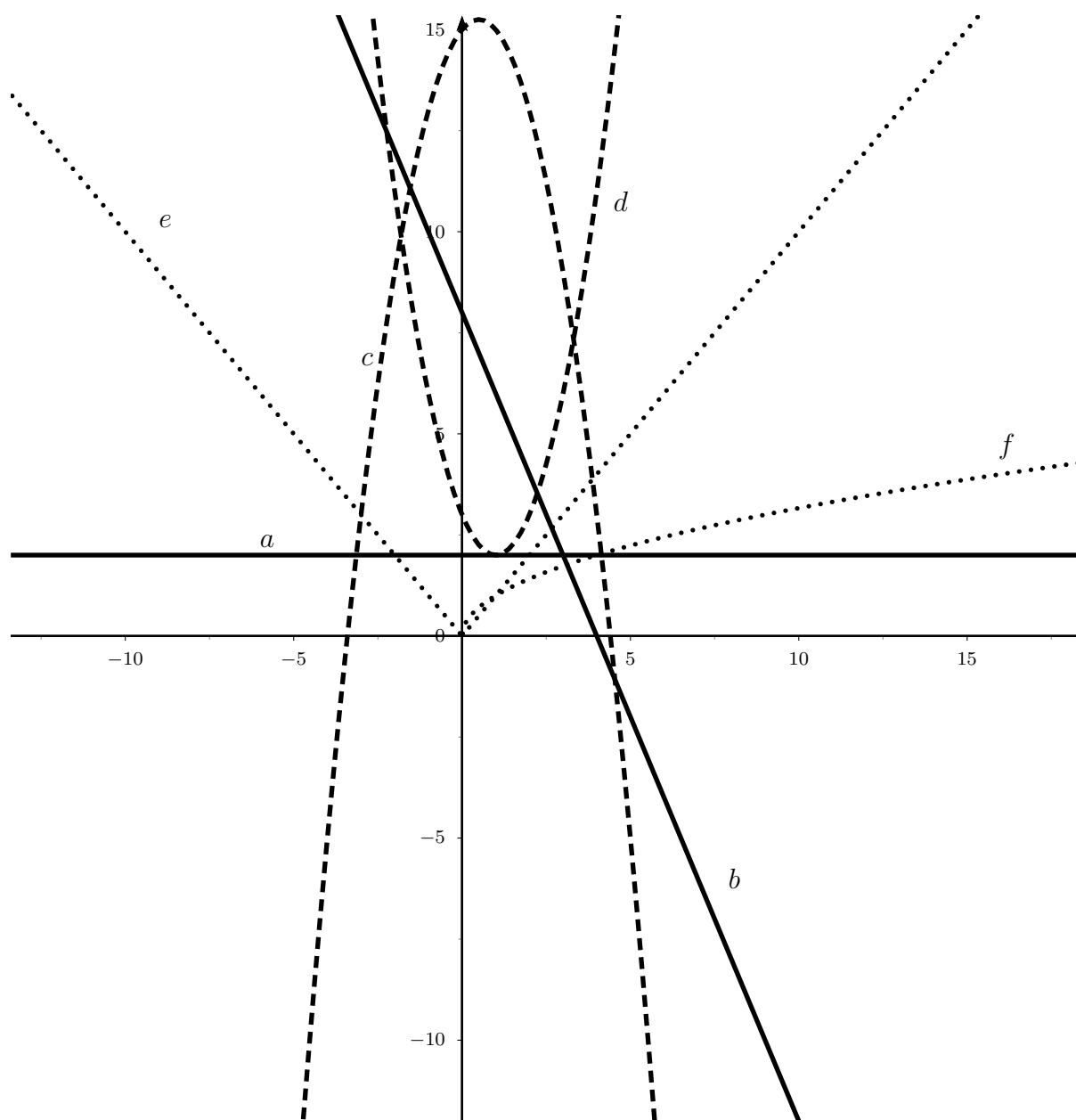
b) $ED(f) = \mathbb{R}, y = -2x + 8$

c) $ED(f) = \mathbb{R}, y = -x^2 + x + 15$

d) $ED(f) = \mathbb{R}, y = x^2 - 2x + 3$

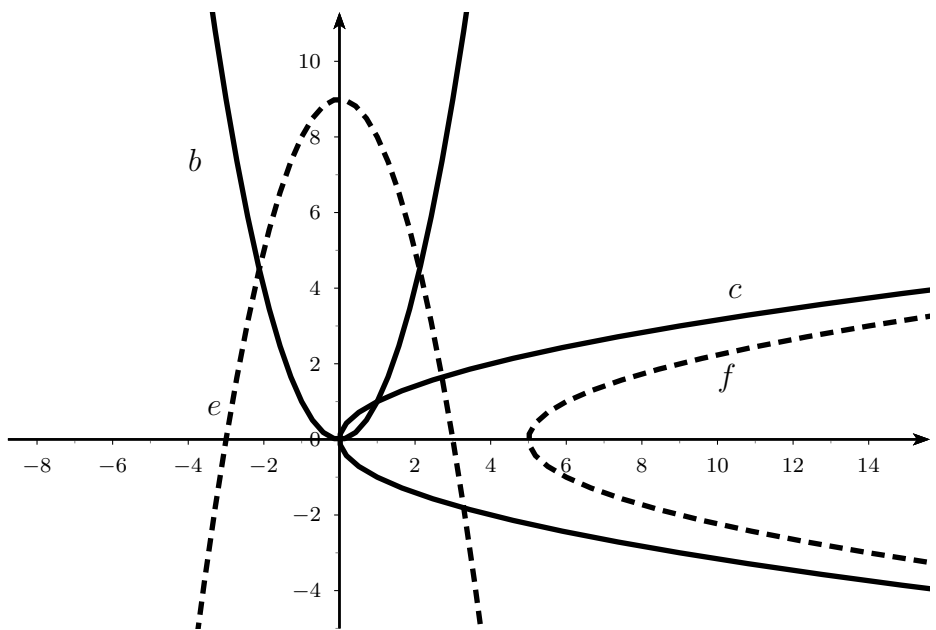
e) $ED(f) = \mathbb{R}, y = \sqrt{x^2}$

f) $ED(f) = \mathbb{R}_+, y = \sqrt{x}$



1.2

- a) $f(x) = \frac{3x - 6}{2} = \frac{3}{2}x - 3$
- c) -
- e) $f(x) = 9 - x^2$
- b) $f(x) = x^2$
- d) $f(x) = \frac{x + 1}{x}$
- f) -



1.3

- a) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	$\frac{4}{3}$		
$3x - 4$	-	0	+

- b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

x	$-\frac{1}{2}$			3
$\frac{2x + 1}{x - 3}$	+	0	-	+

- c) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	-4			-3	
$x^2 + 7x + 12$	$+$	0	$-$	0	$+$

d) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-5; -3\}$

x	-5		-3	
$\frac{1}{x^2 + 8x + 15}$	+	-	+	

e) $ED(f) = \mathbb{R}^*$

x	-6			0	1		
$x + 5 - \frac{6}{x}$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

f) $ED(f) = \mathbb{R}^* - \{-3\}$

x	-3		-1		0
$\frac{x+1}{x^2+3x}$	-	+	0	-	+

g) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

x	-3	
$\frac{-1}{x^3 + 3x^2 + 4x + 12}$	+	-

h) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	-2		0	2			
$x^3 - 4x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

i) $ED(f) = \mathbb{R} - \{5\}$

x	-4		5	
$\frac{(x+4)^3}{(x-5)^2}$	-	0	+	+

j) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{2}{5}; \frac{1}{3}\}$

x	$-4 \quad -\frac{2}{5} \quad 0 \quad \frac{1}{3}$			
$\frac{(x^2 + 4x)(3x - 1)}{15x^2 + x - 2}$	$-$	0	$+$	$+$

1.4

a) $ED(f) = \mathbb{R}_-$

x	0	
$-\sqrt{-x}$	$-$	0

b) $ED(f) = [-2; +\infty[-\{7\}$

x	-2	0	7
$\frac{5x\sqrt{x+2}}{x-7}$	0	$+$	0

c) $ED(f) = [-1; 1]$

x	-1	1
$\sqrt{1-x^2}$	0	$+$

d) $ED(f) = \emptyset$

e) $ED(f) = [5; +\infty[$

x	5
$\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}\sqrt{x-5}$	0

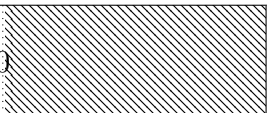
f) $ED(f) = [-2; 1] \cup [5; +\infty[$

x	-2	1	5
$\sqrt{(x-1)(x+2)(x-5)}$	0	$+$	0

g) $ED(f) =]4; +\infty[$

x	4	
$\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}}$		+

h) $ED(f) =]-\infty; -3] \cup]4; +\infty[$

x	-3		4
$\sqrt{\frac{x+3}{x-4}}$	+	0 	+

1.5

1)

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f(x)$		Max	Min	

Max : $(-3; 14)$; min : $(1; -2)$.

2)

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$f(x)$		Max	Min	Max	

Max : $(-2; 2), (4; 13)$; min : $(0; 0)$.

1.6

1) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$	-6	4	$+\infty$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		Min	

Min : $(-1; -25)$.

2) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$	-8	3	$+\infty$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-2.5	$+\infty$
$f(x)$		Min	

Min : $(-2.5; -60.5)$.

3) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$	-3	2.5	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

x	$-\infty$	-0.25	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$ Max $\searrow$	

 Max : $(-0.25; 15.125)$.

 4) $ED(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		$+$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$ Max $\searrow$	

 Max : $(0; 4)$.

1.7

 1) 15'840 ; 2) $T(x) = -12x^2 + 888x$; 3) 37 pommiers ; nombre maximal : 16'428 pommes.

1.8

 1) $N(p) = -0.4p + 460$; 2) 575 francs ; revenu max : 132'250 francs ; 70 tondeuses non vendues.

1.9

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & f + g & : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto -x^2 - 3x + 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{b)} & f - 3g & : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto 3x^2 + x - 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{c)} & f \cdot g & : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto 2x^3 - 14x + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{d)} & \frac{f}{g} & : \mathbb{R} - \{-3; 2\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \frac{2 - 2x}{6 - x - x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{e)} & \frac{5}{g} & : \mathbb{R} - \{-3; 2\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \frac{5}{6 - x - x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{f)} & f \circ g & : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto 2x^2 + 2x - 10 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad f \circ f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 4x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad g \circ f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -4x^2 + 10x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad g \circ g &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^4 - 2x^3 + 12x^2 + 13x - 36 \end{aligned}$$

1.10

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f \circ g &: \mathbb{R}^* - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f \circ f &: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad g \circ g &: \mathbb{R} - \{-1; -\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\frac{x}{\frac{x+1}{x} + 1}}{\frac{x+1}{x} + 1} = \frac{x}{2x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad g \circ f &: \mathbb{R}^* - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\frac{1}{\frac{1}{x} + 1}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

1.11 Par exemple...

$$\text{a)} \quad g(x) = x^2 + 3x, h(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{et} \quad f = h \circ g$$

$$\text{b)} \quad g(x) = x^4 - 2x^2 + 5, h(x) = x^5 \quad \text{et} \quad f = h \circ g$$

$$\text{c)} \quad g(x) = x^2 - 16, h(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{et} \quad f = h \circ g$$

$$\text{d)} \quad g(x) = x^2 + 3x - 5, h(x) = x^3, j(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f = j \circ h \circ g$$

$$\text{e)} \quad g(x) = x - 3, h(x) = x^4, j(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f = j \circ h \circ g$$

$$\text{f)} \quad g(x) = x + 4, h(x) = \sqrt{x}, j(x) = \frac{x-2}{x+2} \quad \text{et} \quad f = j \circ h \circ g$$

$$\text{g)} \quad g(x) = x^2 + 1, h(x) = \sqrt{x}, j(x) = 4 + x \quad \text{et} \quad f = j \circ h \circ g$$

$$\text{h)} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}, h(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{et} \quad f = h \circ g$$

1.12

a) $A = B = \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{3}$

d) $A = B = \mathbb{R} - \{1\}, g(x) = \frac{x}{x-1}$

b) $A = B = \mathbb{R}, g(x) = \frac{3-x}{2}$

e) $A = \mathbb{R} - \{1\}, B = \mathbb{R} - \{2\} g(x) = \frac{3-2x}{4-2x}$

c) $A = B = \mathbb{R}^*, g(x) = \frac{1}{x}$

f) $A = B = \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{x}$

1.13

 a) f et g se coupent en $I(-4; 72)$ et $J(2; 0)$.

 Entre ces points, g est au-dessus de f , sinon g est au-dessous de f .

 b) f et g se coupent en $I(2; 27)$ et f est au-dessus de g .

 c) f et g ne se coupent pas. g est toujours au-dessus de f .

 d) f et g se coupent en $I(-3; -9)$.

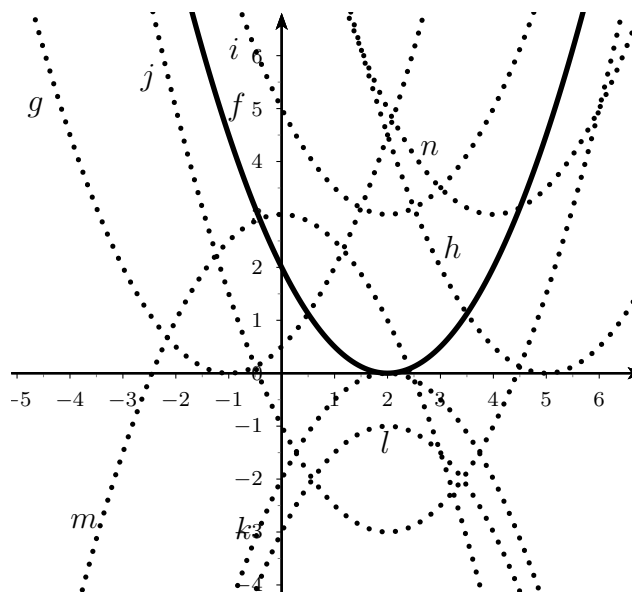
 Sur $] -\infty; -3] \cup] -1; 1[$ g est au-dessus de f .

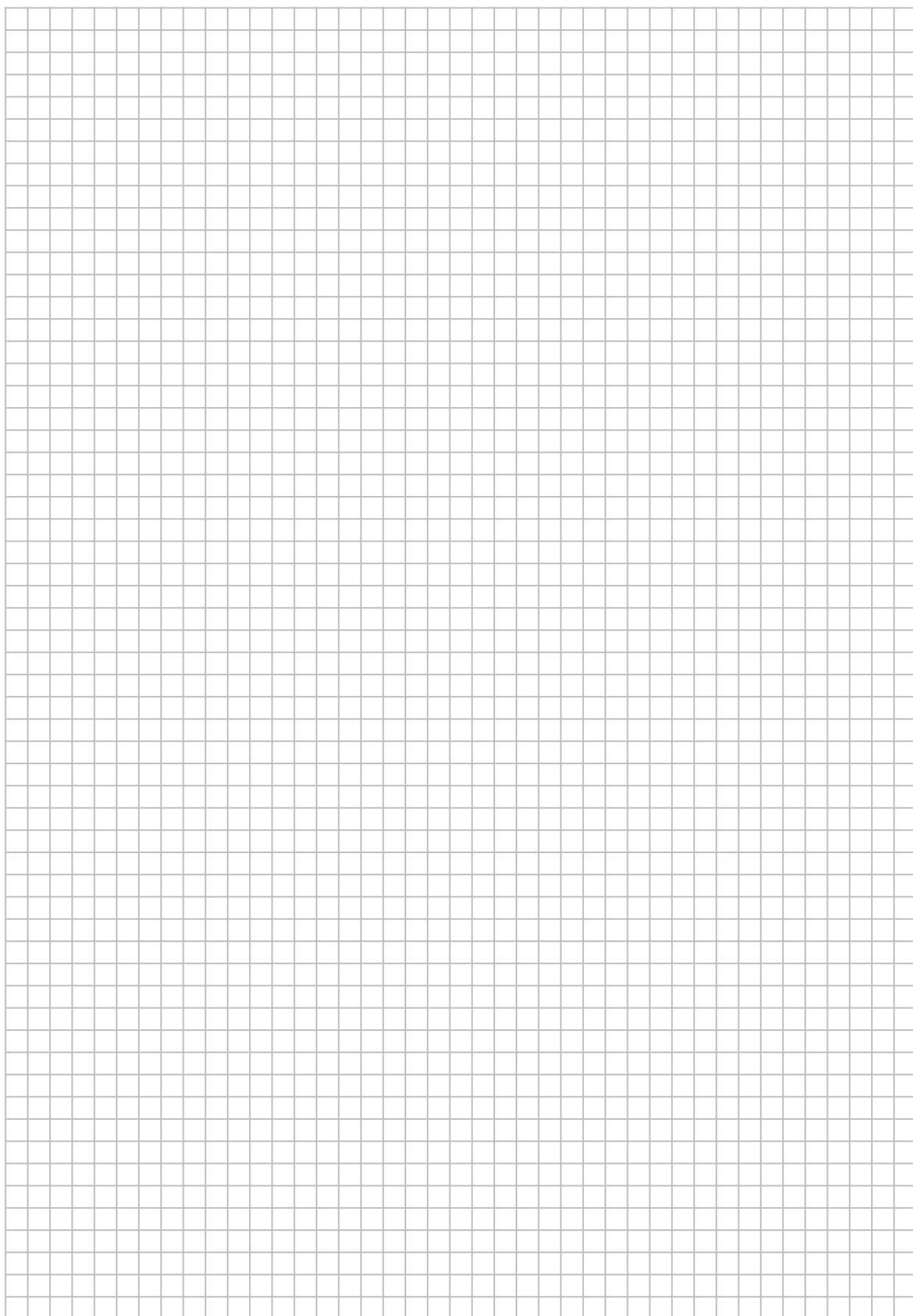
 Sur $[-3; -1[\cup]1; +\infty[$ g est au-dessous de f .

1.14

 Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} 1000 + 20n & \text{si } n \leq 30 \\ 1600 & \text{si } 31 \leq n \leq 40 \\ 1600(0.9)^{n-40} & \text{si } n \geq 41 \end{cases}$$

1.15




Chapitre 2

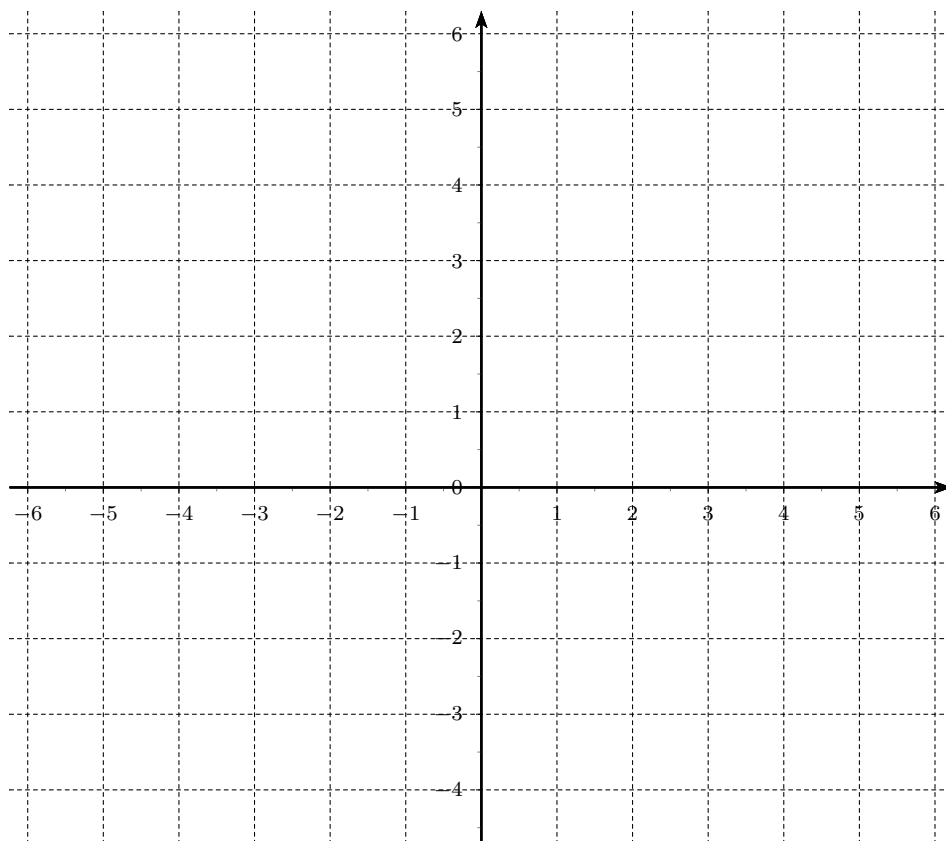
Limites finies et infinies

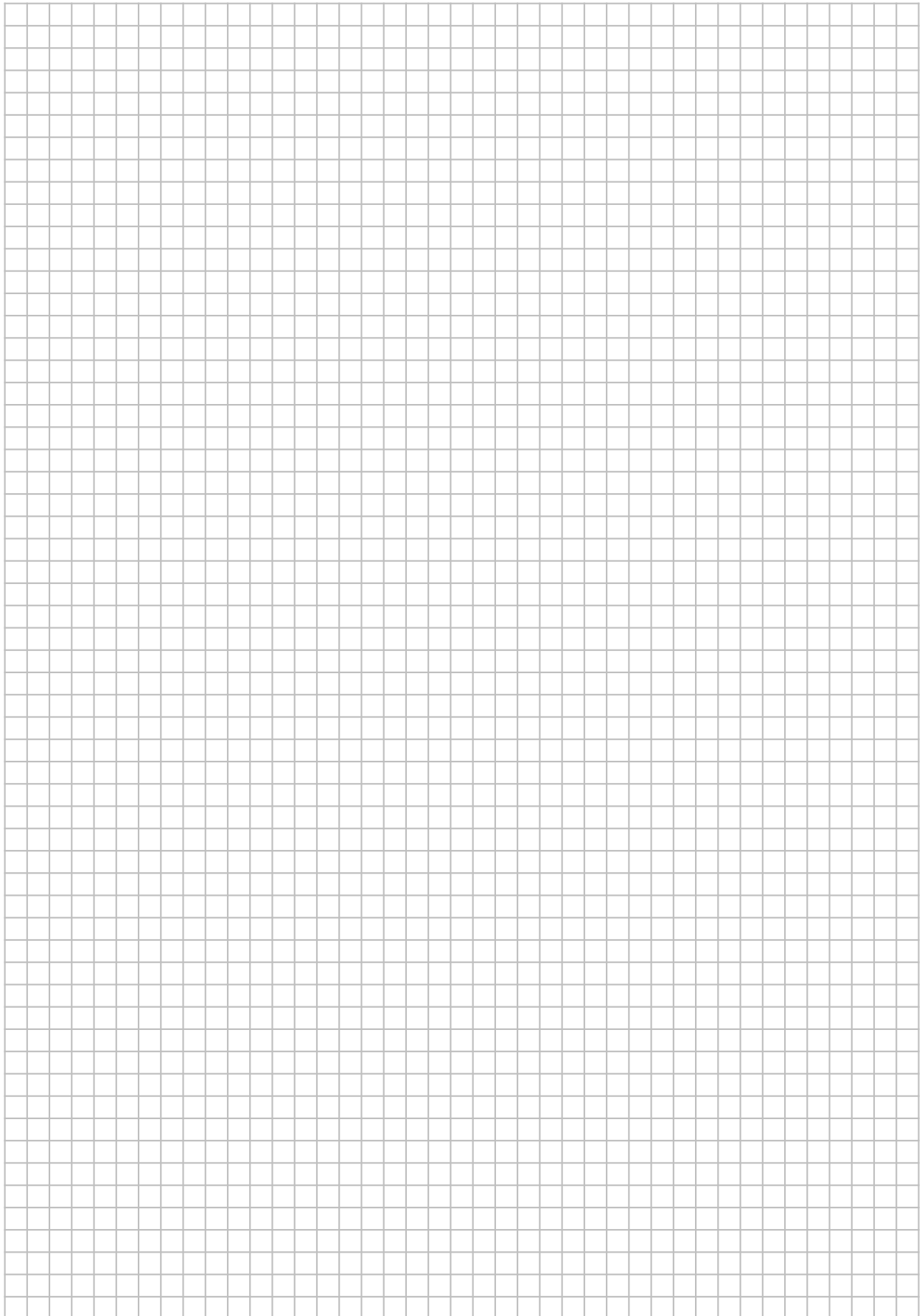
La notion de limite est particulièrement utile pour étudier le comportement d'une fonction au **voisinage** d'un pôle.

2.1 Notion intuitive de limite finie

Exemple 2.1.

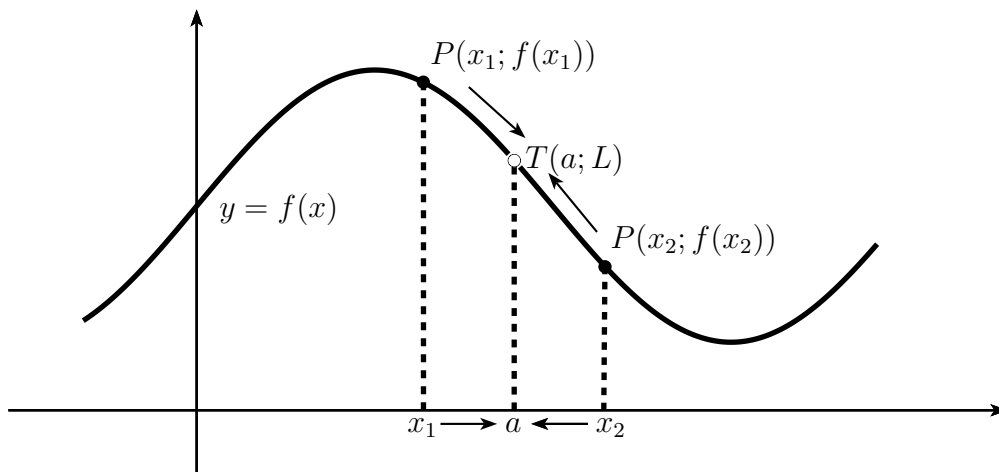
Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$. Déterminer son ensemble de définition, son signe et la représenter graphiquement.





2.2 Limite finie

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ signifie que la suite de points $(x; f(x))$ du graphe représentant la fonction f s'approchent indéfiniment du point $(a; L)$ lorsque x se rapproche indéfiniment de a (sans prendre la valeur a). Les mots « proche » et « s'approcher de » sont employés ici dans un sens très intuitif!

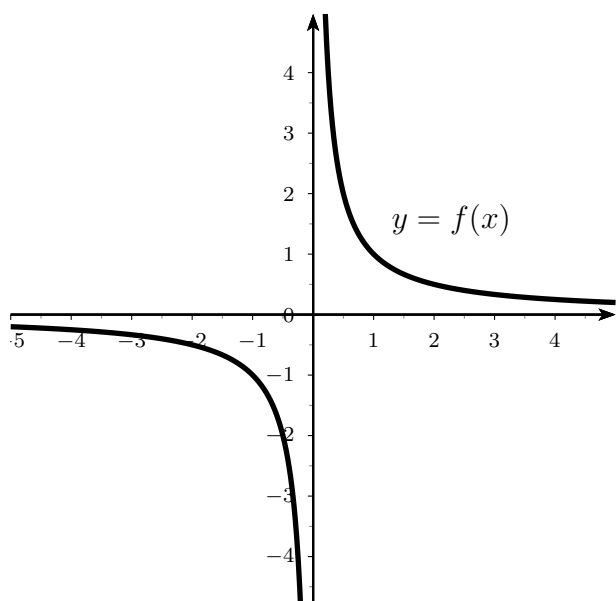


Remarque 2.1.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ne se calcule que si a est un pôle de f ou si $a \in I \subset ED(f)$ où I est un intervalle ouvert.

Exemple 2.2.

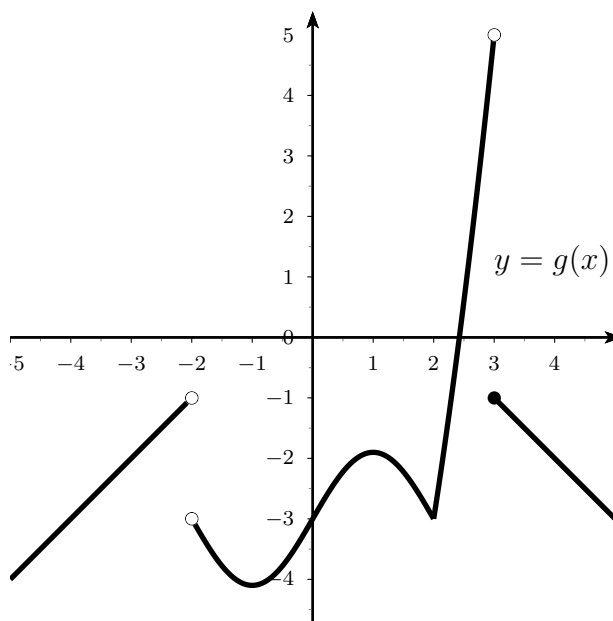
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions données graphiquement ci-dessous. Evaluer graphiquement les limites demandées.



$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

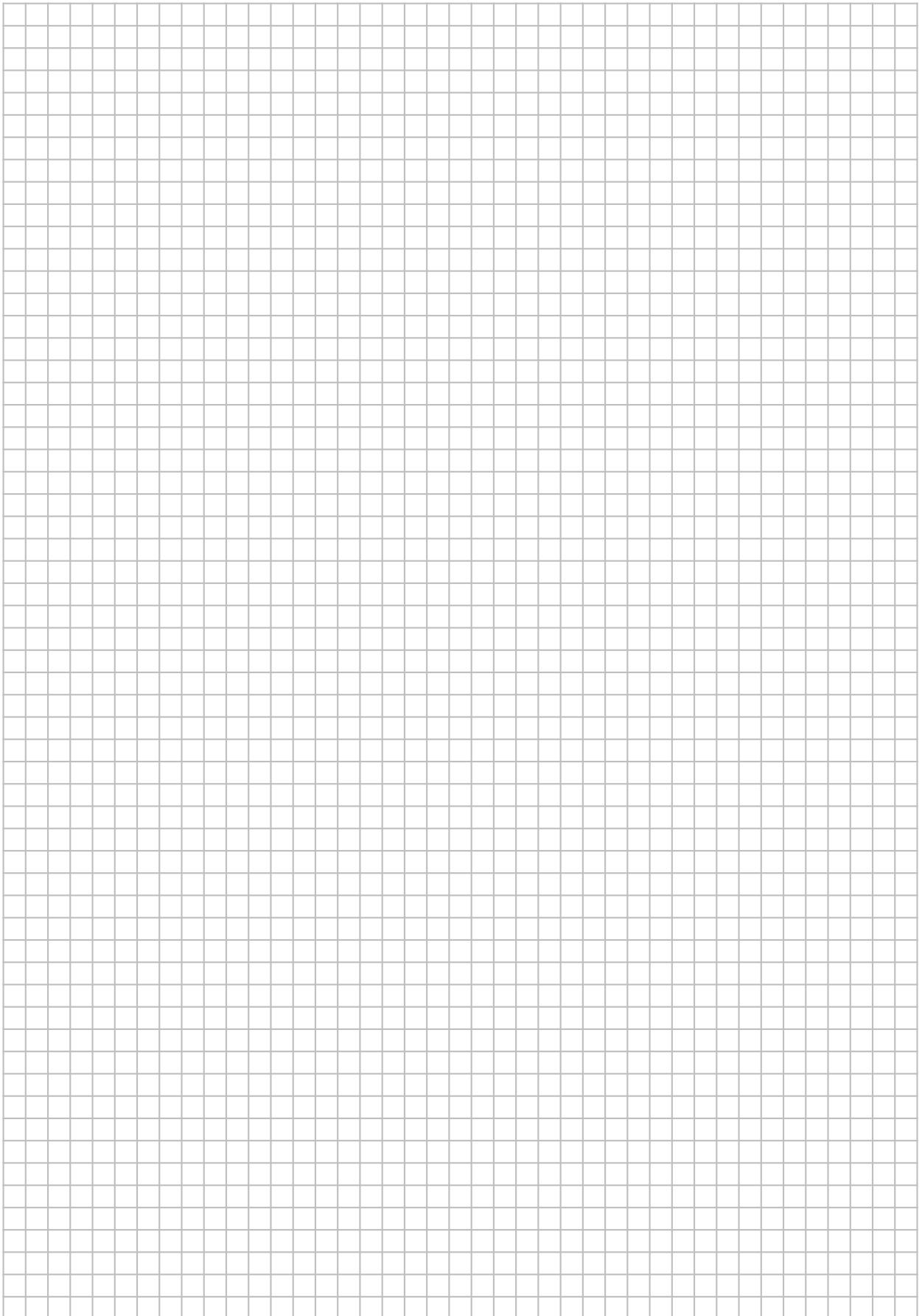
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$



$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) =$$



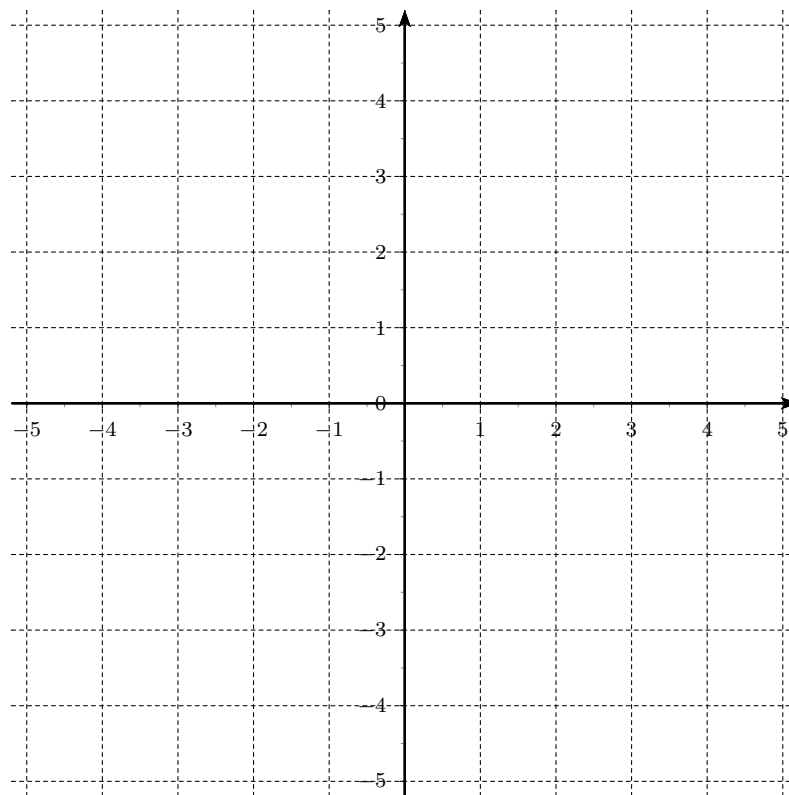
2.3 Limites à gauche et limites à droite

Nous allons devoir étudier le comportement de certaines fonctions au voisinage d'un point a d'une manière plus attentive, c'est-à-dire une fois à gauche de a , et une fois à droite de a . Le résultat ne sera pas nécessairement le même.

Exemple 2.3.

Représenter graphiquement ci-dessous la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 0.5x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

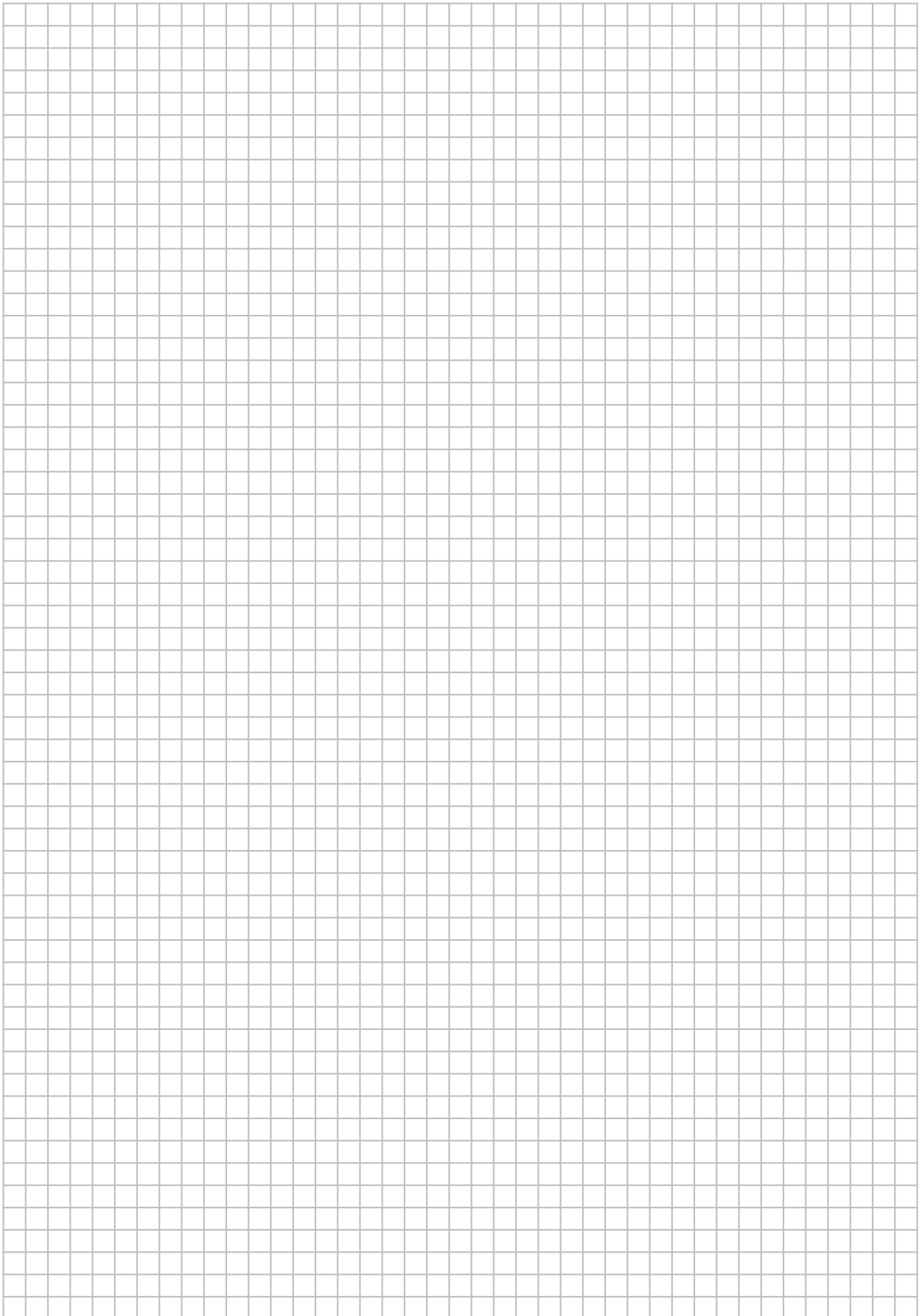


Déduire du graphe les limites suivantes (si elles existent) :

Limite en $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

Limite à gauche en $x = 2$: $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ <}} f(x) =$

Limite à droite en $x = 2$: $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} f(x) =$



2.4 Calculs de limites

2.4.1 Opérations sur les limites

1) La limite est unique : si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, alors $L = M$.

2) La limite d'une somme est la somme des limites.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$$

3) La limite d'un produit est le produit des limites

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \cdot L \text{ si } \alpha \in \mathbb{R}$$

4) La limite d'un quotient est le quotient des limites

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} \text{ si } M \neq 0.$$

2.4.2 Calculs de limite en un point défini

- Soit f est une fonction polynomiale, rationnelle, irrationnelle, trigonométrique, logarithmique ou exponentielle et $a \in ED(f)$.

Si f définie dans un intervalle ouvert contenant a , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

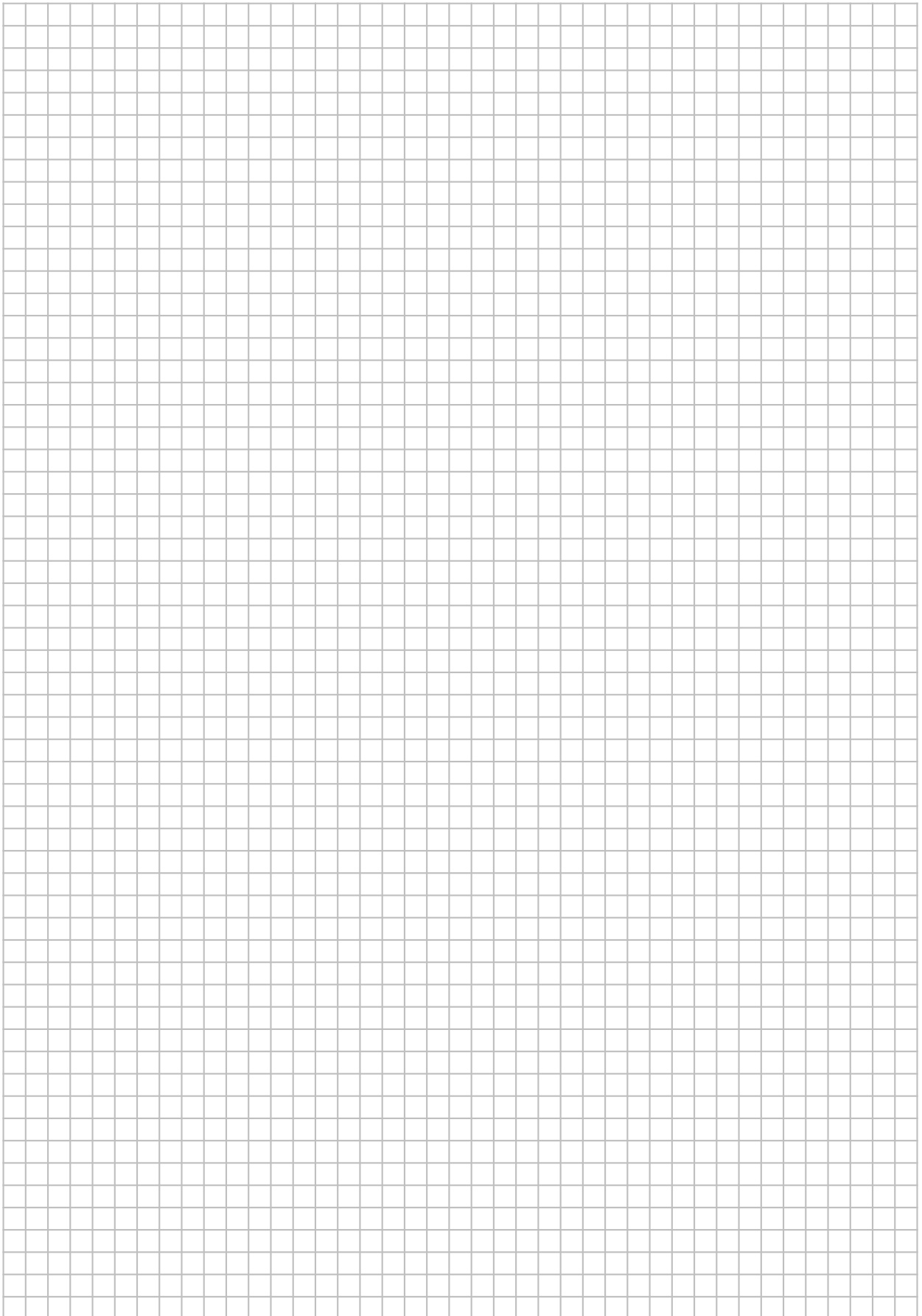
Exemple 2.4.

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 5} (3x^2 - 2x + 1) =$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{6 - x} =$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x + 1} =$



2.4.3 Calculs de la limite en un pôle

Fonctions rationnelles

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $D(a) = 0$.

Premier cas : $N(a) = 0$

On obtient dans ce cas une forme $\frac{0}{0}$, dite **forme indéterminée**.

Dans cette situation, $N(x)$ et $D(x)$ sont divisibles par $x - a$. On peut donc simplifier la fraction par $x - a$.

Exemple 2.5.

Calculer les limites suivantes :

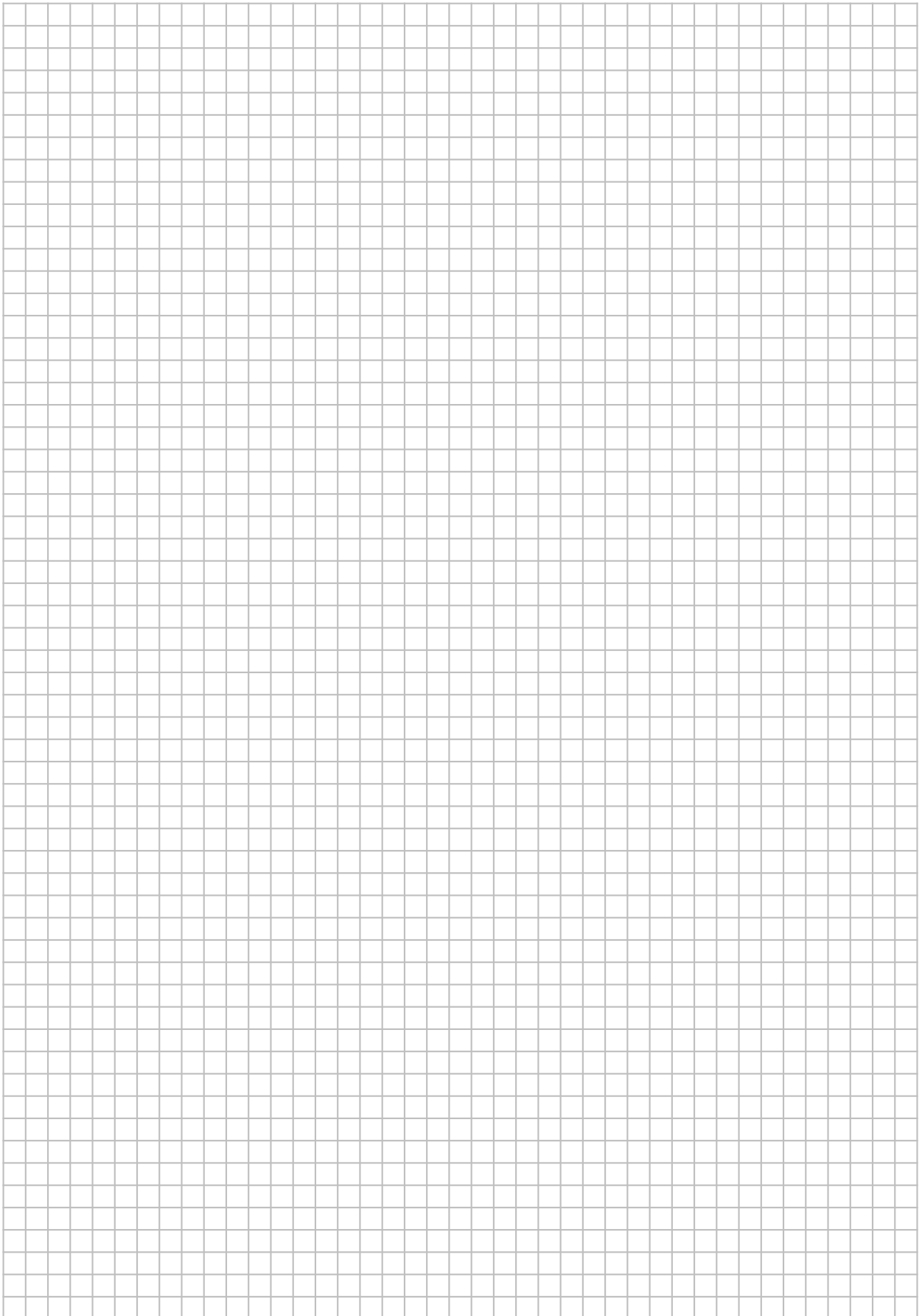
a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2} =$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x} =$

Deuxième cas : $N(a) \neq 0$

On obtient dans ce cas une forme $\frac{b}{0}$ où $b \neq 0$. On verra plus loin comment poursuivre le calcul dans cette situation.



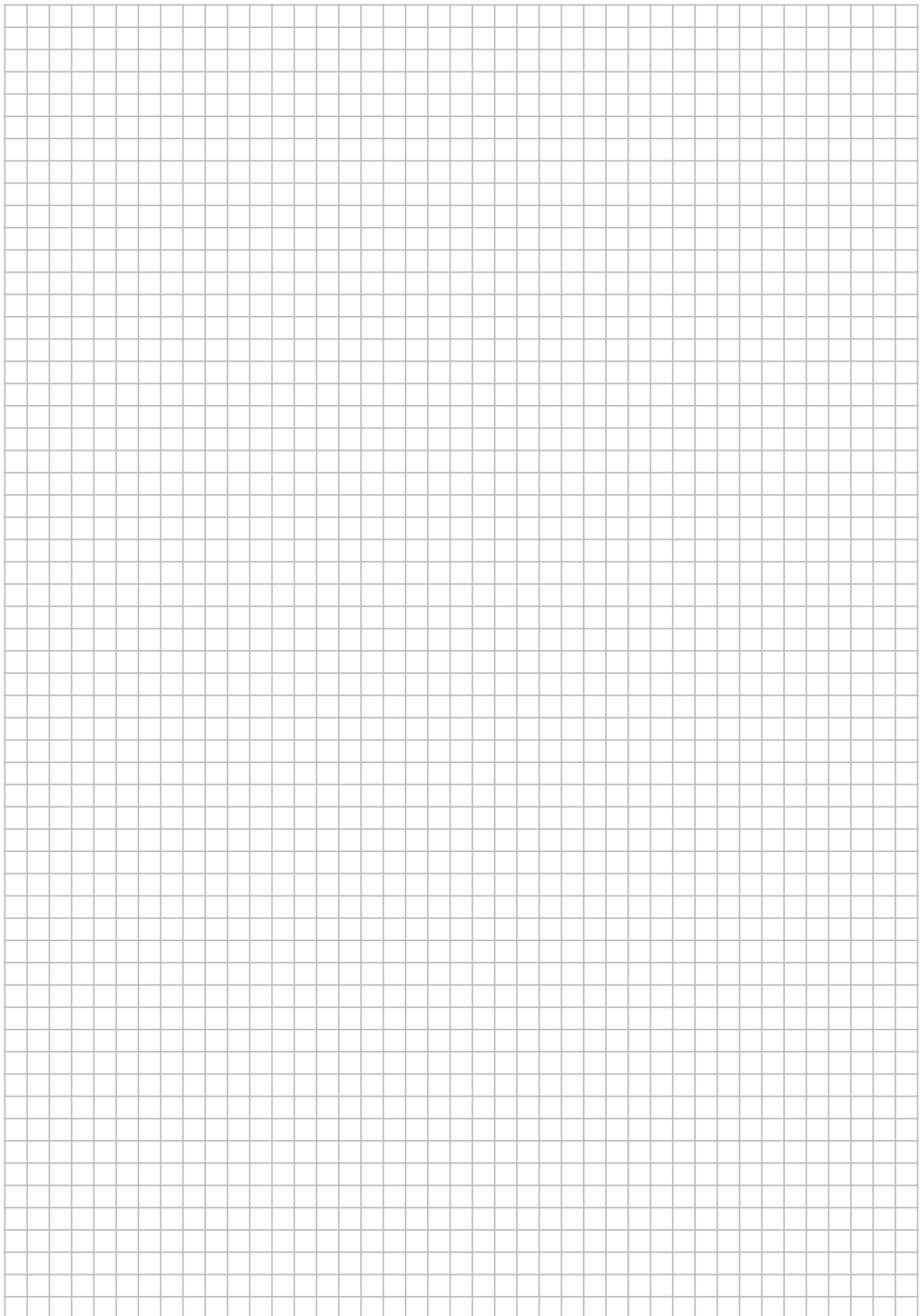
Quotients de fonctions non polynomiales

On utilise la formule $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ pour résoudre une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$ dans le cas d'un quotient de fonctions contenant une racine carrée.

Exemple 2.6.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3} =$$



2.5 Limites infinies

On va traiter la forme $\frac{b}{0}$ où $b \neq 0$.

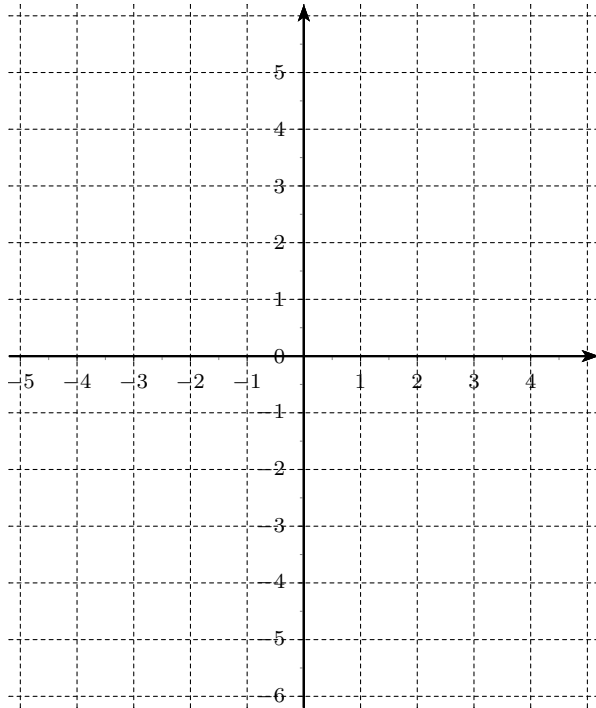
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand dès que x est suffisamment proche et différent de a

On a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = +\infty$.

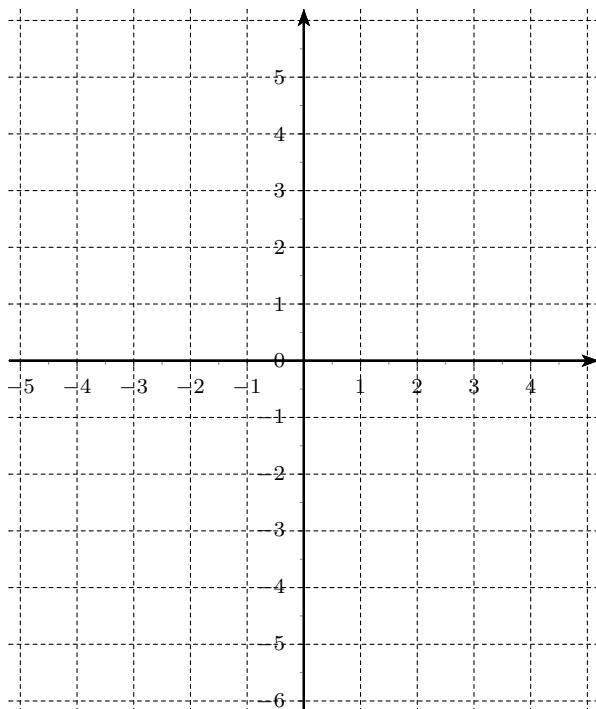
Exemple 2.7.

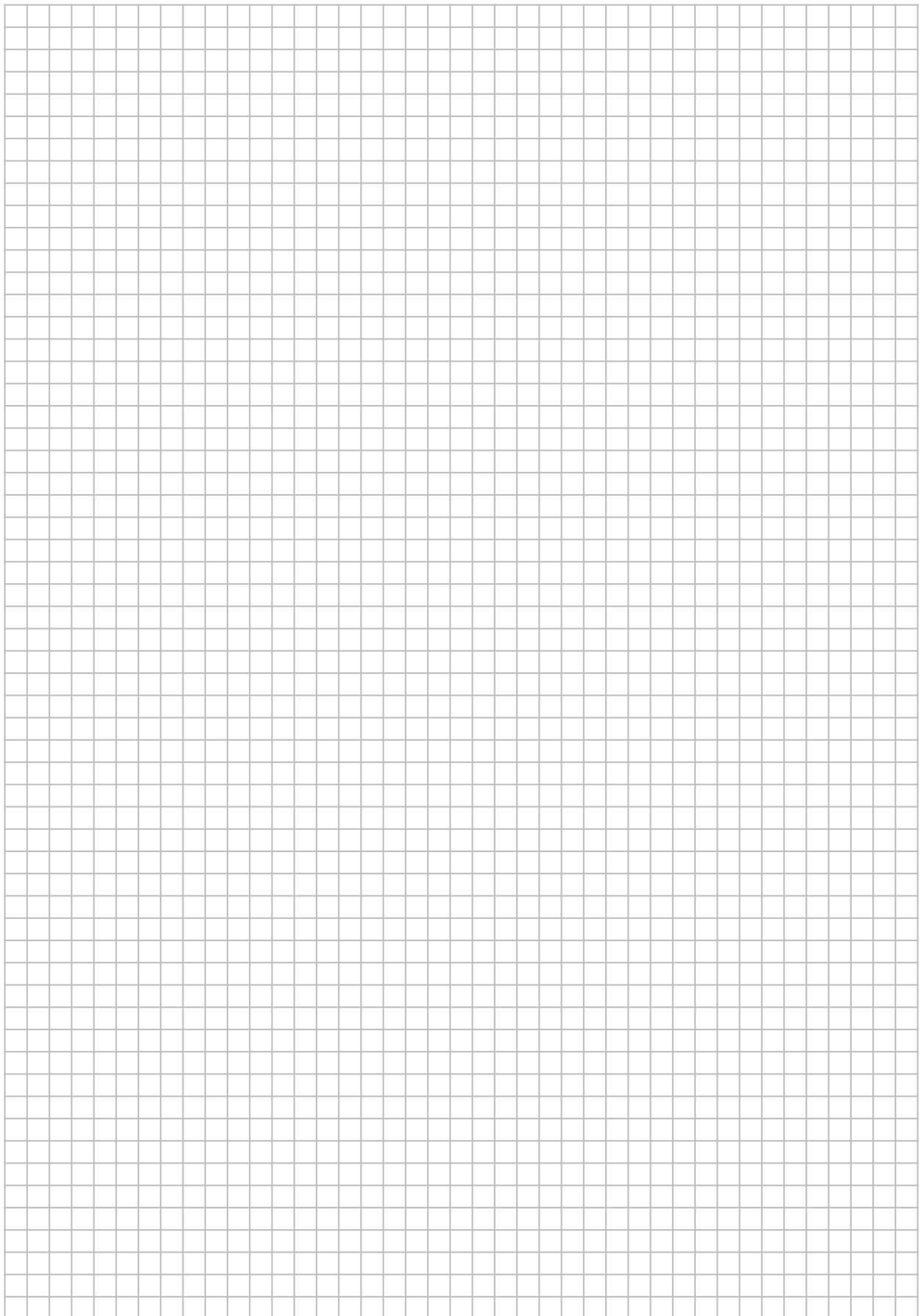
Déterminer l'ensemble de définition, le signe et esquisser les fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$



b) $g(x) = \frac{-x}{x-3}$





2.5.1 Algèbre de l'infini

Les propriétés énoncées dans le théorème ne se généralisent pas sans autre aux limites infinies. Certaines de ces propriétés restent tout de même valables. Par exemple :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c > 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c < 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c < 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0_-$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Remarque 2.2.

1) On abrège les propriétés précédentes en notant par exemple :

$$\forall c \in \mathbb{R} : c + (+\infty) = +\infty \quad \text{ou} \quad \forall c \in \mathbb{R}, c < 0 : \frac{c}{0_-} = +\infty$$

2) Il existe des formes, dites **indéterminées**, pour lesquelles la conclusion n'est pas immédiate. Voici les principales :

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad (+\infty) - (+\infty) \quad \text{et} \quad 0 \cdot \pm\infty$$

Exemple 2.8.

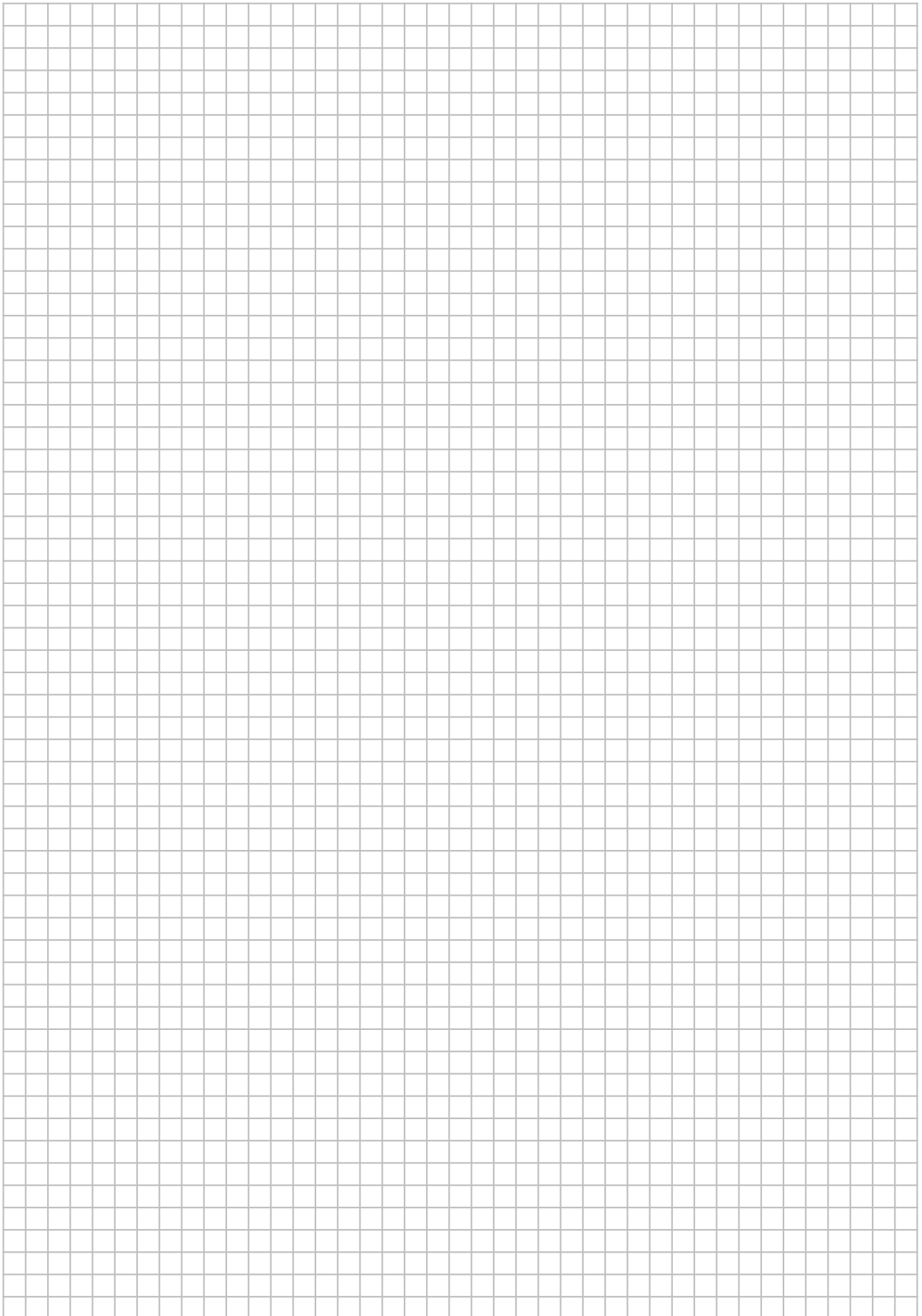
Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{5}{x-3} =$

b) $\lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{5}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} =$

Remarque 2.3.

Lorsque $\lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x)$ et $\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x)$ sont infinies, on notera $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ si les limites à gauche et à droite ne sont pas demandées.



2.6 Exercices

2.1

Déterminer à l'aide du graphique, lorsque c'est possible :

1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

5) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

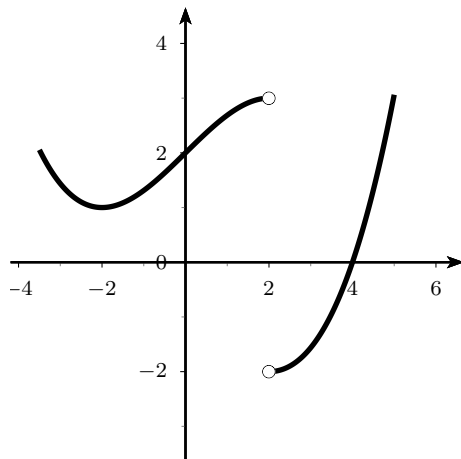
2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

4) $f(2)$

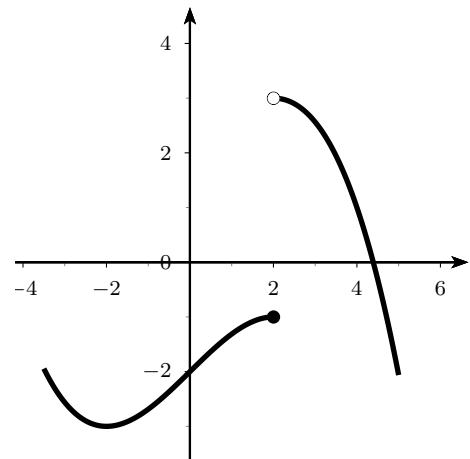
6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

8) $f(0)$

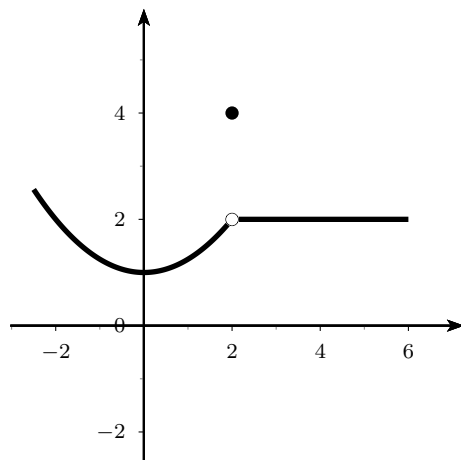
a)



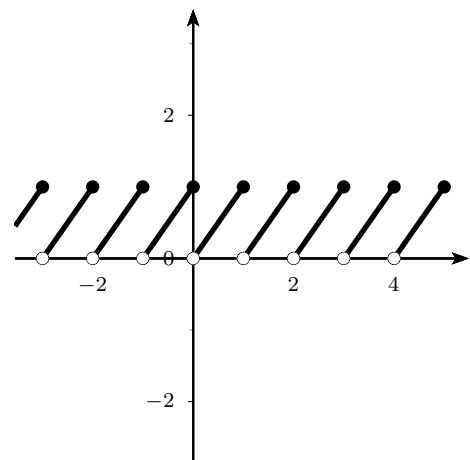
d)



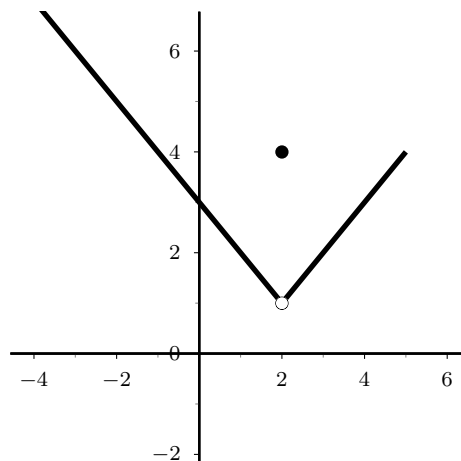
b)



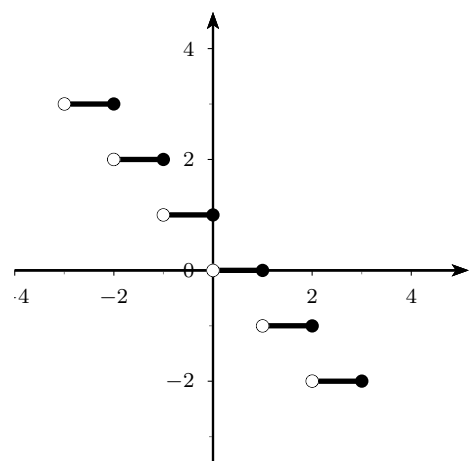
e)



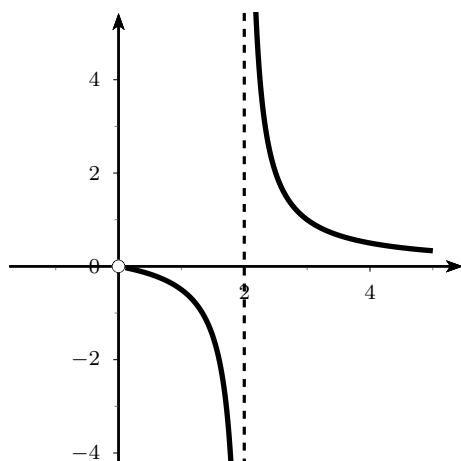
c)



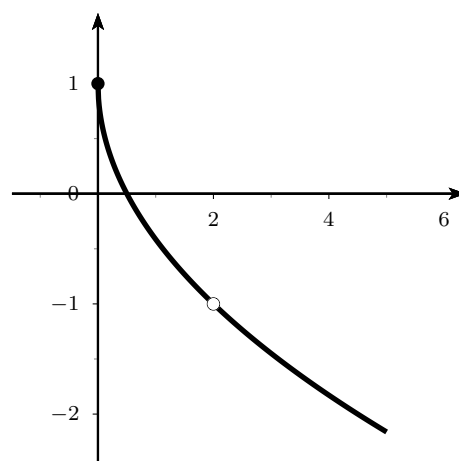
f)



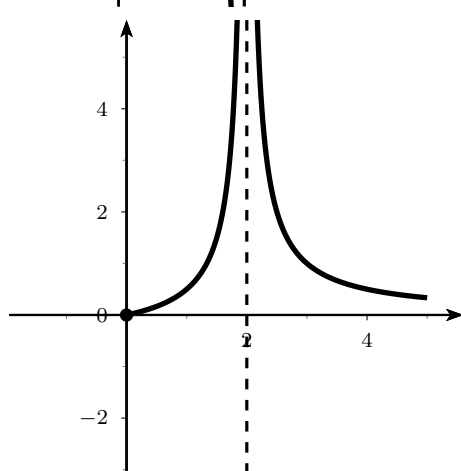
g)



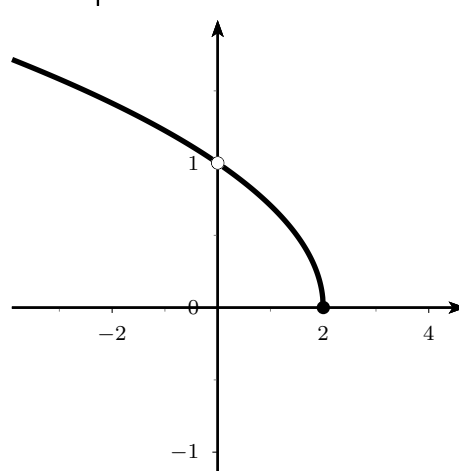
i)



h)



j)



2.2

Représenter graphiquement la fonction f et calculer :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

4) $f(1)$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2.3

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 9)$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{(x + 2)^2 - (x - 2)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 9)$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$

l) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} (1 + x + x^2 + x^3)$

h) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$

m) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 8x + 3}{16x^3 - 8x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x^2 + 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

n) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 + 16x + 5}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

j) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{\pi \cdot x}$

o) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 + 16x + 5}$

2.4

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^3 - x^2 - 27x + 9}$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x + 6}}{x + \sqrt{2 - x}}$

j) $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{1 + \sqrt{t - 2}}{t}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

g) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$

k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x - 1}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x - 1}$

h) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 + h}}{h}$

2.5

Calculer les limites suivantes. Si la limite est infinie, préciser les limites à gauche et à droite si elles sont différentes.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{3 - x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{2 - x}}$

k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(3 - x)^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 7}{x^2 + x - 2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 6x + 5}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3}{(3 - x)^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(2 - x)^3}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - 5x}{x^4 - 5x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} \frac{2x + 5}{5x + 2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 5x}{x^4}$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x^2 - 2x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$

j) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(8x + 7 + \frac{x}{x - 2} \right)$

o) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$

2.7 Réponses

2.1

- | | |
|----------------------------|--|
| a) $3/-2/-/-2/2/2/2$ | f) $-1/-2/-/-1/1/0/-/1$ |
| b) $2/2/2/4/1/1/1/1$ | g) $-\infty/+ \infty/-/-/-/0/-/-$ |
| c) $1/1/1/4/3/3/3/3$ | h) $+\infty/+ \infty/+ \infty/-/-/-/0/-/0$ |
| d) $-1/3/-/-1/-2/-2/-2/-2$ | i) $-1/-1/-1/-/-/1/-/1$ |
| e) $1/0/-/-1/1/0/-/1$ | j) $0/-/-/0/1/1/1/-$ |

2.2

- | | | |
|--------------|--------------|-----------------|
| a) $0/3/-/3$ | c) $0/0/0/1$ | e) $-1/-1/-1/2$ |
| b) $2/2/2/2$ | d) $2/2/2/1$ | |

2.3

- | | | | | |
|------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| a) 7 | d) $\frac{1}{5}$ | g) 0 | j) 0 | m) -1 |
| b) 0 | e) 0 | h) $\frac{1}{2}$ | k) $\frac{3}{8}$ | n) $\frac{3}{16}$ |
| c) 0 | f) -2 | i) 3 | l) $-\frac{8}{3}$ | o) $\frac{1}{2}$ |

2.4

- | | | | |
|-------------------------|--|-------------------|------------------|
| a) $\frac{7}{48}$ | c) $\frac{1}{4}$ | f) $\frac{5}{3}$ | i) 2 |
| | d) $\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ | g) 8 | j) $\frac{1}{2}$ |
| b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | e) 3 | h) $-\frac{1}{8}$ | k) $-2\sqrt{3}$ |

2.5

- | | | |
|------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $-\infty$ | f) $+\infty$ | k) $-\infty$ et $+\infty$ |
| b) $+\infty$ | g) $+\infty$ | l) $-\infty$ et $+\infty$ |
| c) $+\infty$ | h) $-\infty$ | m) $+\infty$ |
| d) 0 | i) $+\infty$ | n) $+\infty$ et $-\infty$ |
| e) $\frac{1}{2}$ | j) $-\infty$ et $+\infty$ | o) $\frac{1}{4}$ |

Chapitre 3

Limites à l'infini, asymptotes

3.1 Limites à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a; +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment grand
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand dès que x est suffisamment grand
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = +\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $] -\infty; a]$, où $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$

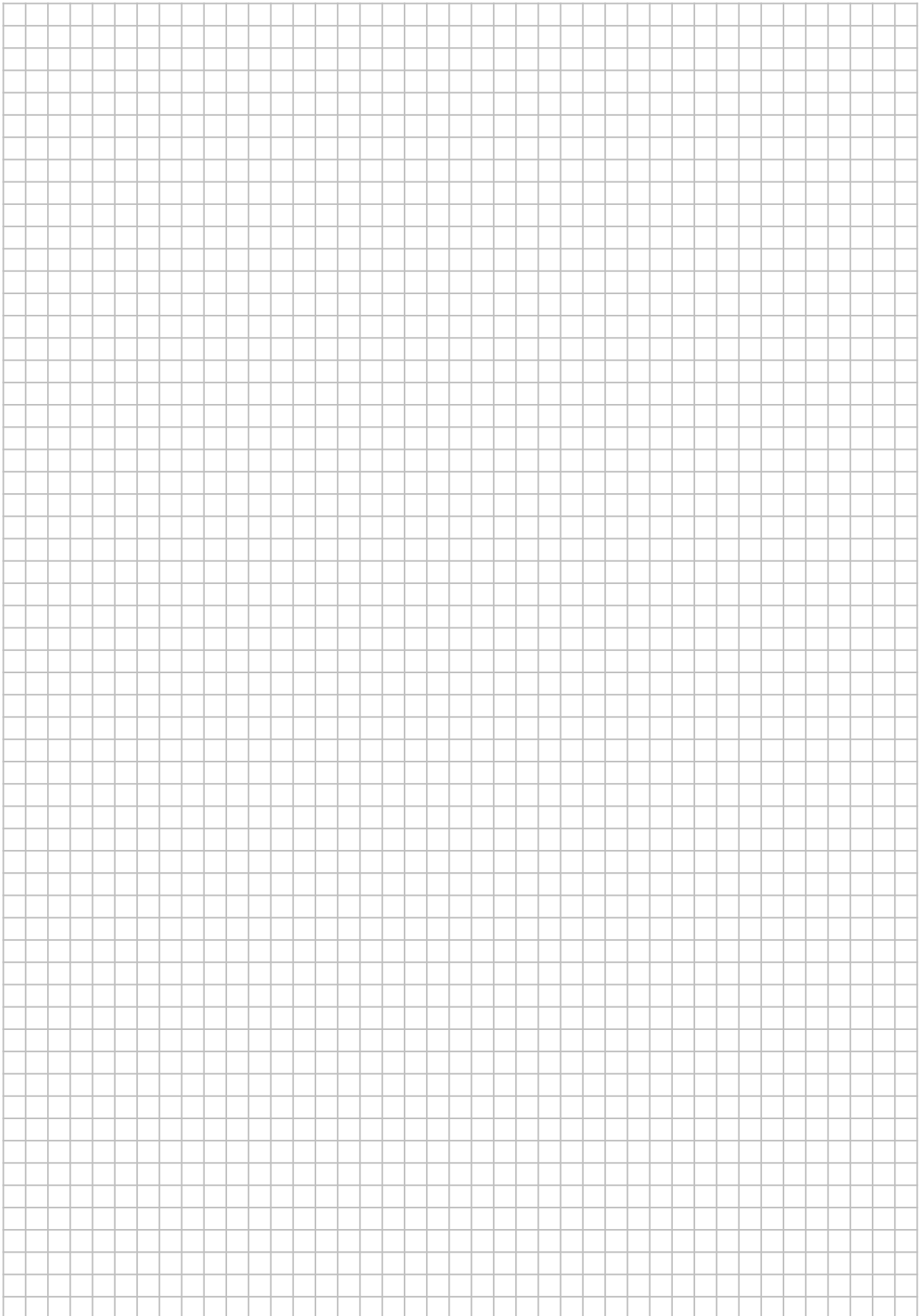
Remarque 3.1.

- 1) Les propriétés énoncées dans le théorème pour les limites finies peuvent être étendues sans autre aux limites à l'infini
- 2) Dans certains ouvrages, la notation ∞ représente $\pm\infty$.

Exemple 3.1.

Calculer (si elles existent) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

a) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 1}$



b) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$

Limites à l'infini de fonctions polynomiales et rationnelles

Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n ($a_n \neq 0$)
et $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ un polynôme de degré m ($b_m \neq 0$).

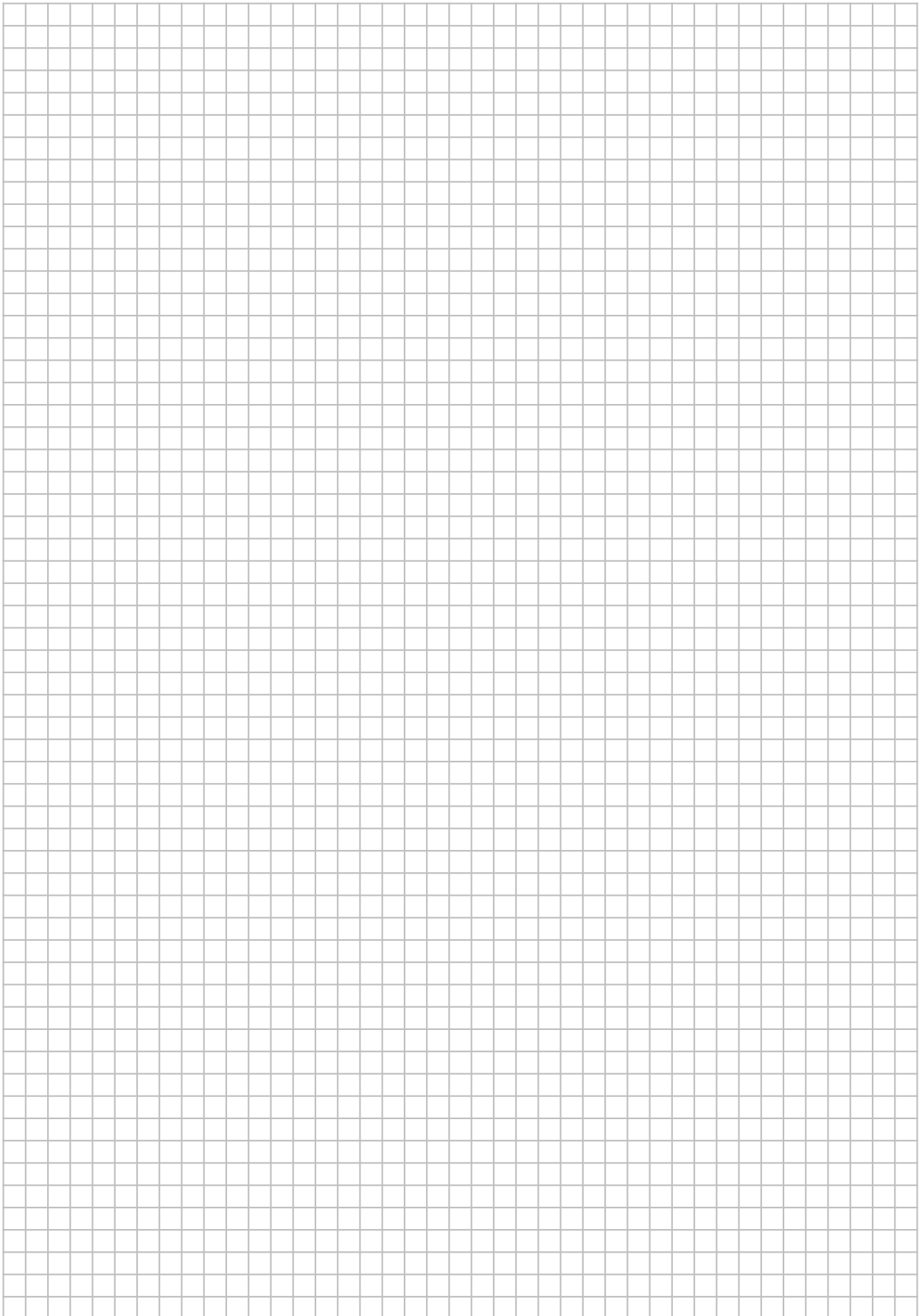
On a

1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n)$

2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \pm\infty & \text{si } n > m \end{cases}$

Exemple 3.2.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1}$

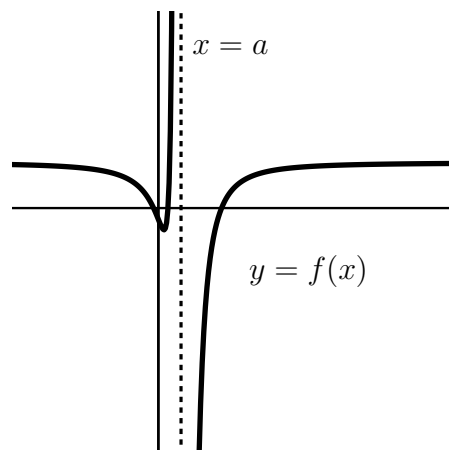


3.2 Asymptotes

Soit $f : ED(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

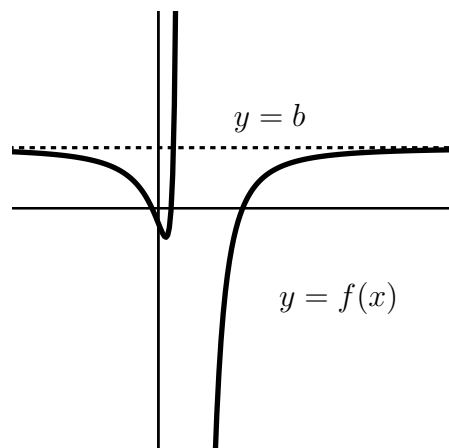
La droite verticale d'équation $x = a$ est **asymptote verticale (AV)** du graphe de la fonction f si la limite en $x = a$ de la fonction f est infinie.

- $x = a$ est AV de f si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$



La droite d'équation $y = b$ est **asymptote horizontale (AH)** du graphe de la fonction f si le graphe de f se rapproche « indéfiniment » de la droite d'autant plus que x se rapproche de $+\infty$ ou de $-\infty$.

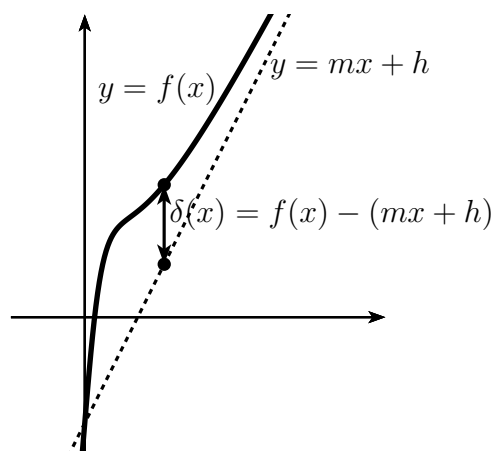
- $y = b$ est AH en $+\infty$ de f si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.
- $y = b$ est AH en $-\infty$ de f si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

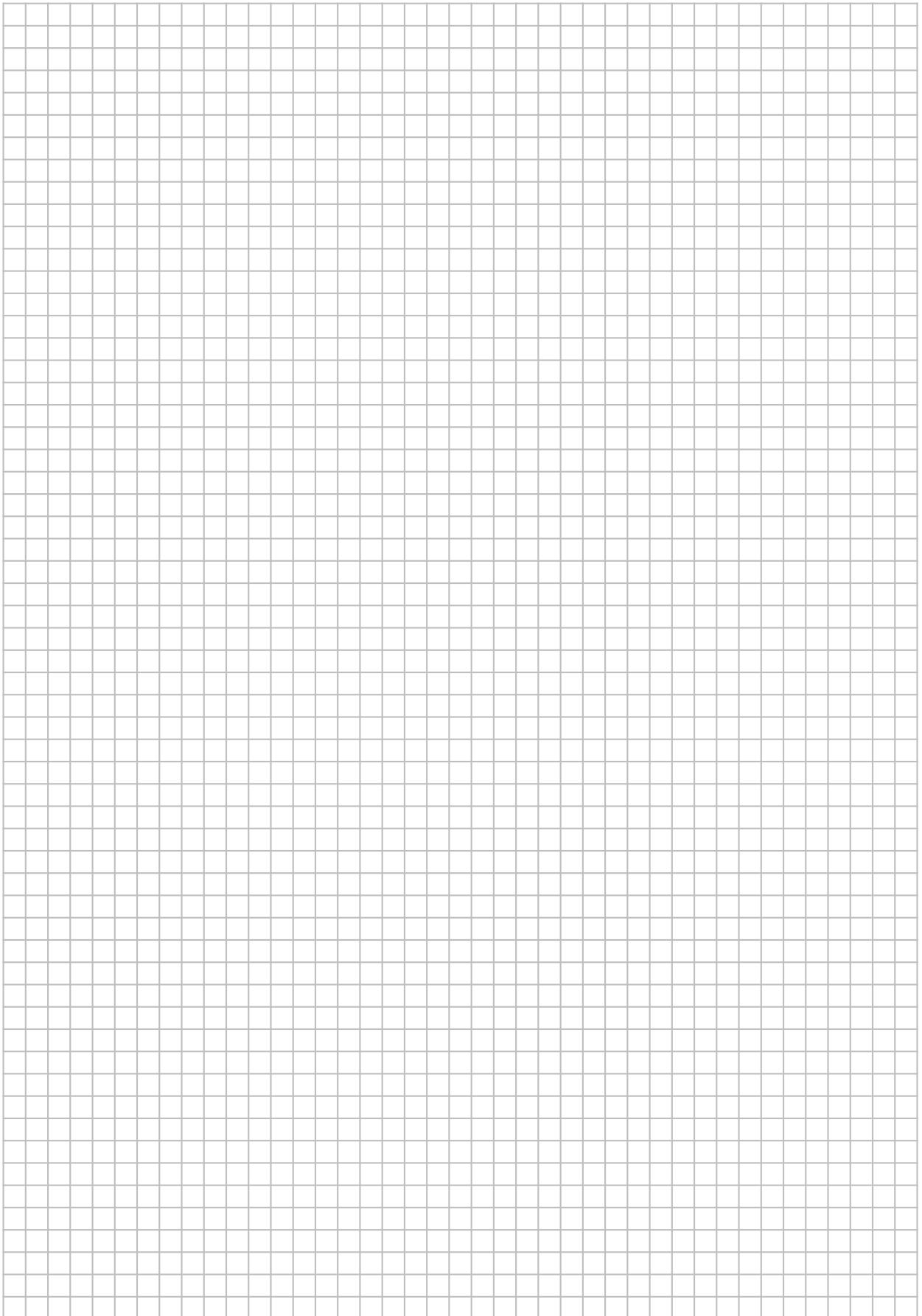


La droite d'équation $y = mx + h$ est **asymptote oblique (AO)** du graphe de la fonction f si le graphe de f se rapproche « indéfiniment » de la droite d'autant plus que x se rapproche de $+\infty$ ou de $-\infty$.

- $y = mx + h$ est AO de f en $+\infty$ de f si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0$.
- $y = mx + h$ est AO de f en $-\infty$ de f si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0$.

La différence $\delta(x) = f(x) - (mx + h)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

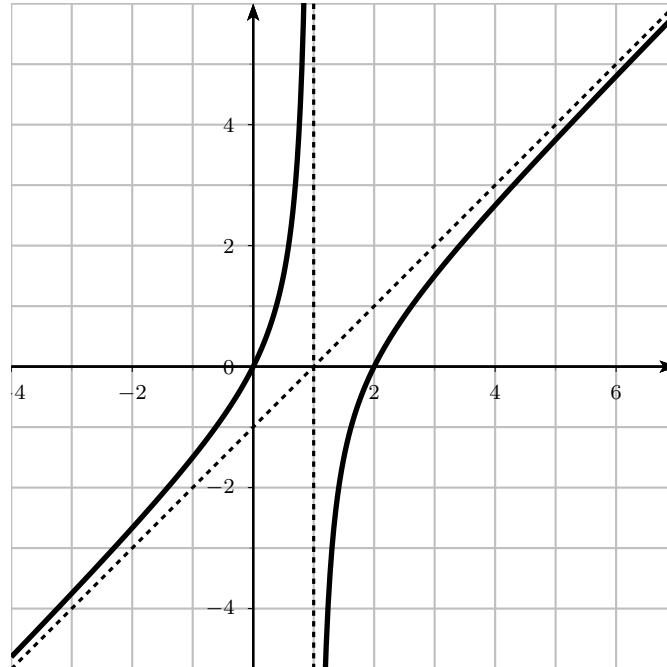


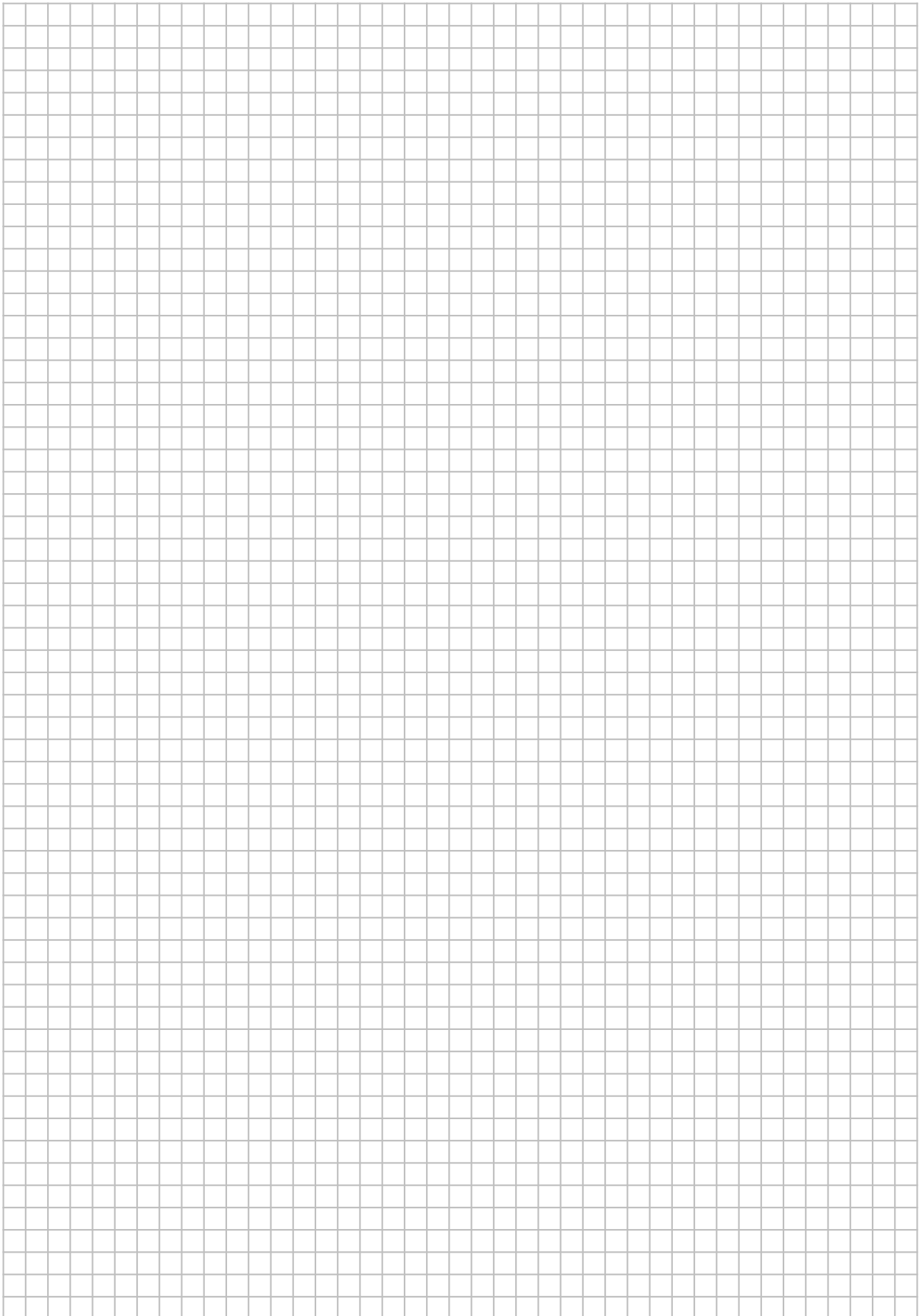


Exemple 3.3.

Soit la fonction f représentée ci-dessous avec ses asymptotes.

En utilisant le graphe de f , donner son ensemble de définition et ses zéros, établir son tableau du signe, ainsi que l'équation de ses asymptotes.



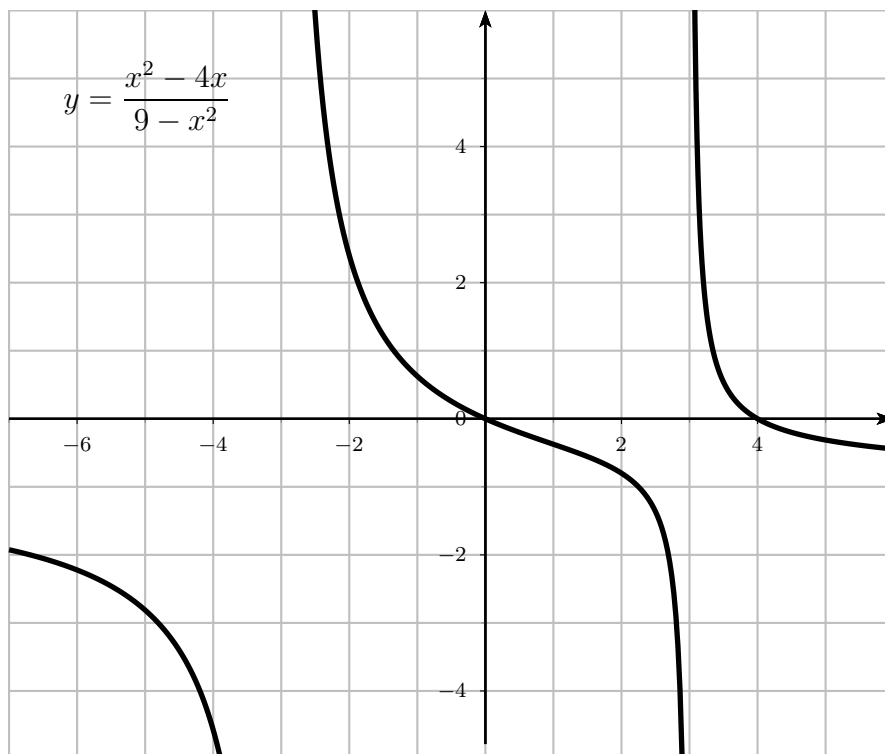


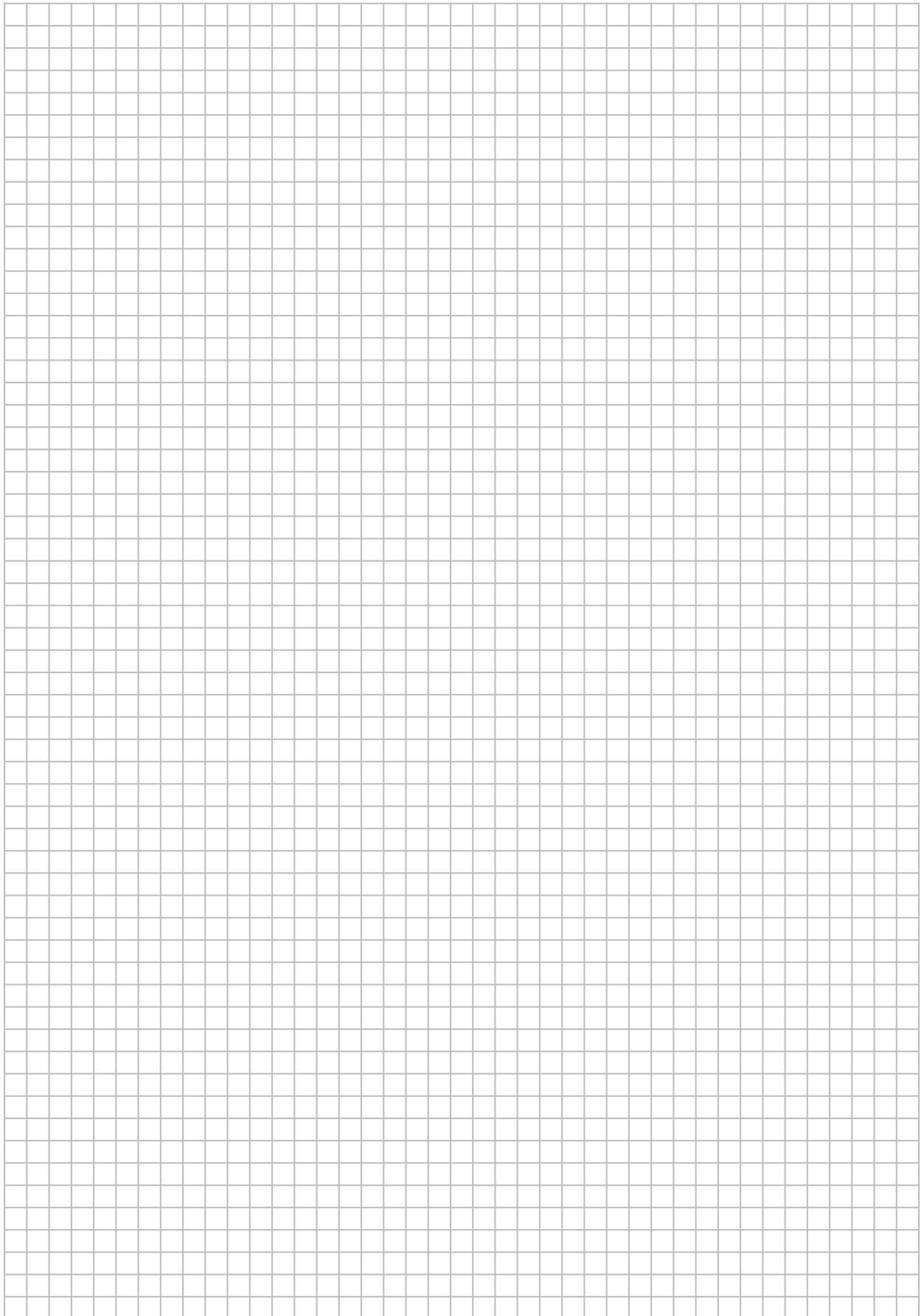
3.3 Recherche d'asymptotes

Exemple 3.4.

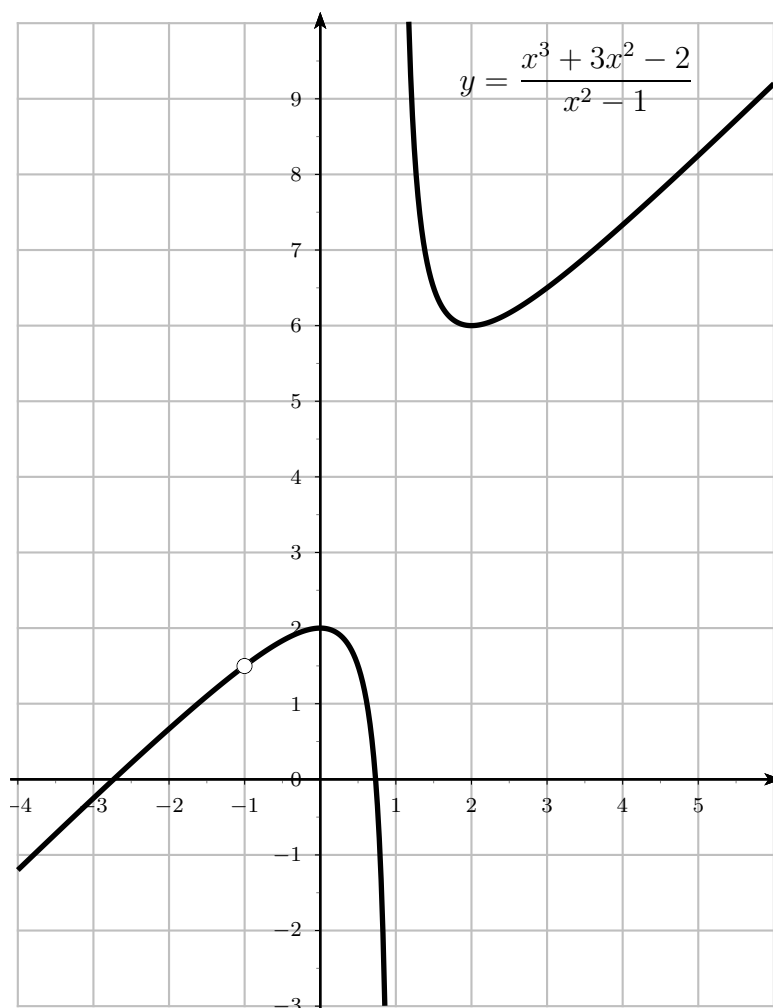
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions données ci-dessous. Calculer une équation de leurs asymptotes éventuelles et les représenter graphiquement.

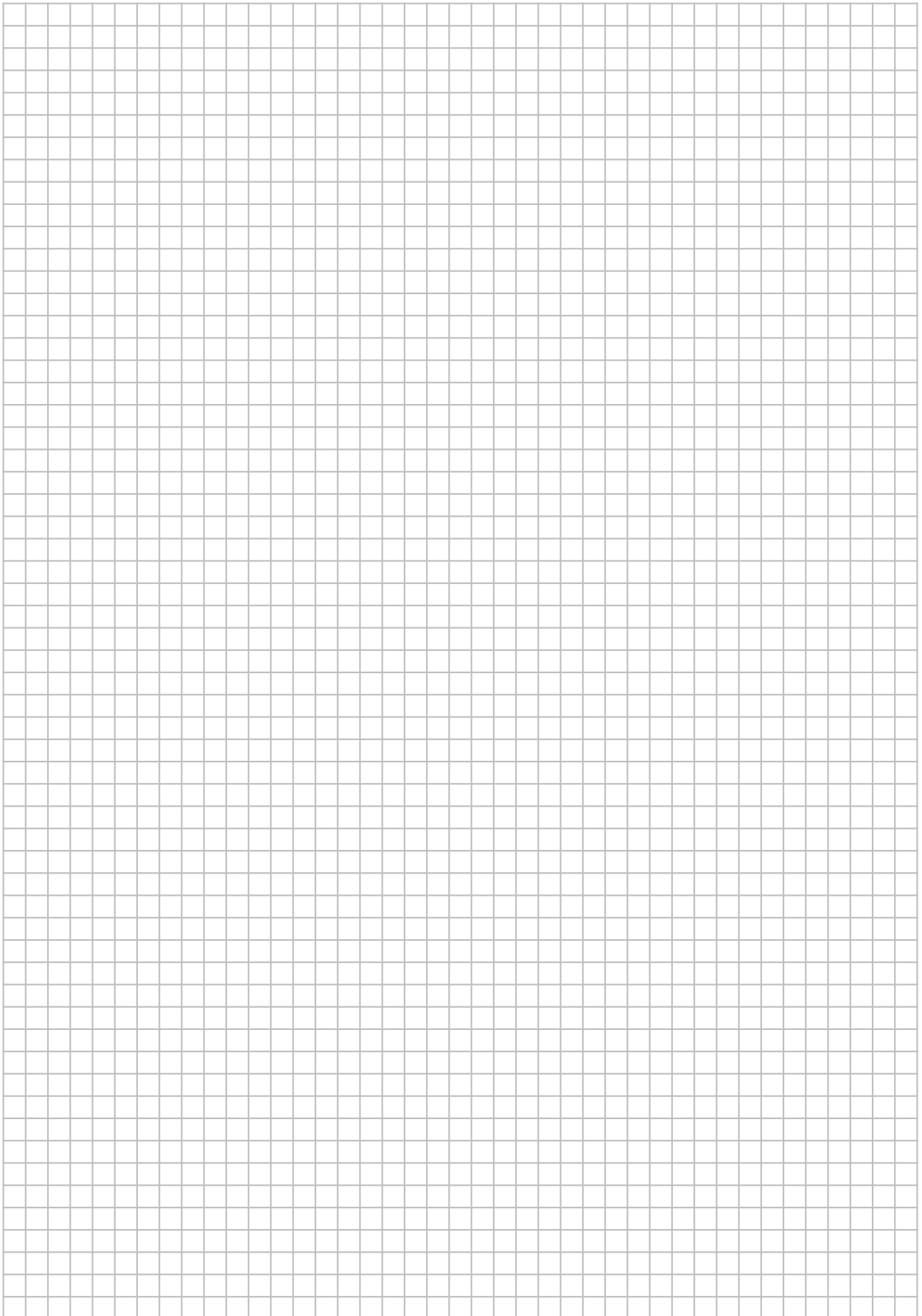
a) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{9 - x^2}$





b) $g(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - 1}$





Asymptote oblique ou horizontale d'une fonction rationnelle

Soit f une fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{P(x)}{S(x)}$ où $P(x)$ et $S(x)$ sont des polynômes.

En divisant $P(x)$ par $S(x)$, on obtient un quotient $Q(x)$ et un reste $R(x)$:

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x) \text{ avec } \deg(R(x)) < \deg(S(x)).$$

On a donc

$$f(x) = \frac{P(x)}{S(x)} = \frac{Q(x) \cdot S(x) + R(x)}{S(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{S(x)}.$$

- Si $Q(x) = b$ est un **nombre réel**, $y = b$ est AH de f et f n'a pas d'AO
- Si $Q(x) = mx + h$ est du **premier degré**, $y = mx + h$ est AO de f et f n'a pas d'AH
- Si $Q(x)$ est du **deuxième degré ou plus**, f n'a ni AH, ni AO.

Remarque 3.2.

Si $y = mx + h$ est asymptote oblique d'une fonction rationnelle en $+\infty$, sa pente m et son ordonnée à l'origine h peuvent être obtenues sans division euclidienne à l'aide des limites suivantes :

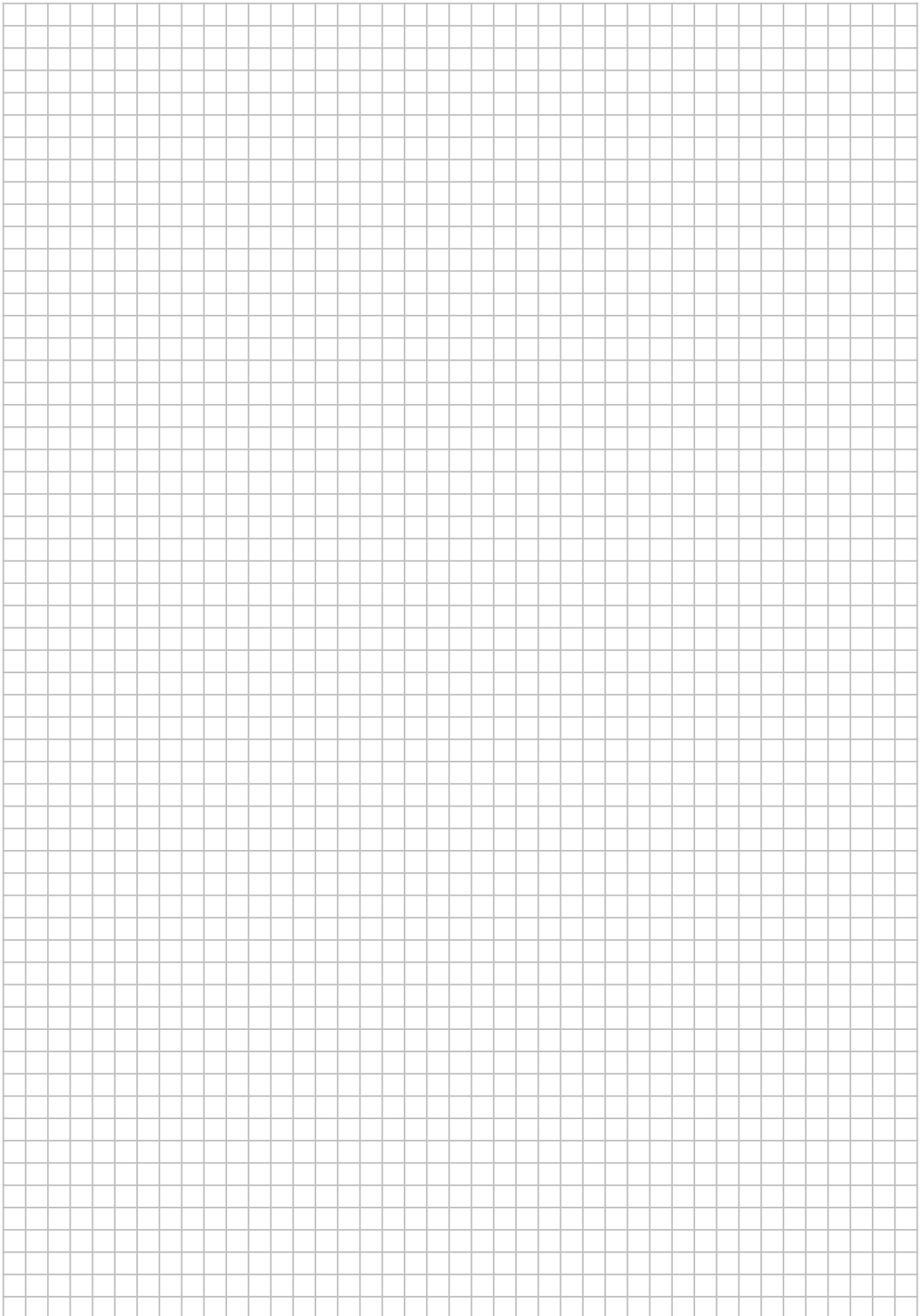
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

De même en $-\infty$.

Exemple 3.4, suite

Déterminer à l'aide de limites une équation de l'asymptote oblique de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - 1}.$$



3.4 Exercices

3.1

Calculer les limites suivantes ou expliquer pourquoi elles n'existent pas.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{8 + 2x - 5x^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^3 + 7x + 9}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x - x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3}{5 - 3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2 + 3}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x^2 - x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x + 4)(x - 1)}{(2x + 7)(x + 2)}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - x^2}{x + 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x^2}{x^2 - 32}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{2x^2 - 5}$

3.2

On verse de l'eau salée, concentrée à 10 grammes de sel par litre d'eau, dans une cuve qui contient 200 litres d'eau pure.

- Si l'eau salée s'écoule à la vitesse de 20 litres par minute dans la cuve, quel est le volume d'eau $v(t)$ (en litres) ainsi que la quantité de sel $q(t)$ (en grammes) après t minutes ?
- Quelle est la concentration $c(t)$ en sel (en grammes par litre) après t minutes ?
- Que devient cette concentration après une longue période de temps ($t \rightarrow +\infty$) ?

3.3

On appelle *fonction demande* ou simplement *demande* la quantité d'un bien que les consommateurs sont disposés à acheter en fonction du prix de ce bien. Un manufacturier de lampes a observé que la demande pour son modèle spécial de lampe de bureau obéit à la fonction

$$d(x) = \frac{5x + 600}{x} \text{ où } x \text{ est le prix de vente de ses lampes.}$$

Que devient cette demande si on fixe un prix de vente extrêmement bas ($x \rightarrow 0$) ? un prix de vente extrêmement élevé ($x \rightarrow +\infty$) ?

3.4

Déterminer l'ensemble de définition et une équation des asymptotes verticales et horizontales éventuelles des fonctions suivantes. S'il existe un trou de continuité en donner les coordonnées.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

e) $f(x) = \frac{x + 3}{x^3 + x^2 - 6x}$

b) $f(x) = \frac{5x}{4 - x^2}$

d) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$

f) $f(x) = \frac{x^2 - x}{5x - x^2}$

3.5

Déterminer l'ensemble de définition et une équation des asymptotes des fonctions suivantes. S'il existe un trou de continuité en donner les coordonnées.

a) $f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

e) $f(x) = \frac{3x^2-4x+2}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x^2+2}{x}$

f) $f(x) = \frac{x^3-x^2-4x-6}{x^2-2x-3}$

3.6

Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , toutes les asymptotes de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^n + 1}{x^2 - 9}$$

3.7

Trouver dans chacun des cas suivants une fonction rationnelle admettant pour seule(s) asymptote(s) celle(s) qui est proposée(s). Donner la solution la plus simple pour ces fonctions, c'est-à-dire celles pour lesquelles les degrés du numérateur et du dénominateur sont les plus petits possibles. Exprimer les résultat sous la forme d'une seule fraction.

a) Une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 3$

b) Une asymptote horizontale d'équation $y = 2$

c) Une asymptote verticale d'équation $x = 4$

d) Une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et des asymptotes verticales d'équations $x = 1$ et $x = -2$

e) Une asymptote verticale d'équation $x = 2$ et une asymptote oblique d'équation $y = 3x - 1$.

3.8

Trouver une fonction rationnelle f dont le graphe passe par le point $A(-5; 20)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -2$, $x = 1$ et $y = 3x - 7$.

3.9

Etudier la position relative de la courbe $y = f(x)$ et de ses asymptotes, si f est donnée par :

a) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x^2+2x+3}$

b) $f(x) = \frac{2x^3-3x^2-x+6}{x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{x-4}{x^2+5}$

3.5 Réponses

3.1

- | | | | |
|-------------------|------------------|--------------|--------------|
| a) $-\frac{3}{5}$ | c) $+\infty$ | e) -1 | h) 0 |
| | | f) 0 | i) $+\infty$ |
| b) -1 | d) $\frac{3}{2}$ | g) $-\infty$ | j) $+\infty$ |

3.2

- a) $v(t) = 200 + 20t$ et $q(t) = 200t$
 b) $c(t) = \frac{10t}{t + 10}$
 c) Elle s'approche de $10g/l$.

3.3

Dans le premier cas, la demande devient infiniment grande.

Dans le deuxième cas, elle s'approche de 5 lampes.

3.4

- a) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}, x = -2, x = 2, y = 0$
 b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}, x = -2, x = 2, y = 0$
 c) $ED(f) = \mathbb{R}, y = 2$
 d) $ED(f) = \mathbb{R}, y = 0$
 e) $ED(f) = \mathbb{R}^* - \{-3, 2\}, x = 0, x = 2, y = 0$; trou de continuité en $(-3; \frac{1}{15})$
 f) $\mathbb{R}^* - \{5\}, x = 5, y = -1$; trou de continuité en $(0; -\frac{1}{5})$

3.5

- a) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}, x = 2, y = 2$
 b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}, x = -2, x = 2, y = 0$
 c) $ED(f) = \mathbb{R}^*, x = 0, y = x$
 d) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}, x = -1, x = 1, y = 0$
 e) $ED(f) = \mathbb{R} - \{1\}, x = 1, y = 3x - 1$
 f) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1; 3\}, x = -1, y = x + 1$; trou de continuité en $(3; \frac{17}{4})$

3.6

	AV	AH	AO
$n < 2$	$x = -3$ et $x = 3$	$y = 0$	aucune
$n = 2$	$x = -3$ et $x = 3$	$y = 1$	aucune
$n = 3$	$x = -3$ et $x = 3$	aucune	$y = x$
$n \geq 4$	$x = -3$ et $x = 3$	aucune	aucune

3.7

Par exemple :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + 1} & \text{c) } f(x) = \frac{x^3}{x - 4} & \text{e) } f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 3}{x - 2} \\ \text{b) } f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x^2 + 1} & \text{d) } f(x) = \frac{x}{(x - 1)(x + 2)} & \end{array}$$

3.8

$$f(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 - 13x + 770}{x^2 + x - 2}$$

3.9

Si c représente la courbe et d l'asymptote,

- a) AO : $y = x$; c et d se coupent en $I(1; 1)$. c est au-dessus de d à gauche de I et au-dessous sinon.
- b) AO : $y = 2x - 3$; c et d se coupent en $I(-3; -9)$. d est au-dessus de c dans $] -\infty; -3[\cup] -1; 1[$ et d est au-dessous de c dans $] -3; -1[\cup] 1; +\infty[$.
- c) AH : $y = 1$; c et d se coupent en $I(-2; 1)$. c est au-dessous de d à gauche de I et au-dessus sinon.
- d) AH : $y = 0$; c et d se coupent en $I(4; 0)$. c est au-dessous de d à gauche de I et au-dessus sinon.

Chapitre 4

Dérivée

4.1 Exemple d'introduction : vitesse instantanée

On observe la vitesse d'une balle tirée en l'air : la balle part à une très grande vitesse, ensuite elle ralentit (sa vitesse diminue) au fur et à mesure jusqu'à atteindre sa hauteur maximale (où sa vitesse est nulle). Ensuite, sa vitesse devient négative et augmente en valeur absolue tandis qu'elle tombe ; finalement, c'est l'impact avec le sol.

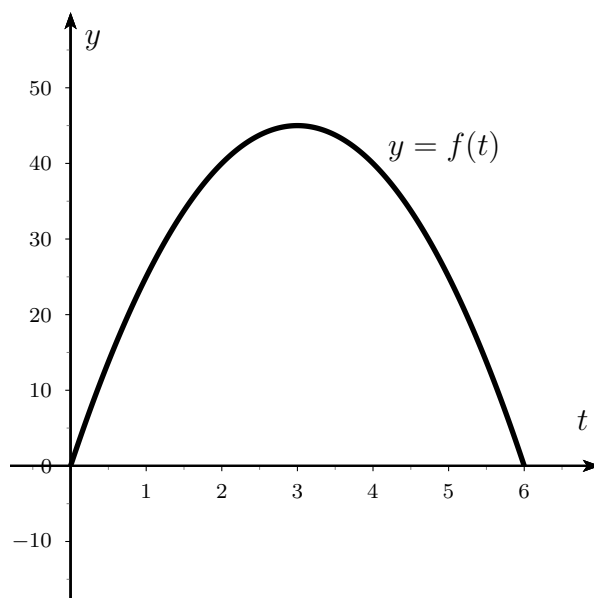
Soit $y = f(t)$ la hauteur (en mètres) de la balle en fonction du temps t (en secondes ; $t = 0$ est l'instant de départ de la balle).

Exemple 4.1.

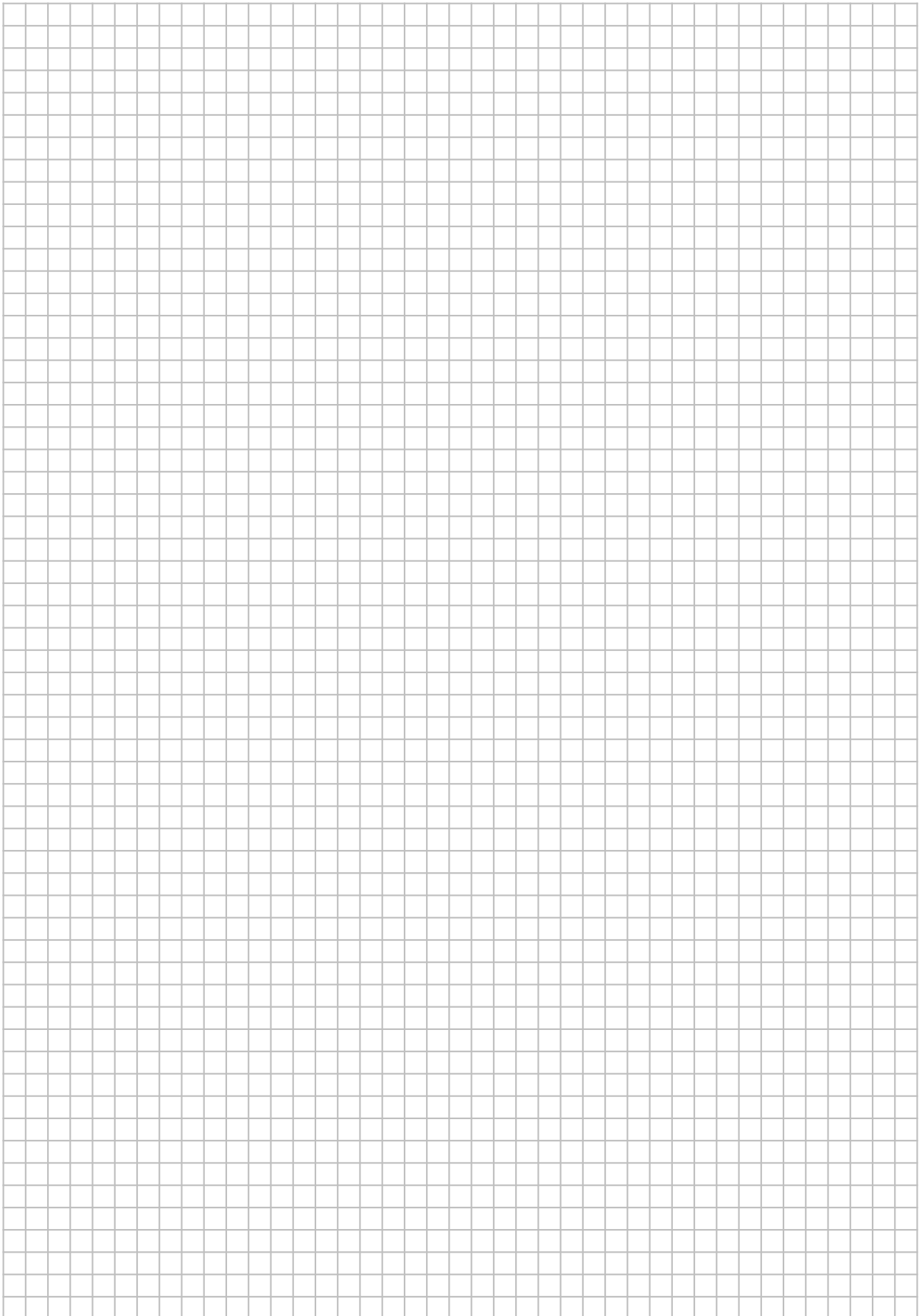
Supposons que $f(t) = -5t^2 + 30t$ (voir ci-dessous le graphe de f dans un repère Oty).

La **vitesse moyenne** de la balle dans l'intervalle de temps $[a, b]$ est donnée par

$$v_{\text{moy}} = \frac{\text{variation de la position}}{\text{variation du temps}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



- Calculer la vitesse moyenne de la balle dans les intervalles $[0; 6]$, $[0; 3]$, $[0; 1]$, $[0; 0.1]$ et $[0; 0.01]$
- Calculer la vitesse instantanée de départ, soit la limite de la vitesse moyenne sur l'intervalle $[0; h]$ quand h tend vers 0.



La **vitesse instantanée** de la balle au temps $t = a$ est donnée par

$$v_{ins}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple 4.1, suite

Rappelons que la position de la balle au temps t est donnée par $f(t) = -5t^2 + 30t$.

- a) Calculer la vitesse instantanée au temps $t = 1$:

$$v_{ins}(1) =$$

- b) Calculer la vitesse instantanée au temps t :

$$v_{ins}(t) =$$

Remarque 4.1.

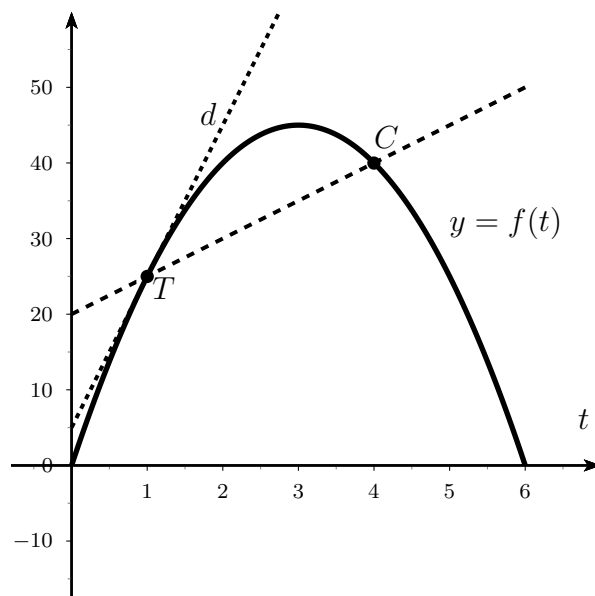
- a) La vitesse moyenne sur $[a : b]$ représente la pente de la droite reliant les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.

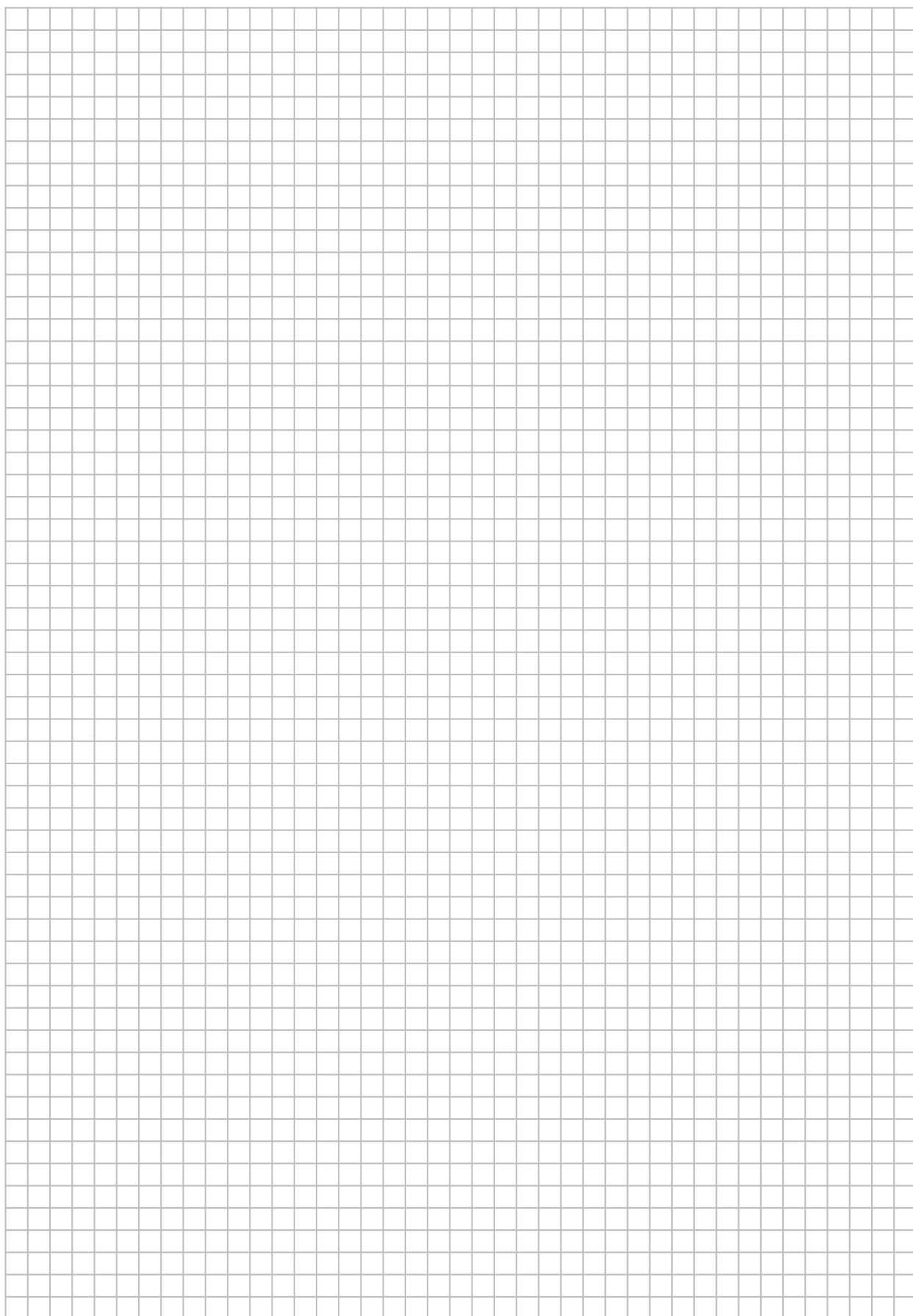
Dans l'exemple 4.1, la vitesse moyenne sur l'intervalle $[1; 4]$ est la pente m_{TC} de la droite TC où $T(1; 25)$ et $C(4; 40)$ sont les positions de la balle aux temps $t = 1$ et $t = 4$ respectivement.

Elle vaut $m_{TC} = \frac{40-25}{4-1} = 5$.

- b) La vitesse instantanée en $t = a$ est la pente m de la tangente à la courbe $y = f(t)$ en $T(a; f(a))$.

Dans l'exemple 4.1, la vitesse instantanée en $t = 1$ est la pente de la tangente d en T . Elle vaut $m = 20$.





4.2 Nombre dérivé d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant une valeur a .

- **Nombre dérivé de la fonction f au point a :**

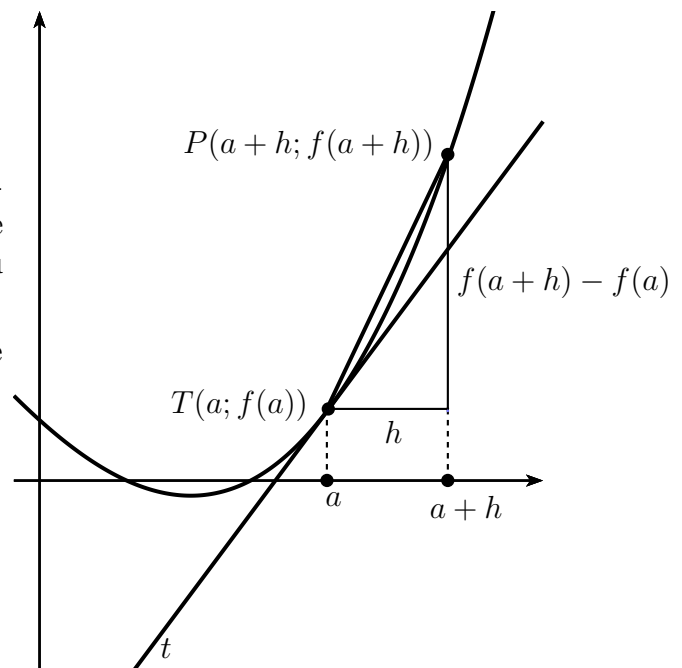
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ si elle existe et est finie.}$$

- Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

Remarque 4.2.

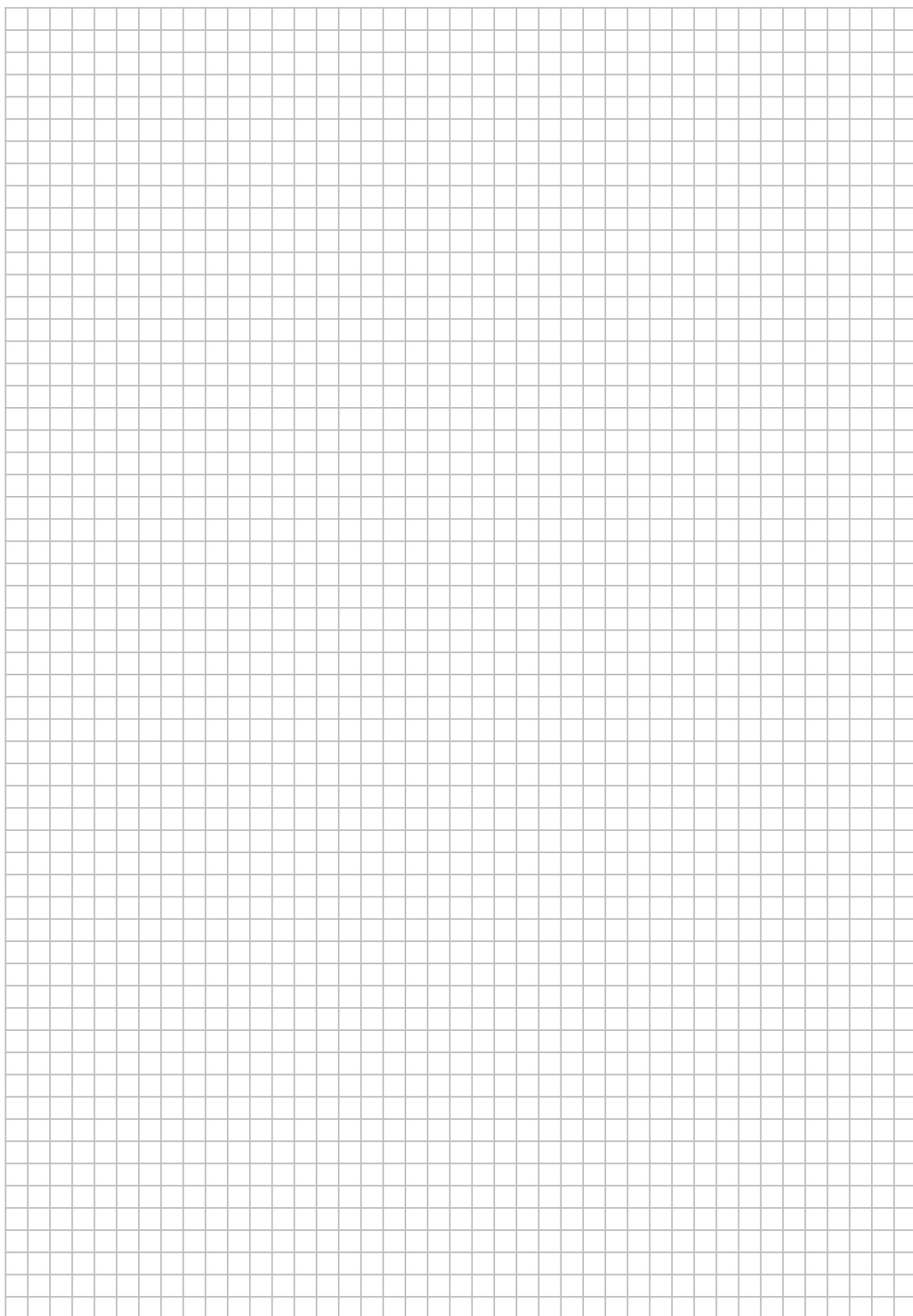
- S'il existe, le nombre dérivé $f'(a)$ représente la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse a , donc au point $T(a; f(a))$.
- En posant $x = a + h$, il est aussi possible de calculer $f'(a)$ de la manière suivante :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Exemple 4.2.

- Calculer $f'(4)$ avec f définie par $f(x) = x^2$.



4.3 Fonction dérivée

Soit f une fonction, $ED(f)$ son ensemble de définition et $I \subseteq ED(f)$.

Si le nombre dérivé de f existe pour tous les points $x \in I$, on définit f' **la fonction dérivée** par

$$\begin{array}{rcl} f' & : & I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Exemple 4.3.

Donner l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous, calculer leur fonction dérivée et donner l'ensemble de définition de celle-ci.

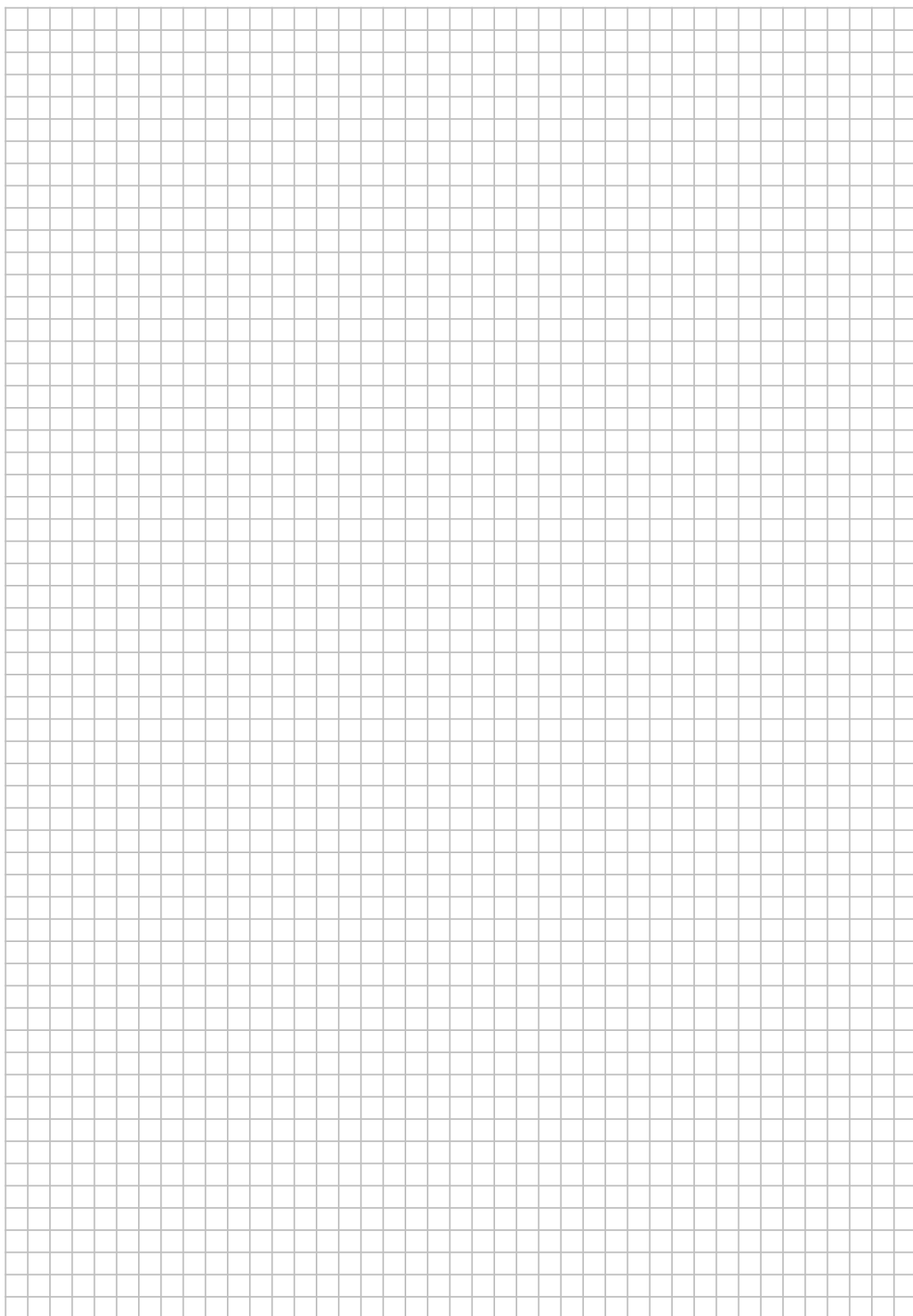
a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = \sqrt{x}$

Remarque 4.3.

Pour une fonction f donnée par son expression algébrique $f(x)$, on notera $(f(x))'$ l'expression algébrique de la fonction dérivée f' .

Par exemple, pour f définie par $f(x) = x^2$, on a vu que la fonction dérivée f' est donnée par $f'(x) = 2x$. On notera $(x^2)' = 2x$.



4.4 Règles de dérivation

Dérivée d'une constante ou d'une puissance entière positive de x

$$\boxed{(k)' = 0, \quad k \in \mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{(x^m)' = mx^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}}$$

Exemple 4.4.

Calculer

a) $(-2)' =$

b) $(x)' =$

c) $(x^3)' =$

d) $(x^7)' =$

Dans les formules qui suivent, k est un nombre réel et u, v et w sont des **fonctions de x** .

Règle de la somme

La dérivée de la somme est égale à la somme des dérivées :

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'} \quad \text{et} \quad \boxed{(u + v + w)' = u' + v' + w'}$$

Règle du produit par une constante

La dérivée du produit par une constante est égale au produit de la constante par la dérivée :

$$\boxed{(ku)' = ku', \quad k \in \mathbb{R}}$$

Remarque 4.4.

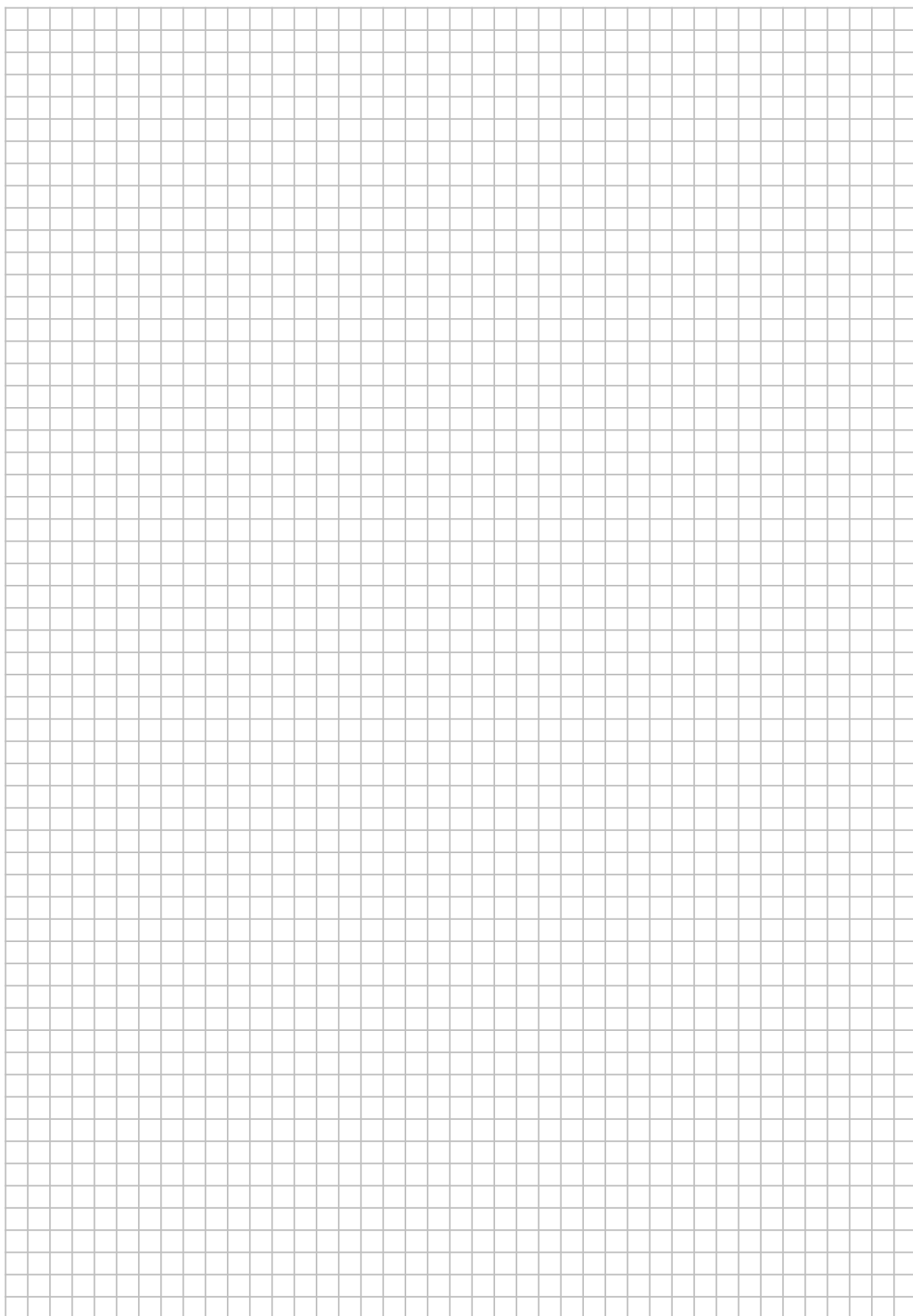
ATTENTION ! Ne pas confondre produit par une constante et somme d'une constante ! Dans le cas d'une somme, on a :

$$\boxed{(k + u)' = u', \quad k \in \mathbb{R}}$$

Exemple 4.5.

Calculer

a) $(x^3 + x^2 + x - 5)' =$



b) $(6x^5 + 7x^3 - 1)' =$

c) $(6\sqrt{x} + 7x^2)' =$

Règle du produit

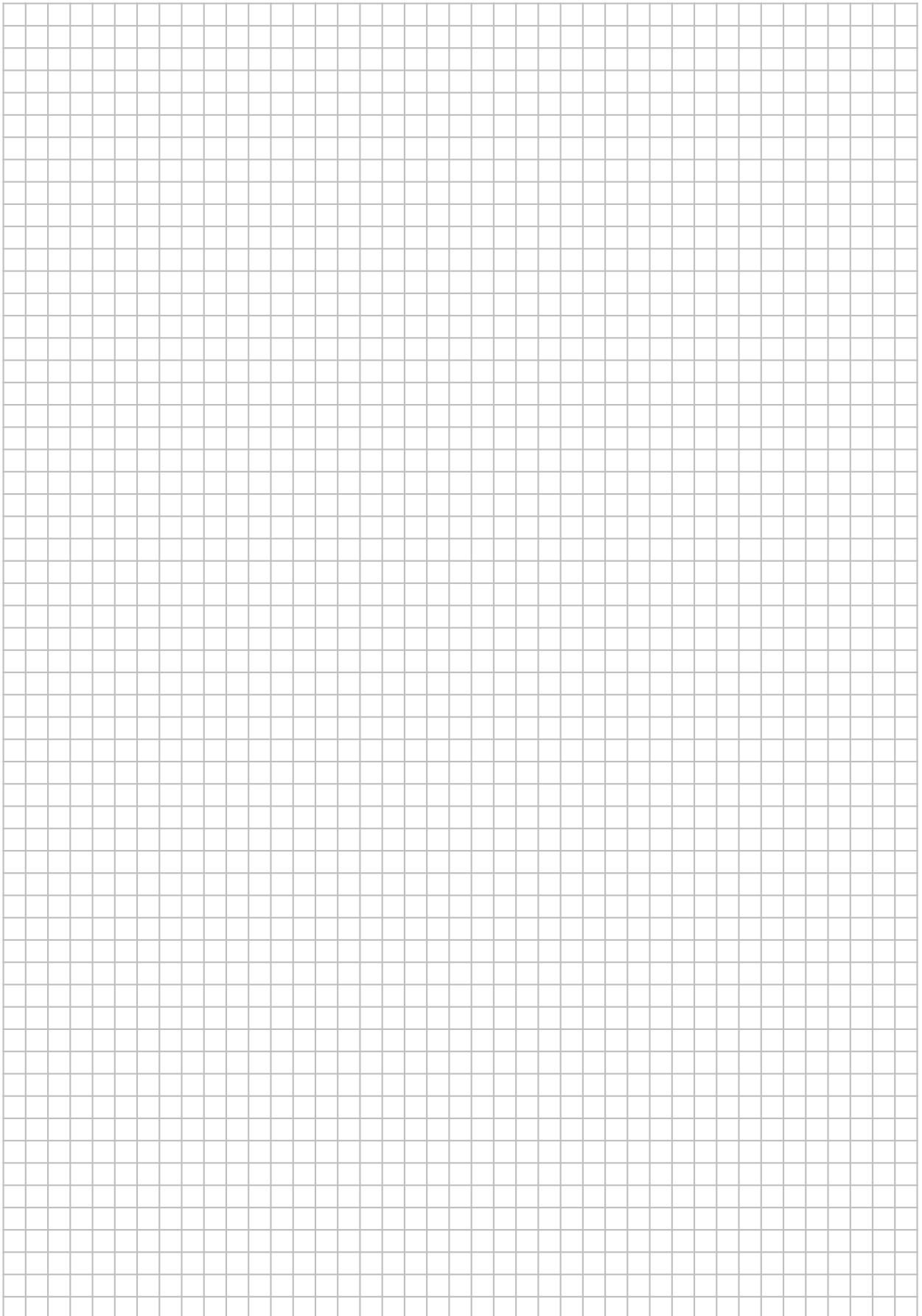
*ATTENTION! La dérivée d'un produit **n'est pas** égale au produit des dérivées!*

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

Exemple 4.6. Calculer

a) $((x^2 + 1)(4x^2 - 3x + 1))' =$

b) $((x - 1)\sqrt{x})' =$



Règle du quotient

*ATTENTION! La dérivée d'un quotient **n'est pas** égale au quotient des dérivées!*

Si v est tel que $v(x) \neq 0$, on a la règle

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}} \quad \text{et en particulier} \quad \boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$$

Exemple 4.7.

Calculer

a) $\left(\frac{3x-2}{x^2-4}\right)' =$

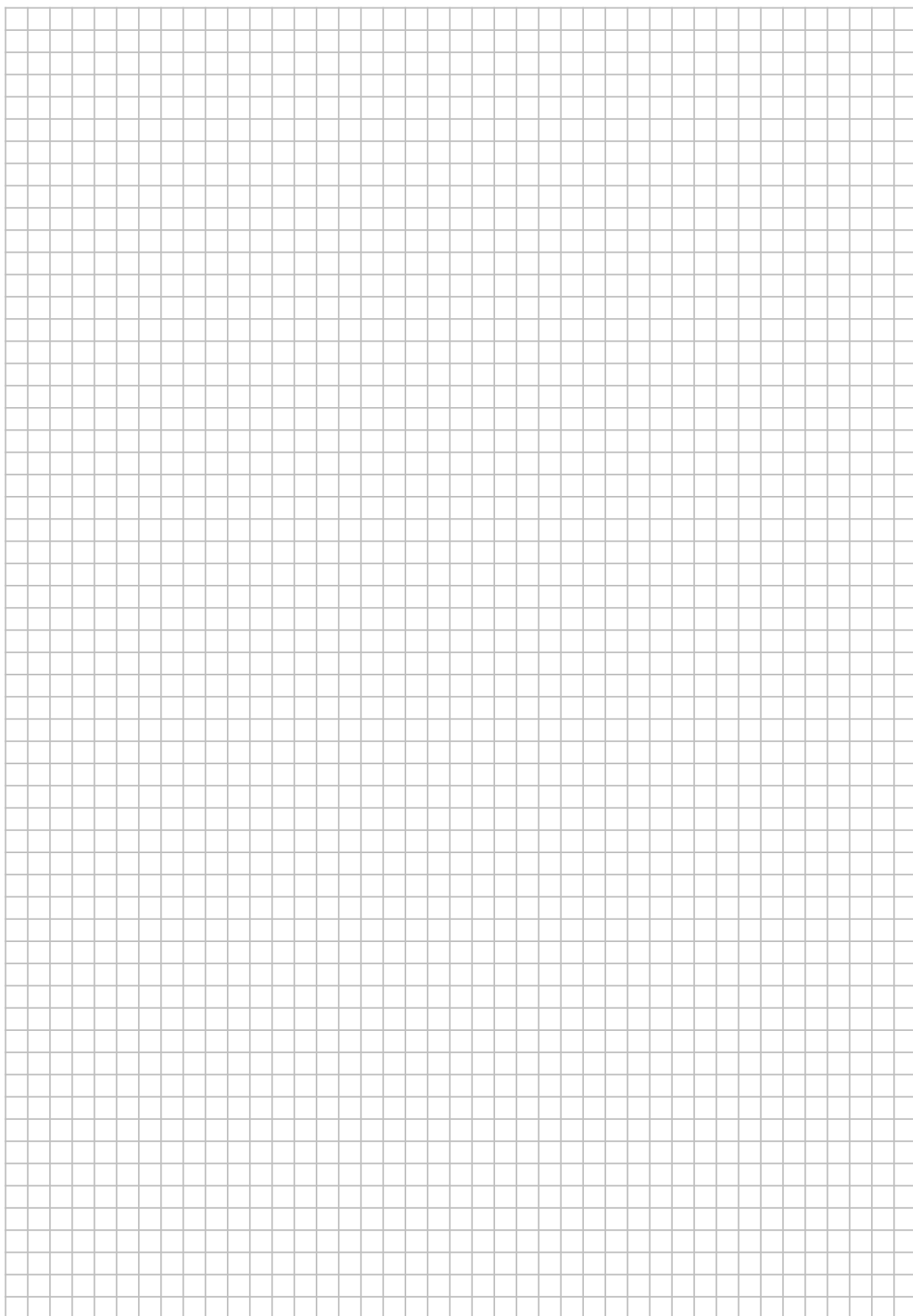
b) $\left(\frac{5}{x^2-3x+6}\right)' =$

Dérivée d'une puissance à exposant entier

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

a) $\left(\frac{2}{x}\right)' =$

b) $\left(\frac{5}{3x^4}\right)' =$



Règle de la composition

La règle de la composition permet de dériver les fonctions qui sont des composées de fonctions dont on connaît les dérivées.

$$\boxed{(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{(f(u))' = f'(u) \cdot u'}$$

Cas particulier

$$\boxed{(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \quad n \in \mathbb{Z}}$$

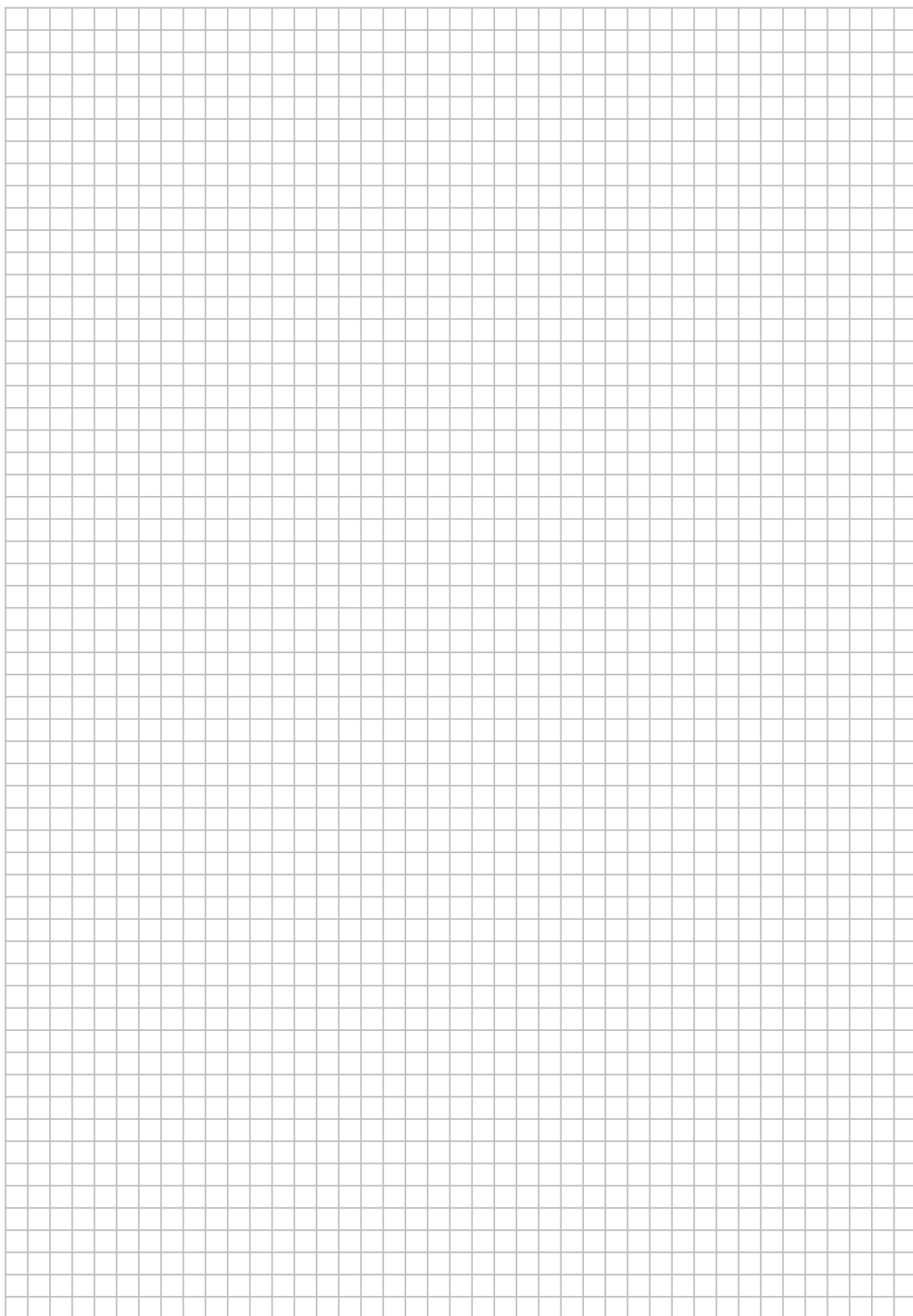
Exemple 4.8.

Calculer les dérivées suivantes.

a) $((2x - 1)^5)' =$

b) $\left(\frac{1}{(7-x)^3}\right)' =$

c) $\left(\frac{x}{(x-1)^3}\right)' =$



Dérivée d'une puissance à exposant rationnel

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Q}} \quad \text{et} \quad \boxed{(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \quad n \in \mathbb{Q}}$$

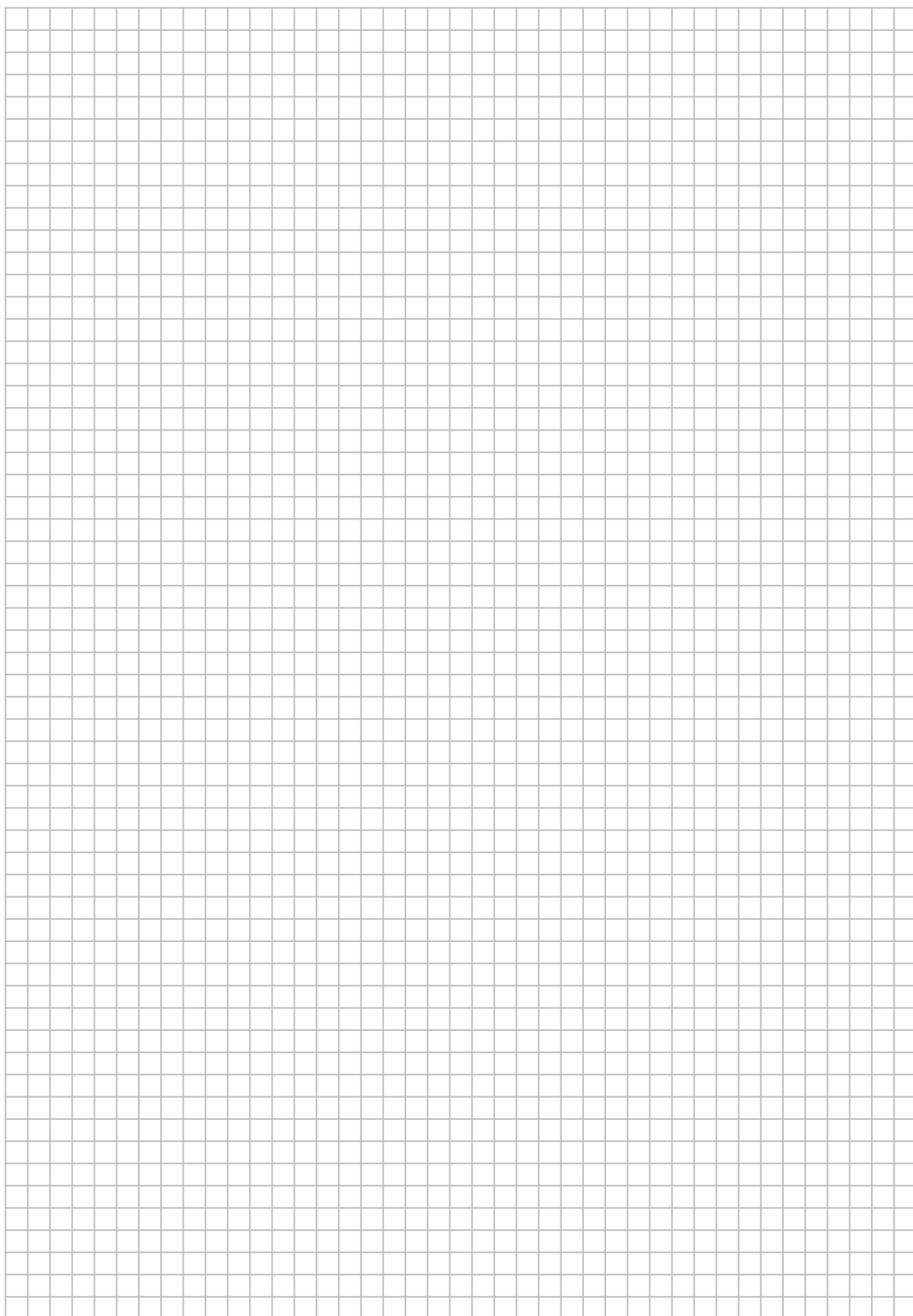
Exemple 4.9.

Calculer les dérivées suivantes.

a) $(\sqrt[4]{x})' =$

b) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' =$

c) $\left(\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)' =$



4.5 Exercices

4.1

Calculer le nombre dérivé $f'(a)$ lorsque f et a sont donnés par

a) $f(x) = \frac{1}{8x+1}, \quad a = 2$

b) $f(x) = x^2 - x, \quad a = -1$

4.2

Donner la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous sous la forme d'une somme de termes.

a) $f(x) = x^8$

g) $f(x) = x^{103} + 2x^{57} - 5x^4 + 4$

b) $f(x) = x^4 + x^3$

h) $f(x) = (4x - 11)(x^2 + x + 7)$

c) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 7x + 5$

i) $f(x) = (5x + 3)(x^3 + 5)$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 4x - \frac{3}{4}$

j) $f(x) = (x^2 + 7x)(3x^2 - x - 3)$

e) $f(x) = \sqrt{3}x + \pi$

k) $f(x) = (x + \sqrt{5})(x^2 + 2)$

f) $f(x) = 6x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 5$

l) $f(x) = (3x^2 + 4)(2x - 7)$

4.3

Donner la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous sous la forme d'une somme de termes.

a) $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} + 41$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x + 7}$

b) $f(x) = \sqrt{x} + x^2 - \frac{16}{x^5}$

f) $f(x) = x + 3 + \frac{x + 3}{6x - 3}$

c) $f(x) = \frac{6}{x - 5}$

g) $f(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x^3 - 1}$

d) $f(x) = \frac{7x + 1}{2x - 3}$

h) $f(x) = \frac{1}{x^5 + 4x^4 - 11x^3 + 12}$

4.4

Donner la dérivée des fonctions suivantes sous la forme d'un produit de facteurs de degré 1 ou 2 :

a) $f(x) = (x^2 + 5x + 6)^4$

e) $f(x) = (-2x^2 + 5)^3(3x^2 + 7)^2$

b) $f(x) = (5x^3 - 8x + 1)^7$

f) $f(x) = \frac{(x^2 - 6)^3}{(3x + 4)^3}$

c) $f(x) = \frac{(x - 3)^3}{(2x + 7)^3}$

g) $f(x) = \frac{(x - 5)^3}{(2x + 7)^4}$

d) $f(x) = (4x^2 + 5)^4(6x^2 - 5)^3$

4.5

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

b) $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{2-x^2}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

4.6

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, sachant que a, b, c, d, h et m désignent des constantes :

a) $f(x) = mx + h$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$

b) $f(x) = (a-1)x^3 + a(x-3)$

d) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

4.7

Déterminer la valeur des paramètres réels a et b pour lesquels la fonction f définie par $f(x) = (ax+b)(1-x)^5$ possède la dérivée $f'(x) = 3x(1-x)^4$.

4.8

Un sac de sable est lâché d'une montgolfière située une altitude de 150 m. En négligeant la résistance de l'air, la position du sac au-dessus du sol est donnée par $f(t) = -5t^2 + 150$.

a) Calculer l'altitude et la vitesse du sac après 2 secondes.

b) Après combien de temps le sac touche-t-il le sol ? Quelle est sa vitesse à ce moment là ?

4.6 Réponses

4.1

- a) $-8/289$ b) -3

4.2

- a) $f'(x) = 8x^7$ g) $f'(x) = 103x^{102} + 114x^{56} - 20x^3$
b) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$ h) $f'(x) = 12x^2 - 14x + 17$
c) $f'(x) = 12x^2 + 4x + 7$ i) $f'(x) = 20x^3 + 9x^2 + 25$
d) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4$ j) $f'(x) = 12x^3 + 60x^2 - 20x - 21$
e) $f'(x) = \sqrt{3}$ k) $f'(x) = 3x^2 + 2\sqrt{5}x + 2$
f) $f'(x) = 24x^3 - 6x^2 + 2x - 9$ l) $f'(x) = 18x^2 - 42x + 8$

4.3

- a) $f'(x) = -\frac{4}{x^3} - \frac{15}{x^4}$ e) $f'(x) = \frac{2x^2 + 14x - 6}{(2x + 7)^2}$
b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x + \frac{80}{x^6}$ f) $f'(x) = 1 - \frac{21}{(6x - 3)^2}$
c) $f'(x) = -\frac{6}{(x - 5)^2}$ g) $f'(x) = \frac{-6x^4 - 36x^2 - 6x}{(2x^3 - 1)^2}$
d) $f'(x) = -\frac{23}{(2x - 3)^2}$ h) $f'(x) = -\frac{5x^4 + 16x^3 - 33x^2}{(x^5 + 4x^4 - 11x^3 + 12)^2}$

4.4

- a) $f'(x) = 4(x^2 + 5x + 6)^3(2x + 5)$ e) $f'(x) = -12x(2x^2 - 5)^2(3x^2 + 7)(5x^2 + 2)$
b) $f'(x) = 7(15x^2 - 8)(5x^3 - 8x + 1)^6$ f) $f'(x) = \frac{3(x^2 - 6)^2(3x^2 + 8x + 18)}{(3x + 4)^4}$
c) $f'(x) = \frac{39(x - 3)^2}{(2x + 7)^4}$ g) $f'(x) = -\frac{(x - 5)^2(2x - 61)}{(2x + 7)^5}$
d) $f'(x) = 4x(4x^2 + 5)^3(6x^2 - 5)^2(84x^2 + 5)$

4.5

- a) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ d) $f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(2 - x^2)^2}}$
b) $f'(x) = \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}$ e) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2x)^3}}$
c) $f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ f) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

4.6

a) $f'(x) = m$

c) $f'(x) = 2 a x + b$

b) $f'(x) = 3 (a - 1) x^2 + a$

d) $f'(x) = \frac{a d - b c}{(c x + d)^2}$

4.7

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{10}\right)(1 - x)^5$$

4.8a) L'altitude est de 130 m et la vitesse est de -20 m/s.b) Après environ 5.5 s. Sa vitesse vaut alors -54.77 m/s.

Chapitre 5

Applications de la dérivée

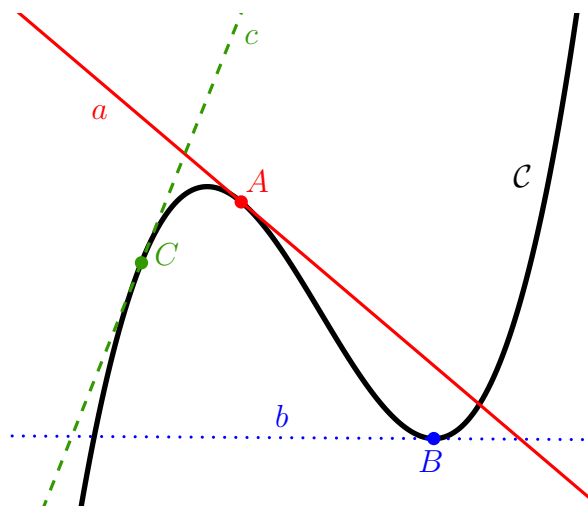
5.1 Tangentes

5.1.1 Tangente à une courbe du plan

Tangente vient du latin *tangere* qui signifie toucher.

La tangente à une courbe $\mathcal{C}$ du plan en un de ses points est la droite qui *effleure* la courbe en ce point sans la recouper dans le voisinage (à proximité) du point.

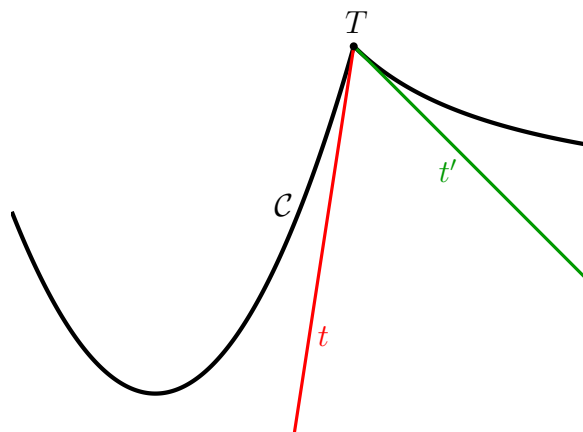
Attention! La tangente dépend du point choisi sur la courbe. En général, la tangente est différente lorsque l'on change de point de tangence.

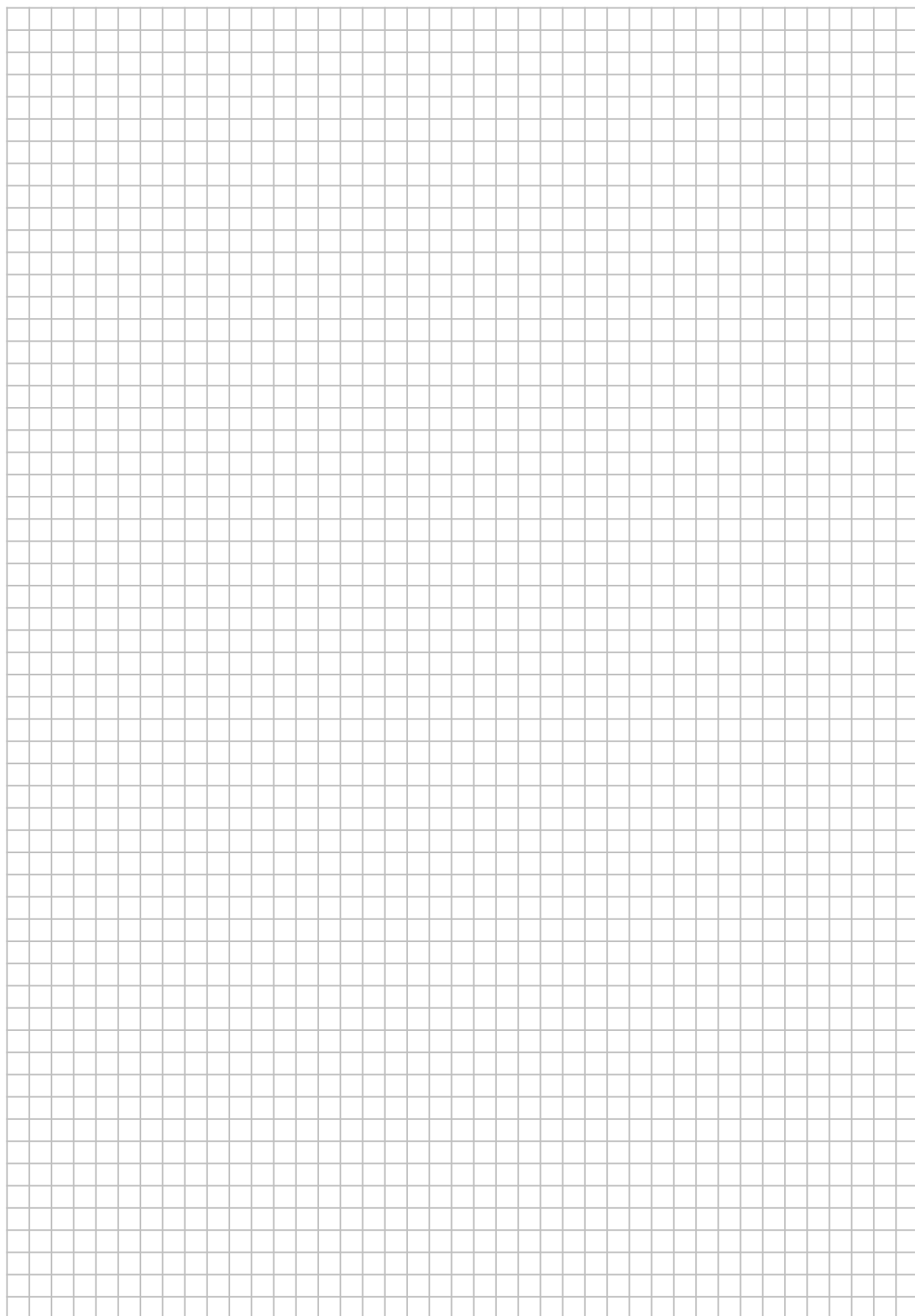


Remarque 5.1.

La tangente peut ne pas exister en certains points!

Pour la courbe $\mathcal{C}$ représentée ci-contre, la tangente en T n'existe pas.





5.1.2 Tangentes au graphe d'une fonction

Tangente au graphe de f en $T(a; b)$, sans utiliser une formule...

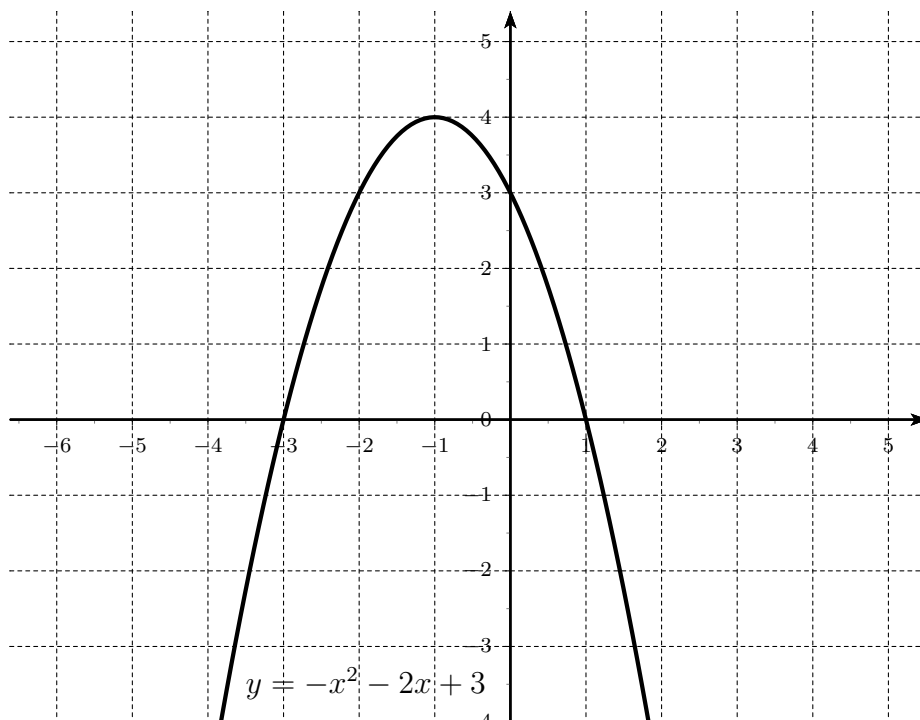
- Lien entre abscisse et ordonnée de T : $b = f(a)$
- La tangente est d'équation (cartésienne) $y = mx + h$
- La tangente est de pente $m = f'(a)$ (valeur numérique de f' en $x = a$)
- La tangente passe par $T(a; b)$ donc $b = m \cdot a + h$

Tangente au graphe de f en $T(a; b)$, en utilisant une formule...

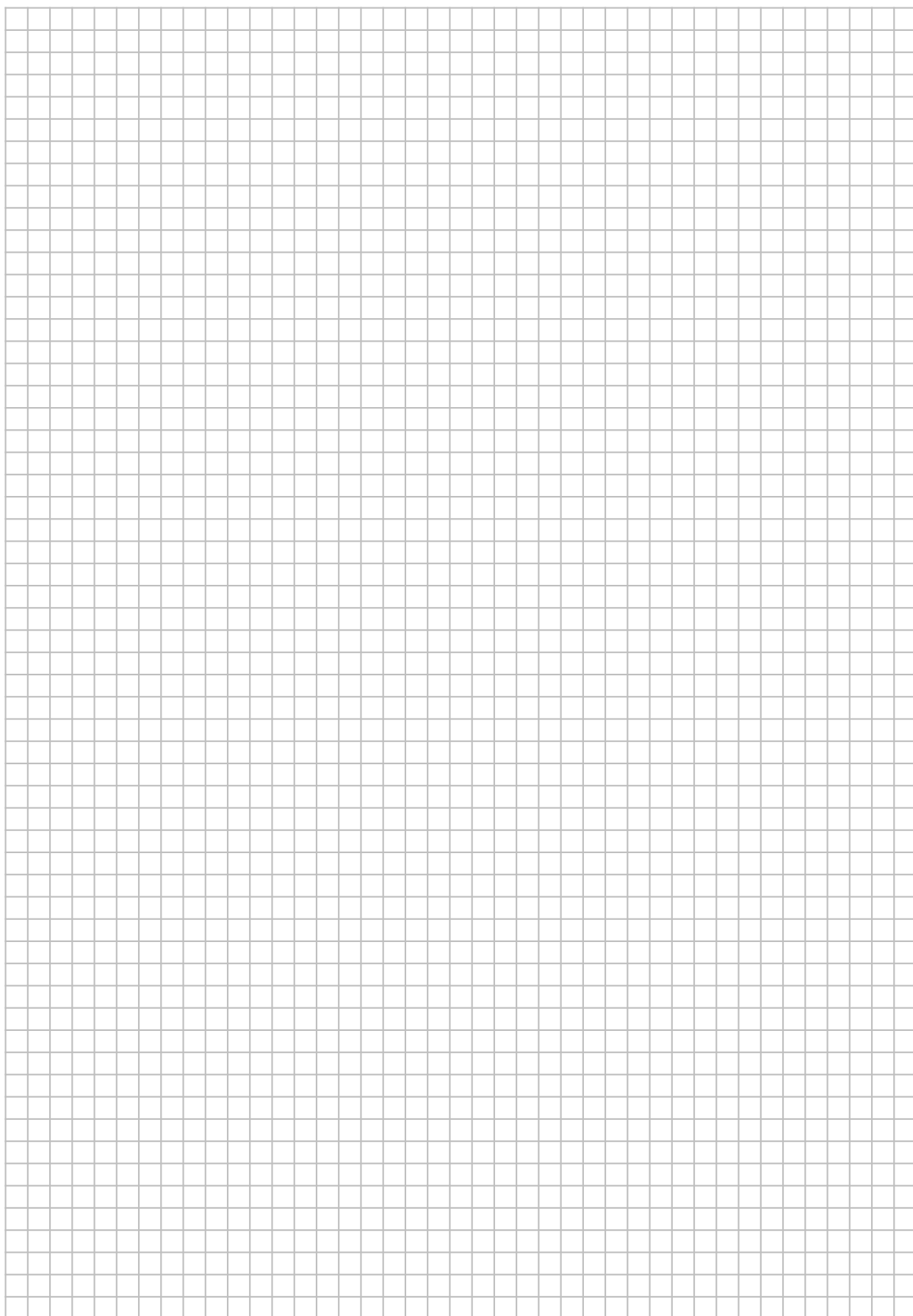
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Exemple 5.1.

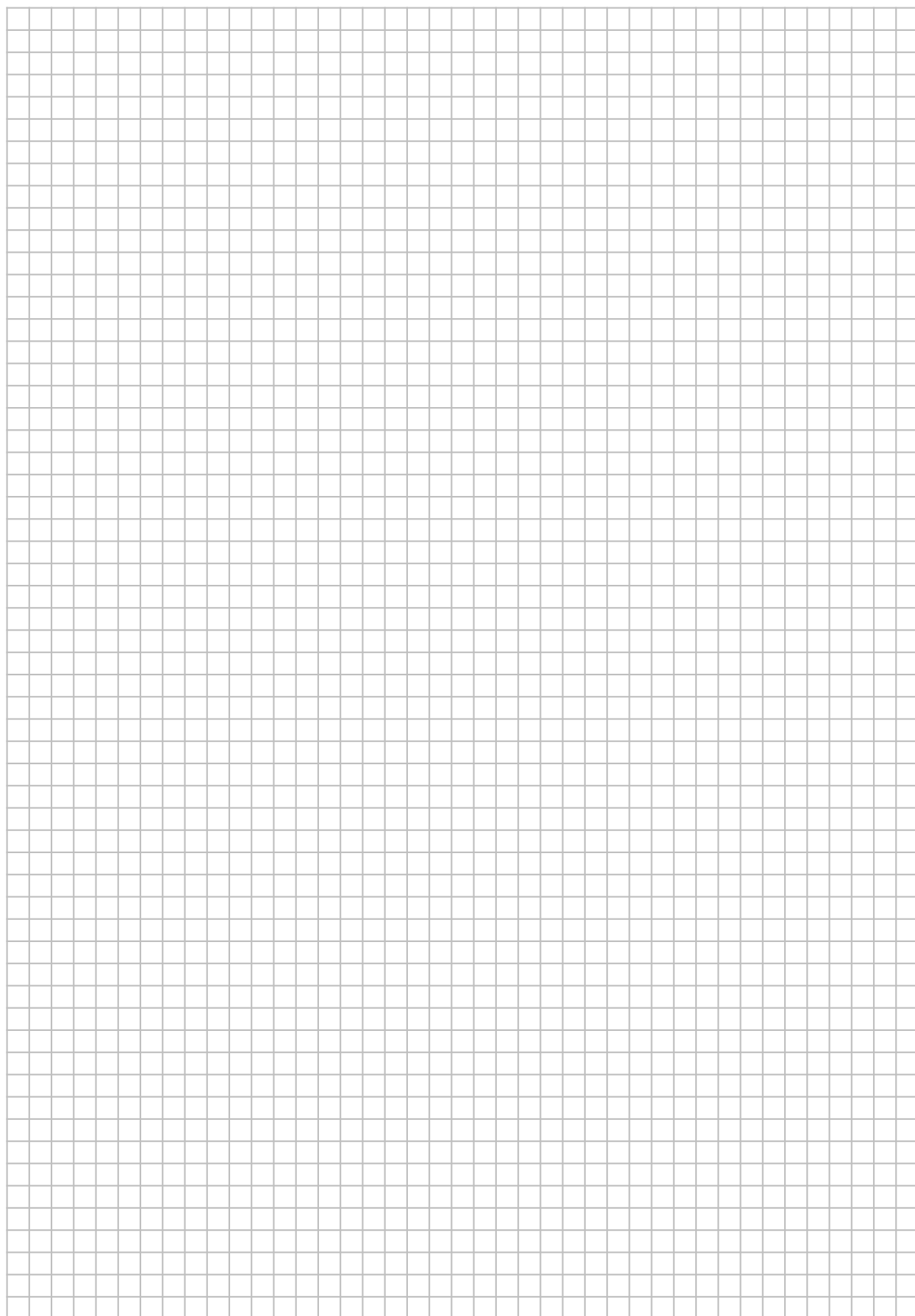
Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ dont le graphe est représenté ci-dessous.



- a) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1.

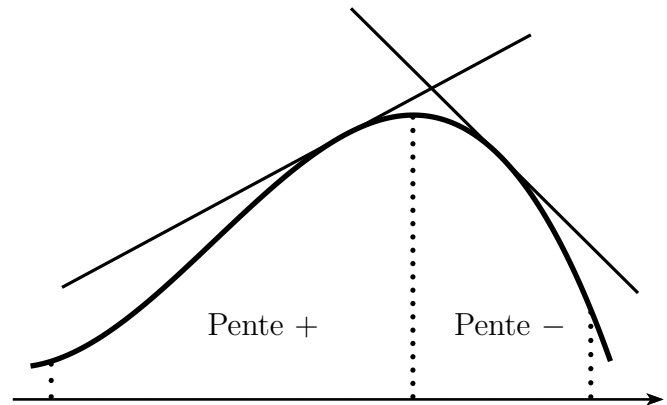


b) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f de pente 2.



5.2 Croissance d'une fonction

- Si une fonction est croissante au voisinage d'un point, la pente de la tangente en ce point est positive.
- Si une fonction est décroissante au voisinage d'un point, la pente de la tangente en ce point est négative.



Croissance et dérivée

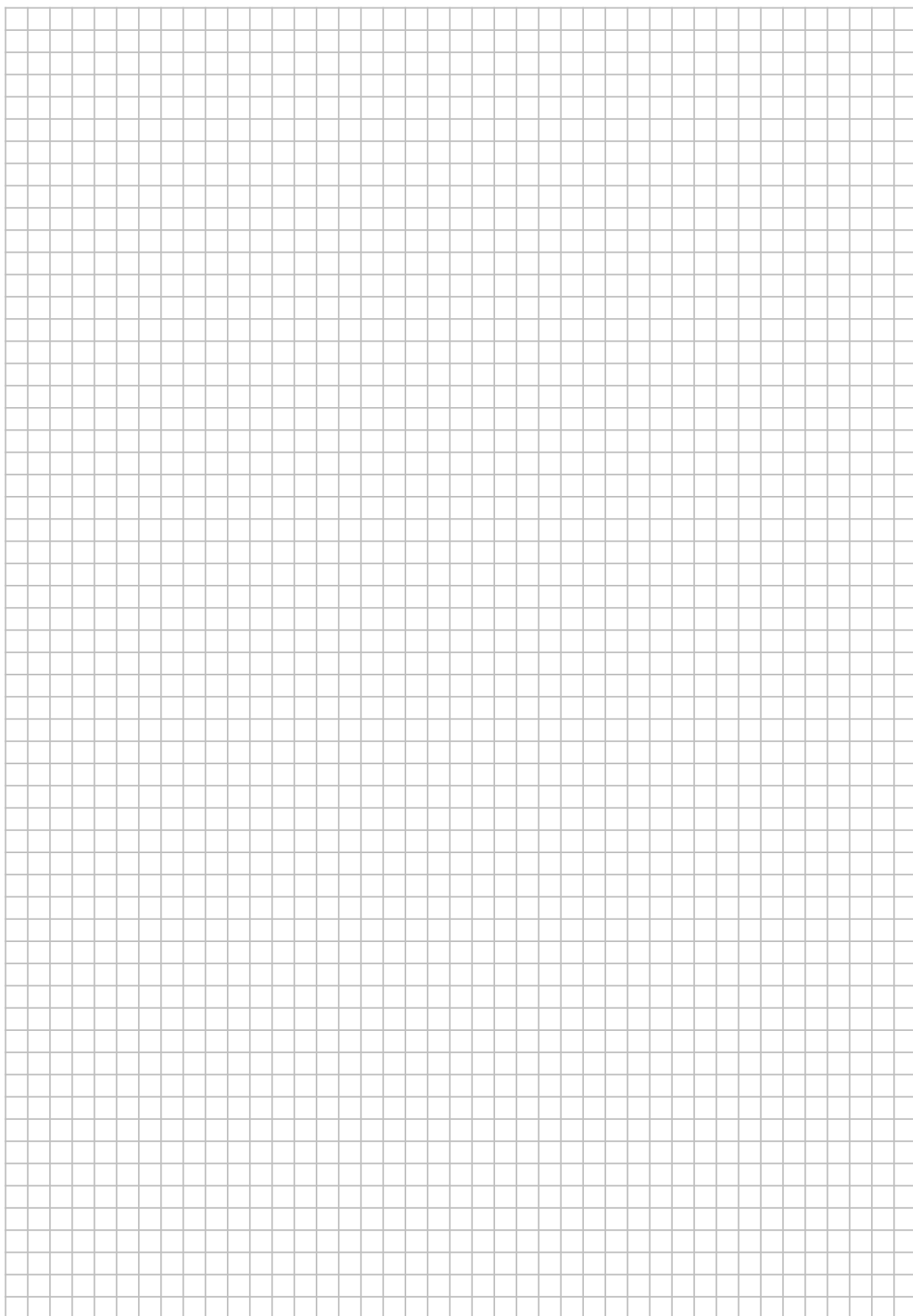
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I =]a; b[$;

- a) f est croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- b) f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$
- c) f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Exemple 5.2.

Soit la fonction f donnée par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$.

Donner l'ensemble de définition et étudier la croissance de la fonction f .



5.3 Extremums et paliers

Liens entre signe de f' et croissance de f :

x	a			b			c	d		
$f'(x)$	—	0	+	0	—			+	0	+
$f(x)$	↘ min			↗ max				↗ palier		

$$\{ \text{minimums de } f \} \cup \{ \text{maximums de } f \} = \{ \text{extremums de } f \}$$

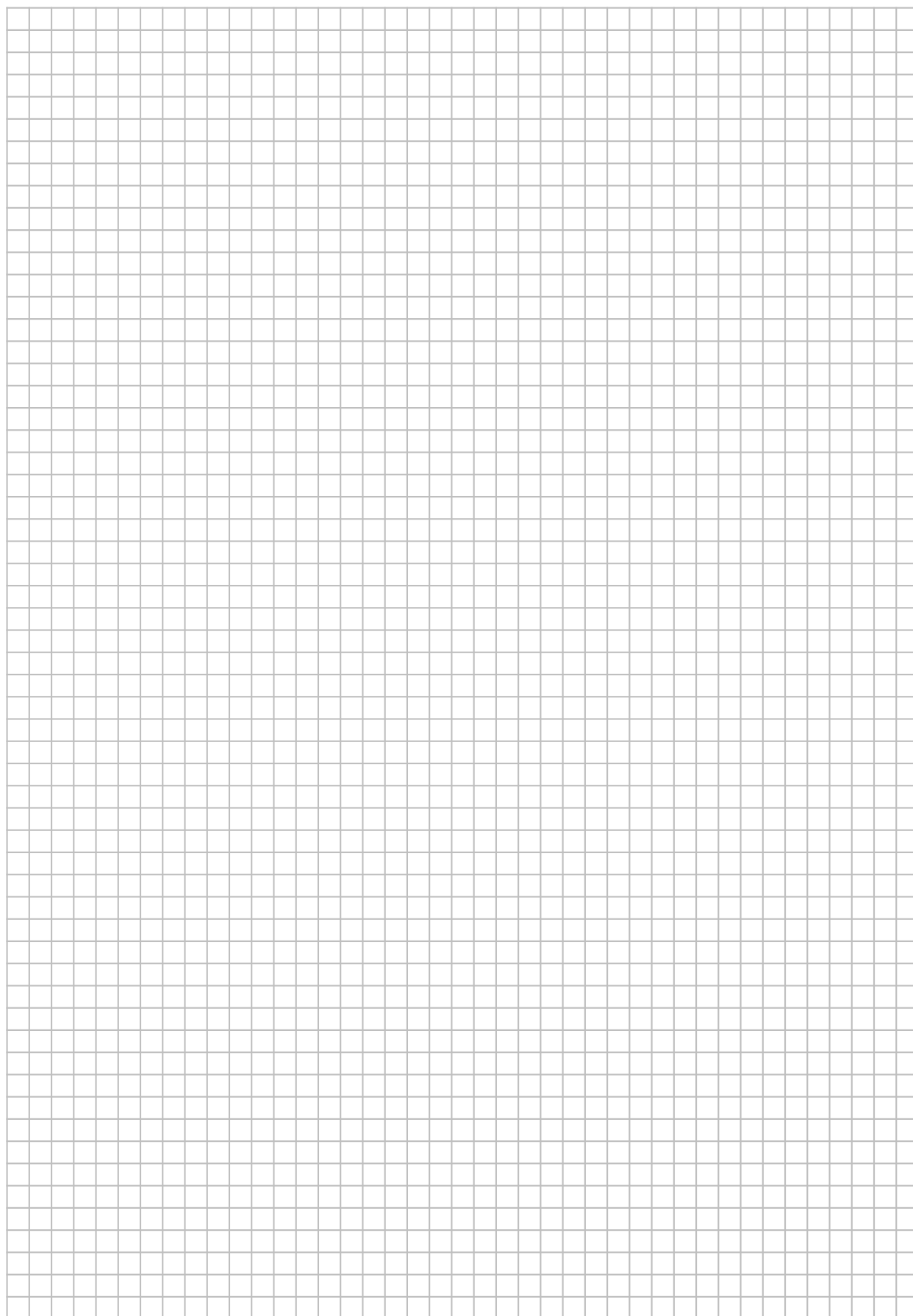
$$\{ \text{paliers de } f \} = \{ \text{points à tangente horizontale de } f \} \setminus \{ \text{extremums de } f \}$$

Remarque 5.2.

On étudie quelque fois une fonction sur un intervalle $I = [a; b]$. Il se peut alors qu'un extremum de f se trouve aux extrémités de l'ensemble d'étude I .

Exemple 5.3.

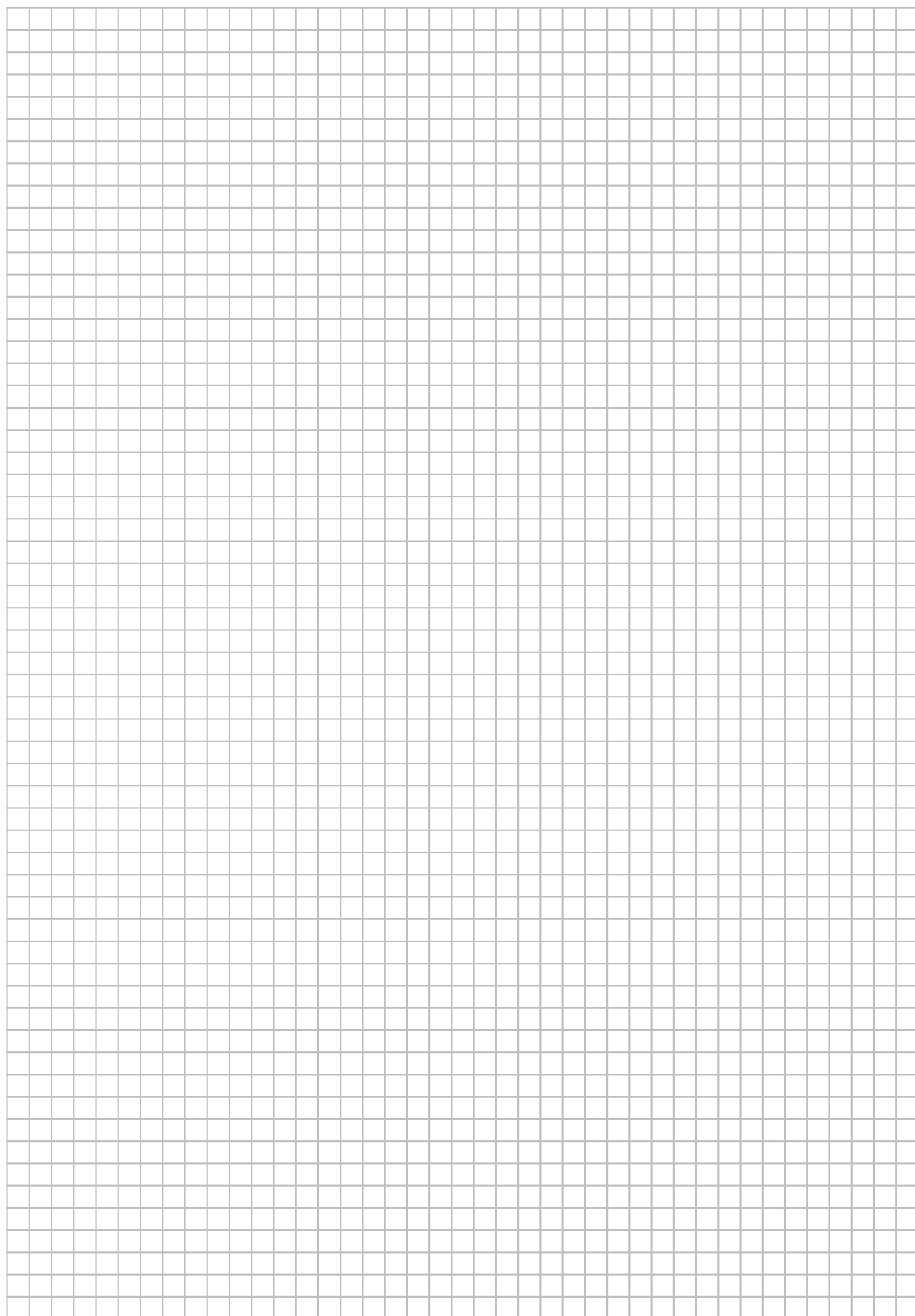
Calculer sur l'intervalle $I = [-5; -2]$ les coordonnées des extremums, ainsi que des extremums absolus de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 6x + 22$



Exemple 5.4.

Soit la fonction f donnée par $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$.

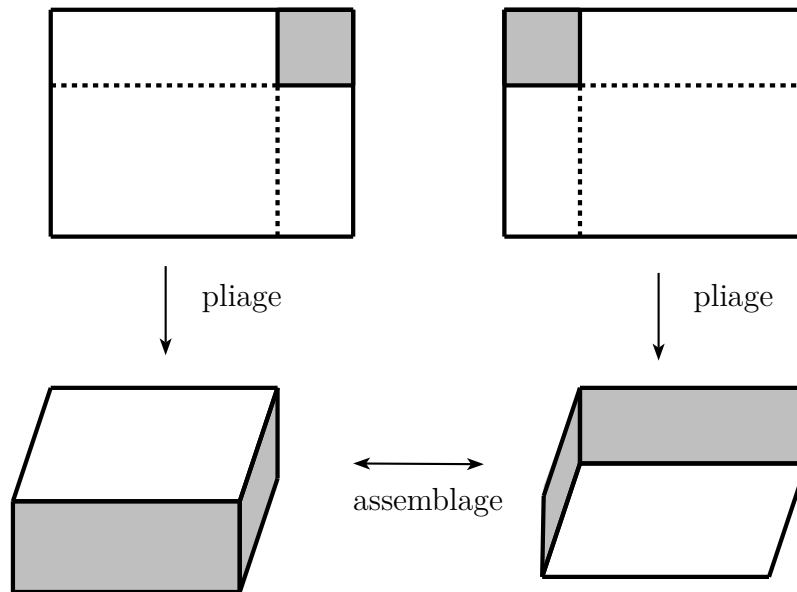
Donner l'ensemble de définition, étudier la croissance et déterminer les coordonnées des extrema éventuels de la fonction f .



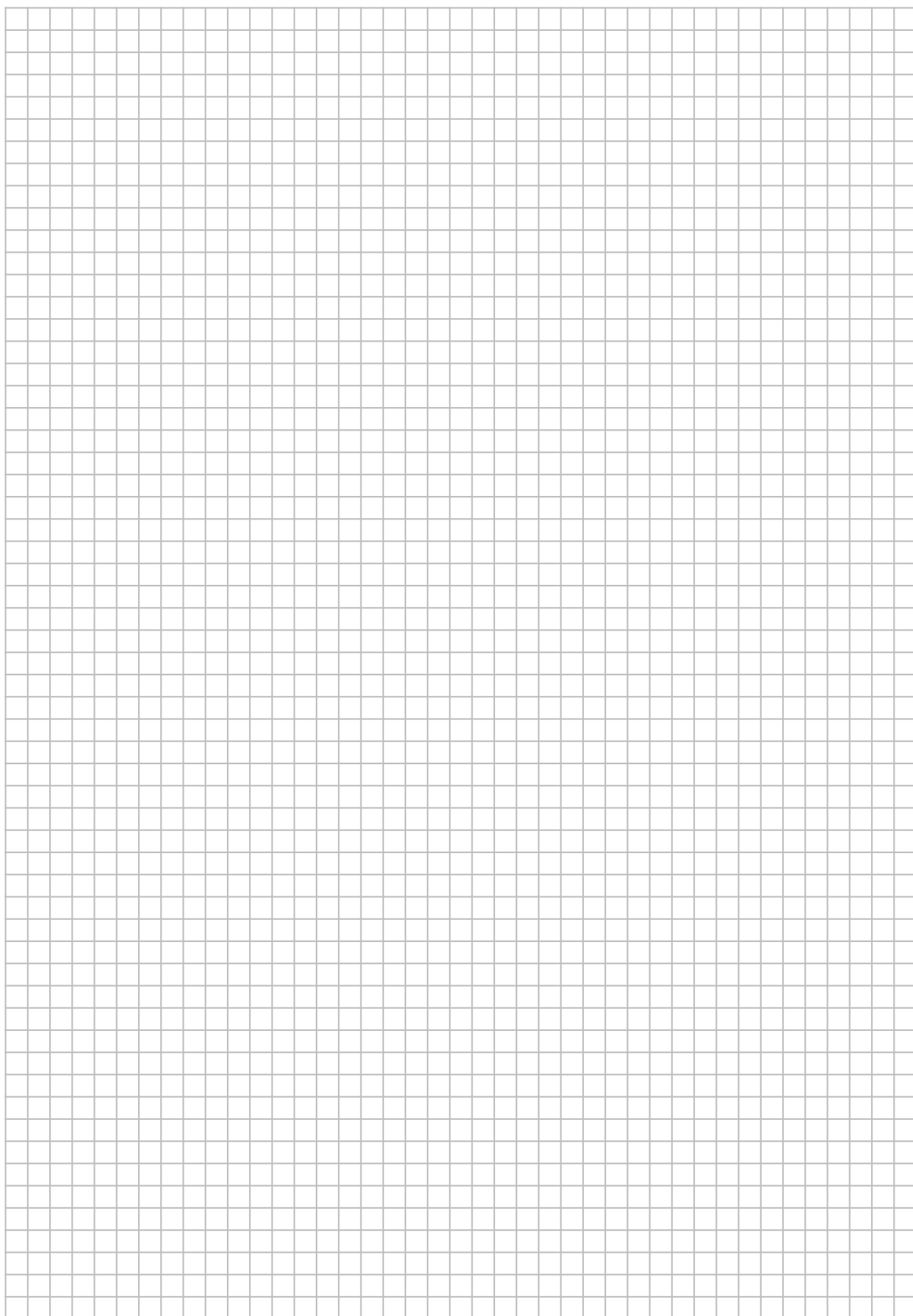
5.4 Problèmes d'optimisation

Optimisation du volume d'une boîte

A partir de deux feuilles en carton de dimension 30 cm sur 21 cm, on construit une boîte en forme de parallélépipède rectangle en découpant dans chaque feuille deux carrés de même dimension (voir ci-dessous).



Déterminer les dimensions du carré à découper afin d'obtenir un volume maximal.



Optimisation d'utilisation de matériau

Dans une fabrique de boîtes en carton, on désire limiter la surface de carton utilisée pour la construction de boîtes en forme de **parallélépipède rectangle à base carrée sans couvercle**.

La boîte doit avoir un volume de 1000 cm^3 .

Calculer les dimensions (au mm près) de la boîte dont la surface de carton est minimale, ainsi que cette surface minimale (au mm^2 près).

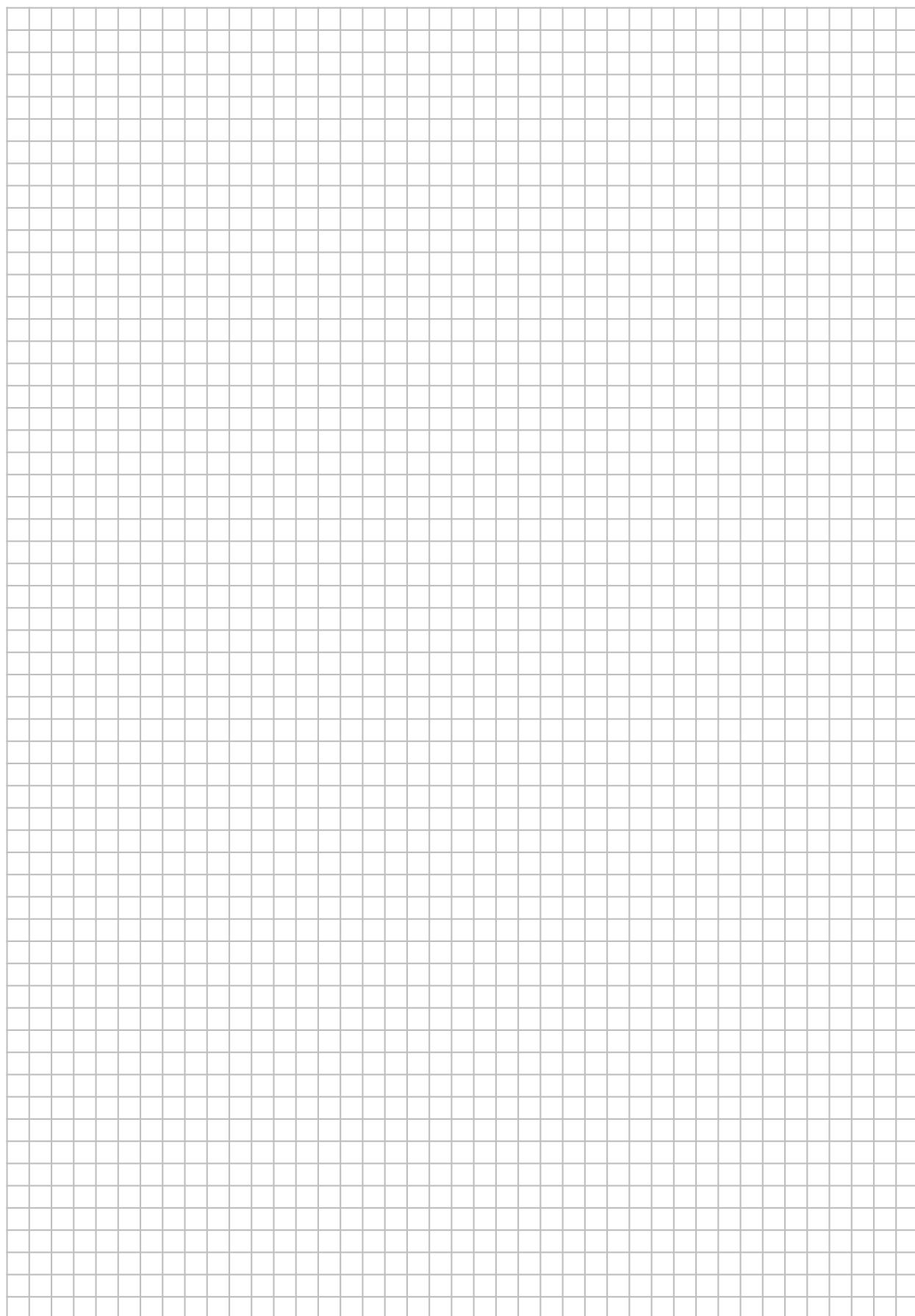
Méthode de résolution d'un problème d'optimisation

Pour résoudre un problème d'optimisation, on procède comme suit :

- a) Bien lire l'énoncé !
- b) Faire un schéma et identifier les variables du problème ($x, y, h, r, \dots$), ainsi que la grandeur Q à optimiser (à maximiser ou à minimiser).
- c) Exprimer la grandeur à optimiser Q en fonction des variables du problème.
- d) Si Q est fonction de plusieurs variables, déterminer les équations liant ces variables.
- e) Exprimer la grandeur à optimiser Q en fonction d'une seule variable : si x est cette variable, il s'agit donc de trouver l'expression algébrique d'une fonction f telle que $Q = f(x)$ en utilisant les équations obtenues au point précédent. Déterminer alors l'ensemble des valeurs admissibles de x .
- f) A l'aide de la dérivée f' de la fonction f , étudier la croissance de Q .
- g) Trouver l'optimum (le maximum ou le minimum) cherché à l'aide du tableau de croissance de Q et répondre à la question posée.

Remarque 5.3.

Il se peut que le maximum ou le minimum cherché se trouve aux extrémités des valeurs admissibles de x .



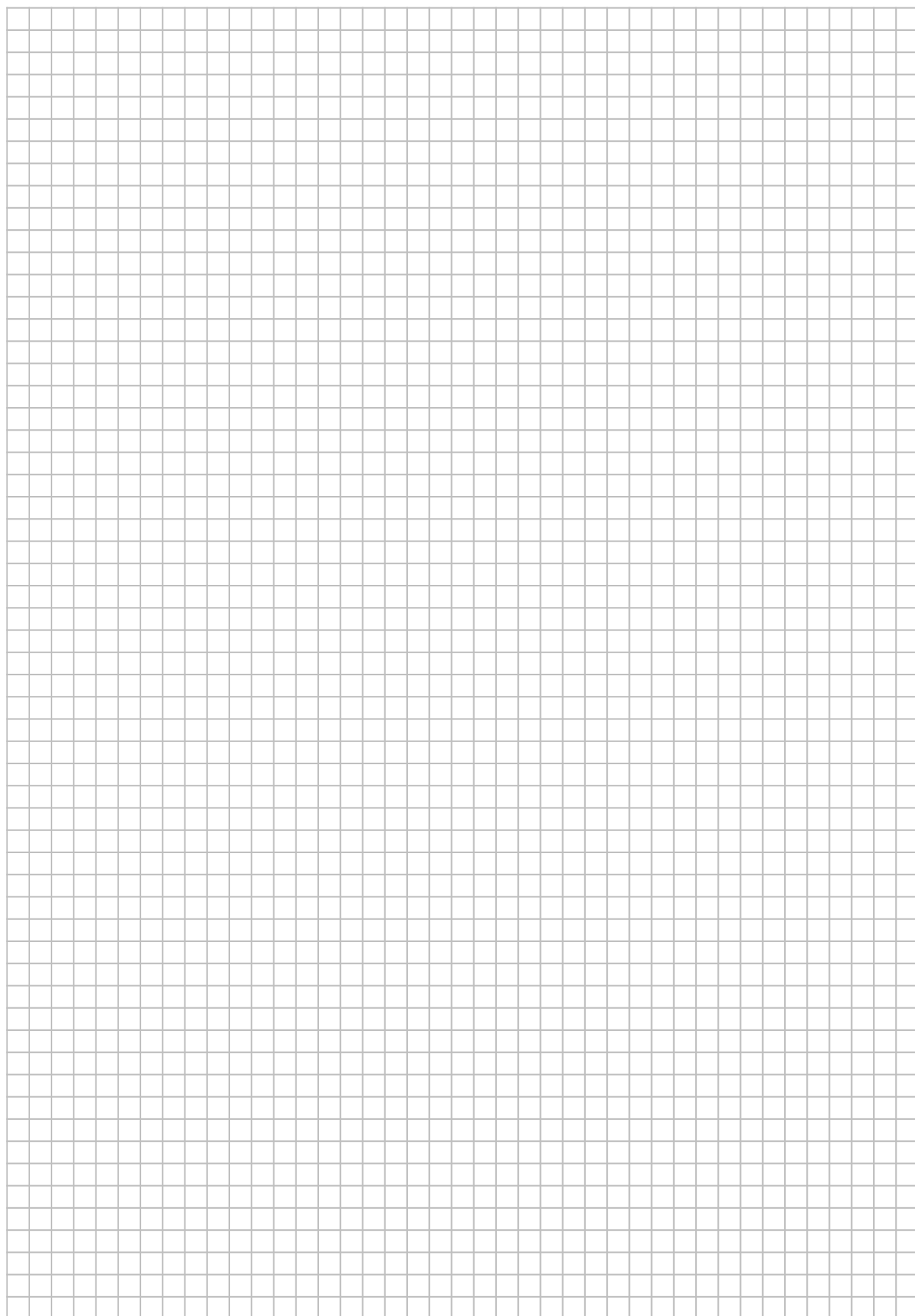
5.5 Etude d'une fonction rationnelle

Plan d'étude d'une fonction rationnelle

- 1) Recherche de $ED(f)$.
- 2) Signe et zéros de f .
- 3) Recherche des asymptotes éventuelles de f .
Si demandé, position relative entre la courbe et ses asymptotes.
- 4) Dérivée première de f , $ED(f')$. Signe et zéros de f' ; croissance de f .
- 5) Graphe de f .

Exemple 5.5.

Etudier la fonction f donnée par $f(x) = \frac{x-3}{(x-2)^2}$.



5.6 Exercices

5.1

Calculer la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point T .

a) $f(x) = 3x^2 - 6x - 5, \quad T(0; \dots)$

d) $f(x) = (3x + 2)(5x - 4), \quad T(1; \dots)$

b) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1, \quad T(1; \dots)$

e) $f(x) = \frac{4x + 7}{x + 3}, \quad T(2; \dots)$

c) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 10, \quad T(4; \dots)$

f) $f(x) = \frac{1}{x - 3}, \quad T(4; \dots)$

5.2

Donner une équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point T .

a) $f(x) = 2x^2 - 5, \quad T(2; \dots)$

c) $f(x) = x^3 + 8, \quad T(-2; \dots)$

b) $f(x) = 6 - x - x^2, \quad T(-2; \dots)$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad T(3; \dots)$

5.3

Former l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a , si :

a) $f(x) = 1 + 2x - x^3, \quad a = 1$

c) $f(x) = \sqrt{2x + 1}, \quad a = 4$

b) $f(x) = \frac{x + 3}{x}, \quad a = 3$

5.4

On donne la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a) Calculer sa dérivée.

b) En déduire les pentes des tangentes au graphe de f aux points où il coupe les axes de coordonnées.

c) Représenter le graphe de la fonction, ainsi que les tangentes dont on a calculé la pente.

5.5

En quel point la tangente à la courbe $y = x^2$ a-t-elle une pente égale à -3 ?

5.6

Calculer les coordonnées des points de la courbe $y = x^3 - 3x$ où les tangentes sont parallèles à l'axe Ox .

5.7

Calculer l'abscisse des points en lesquels la tangente au graphe de

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$$

est parallèle à la droite passant par $A(-3; 2)$ et $B(1; 14)$.

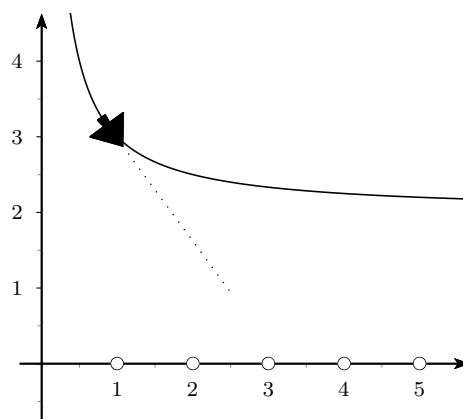
5.8

La figure ci-contre montre l'écran d'un jeu vidéo.

On peut voir des avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire d'équation

$$y = \frac{2x + 1}{x}$$

et qui tirent des balles selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3, 4 et 5.



- Une cible sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en $P(1; 3)$?
- Une cible sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en $Q\left(\frac{3}{2}; \frac{8}{3}\right)$?

5.9

Déterminer les coefficients a , b , c et d , sachant que la courbe $y = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$

- admet la droite $x = 2$ comme asymptote verticale ;
- n'admet pas d'asymptote horizontale ;
- passse par le point $P(1; -2)$ et qu'en ce point la pente de la tangente vaut -5 .

5.10

Pour quels réels a et b le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ admet-il pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y = x + 4$?

5.11

Déterminer les intervalles où les fonctions suivantes sont décroissantes.

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

c) $f(x) = \frac{x + 2}{(x + 3)(x - 4)}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = x\sqrt{36 - x^2}$

5.12

Déterminer les intervalles où les fonctions suivantes sont croissantes.

a) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 45x - 4$

c) $f(x) = (x^2 + x - 2)(x - 3)^2$

b) $f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 1}{x}$

d) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 16}$

5.13

Calculer les coordonnées de tous les extremums des fonctions f définies par :

a) $f(x) = 4x - 5$

d) $f(x) = \frac{x+2}{3x-1}$

g) $f(x) = \frac{2x^2 + x + 8}{x}$

b) $f(x) = 7 - 2x - x^2$

e) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

h) $f(x) = (x+2)(2x-3)^2$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

f) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 7$

i) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

5.14

Calculer sur l'intervalle I les coordonnées de tous les extremums absolus des fonctions f définies par :

a) $f(x) = 5x^2 + 8x - 4, \quad I = [1; 3]$

d) $f(x) = \frac{2x^2 + x + 8}{x}, \quad I = [-1; 3]$

b) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}, \quad I = [0; 3]$

e) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 16}, \quad I = [1; +\infty[$

c) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x, \quad I = [-2; 2]$

f) $f(x) = (x-2)^2(x-3), \quad I = [-2; 5]$

5.15

Déterminer les paramètres a et b de sorte que la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$$

admette en $x_0 = -1$ un extremum d'ordonnée 4.

5.16

Déterminer les paramètres a et b de sorte que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 1}$$

admette en $x_0 = 0$ un minimum ou un maximum d'ordonnée 3.

5.17

On souhaite construire une boîte en carton en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille cartonnée rectangulaire et en rabattant les bords restants. La feuille mesure 42 cm de long et 32 cm de large. De la taille des carrés découpés dépendra le volume de la boîte. Calculer la dimension de ces carrés pour que la boîte ait un volume maximal. Donner également ce volume maximal.

5.18

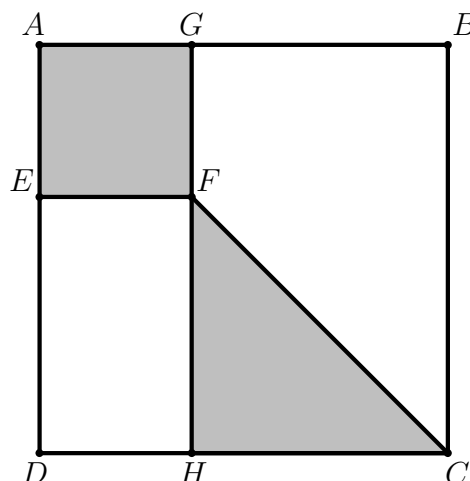
Trouver l'aire maximale d'un rectangle dont un côté est porté par l'axe Ox et dont les sommets non situés sur cet axe sont dans les quadrants 1 et 2 et sur la courbe $y = 12 - x^2$.

5.19

On considère un carré $ABCD$ de 12 cm de côté.

En choisissant un point E sur le côté AD , on construit le carré $AEFG$ et le triangle FHC rectangle en H (voir ci-contre).

Soit S l'aire totale de la surface grisée (composée du carré $AEFG$ et du triangle FHC).



Déterminer les valeurs maximale et minimale de l'aire totale S lorsque E varie sur le segment AD .

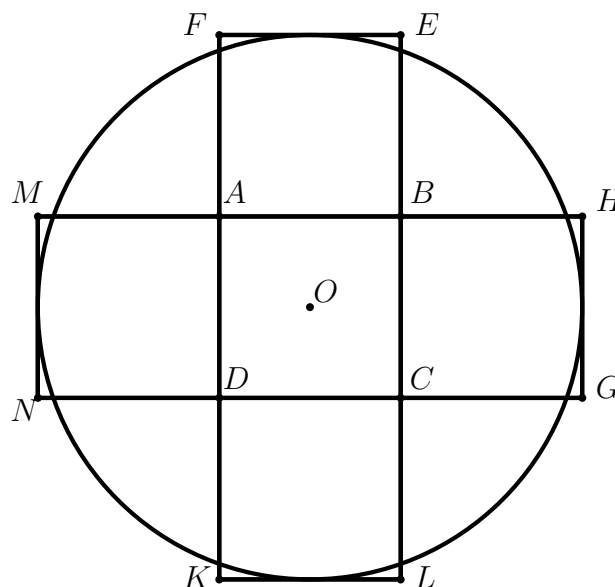
5.20

On considère un cercle de centre O de rayon 9 cm.

A l'intérieur de ce cercle, on construit un carré $ABCD$ de centre O ; on construit ensuite les rectangles $ABEF$, $BCGH$, $CDKL$ et $DAMN$ de telle sorte que les côtés EF , GH , KL et MN soient tangents au cercle (voir ci-contre).

On obtient ainsi le développement d'une boîte sans couvercle dont $ABCD$ est la base et dont les rectangles $ABEF$, $BCGH$, $CDKL$ et $DAMN$ sont les faces latérales.

En faisant varier la longueur du côté du carré $ABCD$ dans le cercle, on obtient différentes boîtes.



- 1) Calculer le volume de la boîte si la longueur du côté du carré $ABCD$ vaut 8 cm.
- 2) Déterminer la longueur du côté du carré $ABCD$ qui rend maximal le volume de la boîte ainsi construite et calculer ce volume maximal.

5.21

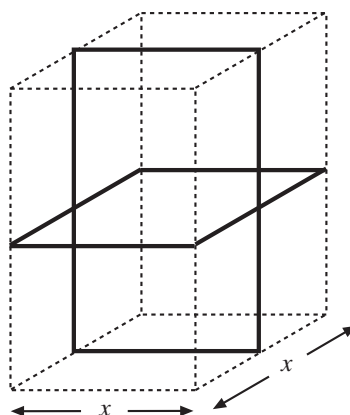
Un homme atteint d'une grave maladie accepte de prendre x grammes d'un médicament expérimental. La probabilité de guérison est donnée par

$$P(x) = \frac{3\sqrt{x}}{4(x+1)}$$

Quelle quantité de ce médicament assure à cet homme la plus grande probabilité de guérison ?

5.22

On propose d'envoyer un colis dont la forme est celle d'un parallélépipède rectangle à **base carrée**. Son emballage est maintenu, comme le montre la figure ci-contre, à l'aide d'une ficelle de 126 cm de longueur.

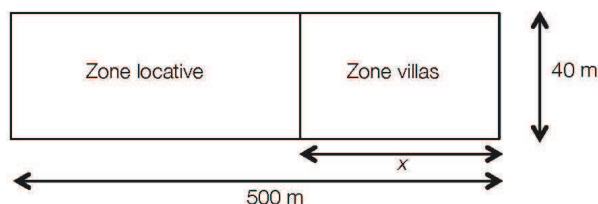


- 1) Un colis de côté de base $x = 15$ cm est emballé de la sorte. Calculer le volume du colis.
- 2) Calculer les dimensions du colis de volume maximum qui peut être emballé de la sorte.

5.23

Une commune a vendu à un promoteur un terrain à bâtir de 20'000 m² pour 4 millions de francs.

Le promoteur peut partager le terrain en deux zones rectangulaires : une zone villas qui lui rapportera 500 francs par m² et une zone locative qui lui rapportera 200 francs par m².



La commune voulant privilégier la zone locative, elle impose au promoteur une taxe sur la zone villas. Cette taxe, en francs, est donnée par la fonction $t(a) = \frac{1}{40}a^2$ où a représente l'aire en m² de la zone villas.

- a) Déterminer le gain ou la perte du promoteur s'il ne construit que des villas.
- b) Déterminer le gain ou la perte du promoteur s'il ne construit que des locatifs.
- c) Déterminer le gain ou la perte du promoteur s'il coupe le terrain par le milieu.
- d) Montrer que le gain ou la perte du promoteur (en francs) est donné par :

$$f(x) = -40x^2 + 12'000x$$

où x (en m) représente la longueur de la zone villas (cf. croquis).

- e) Déterminer la longueur x (en m) de la zone villas pour que le gain du promoteur soit maximal et déterminer ce gain maximal.

(Problème de bac, Burier, juin 2014)

5.24

Le directeur du pénitencier veut clôturer un champ rectangulaire adjacent à la bâtisse du pénitencier. Pour installer une clôture de sécurité, il doit payer 30 fr le mètre de clôture. Le directeur a obtenu un budget de 64 200 fr pour ce projet. Calculer les dimensions du champ d'aire maximale qu'il peut construire avec cette somme.

5.25

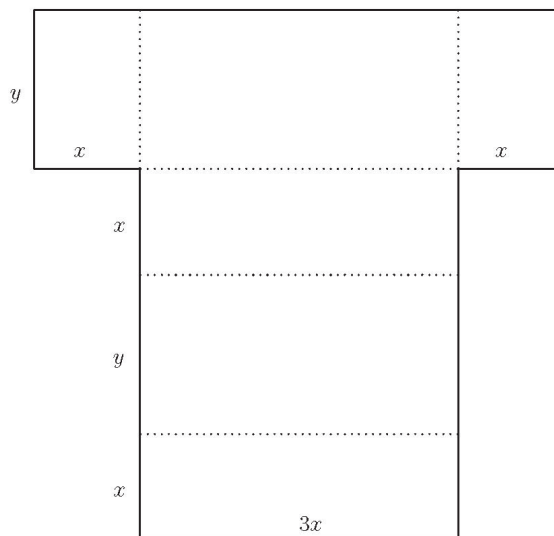
On fabrique une boîte en forme de parallélépipède rectangle de volume 2304 cm^3 . On découpe alors dans une feuille de carton le développement de la boîte comme donné dans la figure ci-contre.

- a) Montrer que l'aire totale de carton nécessaire à la fabrication de la boîte est donnée par

$$A(x) = \frac{6(x^3 + 1024)}{x}$$

- b) Quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent l'aire de carton nécessaire à sa fabrication ? Justifier par une étude de croissance.

(Problème de bac, Burier, juin 2015)

**5.26**

- a) Gérard a une petite entreprise où il fabrique des sacs à main en cuir. En considérant ses frais fixes et ses frais variables, il a calculé que la fonction f donnée par

$$f(x) = 6\,300 + 10x + \frac{x^2}{28}$$

représente le coût total de fabrication de x sacs à main. Combien Gérard doit-il fabriquer de sacs à main s'il veut obtenir un coût de production unitaire minimal ?

- b) Gérard décide de vendre la totalité des sacs à main qu'il fabrique au prix de 70 fr la pièce. Combien doit-il en fabriquer pour obtenir un profit maximal ?

5.27

On veut construire un restaurant de spécialités italiennes. On sait que si l'on aménage 120 places, on obtiendra un profit mensuel de 48 fr par place. De plus, pour chaque place au-delà de 120, le profit mensuel par place diminue de 25 centimes. Combien de places doit-on aménager si l'on veut obtenir un profit mensuel maximal ?

5.28

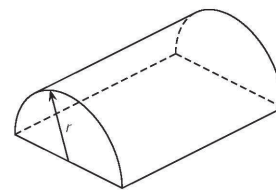
Un fabricant de produits alimentaires veut mettre sur le marché un jus de pomme vitaminé. Il envisage de le mettre dans des boîtes de conserves cylindriques de 1000 cm^3 . Quelles doivent être les dimensions de la boîte pour qu'il utilise le moins de métal possible ?

5.29

Une feuille de papier doit contenir 60 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent avoir 5 cm chacune, et celles de côté 3 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille pour laquelle il faudra le moins de papier possible.

5.30

On souhaite construire une serre de 3 750 m³ de volume. On réalise pour cela deux parois verticales en forme de demi-disques de rayon r (en mètres) dont le prix est de 35 francs par m² et un toit rectangulaire dont le prix est de 15 francs par m², que l'on recourbe comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient ainsi une serre en forme de demi-cylindre.



- a) Montrer que le coût total de cette serre en fonction du rayon r des parois est donné par

$$C(r) = \frac{35\pi r^3 + 112500}{r}$$

- b) Déterminer les dimensions de la serre de coût minimal et déterminer ce coût.

(Problème de bac, Burier, juin 2012)

5.31

Deux points A et B de la rive d'un lac sont distants de 12 km. Entre ces deux points, la rive est une ligne droite de direction Est-Ouest. Deux villes C et D sont respectivement situées à 9 km au nord du point A et à 15 km au nord du point B . On souhaite installer une station de pompage sur le bord du lac, entre les points A et B , station qui fournira l'eau aux deux villes. Où devra-t-on l'installer si l'on veut que la somme des distances de la station aux deux villes soit minimale ?

5.32

Un fabricant doit construire une caisse à **base carrée** de 16 m³ de volume. Pour des raisons de solidité et d'étanchéité, le matériau employé pour la base coûte 6 francs le m², alors que celui utilisé pour les parois latérales et le couvercle en coûte que 2 francs le m².

- 1) Calculer le prix de revient de la caisse si la base est un carré de 2.5 mètres de côté (on considérera comme négligeable l'épaisseur des parois, de la base et du couvercle).
- 2) Quelles sont les dimensions à donner à la caisse pour que le coût des matériaux soit minimal et quel est ce coût minimal ?

5.33

Trouver une équation d'une droite qui passe par le point $A(1; 3)$ et qui détermine un triangle d'aire minimale dans le premier quadrant.

5.34

Etudier les fonctions f .

a) $f(x) = x^3 - 15x^2 - 33x + 13$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = (x-2)^2(x-3)$

d) $f(x) = \frac{x}{x^2+16}$

e) $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$

f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$

g) $f(x) = \frac{2x^2}{9-x^2}$

h) $f(x) = \frac{x \cdot (x-3)^2}{(x-2)^2}$

5.35

L'étude de la fonction f donnée ci-dessous a été partiellement réalisée. Compléter le tableau du signe de f , le tableau du signe de f' et le tableau de croissance de f . Esquisser ensuite le graphe de f avec ses asymptotes.

a) $f(x) = \frac{(x-5)^2}{2x}$

1) $ED(f) = \mathbb{R}^*$

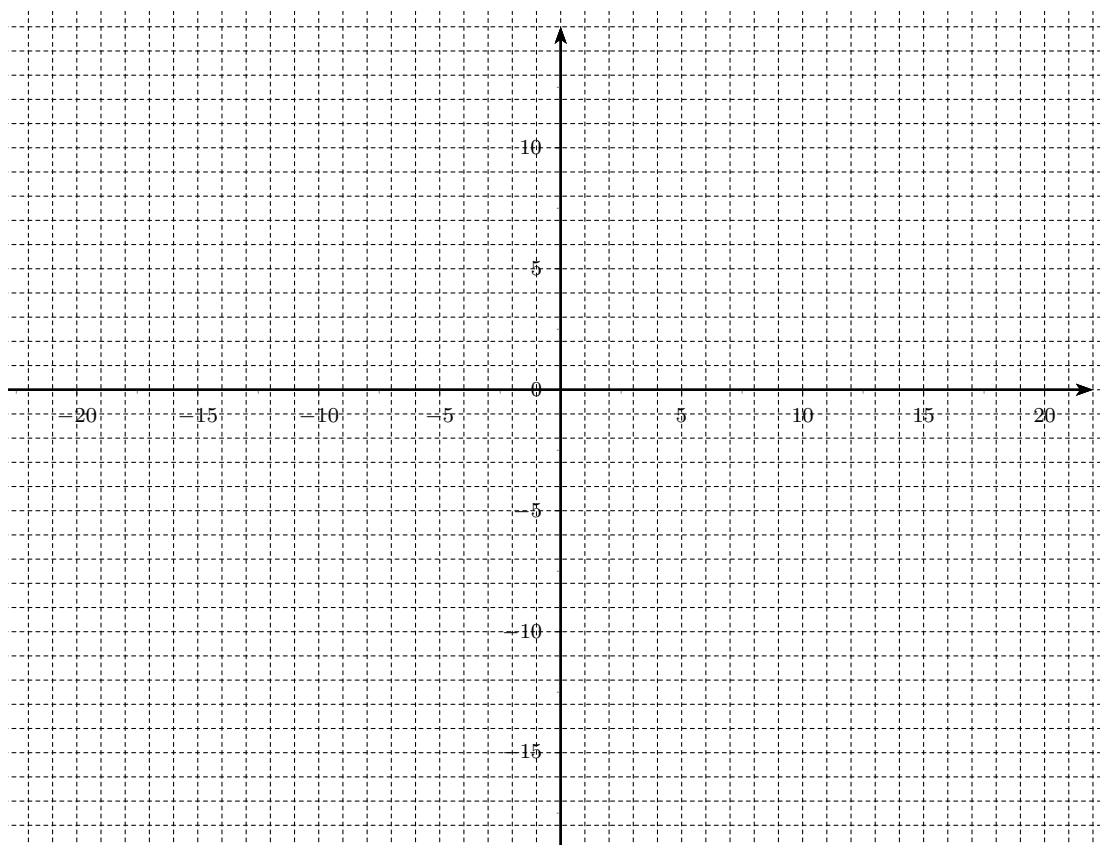
2) signe de f :

x		0		5	
$f(x)$					

3) asymptotes : AV en $x = 0$ et AO en $y = \frac{1}{2}x - 5$

4) croissance de f : $f'(x) = \frac{(x-5)(x+5)}{2x^2}$

x		-5		0		5	
$f'(x)$							
$f(x)$							



b) $f(x) = \frac{x^2}{(x-3)^2(x+4)}$

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-4; 3\}$

2) signe de f :

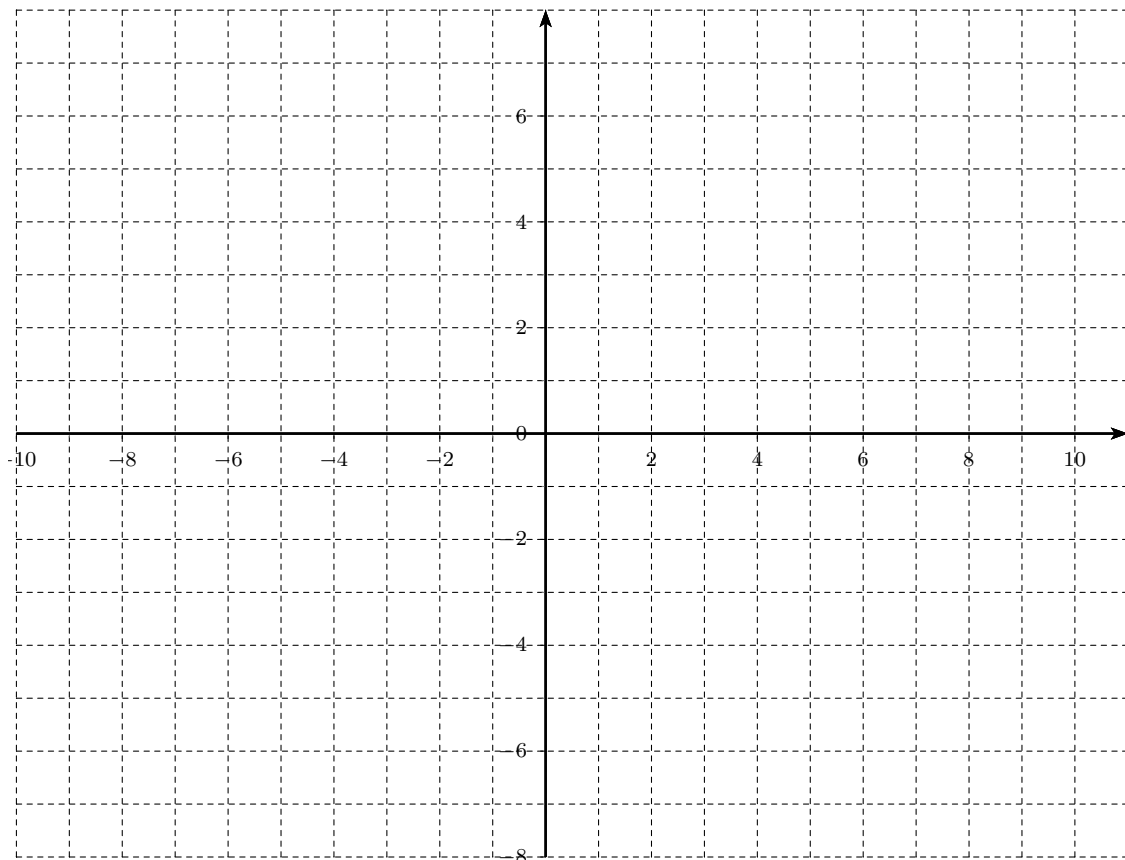
x		-4		0		3	
$f(x)$							

3) asymptotes : AV en $x = -4$ et en $x = 3$ et AH en $y = 0$

4) croissance de f :

$$f'(x) = \frac{-x(x^2 + 3x + 24)}{(x-3)^3(x+4)^2}$$

x		-4		0		3	
$f'(x)$							
$f(x)$							



5.7 Réponses

5.1

- a) -6 b) -1 c) $33/4$ d) 28 e) $1/5$ f) -1

5.2

- a) $y = 8x - 13$ c) $y = 12x + 24$ d) $y = -\frac{2}{27}x + \frac{1}{3}$
b) $y = 3x + 10$

5.3

- a) $y = -x + 3$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 3$ c) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

5.4

- a) La dérivée de la fonction s'écrit $f'(x) = -2x + 1$.
b) Les pentes cherchées sont $f'(-1) = 3$, $f'(0) = 1$, $f'(2) = -3$.

5.5

$$P\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right).$$

5.6

$$A(-1; 2) \text{ et } B(1; -2)$$

5.7

$$-\frac{4}{3}, 2.$$

5.8

- a) en P : oui;
b) en Q : non.

5.9

$$a = 1, b = 0, c = 0 \text{ et } d = 1.$$

5.10

$$a = -2, b = -6.$$

5.11

- | | |
|---------------------------------|---|
| a) $] -\infty; -2] \cup [0; 1]$ | c) $\mathbb{R} - \{-3; 4\}$ |
| b) $[0; 2 [\cup] 2; +\infty[$ | d) $[-6; -3\sqrt{2}] \cup [3\sqrt{2}; 6]$ |

5.12

- | | |
|---|--|
| a) $[-5; 3]$ | c) $[-1; \frac{7}{4}] \cup [3; +\infty[$ |
| b) $] -\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$ | d) $[-4; 4]$ |

5.13

- | | |
|--|---|
| a) Aucun | f) min en $N(2; -37)$ et max en $M(-3; 88)$ |
| b) max en $M(-1; 8)$ | g) min en $N(2; 9)$ et max en $M(-2; -7)$ |
| c) min en $N(1; -2)$ et max en $M(-2; 25)$ | h) min en $N(\frac{3}{2}; 0)$ et max en $M(\frac{-5}{6}; \frac{686}{27})$ |
| d) Aucun | i) min en $N(0; -1)$ |
| e) min en $N(\frac{1}{2}; 0)$ | |

5.14

- | | |
|--|---|
| a) min en $N(1; 9)$ et max en $M(3; 65)$ | d) Aucun |
| b) Aucun | e) max en $M(4; \frac{1}{8})$ |
| c) min en $N(1; -11)$ et max en $M(2; 32)$ | f) min en $N(-2; -80)$ et max en $M(5; 18)$ |

5.15

$a = 0$ et $b = -3$

5.16

$a = -15$ et $b = 3$

5.17

6 cm et la boîte est de volume 3600 cm^3

5.18

$32 \text{ [u}^2\text{]}$

5.19

Aire maximale : 144 cm^2 ; aire minimale : 48 cm^2

5.20

- 1) 320 cm^3
- 2) côté du carré $ABCD$: 12 cm
- 3) volume maximal de 432 cm^3

5.21

1 gramme

5.22

- 1) 4050 cm^3
- 2) $14 \times 14 \times 21 \text{ cm}$ pour un volume maximal de 4116 cm^3

5.23

- a) Perte de 4 millions de francs.
- b) Opération neutre (ni perte ni gain).
- c) Gain de 500'000 francs.
- d) -
- e) Le gain est maximal (900'000 francs) pour $x = 150 \text{ m}$.

5.24

Les côtés mesurent 535 m sur 1070 m .

5.25

- b) $8 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$

5.26

- a) 420 sacs à main
- b) 840 sacs à main

5.27

156 places

5.28

5.42 cm pour le rayon et 10.83 cm pour la hauteur du cylindre

5.29

Les côtés mesurent 12 cm et 20 cm

5.30

- b) rayon : environ 8 mètres , longueur : environ 37.3 mètres , coût : environ 21100 francs

5.31

A 4.5 km du point A

5.32

1) 101,2 francs ; 2) base : 2 m sur 2 m ; hauteur : 4 m ; coût minimal : 96 francs.

5.33

$$3x + y - 6 = 0$$

5.34

a) $f(x) = x^3 - 15x^2 - 33x + 13$

$$ED(f) = \mathbb{R}$$

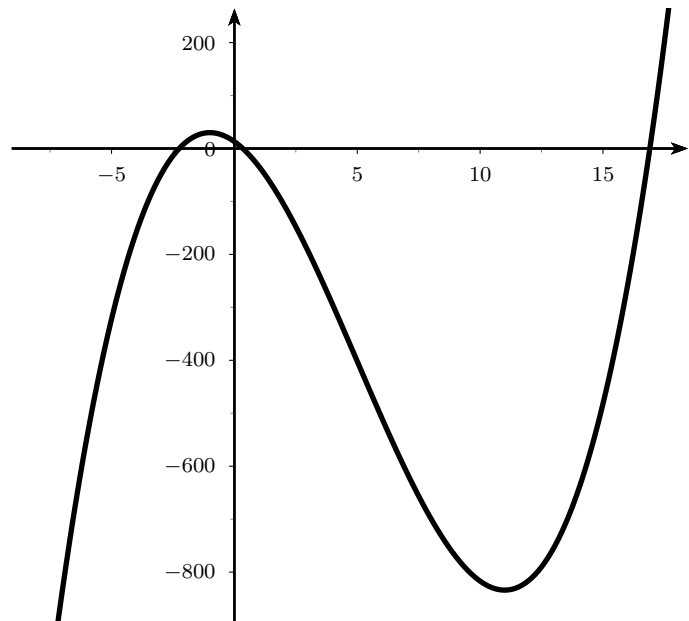
Asymptote : aucune

$$f'(x) = 3(x + 1)(x - 11)$$

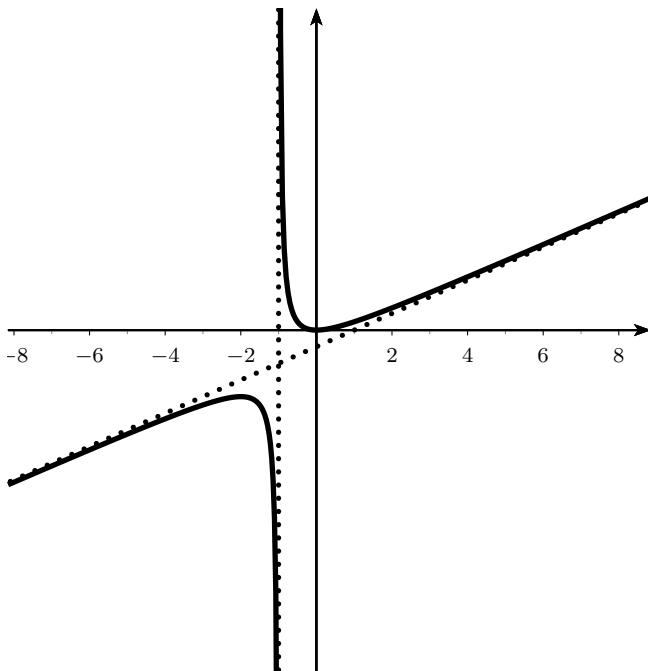
$$ED(f) = ED(f')$$

$$\text{Max : } M(-1; 30)$$

$$\text{Min : } N(11; -834)$$



b) $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$



$$ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Asymptotes : $x = -1, y = x - 1$

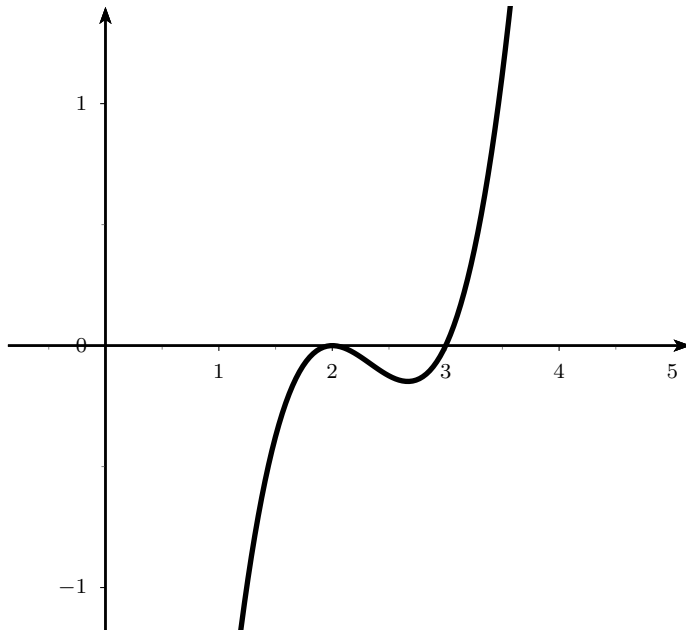
$$f'(x) = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$$

$$ED(f) = ED(f')$$

$$\text{Max : } M(-2; -4)$$

$$\text{Min : } N(0, 0)$$

c) $f(x) = (x - 2)^2(x - 3)$



$$ED(f) = \mathbb{R}$$

Asymptote : aucune

$$f'(x) = (x - 2)(3x - 8)$$

$$ED(f) = ED(f')$$

$$\text{Max} : M(2; 0)$$

$$\text{Min} : N\left(\frac{8}{3}; -\frac{4}{27}\right)$$

d) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 16}$

$$ED(f) = \mathbb{R}$$

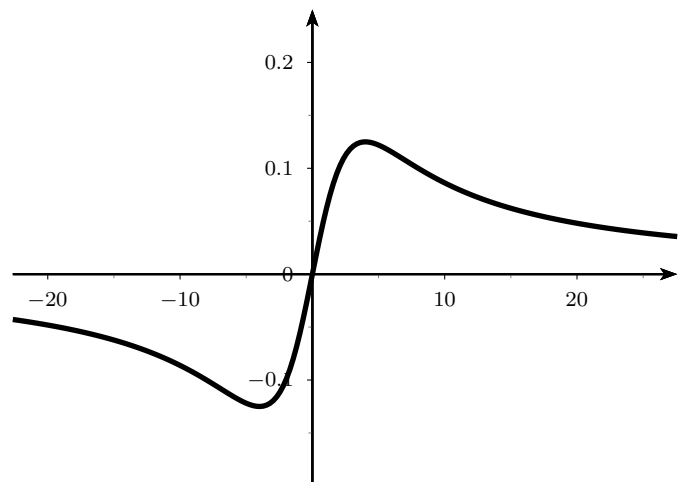
Asymptote : $y = 0$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 16}{(x^2 + 16)^2}$$

$$ED(f) = ED(f')$$

$$\text{Max} : M\left(4; \frac{1}{8}\right)$$

$$\text{Min} : N\left(-4; -\frac{1}{8}\right)$$



e) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

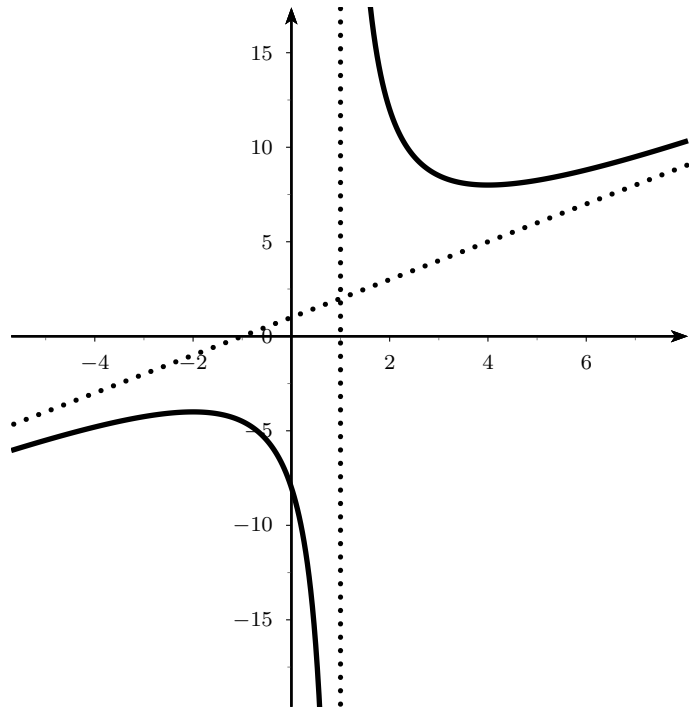
Asymptotes : $x = 1, y = x + 1$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2}$$

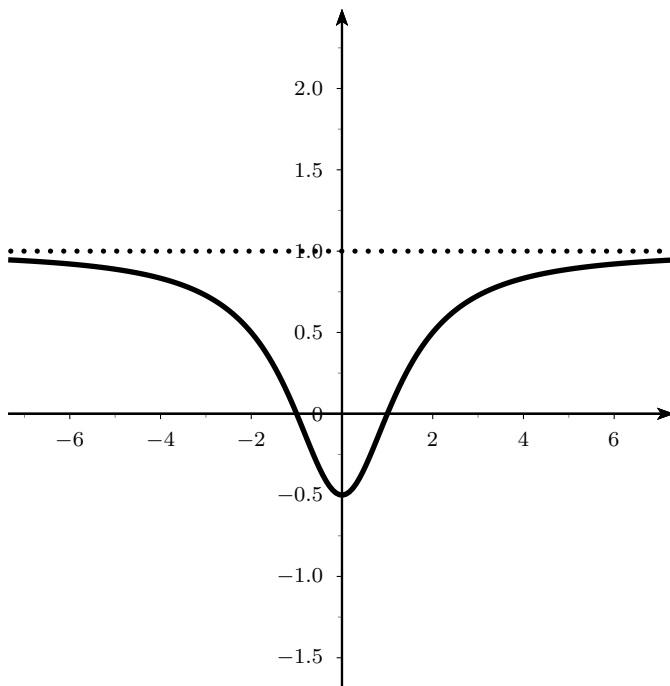
$$ED(f) = ED(f')$$

Max : $M(-2; -4)$

Min : $N(4; 8)$



f) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$



$$ED(f) = \mathbb{R}$$

Asymptote : $y = 1$

$$f'(x) = \frac{6x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$ED(f) = ED(f')$$

Max : aucun

Min : $N(0; -\frac{1}{2})$

g) $f(x) = \frac{2x^2}{9 - x^2}$

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$$

Asymptotes :

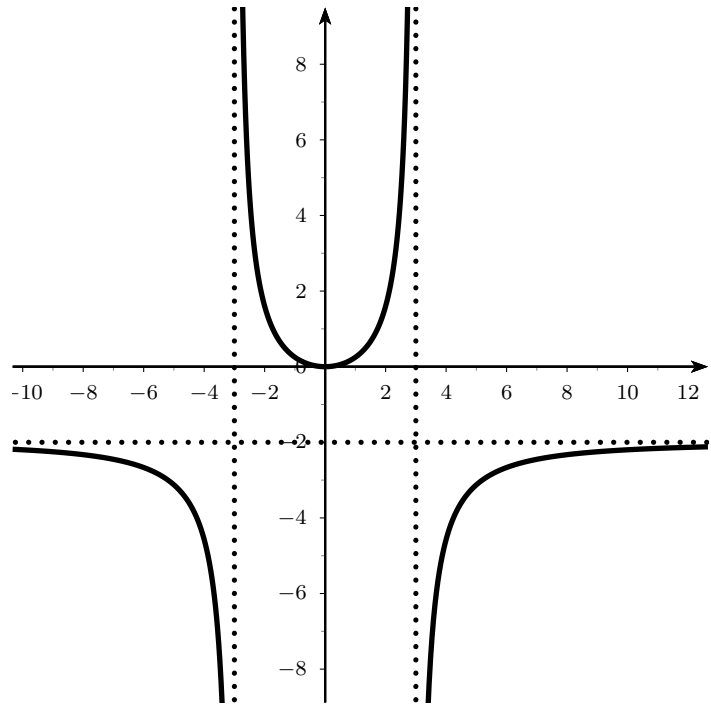
$$x = -3, x = 3, y = -2$$

$$f'(x) = \frac{36x}{(9 - x^2)^2}$$

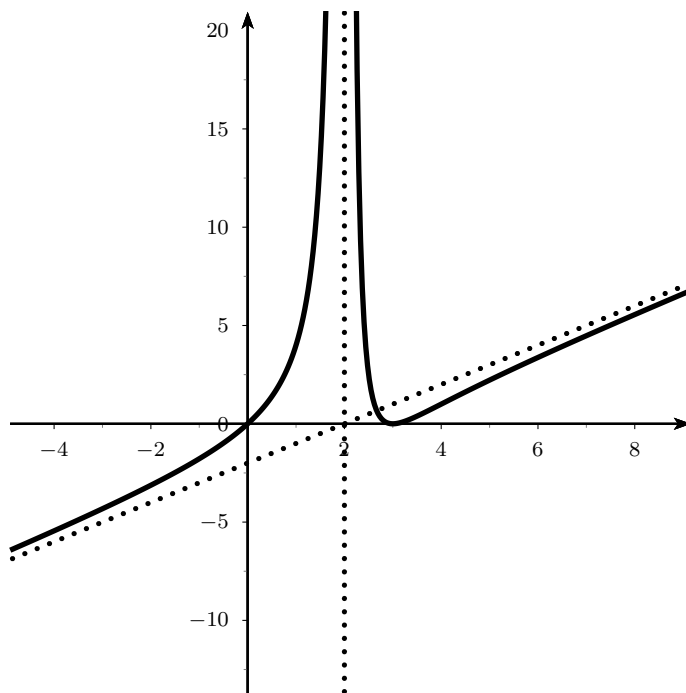
$$ED(f) = ED(f')$$

Max : aucun

Min : $N(0; 0)$



h) $f(x) = \frac{x \cdot (x - 3)^2}{(x - 2)^2}$



$$ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

Asymptotes : $x = 2, y = x - 2$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 15x - 18}{(x - 2)^3}$$

$$ED(f) = ED(f')$$

Max : aucun

Min : $N(3; 0)$

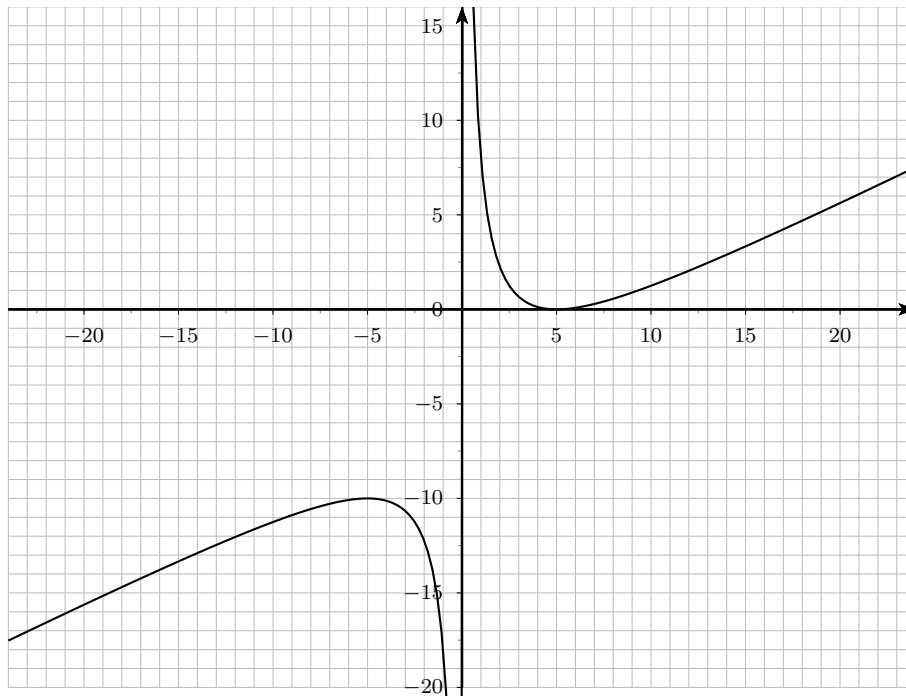
5.35

1) signe de f :

x		0		5	
$f(x)$	-		+	0	+

Croissance de f :

x		-5		0		5	
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
f	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

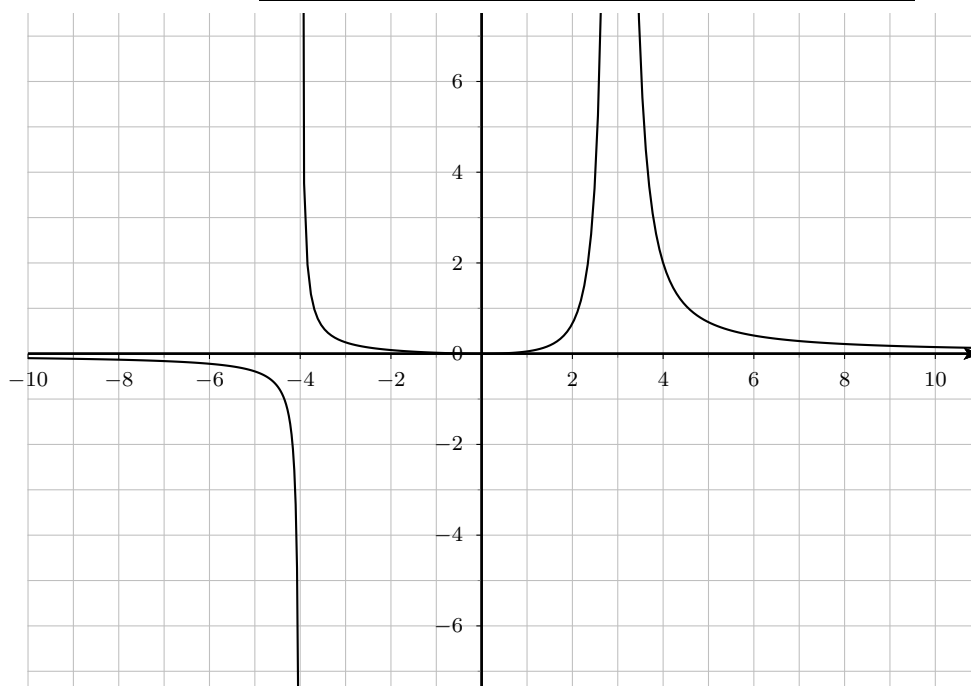


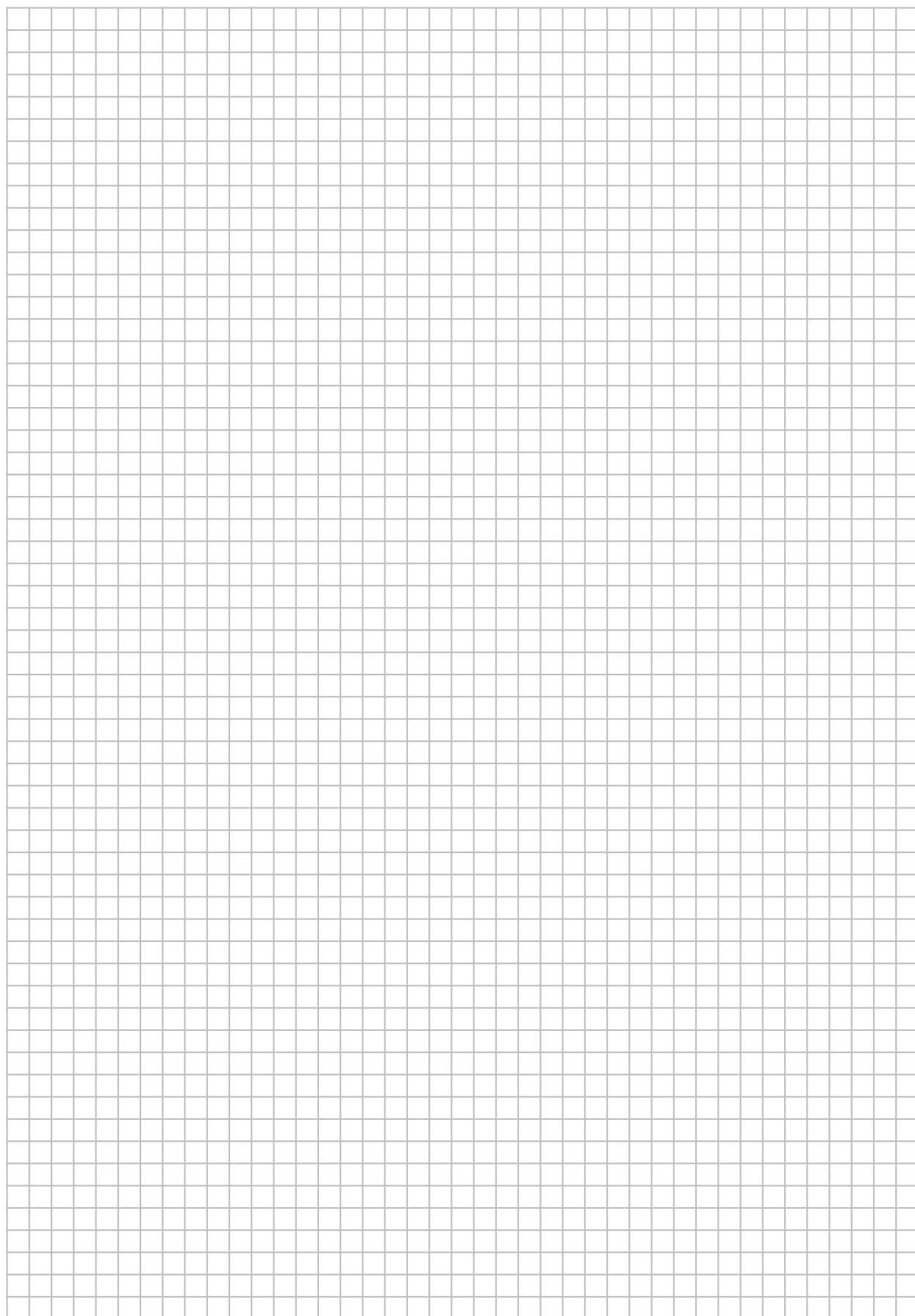
2) signe de f :

x		-4		0		3	
$f(x)$	-		+	0	+		+

Croissance de f :

x		-4		0		3	
$f'(x)$	-		-	0	+		-
f	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\searrow$





Chapitre 6

Fonctions trigonométriques

6.1 Les fonctions trigonométriques

Dans un système d'axes Oxy , rappelons que le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre $O(0;0)$ origine du repère et de rayon $r = 1$.

Soit α un nombre réel. On considère le point M d'intersection du côté final de l'angle orienté de mesure α (degrés ou radians) avec le cercle trigonométrique, ainsi que le point T intersection du prolongement de celui-ci avec la droite verticale $x = 1$.

6.1.1 Fonctions trigonométriques

$\cos(\alpha)$:

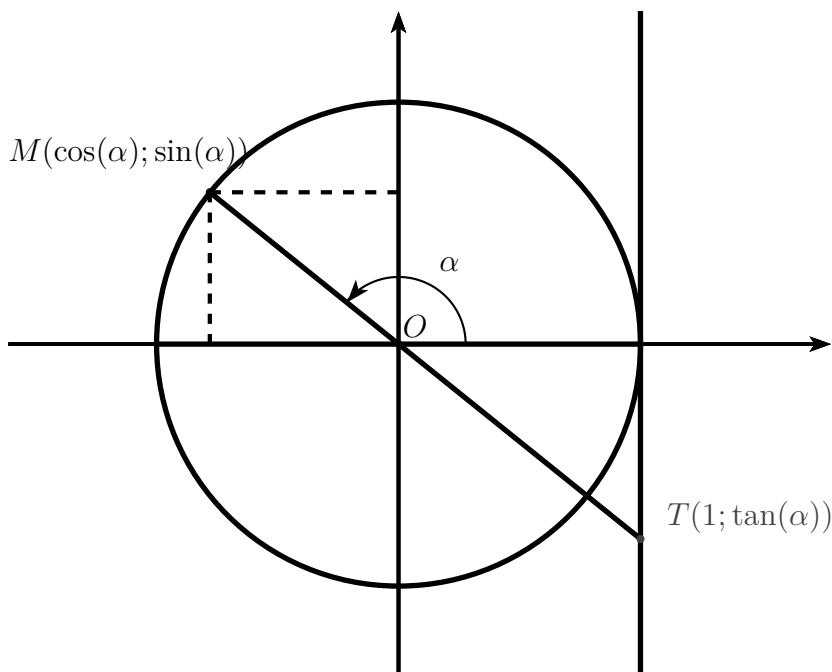
1^{ère} coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

$\sin(\alpha)$:

2^e coordonnée du point M situé sur le cercle trigonométrique.

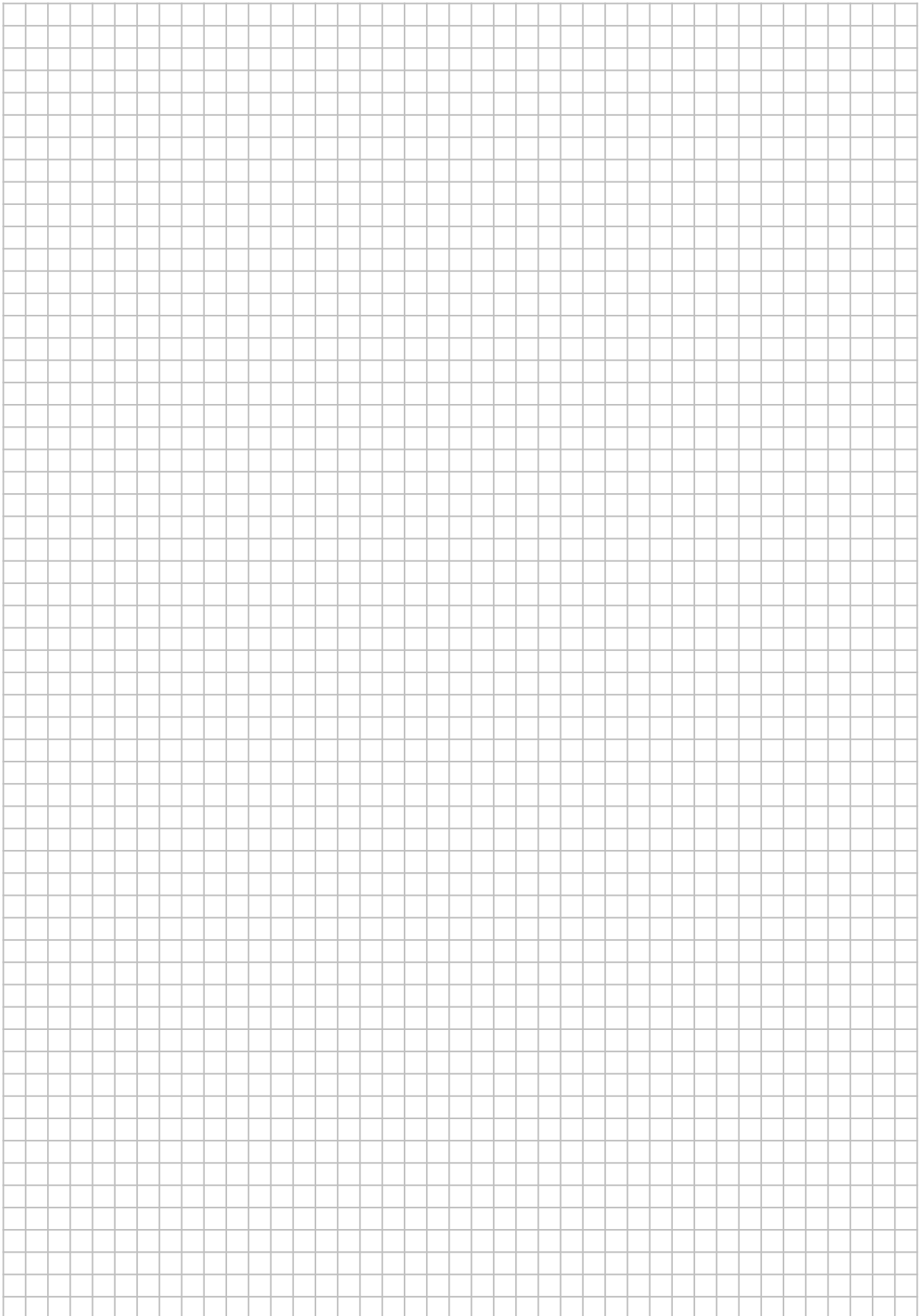
$\tan(\alpha)$:

2^e coordonnée du point T situé sur la droite $x = 1$.



Remarque 6.1.

- a) Lorsque α est compris entre 0° et 90° , on retrouve les rapports trigonométriques définis dans le triangle rectangle.
- b) Si aucune mesure n'est précisée, les fonctions trigonométriques sont données en **radians**.



Exemple 6.1.

Exprimer le sinus, le cosinus et la tangente des deux angles α suivants à l'aide des rapports trigonométriques du triangle rectangle.

a) $\alpha_1 = 130^\circ$

b) $\alpha_2 = -\frac{5\pi}{6}$

6.1.2 Périodicité

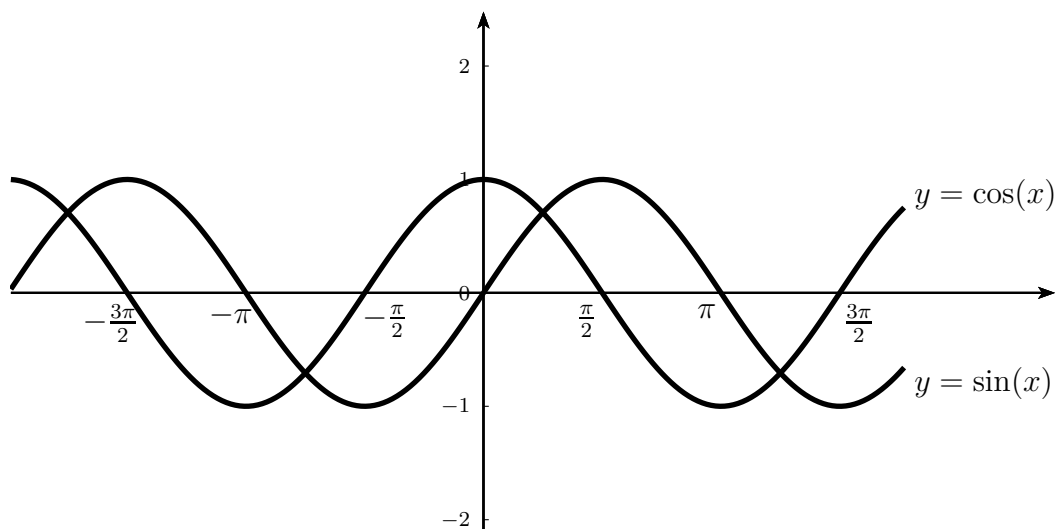
- $\sin(\alpha) \in [-1; 1]$, $\cos(\alpha) \in [-1; 1]$ et $\tan(\alpha) \in]-\infty; +\infty[$.
- Les fonctions trigonométriques sont **périodiques** :

En radians : $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

En degrés : $\sin(\alpha + 360) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 360) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha + 180) = \tan(\alpha)$

Graphes des fonctions sinus et cosinus (en radians)

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π** .

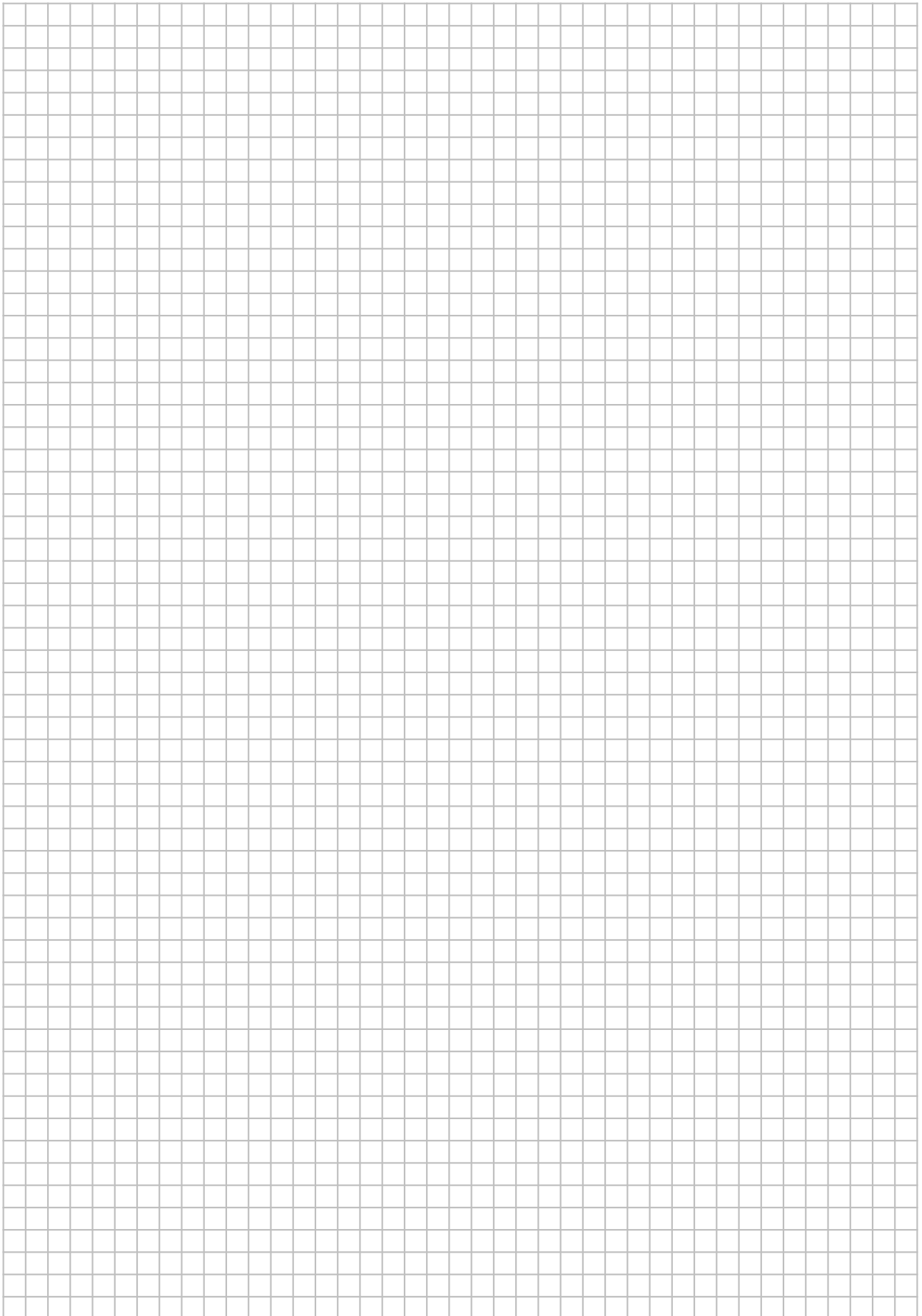


$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sin(x)$$

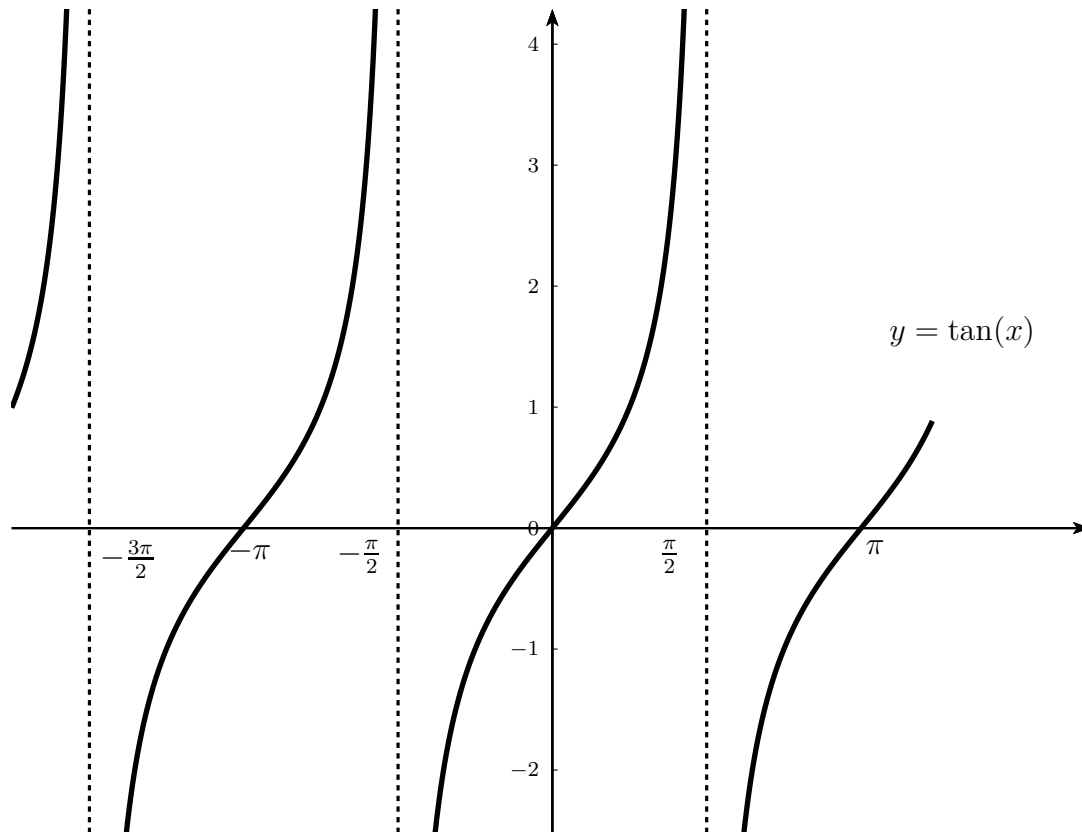
$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \cos(x)$$



Graphes de la fonction tangente (en radians)

La fonction tangente est **périodique de période π** .



$$\begin{array}{ccc} \tan & : & \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto \tan(x) \end{array}$$

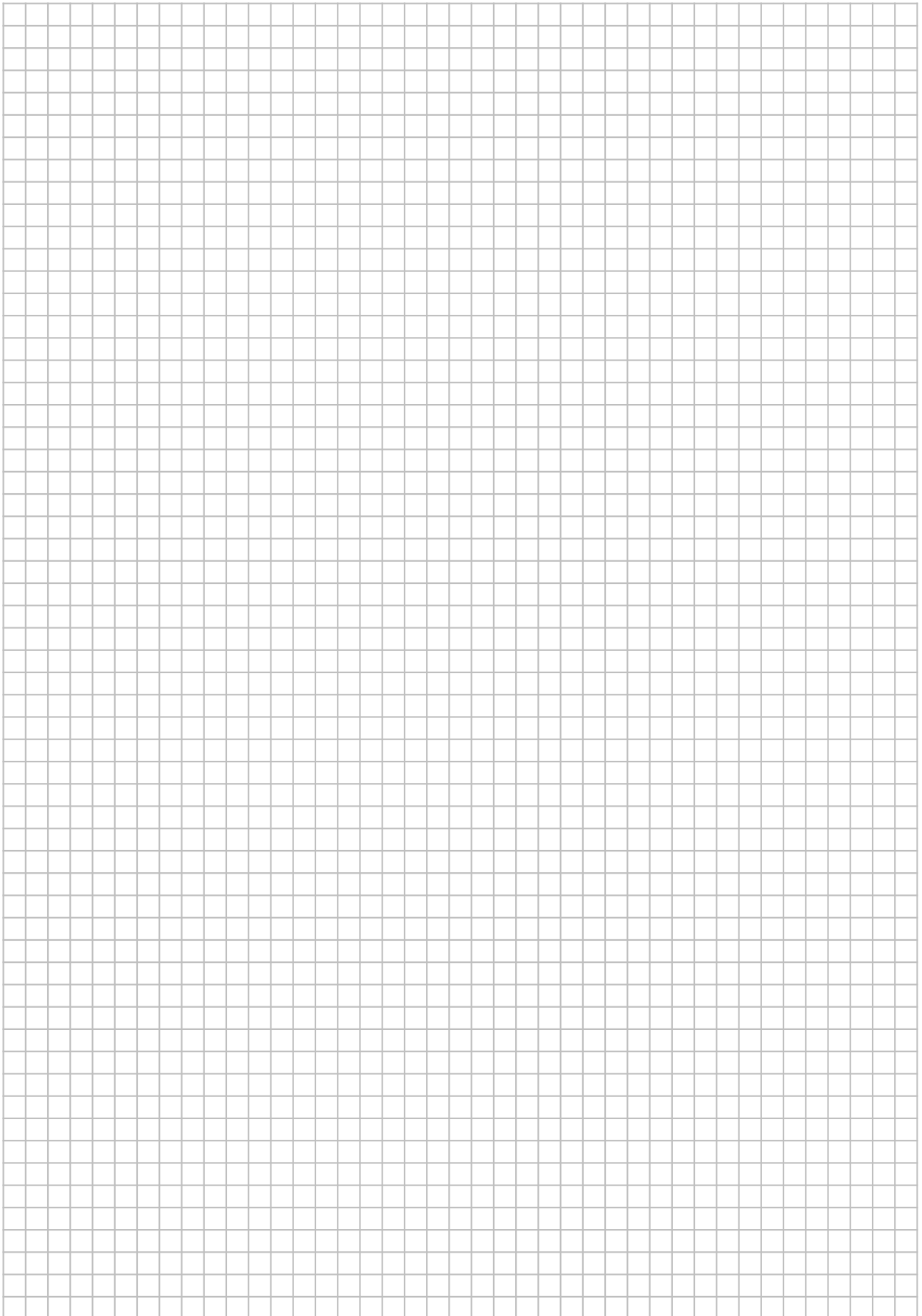
6.1.3 Propriétés fondamentales

a) A l'aide du théorème de Pythagore, on obtient :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

b) A l'aide du théorème de Thalès, on obtient :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$



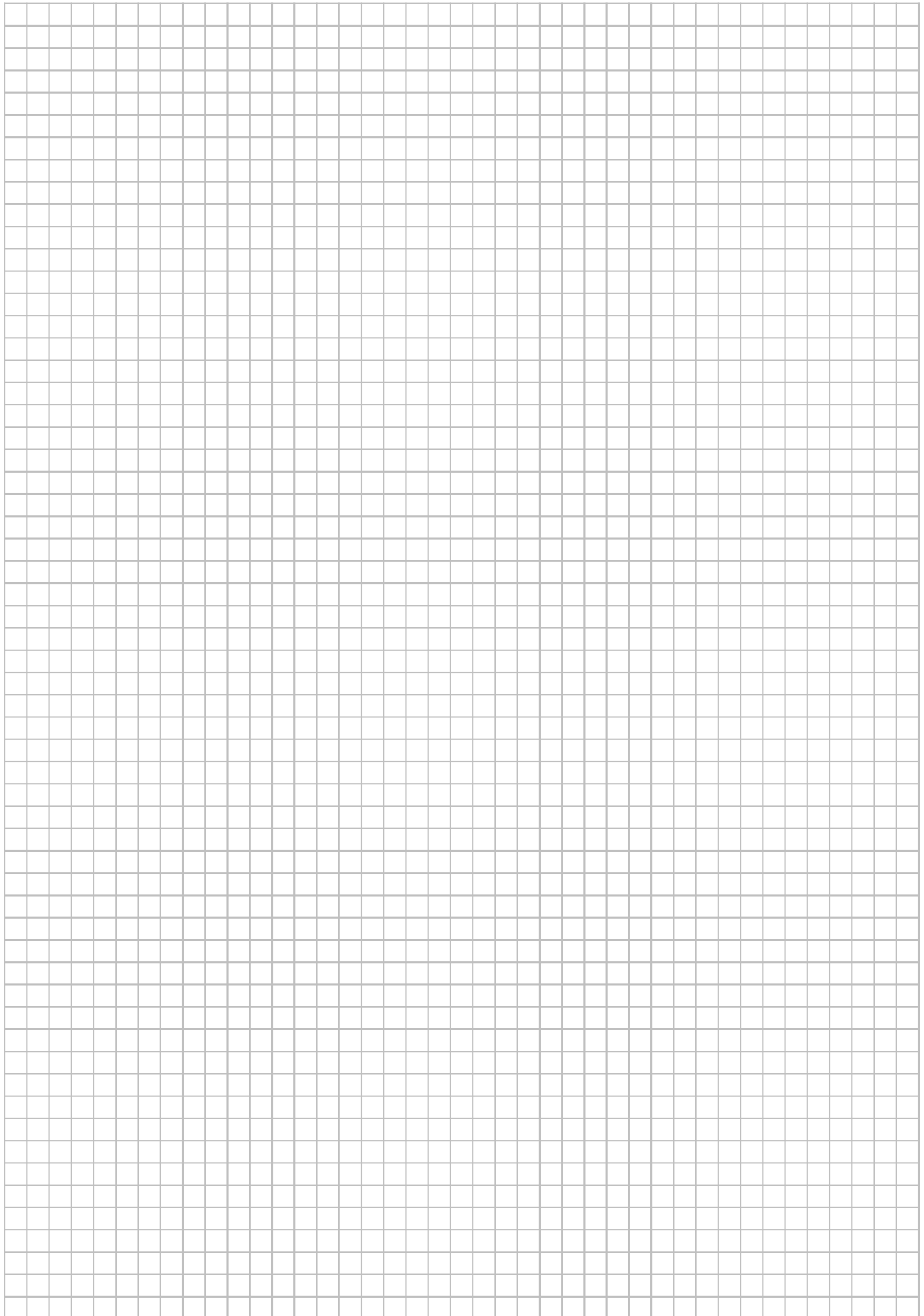
6.2 Equations trigonométriques

Une **équation trigonométrique** est une équation contenant des expressions trigonométriques.

Exemple 6.2.

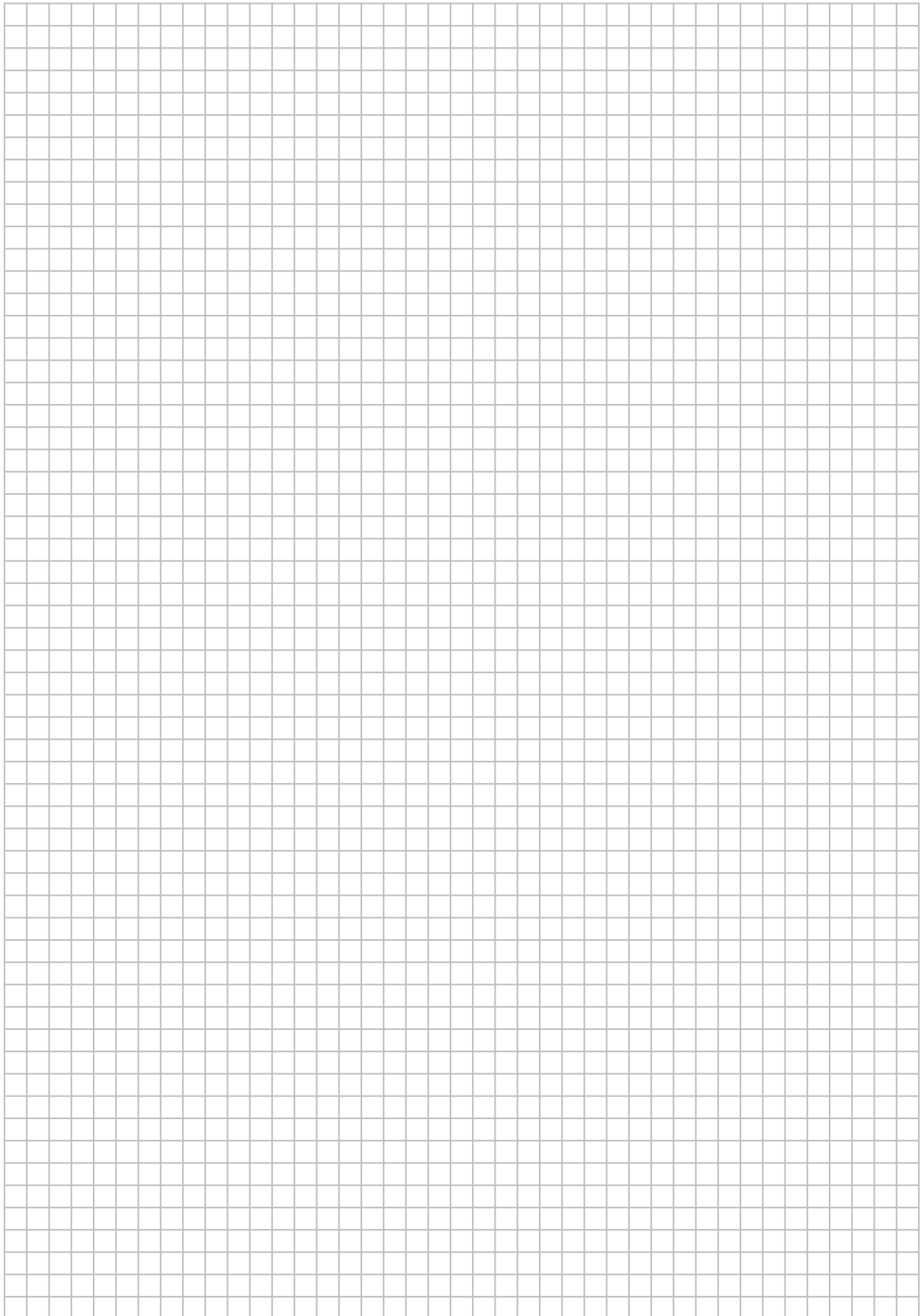
a) Résoudre en degrés l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$

b) Résoudre en radians l'équation $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

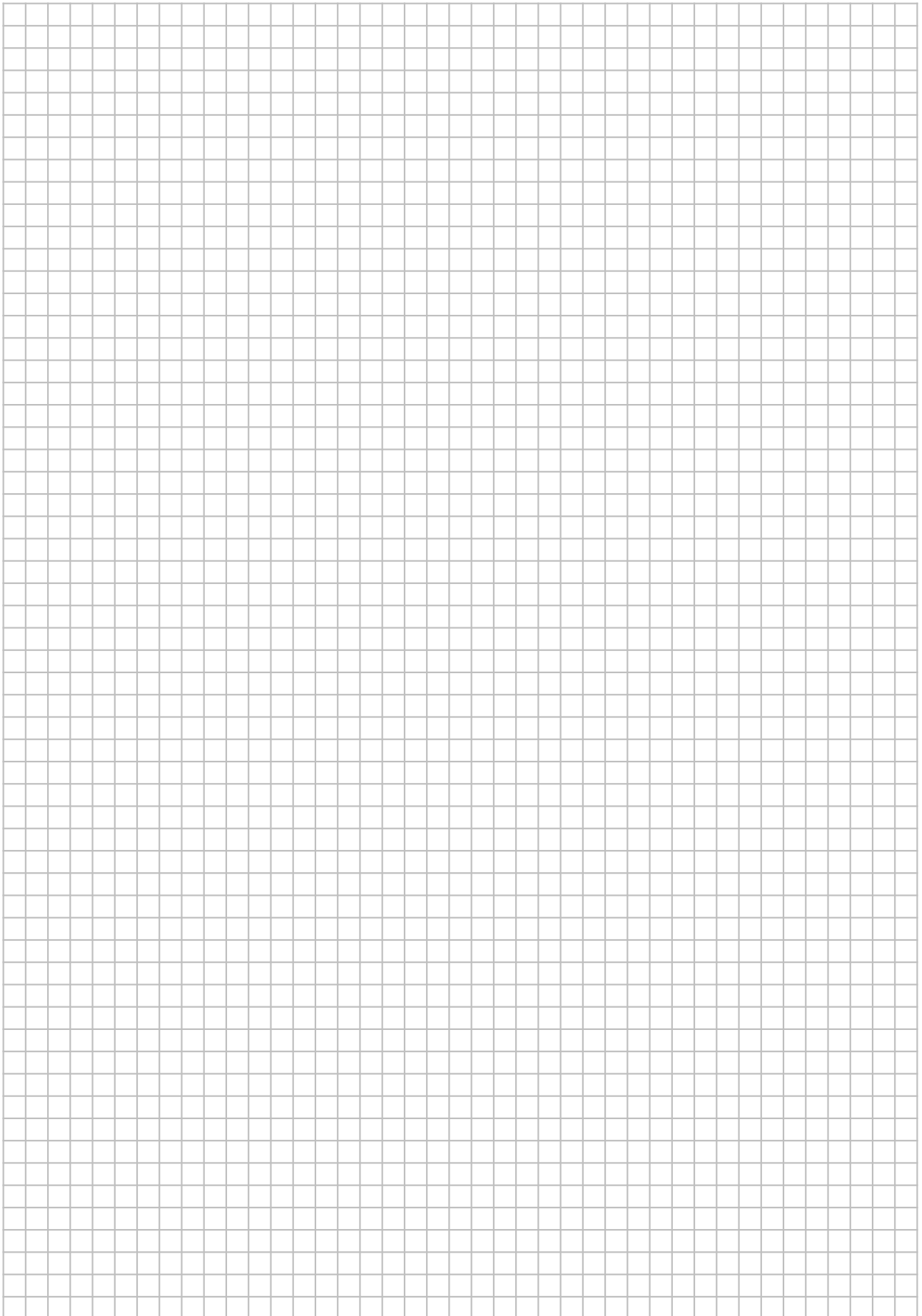


c) Résoudre en radians l'équation $\tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$

d) Résoudre en radians l'équation $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 5 = 4$



e) Résoudre en radians l'équation $2 \cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$



6.3 Dérivée des fonctions trigonométriques (en radians)

- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$

Remarque 6.2.

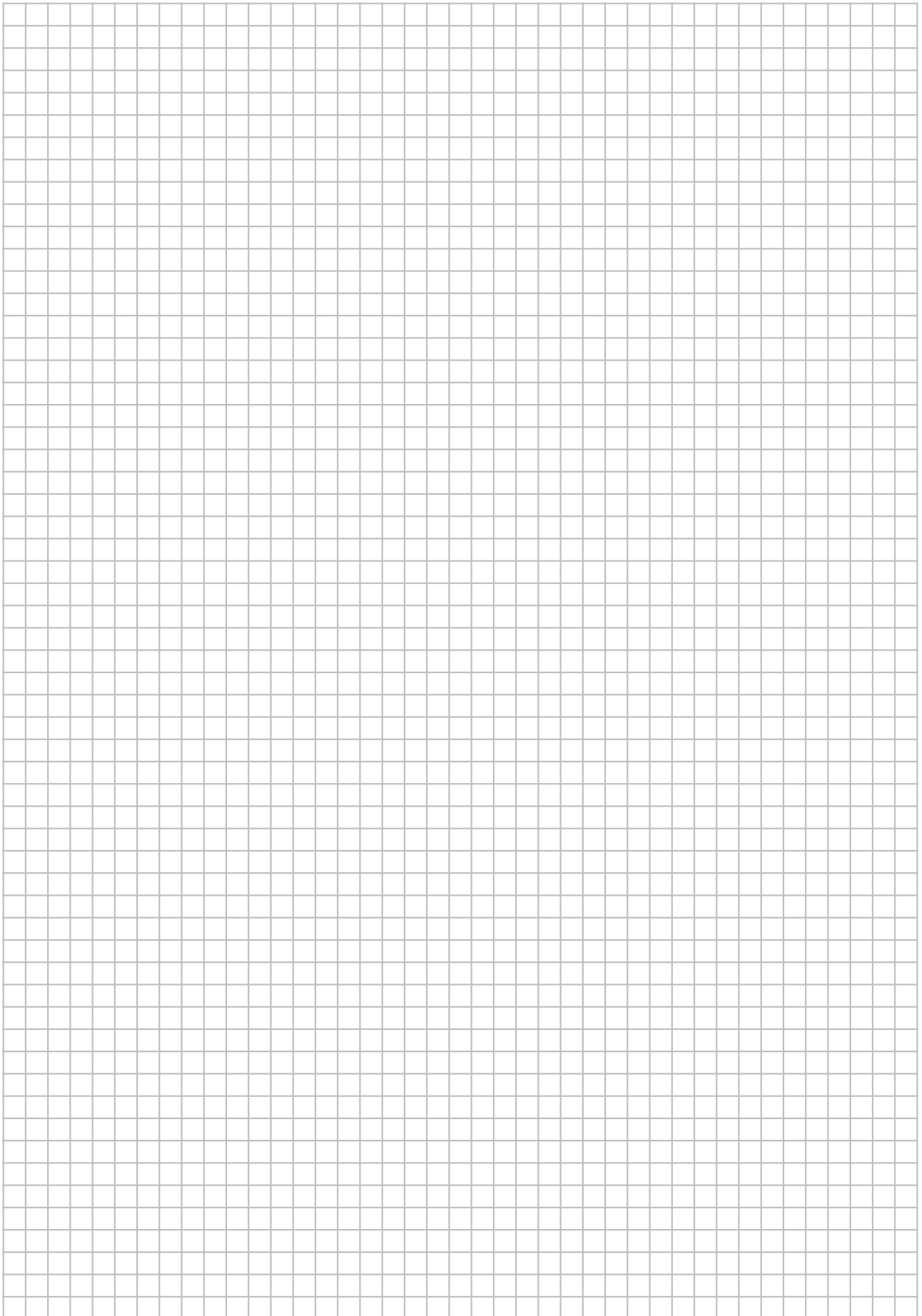
Si la variable d'une fonction trigonométrique est donnée en degrés, sa dérivée n'est pas égale à celle énoncée ci-dessus.

Exemple 6.3.

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

a) $f(x) = \frac{1}{\cos(3x)}$

b) $g(x) = \sin(x) \cos(x)$



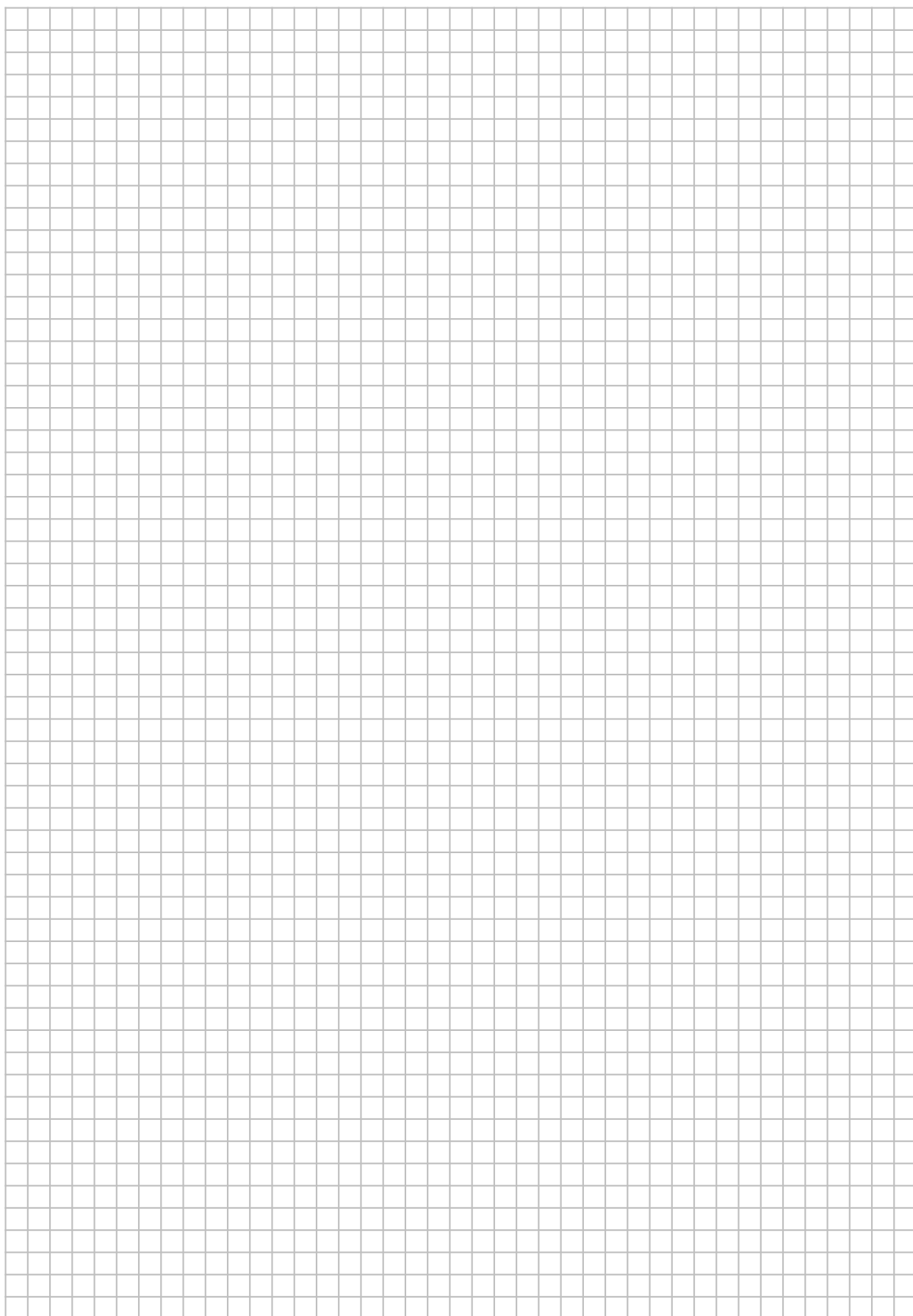
6.4 Etude d'une fonction trigonométrique

Plan d'étude d'une fonction f trigonométrique

- a) Recherche de $ED(f)$.
- b) Périodicité et choix d'un intervalle d'étude I couvrant une période.
- c) Signe et zéros de f sur I .
- d) Dérivée première de f , $ED(f')$. Signe et zéros de f' . Tableau de croissance de f sur I .
- e) Graphe de f sur I .

Exemple 6.4.

Etudier la fonction f donnée par $f(x) = 1 + 2 \cos(2x)$.



6.5 Exercices

6.1

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en degrés.

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------------|--|
| a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ | d) $\cos(t) = -1.43$ | g) $\tan(5t) = 3.273$ |
| b) $\sin(t) = 0.829$ | e) $\tan(t) = 5.33$ | h) $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ |
| c) $\tan(t) = -0.754$ | f) $\sin(3t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | |

6.2

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

- | | |
|---|-------------------------------|
| a) $\sin\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | d) $4\sin^2(x) - 3 = 0$ |
| b) $\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ | e) $(\sin(x) - 1)\cos(x) = 0$ |
| c) $2\cos(t) + 1 = 0$ | f) $\sqrt{3} + 2\sin(3x) = 0$ |

6.3

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $4\cos^2(t) - 4\cos(t) - 3 = 0$ | d) $3\sin^2(t) + \cos^2(t) - 2 = 0$ |
| b) $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$ | e) $5\sin(x) = 6\cos^2(x)$ |
| c) $3\sin^2(z) + 8\cos(z) + 1 = 0$ | f) $\tan^4(t) - 4\tan^2(t) + 3 = 0$ |

6.4

De nombreuses populations animales fluctuent selon un cycle de 10 ans. Supposons que le nombre de lapins dans une région à l'instant t (en années) soit donné (la fonction $\cos$ est en radians) par

$$N(t) = 1000 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 4000$$

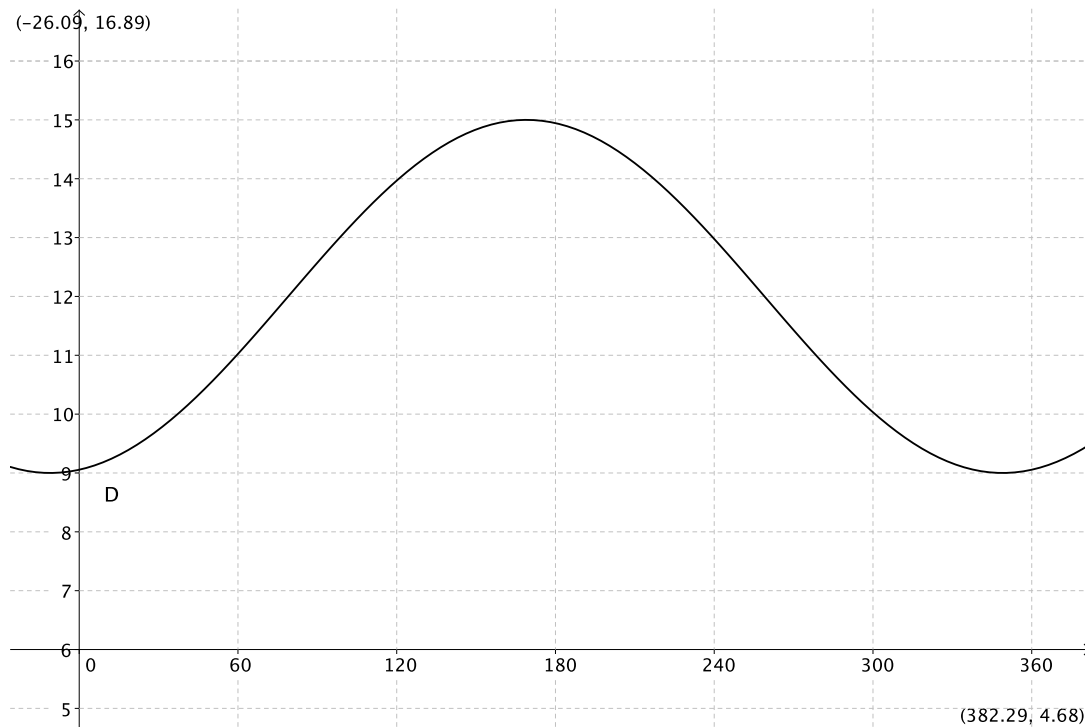
- Vérifier par calculs que le cycle de fluctuation de la population est bien de 10 ans.
- Représenter graphiquement N pour $t \in [0; 10]$.
- Pour quelles valeurs de t dans l'intervalle $[0; 10]$ a-t-on une population supérieure ou égale à 4500 ?

6.5

A Boston, le nombre d'heures D de lumière par jour à une certaine époque de l'année peut être modélisé par

$$D(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{180}(t - 79)\right) + 12$$

où t est donné en jours et $t = 1$ correspond au 1^{er} janvier (année de 360 jours, voir le graphe page suivante)



- Pendant combien de jours par année a-t-on plus de 10,5 heures de lumière ? Faire ressortir le résultat sur le graphique ci-dessus.
- Quel est le nombre maximal d'heure de lumière et à quel jour a-t-on ce maximum ? Faire ressortir le résultat sur le graphique ci-dessus.

6.6

On peut prédire la hauteur (en mètres, relativement à la marée basse) de la marée à un endroit précis d'une plage par la fonction $h(t) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 1)\right)$, où t est en heures ($t = 0$ à minuit et $0 \leq t \leq 24$).

- Calculer la hauteur (au cm près) à minuit et à 15 heures.
- Déterminer l'heure de la marée basse.
- Déterminer la hauteur maximale et l'heure de cette marée haute.
- Dans un autre endroit du bord de mer, la hauteur de la marée vaut $g(t) = 0.8 + 0.8 \sin(a(t - 2))$ où a est un paramètre réel. Déterminer la valeur de a si l'on sait que la marée haute a lieu à 10 heures. Quelle est cette hauteur maximale ?

6.7

Donner l'ensemble de définition et calculer la dérivée des fonctions f données par :

a) $f(x) = \sin(2x)$

c) $f(x) = \sin^2(x)$

e) $f(x) = \sin^3(4x)$

b) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

d) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

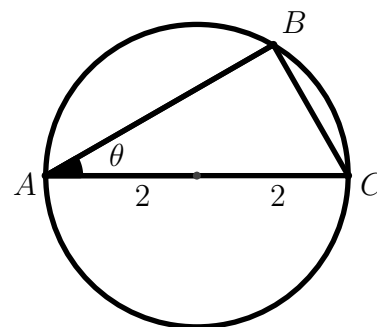
f) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

6.8

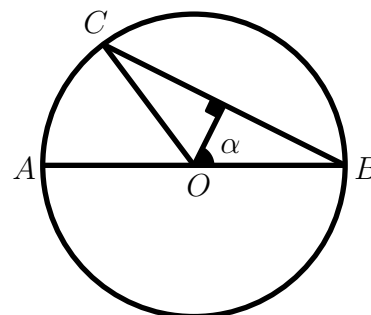
Une dame part du point A situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon. Elle souhaite atteindre le point B , en barque, à la vitesse moyenne de 2 km/h, puis le point C , diamétralement opposé à A , à pied, à la vitesse moyenne de 4 km/h.

Calculer la valeur de θ lui permettant de rejoindre C le plus lentement possible (Madame aime prendre son temps!).

Calculer également la distance parcourue.


6.9

007 court deux fois plus vite (8 m/s) qu'il ne nage (4 m/s). Il se trouve en A , au bord d'une piscine circulaire de 40 m de diamètre. Il lui reste neuf secondes pour désamorcer la bombe posée en B qu'il désire atteindre au plus vite. Sa stratégie est de courir jusqu'en C , de piquer une tête et de crawler en ligne droite B . A quel endroit doit-il plonger ?


6.10

Etudier la fonction f donnée par

$$f(x) = 1 - 2 \sin(x)$$

6.11

Etudier la fonction f donnée par

$$f(x) = \sin(x) - \sqrt{3} \cos(x)$$

6.6 Réponses

6.1

- a) $t_1 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ, t_2 = -120^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- b) $t_1 \cong 56^\circ + k \cdot 360^\circ, t_2 \cong 124^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- c) $t \cong -37^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- d) Pas de solution
- e) $t \cong 79.4^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- f) $t_1 = -20^\circ + k \cdot 120^\circ, t_2 = 80^\circ + k \cdot 120^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- g) $t \cong 14.6^\circ + k \cdot 36^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- h) $t_1 = 240^\circ + k \cdot 720^\circ, t_2 = -240^\circ + k \cdot 720^\circ, k \in \mathbb{Z}$

6.2

- a) $t_1 = k \cdot 3\pi, t_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi, k \in \mathbb{Z}$
- b) $t_1 = \pi + k \cdot 4\pi, t_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi, k \in \mathbb{Z}$
- c) $t_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, t_2 = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- d) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, x_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$
- e) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- f) $x_1 = -\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, x_2 = \frac{4\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

6.3

- a) $t_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- c) $z = \pm 2.016 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- d) $t_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_4 = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- e) $x_1 = 0.730 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = 2.412 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- f) $t_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_2 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_3 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \quad t_4 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

6.4

- c) $[0; \frac{5}{3}] \cup [\frac{25}{3}; 10]$

6.5

- a) 240 jours ; b) nombre maximal de 15 heures le 169^{ème} jour.

6.6

- a) 74 cm à minuit et 50 cm à 15 heures
 b) 19 heures
 c) 7 heures; 2 m
 d) $a = \frac{\pi}{16}$; 1.6 m

6.7

- a) $ED(f) = \mathbb{R}; f'(x) = 2 \cos(2x)$
 b) $ED(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\};$

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

 c) $ED(f) = \mathbb{R}; f'(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$
 d) $ED(f) = \mathbb{R}; f'(x) = 2 \cos^2(x) - 1$
 e) $ED(f) = \mathbb{R}; f'(x) = 12 \sin^2(4x)$
 f) $ED(f) = \mathbb{R} - \{ \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \};$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

6.8

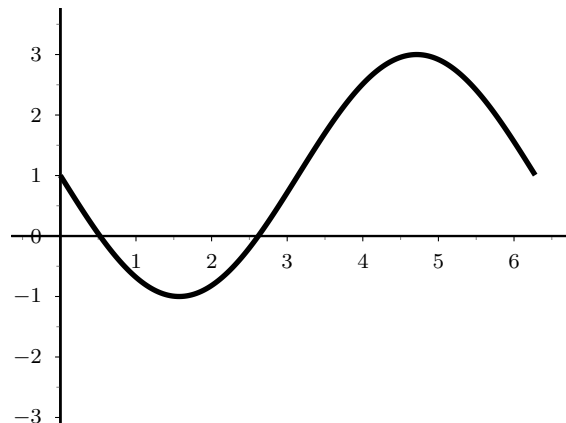
$\theta = 30^\circ$ et la distance parcourue est de 5.56 km

6.9

007 ferait mieux de faire le tour du bassin au lieu de réfléchir...

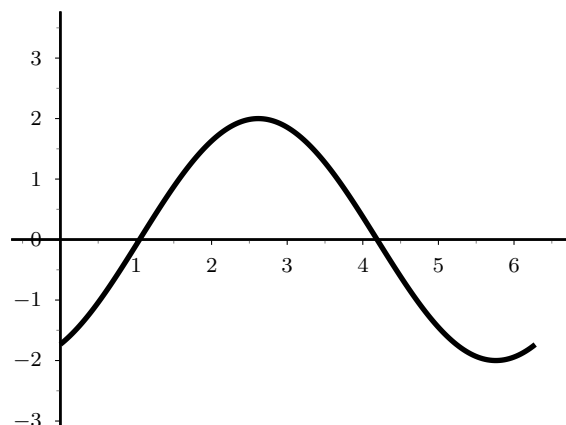
6.10

$ED(f) : \mathbb{R}$
 f est de période 2π .
 Etude de f sur $[0; 2\pi]$
 Asymptote : aucune
 $f'(x) = -2 \cos(x)$
 $ED(f) = ED(f')$
 Max : $M\left(\frac{3\pi}{2}; 3\right)$
 Min : $M\left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$



6.11

$ED(f) : \mathbb{R}$
 f est de période 2π .
 Etude de f sur $[0; 2\pi]$
 Asymptote : aucune
 $f'(x) = \cos(x) + \sqrt{3} \sin(x)$
 $ED(f) = ED(f')$
 Max : $M\left(\frac{5\pi}{6}; 2\right)$
 Min : $M\left(\frac{11\pi}{6}; -2\right)$



Bibliographie

- [1] E. W. Swokowski et J. A. Cole : *Algèbre*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1998.
- [2] Monographie de la commission romande de mathématique 25 : *Fundamentum de mathématique : Analyse*, Editions du Tricorne, 1997.
- [3] Monographie de la commission romande de mathématique 27 : *Fundamentum de mathématique : Notions élémentaires*, Editions du Tricorne, 2005.
- [4] Louis Gred, : *Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 1*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1980.
- [5] Louis Gred, : *Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 2*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1980.
- [6] G. Ouellet, : *Calcul 1 (calcul différentiel)*, Editions Le Griffon d'Argile, 1999.
- [7] Deborah Hughes-Hallet et Andrew M Gleason, Traduction française de Michel Beaudin : *Fonctions d'une variable*, Editions Mc Graw-Hill, 1999.
- [8] E. W. Swokowski : *Analyse*, Editions De Boeck, 2000.
- [9] Hubert Bovet, : *Algèbre, cours et exercices*, Editions Polymath, 1998
- [10] Hubert Bovet, : *Analyse, cours et exercices*, Editions Polymath, 1999
- [11] André Waser, : *Analyse 2*, Gymnase de Burier, 2014.
- [12] Robert A. Adams, Traduction de Christophe Soland : *Analyse*, Gymnase du Bugnon, 1988.
- [13] Stewart James, : *Analyse, concepts et contextes, volume 1, fonctions d'une variable*, Editions de Boeck, 3ème édition, 2006.
- [14] G. Ouellet, : *Calcul 2 (calcul différentiel)*, Editions Le Griffon d'Argile, 2000.
- [15] Francis Calame, : *Analyse, cours et exercices* CESSEV, 1995.
- [16] Luc Amyotte, : *Calcul intégral*, Editions ERPI, 2008.