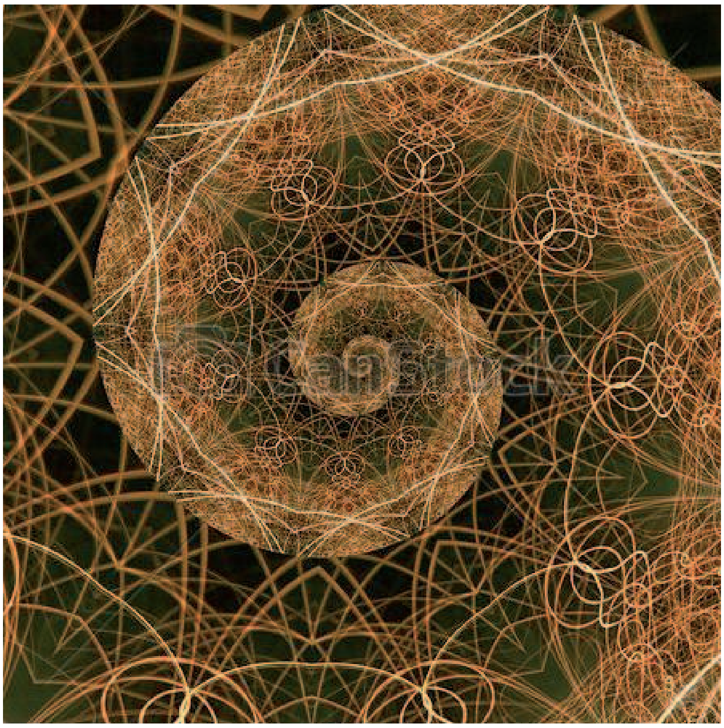
Mathématiques

ALGEBRE + GEOMETRIE

2ème année Maturité
niveau standard



GYMNASE DE BURIER

Table des matières

Avant-propos

On dit souvent qu'Euler voyait dans sa fameuse formule $e^{i\pi} = -1$, une preuve de l'existence de Dieu. Certes, cette formule est magnifique, rassemblant sous une forme condensée des constantes fondamentales de l'analyse. Au passage notons que c'est à Euler que l'on doit les notations e et π. En réalité Euler n'avait pas besoin de formules pour croire en Dieu. Fils d'un pasteur qui avait été élève de Jacques Bernoulli, il étudia la théologie en même temps que les mathématiques. Euler est donc un chrétien calviniste fervent, quoique discret. Ainsi, alors qu'il était établi à St-Pétersbourg depuis sept ans, manifesta-t-il beaucoup d'irritation quand Diderot, en 1773, en visite à la cour de Catherine II, essaya de convertir tout le monde à l'athéisme. Sur les conseils de l'impératrice, on avisa le philosophe, qui n'était que mathématicien amateur, qu'Euler possédait une preuve algébrique de l'existence de Dieu. Diderot ne vit pas le piège et fut bien incapable de répondre quoi que ce soit quand Euler acheva sa démonstration en lui disant à peu près ceci :

« Sachez mon cher Diderot que e exposant le produit de i par π donne -1 pour résultat... donc Dieu existe. »

(Leonhard Euler, né à Bâle le 15 avril 1707, mort à St-Pétersbourg le 18 septembre 1783)

Dessin ci-contre de Philippe Geluck

6$^{\text{ème}}$ édition, La Tour-de-Peilz, juin 2021

Chapitre 1

Puissances et racines

1.1 Puissances à exposants dans $\mathbb{N}^*$

La puissance n-ième d'un nombre réel a est un produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

Définition 1.1

*a^n est une **puissance**.*
*a est appelé la **base** de la puissance et n son **exposant**.*

Exemple 1.1.
Calculer

a) $(-3)^3 =$

b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 =$

c) $5 \cdot 2^3 =$

d) $-2^4 =$

e) $3(-2)^3 =$

Les propriétés suivantes sont valables pour des exposants dans $\mathbb{N}^*$.

Pour $a, b \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ pour $b \neq 0$

Exemple 1.2.

Simplifier

a) $(3x^3y^4)(4xy^5) =$

b) $(2a^2b^3c)^4 =$

c) $\left(\dfrac{2r^3}{s}\right)^2\left(\dfrac{s}{r^3}\right)^3 =$

d) $\dfrac{x^2y^4z^3}{x^3y^2} \div \dfrac{xy^9z^3}{x^2y^7} =$

1.2 Puissances à exposants dans $\mathbb{Z}$

On souhaite que la propriété $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ reste valable si l'exposant est nul. On pose ainsi :

$$\boxed{5)\ a^0 = 1 \text{ avec } a \neq 0}$$

Remarque 1.1.

0^0 n'est pas défini... au même titre que $\dfrac{0}{0}$.

On souhaite que la propriété $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ reste valable si l'exposant est un entier négatif. On pose ainsi :

$$\boxed{6)\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } n \in \mathbb{N}}$$

Exemple 1.3.

Calculer et donner la réponse sous forme d'une fraction simplifiée.

a) $2^{-4} =$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$

c) $\frac{3^2}{3^{-1}} =$

Remarque 1.2.

a) Les formules 1) à 5) restent valables si $a, b \in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{Z}$

b) Aux six formules précédentes s'ajoute le résultat suivant :

$$\boxed{7)\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } n, m \in \mathbb{Z}}$$

Exemple 1.4.

Simplifier les expressions suivantes et écrire la réponse finale sans aucun exposant négatif :

a) $(x^{-2}y^3)^{-3} =$

b) $\frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} =$

c) $\left(\frac{u^3}{2v}\right)^{-3} =$

1.3 Notation scientifique

Dans les disciplines scientifiques, on est souvent confronté à comparer de très grands ou de très petits nombres.

Un nombre positif a est écrit en **notation scientifique** si

$$\boxed{a = c \cdot 10^n \qquad \text{où } 1 \leq c < 10 \text{ et } n \text{ est un entier}}$$

Exemple 1.5.

Ecrire les nombres suivants en notation scientifique

a) La distance (en km) parcourue par la lumière en une année :
$9'500'000'000'000 =$

b) La masse (en g) d'une molécule d'oxygène :
$0.000'000'000'000'000'000'000'053 =$

c) $513 =$

d) $7.3 =$

e) $(4'000'000)^2 =$

Remarque 1.3.

Beaucoup de calculatrices utilisent la notation scientifique pour l'affichage de certains nombres. Pour l'affichage du nombre $c \cdot 10^n$, le 10 est supprimé et l'exposant est souvent précédé de la lettre E.

Exemple 1.6.

Ecrire en notation scientifique 2^{64} grains de riz, puis calculer le nombre d'années de production mondiale à quoi cela correspond (en 2013, la production mondiale de riz a été de 480 millions de tonnes). Le poids d'un grain de riz est de 0.04 grammes.

Remarque 1.4.

Si un nombre a est écrit en notation scientifique $a = c \cdot 10^n$ et c est arrondi à k décimales, on dit que a est arrondi à $k+1$ chiffres significatifs.

Exemple 1.7.

Arrondir le nombre $a = 37'456,6238$ à 5 chiffres significatifs, puis à 3 chiffres significatifs, et enfin à 1 chiffre significatif.

1.4 Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre réel

La **racine** $n^{\text{ième}}$ d'un nombre réel **positif** a est l'**unique** nombre réel positif r dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est égale à a. Autrement dit :

$$\boxed{8) \quad \sqrt[n]{a} = r \iff r^n = a \text{ avec } a, r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n \in \mathbb{N}^*}$$

a s'appelle le **radicande**, n **l'indice** et $\sqrt[n]{\ }$ le **radical**.

Exemple 1.8.

Calculer

a) $\sqrt[6]{64}$

b) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}}$

Remarque 1.5.

a) Si $n = 1$, on a $\sqrt[1]{a} = a$ et si $n = 2$ on écrit $\sqrt{a}$ au lieu de $\sqrt[2]{a}$.

b) $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$.

c) $\sqrt{16} \neq \pm 4$ puisque l'on cherche un nombre **positif** dont le carré est 16. Donc $\sqrt{16} = 4$.

d) Si n est un **nombre naturel impair**, on peut définir $\sqrt[n]{a}$ même si a est négatif. Exemples :

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ car } (-2)^3 = -8$$

$$\sqrt[5]{-243} = -3 \text{ car } (-3)^5 = -243$$

e) Pour les racines carrées, on utilise fréquemment les formules suivantes :

$$\boxed{\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ et } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+ \text{ et } b \in \mathbb{R}_+^*}$$

1.5 Simplification de racines carrées

Lorsqu'une racine carrée apparaît, en particulier au dénominateur, il est d'usage de la simplifier et d'amplifier la fraction de sorte que le dénominateur devienne un nombre entier ou une expression algébrique sans racine.

Exemple 1.9.

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{192} =$

b) $\sqrt{98} - \sqrt{50} =$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$

d) $\sqrt{\dfrac{9}{32}} =$

e) $(\sqrt{18} - \sqrt{75})(\sqrt{12} + \sqrt{32}) =$

1.6 Puissances à exposants dans $\mathbb{Q}$

On souhaite que la propriété $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ reste valable si l'exposant est une fraction ordinaire. Pour cela, on pose :

$$9) \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$$

Exemple 1.10.

a) Ecrire à l'aide d'une racine et d'un exposant entier positif :

1) $x^{\frac{1}{5}} =$

2) $x^{\frac{-3}{5}} =$

b) Calculer et écrire la réponse sous forme d'un entier ou d'une fraction simplifiée.

1) $125^{\frac{2}{3}} =$

2) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{-1}{3}} =$

c) Ecrire $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ à l'aide d'un seul exposant rationnel.

Remarque 1.6.

a) Les formules 1) à 7) restent valables si $a, b \in \mathbb{R}_+^*, m, n \in \mathbb{Q}$.
Attention : ces formules ne sont vraies de manière générale pour des exposants fractionnaires que si la **base est un nombre réel positif**.

b) Les exposants négatifs et fractionnaires sont très pratiques comme outils de travail pour traiter certains exercices sur les puissances ou les racines. Mais en général les réponses seront toujours données à l'aide de puissances à exposants entiers positifs et de racines à indices positifs.

Exemple 1.11.

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[3]{a^7} \cdot (\sqrt[3]{a})^2 =$

b) $\left(\sqrt[8]{\sqrt[3]{a}}\right)^7 =$

c) $\dfrac{a^5}{\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt[10]{a}} =$

d) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}} =$

1.7 Puissances à exposants dans $\mathbb{R}$

Exemple 1.12.

Approcher le nombre $x = 2^{\pi}$ à l'aide des puissances à exposants rationnels.

Remarque 1.7.

a) Les formules 1) à 7) restent valables si $a, b \in \mathbb{R}_+^*, m, n \in \mathbb{R}$.

b) On calcule la valeur (en général approchée) d'une puissance à exposant réel à l'aide de la calculette en utilisant la touche $\boxed{\wedge}$ ou $\boxed{y^x}$.

Exemple 1.13.

Calculer sans l'aide de la calculette

a) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

b) $4^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\sqrt{2}}$

1.8 Exercices

1.1

Simplifier les expressions suivantes (réponse sous la forme a^n avec a et n entiers ou un quotient de telles puissances).

a) $2^4 \cdot 3^4$

b) $2^3 \cdot (-3)^3 \cdot 4^3$

c) $3^6 \cdot 5^6$

d) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 5^{10}$

e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 15^3$

f) $\dfrac{5^8}{5^6}$

g) $\dfrac{5^6}{5^8}$

h) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5$

i) $\dfrac{7 \cdot 7^5 \cdot 7^0 \cdot 7}{7^3 \cdot 7^4}$

1.2

Simplifier les expressions suivantes (réponse sous la forme a^n avec a et n entiers ou un quotient de telles puissances).

a) $(2^2)^3$

b) $2^{(2^3)}$

c) $((-4)^2)^4$

d) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right)^6$

e) $\left(-\dfrac{2^4}{3^3}\right)^2$

f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \div \left(\dfrac{5}{3}\right)^3$

g) $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$

h) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \div \left(\dfrac{9}{8}\right)^4$

i) $\dfrac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}}$

1.3

Calculer (réponse sous la forme d'un entier ou d'une fraction simplifiée).

a) 4^{-2}

b) 2^{-1}

c) 3^{-3}

d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$

e) $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{-2}$

f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

1.4

Le produit de tous les nombres de chaque ligne et de chaque colonne du tableau vaut 2^{14}. Remplir les cases manquantes :

2^{11}	2^{-2}		2^8
2^0			2^3
		2^2	2^7
2^{-1}		2^{10}	

1.5

Simplifier les expressions suivantes (réponse sous la forme a^n avec a et n entiers).

a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2$

b) $(2^3)^{-5}$

c) $\dfrac{5^3}{5^{-2}}$

d) $((-1)^{-2})^{-3}$

e) $(2^{-1} \cdot 5^{-1})^{-1}$

f) $\left(\dfrac{11^{-2}}{11^8}\right)^{-5}$

g) $7^{-3} \cdot \dfrac{49}{7^8} \cdot 7$

h) $10'000 \cdot \dfrac{100}{100'000} \cdot 10^{-3}$

i) $\dfrac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3}$

1.6

Simplifier les expressions suivantes et écrire la réponse finale sans fraction.

a) $x^2yz^3 \cdot 3xy \cdot 27x^3z^5$

b) $(2a^2b^3c)^4$

c) $\left(\dfrac{2r^3}{s}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{s}{r}\right)^3$

d) $\dfrac{(4x^2y^3)^5}{(2xy)^3} \div \dfrac{x^7}{(y^3)^4}$

e) $(u^{-2}v^3)^{-3}$

f) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$

g) $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{-2} \div \left(\dfrac{x}{9}\right)^{-3}$

h) $\left(\dfrac{9y^3(3y^2)^{-2}}{(y^{-4})^{-3}}\right)^5$

1.7

Calculer et écrire en notation scientifique.

a) $800 \cdot 10^4 \cdot 15 \cdot 10^6$

b) $40'000 \cdot 10^{-10} \cdot 0.005 \cdot 10^{-2}$

c) $1'500 \cdot 10^8 \cdot 0.04 \cdot 10^{-6}$

d) $200^3 \cdot (0.000'002)^{-4}$

1.8

Le corps humain contient en moyenne 5,5 litres de sang et environ 5 millions de globules rouges par millimètre cube de sang.
Calculer le nombre de globules rouges contenus en moyenne dans le corps humain (calculs et réponse en notation scientifique).

1.9

Ecrire en notation scientifique en utilisant les notations du système international (la seconde (s), le mètre (m), le mètre par seconde (ms^{-1}), le kilogramme (kg)).

a) Le rayon de la terre $R_T = 6'400$ km.

b) La masse de la Terre $M_T = 6'400$ milliards de milliards de tonnes.

c) La quantité de neige tombée sur la Suisse en 3 jours en février 1999 : un demi-milliard de tonnes.

d) La masse de l'électron : $m_e = 9,109.10^{-16}$ milliardième de milligramme.

e) La vitesse de la lumière $c = 1'079'252'849$ kilomètres par heure.

f) La masse de la tour Eiffel : $8'730$ tonnes.

g) L'épaisseur d'une bande magnétique $b = 20$ millièmes de millimètre.

1.10

Calculer sans l'aide d'une machine :

a) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt[4]{625}$ e) $\sqrt[6]{729}$ g) $\sqrt[3]{0,125}$ i) $\sqrt{0}$

b) $\sqrt[3]{1'000}$ d) $\sqrt[5]{32}$ f) $\sqrt[3]{0,027}$ h) $\sqrt[3]{0,000064}$ j) $\sqrt[3]{0,000008}$

1.11

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{24}$ e) $\sqrt{300}$ i) $\sqrt{80}$

b) $\sqrt{18}$ f) $\sqrt{54}$ j) $\sqrt{1'000}$

c) $\sqrt{243}$ g) $\sqrt{125}$ k) $\sqrt{250}$

d) $\sqrt{50}$ h) $\sqrt{147}$ l) $\sqrt{7'000}$

m) $3\sqrt{5}-4\sqrt{20}+5\sqrt{45}-3\sqrt{80}$ n) $2\sqrt{40}-2\sqrt{90}+\sqrt{4'000}-5\sqrt{10}$

1.12

Simplifier les expressions suivantes :

a) $(9\sqrt{12}+3)(\sqrt{3}+8)$ c) $(3-2\sqrt{2})\cdot(6+4\sqrt{2})$

b) $(4\sqrt{3}+\sqrt{45})(\sqrt{5}-2\sqrt{27})$ d) $(\sqrt{3}+1)^4$

1.13

Rendre rationnel les dénominateurs et simplifier les expressions :

a) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{6+2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{20}}$ f) $\dfrac{\sqrt{108}-\sqrt{48}}{\sqrt{8}}$

1.14

Écrire à l'aide d'exposants rationnels :

a) $\sqrt[3]{5^2}$ c) $-\sqrt[8]{7^2}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ g) $\sqrt[4]{5}$

h) $\sqrt[7]{3^7}$

b) $\sqrt[10]{7}$ d) $\sqrt{2}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{4^3}}$

1.15

Remplacer les • par des entiers :

a) $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[\boxdot]{7^{\boxdot}}$

b) $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[\boxdot]{3^{\boxdot}}$

c) $64^{\frac{3}{2}} = 2^{\boxdot}$

d) $-11^{0,25} = -\sqrt[\boxdot]{\boxdot}$

e) $36^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\boxdot}$

f) $8^{-\frac{7}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^{\boxdot}}}$

g) $27^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\boxdot}$

h) $(-3)^{0,5} = \boxdot$

1.16

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$

b) $\sqrt[3]{2^{18} \cdot 5^{12} \cdot 3^{3}}$

c) $\sqrt[4]{64} \cdot \sqrt[4]{4}$

d) $\sqrt[5]{3^{15}}$

e) $\left(\sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}\right)^{128}$

f) $\sqrt{3\sqrt{3}}$

g) $\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$

h) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$

i) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^{4}\sqrt[3]{3^{6}}}}$

j) $\sqrt[3]{2\sqrt[6]{\dfrac{2^{14}}{\sqrt[3]{2^{6}}}}}$

1.17

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[5]{a^{3}} \cdot (\sqrt[5]{a})^{2}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot (\sqrt[3]{a})^{2}$

c) $\sqrt[5]{a^{3}} \cdot (\sqrt[5]{a^{2}})^{6}$

d) $\sqrt[4]{a^{3}} \cdot \sqrt[3]{a^{4}}$

e) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^{3}} \cdot (\sqrt[10]{a})^{4}$

f) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^{3}} \cdot \sqrt[6]{a}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$

h) $(\sqrt[10]{\sqrt[5]{a}})^{15}$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{a^{4}}}{\sqrt{a}}$

j) $\dfrac{\sqrt[6]{a^{5}}}{\sqrt[4]{a^{3}}}$

k) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^{3}}}$

l) $\dfrac{a^{3}}{\sqrt[3]{a^{5}} \cdot \sqrt[6]{a}}$

1.18

Calculer sans l'aide de la machine :

a) $\sqrt[4]{16^{3}}$

b) $(5 + 16^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

c) $4 \cdot 25^{\frac{3}{2}}$

d) $(4 \cdot 25)^{\frac{3}{2}}$

e) $19 - 27^{\frac{1}{3}}$

f) $(27 - 19)^{\frac{1}{3}}$

g) $-32^{\frac{1}{5}}$

h) $(32)^{-\frac{1}{5}}$

1.19

Calculer :

a) $8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{1}{4}} - 125^{\frac{1}{3}} - 1'000^{\frac{2}{3}}$

b) $(3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} - 256 \cdot 2^{\frac{2}{3}}) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

c) $(3 \cdot 2^{0,25} + 2 \cdot 32^{0,25} - 8^{0,75}) \cdot 8^{0,25}$

d) $\dfrac{16^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 128^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 250^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

1.20

Simplifier les expressions suivantes et les écrire sans fraction :

a) $u^{\frac{4}{3}}u^{-\frac{3}{2}}u^{\frac{1}{6}}$

b) $(a^{-\frac{2}{3}}b^{-1}c^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{5}} \div \left(\dfrac{x^4y^{-2}}{x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{2}{3}}$

1.21

Le rapport entre la longueur et la masse d'une baleine peut être évalué par la formule $M = 0.03L^{2.43}$, où M est exprimé en tonnes et L en mètres.

a) Calculer la masse d'une baleine de 7.5 m de long.

b) Calculer la longueur d'une baleine de 30 tonnes.

1.22

La formule de O'Carroll est employée pour classer des haltérophiles. Si un haltérophile qui pèse m kilos soulève w kilos, sa note est donnée par la formule $N = \dfrac{w}{\sqrt[3]{m-35}}$. Soient deux haltérophiles pesant respectivement 75 et 120 kilos ; ils soulèvent respectivement des masses de 180 et 250 kilos. Utiliser la formule de O'Carroll pour déterminer le meilleur haltérophile.

1.23

L'aire de la surface S d'un corps humain (en m^2) peut être donnée approximativement par la formule $S = 0.007\, m^{0.425}h^{0.725}$ où la taille h est en cm et la masse m en kg.

a) Calculer S pour une personne de 183 cm pesant 79 kg.

b) Pour un homme de 173 cm, calculer le pourcentage d'augmentation de S qui correspond à une augmentation de masse de 10%.

1.9 Réponses

1.1

a) 6^4

b) -24^3

c) 15^6

d) 5^{55}

e) 15^5

f) 5^2

g) $\frac{1}{5^2}$

h) $-\frac{2^5}{3^5}$

i) 1

1.2

a) 2^6

b) 2^8

c) 2^{16}

d) $\frac{1}{3^{18}}$

e) $\frac{2^8}{3^6}$

f) $\frac{2^3}{5^3}$

g) 2^{15}

h) $\frac{2^4}{3^4}$

i) 1

1.3

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{27}$

d) 4

e) 4

f) $\frac{27}{8}$

1.4

2^{11}	2^{-2}	2^{-3}	2^8
2^0	2^6	2^5	2^3
2^4	2	2^2	2^7
2^{-1}	2^9	2^{10}	2^{-4}

1.5

a) 2^3

b) 2^{-15}

c) 5^5

d) 1

e) 10

f) 11^{50}

g) 7^{-8}

h) 10^{-2}

i) 10^8

1.6

a) $3^4x^6y^2z^8$

b) $2^4a^8b^{12}c^4$

c) 2^2r^3s

d) 2^7y^{24}

e) u^6v^{-9}

f) $2x^4y^{-7}$

g) $3^{-4}x$

h) y^{-65}

1.7

a) $1.2 \cdot 10^{14}$
b) $2 \cdot 10^{-10}$
c) $6 \cdot 10^{3}$
d) $5 \cdot 10^{29}$

1.8 $2.75 \cdot 10^{13}$ globules rouges.

1.9

a) $6.4 \cdot 10^{6}$ m
b) $6.4 \cdot 10^{24}$ kg
c) $5 \cdot 10^{11}$ kg
d) $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg
e) $2.9979 \cdot 10^{8}$ ms^{-1}
f) $8.73 \cdot 10^{6}$ kg
g) $2 \cdot 10^{-5}$ m

1.10

a) 5
b) 10
c) 5
d) 2
e) 3
f) 0.3
g) 0.5
h) 0.04
i) 0
j) 0.02

1.11

a) $2\sqrt{6}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $9\sqrt{3}$
d) $5\sqrt{2}$
e) $10\sqrt{3}$
f) $3\sqrt{6}$
g) $5\sqrt{5}$
h) $7\sqrt{3}$
i) $4\sqrt{5}$
j) $10\sqrt{10}$
k) $5\sqrt{10}$
l) $10\sqrt{70}$
m) $-2\sqrt{5}$
n) $13\sqrt{10}$

1.12

a) $147\sqrt{3}+78$
b) $-14\sqrt{15}-57$
c) 2
d) $16\sqrt{3}+28$

1.13

a) $\sqrt{2}/2$
b) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$
e) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$
f) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

1.14

a) $5^{2/3}$
b) $7^{1/10}$
c) $-7^{1/4}$
d) $2^{1/2}$
e) $3^{-1/2}$
f) $2^{-6/7}$
g) $5^{1/4}$
h) 3

1.15

a) $\sqrt[4]{7^3}$
b) $\sqrt[5]{3^2}$
c) 2^9
d) $-\sqrt[4]{11}$
e) $\dfrac{1}{6}$
f) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^{21}}}$
g) $\dfrac{1}{3}$
h) $-$

1.16

a) $\sqrt[6]{7}$ b) $120'000$ c) 4 d) 27 e) 4 f) $\sqrt[4]{27}$ g) $\sqrt[12]{78'125}$ h) $\sqrt[3]{4}$ i) 3 j) 2

1.17

a) a b) a c) a^3 d) $\sqrt[12]{a^{25}}$ e) $\sqrt{a^3}$ f) $\sqrt[4]{a^5}$ g) $\sqrt[6]{a}$ h) $\sqrt[10]{a^3}$ i) $\sqrt[6]{a^5}$ j) $\sqrt[12]{a}$ k) $\sqrt[12]{a}$ l) $\sqrt[6]{a^7}$

1.18

a) 8 b) 3 c) 500 d) 1000 e) 16 f) 2 g) -2 h) $\frac{1}{2}$

1.19

a) -85 b) -482 c) 6 d) 1

1.20

a) 1 b) $a^2b^{5/6}c^{-5}$ c) $x^{-277/90}y^{13/12}$

1.21

a) Environ 4013.5 kg
b) Environ 17.2 mètres

1.22 L'haltérophile de 120 kg.

1.23

a) $1.958\ \text{m}^2$ b) L'aire est augmentée de 4.13%

Chapitre 2

Exponentielles et logarithmes

2.1 Exponentielles

Exemple 2.1.

On plie une feuille de papier de 0.1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit, et ainsi de suite. Si l'on imagine que l'on peut plier indéfiniment la feuille, combien de fois faudrait-il la plier pour atteindre une épaisseur qui dépasse 2 m ? 20 m ? 1 km ? la distance Terre-Soleil (149′600′000 km) ?

Définition 2.1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

*On appelle **exponentielle de base a**, la fonction f définie par $f(x) = a^x$.*

Remarque 2.1.

Attention à ne pas confondre les fonctions exponentielles et les fonctions puissances.

- Pour les **fonctions exponentielles**, la base de la puissance est un nombre et la variable apparaît en exposant. Par exemple $f(x) = 2^x$ ou encore $g(x) = 7^{x-5}$.
- Pour les **fonctions puissances**, la base de la puissance contient la variable et l'exposant est un nombre réel. Par exemple $f(x) = x^6$ ou encore $g(x) = \sqrt[7]{(x-1)^3} = (x-1)^{3/7}$.

2.2 Logarithme

2.2.1 Notion de logarithme

En 1544, Stifel met en évidence les deux suites suivantes :

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

On constate que le passage de la ligne supérieure à la ligne inférieure transforme les produits en sommes. Par exemple, pour multiplier 8 par 32, on regarde le correspondant de 8 sur la ligne inférieure (c'est 3), on fait de même avec 32 (c'est 5), on additionne les deux nombres $(3+5=8)$, on consulte le correspondant de 8 sur la première ligne (c'est 256) et ce nombre correspond au produit de 8 et 32 !

Les éléments de la deuxième ligne sont les **logarithmes en base 2** des éléments correspondants de la première ligne.

On a par exemple :

$$\log_2(8) = 3 \text{ ou encore } \log_2(32) = 5$$

et on constate que

$$\log_2(8 \cdot 32) = \log_2(8) + \log_2(32)$$

Définition 2.2

Soit $b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.
Le logarithme de base b *d'un nombre* u *strictement positif, noté* $\log_b(u)$, *se définit de la manière suivante :*

$$x = \log_b(u) \iff b^x = u \quad \text{où } u \in \mathbb{R}_+^*$$

Logarithme de base 10

Par convention, lorsque 10 correspond à la base du logarithme, celui-ci n'est pas spécifié dans l'écriture du logarithme : par exemple, $\log_{10}(10\,000)$ s'écrit tout simplement $\log(10\,000)$.

On calcule le logarithme en base 10 d'un nombre réel positif non nul à l'aide de la touche $\boxed{\log}$ de la calculatrice

Logarithme de base e

Si n est un entier positif, alors

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \cong 2.71828182846 \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

Le nombre e obtenu est appelé le **nombre d'Euler** (Leonhard Euler, mathématicien suisse, Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783).

Une valeur approchée du nombre d'Euler e peut être obtenue à l'aide de la calculette à l'aide de la suite d'instructions $\boxed{1}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\ln}$.

Le logarithme en base e est fréquemment utilisé en analyse mathématique.

Par convention, le logarithme de u en base e s'écrit $\ln(u)$ au lieu de $\log_e(u)$.

On calcule le logarithme en base e à l'aide de la touche $\boxed{\ln}$.

Exemple 2.2.

Sans l'aide d'une machine, calculer :

$x = \log_3(243) =$

$x = \log\left(\sqrt[3]{0.000001}\right) =$

$\log(x) = 2$

$\ln(e) =$

$\ln(1) =$

$\ln(x) = 7$

$\ln(\sqrt[3]{e^7}) =$

2.2.2 Propriétés des logarithmes

Théorème 2.3

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, *pour tout* $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, *on a*

base $b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	***bases particulières*** $b = 10$ *et* $b = e$
1) $\log_b(1) = 0$	*1)* $\log(1) = 0, \ln(1) = 0$
2) $\log_b(b) = 1$	*2)* $\log(10) = 1, \ln(e) = 1$
3) $\log_b(b^x) = x$	*3)* $\log(10^x) = x, \ln(e^x) = x$
4) $b^{\log_b(x)} = x$	*4)* $10^{\log(x)} = x, e^{\ln(x)} = x$
5) $\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$	*5)* $\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)$, $\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$
6) $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$	*6)* $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$ $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$
7) $\log_b\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_b(v)$	*7)* $\log\left(\frac{1}{v}\right) = -\log(v)$ $\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln(v)$
8) $\log_b(u^x) = x \cdot \log_b(u)$	*8)* $\log(u^x) = x \cdot \log(u)$ $\ln(u^x) = x \cdot \ln(u)$
9) $\log_b(u) = \log_b(v) \iff u = v$	*9)* $\log(u) = \log(v) \iff u = v$ $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$
10) $b^x = b^y \iff x = y$	*10)* $10^x = 10^y \iff x = y$ $e^x = e^y \iff x = y$

Remarque 2.2.

a) Les relations ci-dessus sont souvent utilisées pour transformer par équivalences des équations où apparaissent des logarithmes.

b) Les calculs utilisant des logarithmes sont parfois délicats. Attention à ne pas inventer des formules. Par exemple :

- le logarithme d'un nombre négatif n'existe pas
- $\log_b(x) = \log_c(y)$ n'implique pas en général $x = y$
- $\log_b(x) = k \cdot \log_b(y)$ n'implique pas en général $x = k \cdot y$
- $\log_b(x) = \log_b(y) + \log_b(z)$ n'implique pas en général $x = y + z$
- $\dfrac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$ n'est pas en général égal à $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right)$
- $\log_b(x^u)$ n'est pas en général égal à $(\log_b(x))^u$

Exemple 2.3.

Simplifier l'écriture des expressions

a) $\log_2(1) =$

b) $\log_7(7) =$

c) $\log(2) + \log(5) =$

d) $\log_5(75) - \log_5(3) =$

e) $\log_3(81) =$

f) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

g) $\ln\left(\sqrt[3]{e^2}\right) =$

h) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) =$

2.3 Formule du changement de base

Deux bases de logarithme sont fréquemment utilisées : la base 10 et la base e. Les calculatrices ne proposent (en général) que ces deux bases. On peut cependant utiliser comme base n'importe quel nombre strictement positif et différent de 1.

Pour calculer $\log_a(x)$ pour toute base a, il suffit d'utiliser la relation suivante :

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

Exemple 2.4.

a) Calculer à l'aide d'une calculette.

1) $\log_2(3) =$

2) $\log_{12}(7) =$

3) $\log_{0.7}(17) =$

b) Résoudre l'équation $2^x = 7$

c) Résoudre l'équation $3 \cdot e^{2x} = 21$

2.4 Equations logarithmes ou exponentielles

Définition 2.4

1) Une ***équation logarithmique*** *est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît dans l'argument d'un logarithme.*

2) Une ***équation exponentielle*** *est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît dans l'exposant d'une puissance.*

Exemple 2.5.

a) $\log_2(3x-4)=3$ est une équation ....

admettant .... pour solution.

b) $3^{x-1}=81$ est une équation ....

admettant .... pour solution.

c) Résoudre : $4^{x-2}=16$

d) Résoudre : $3^x = 9 \cdot 27^{2x-1}$

e) Résoudre : $6 \cdot 10^{3x+1} = 40$

f) Résoudre : $4 \cdot \log(x+2) = 2$

g) Résoudre : $\log(2x-6) - \log(x) = \log(x-5)$

2.5 Processus exponentiels

Processus linéaire et exponentielle

On observe une grandeur q au cours du temps t :

t	0	1	2	3	$\cdots$	t
q	q_0	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	$q(t)$

— $t = 0$: début de l'observation.
— $q_0 = q(0)$: valeur de q au début de l'observation.
— $q_k = q(k)$: valeur de q au temps $t = k$.

Processus linéaire

Le processus est dit **linéaire** s'il existe un nombre réel $m \neq 0$ tel que

$$q_1 = q_0 + m, \quad q_2 = q_1 + m, \quad q_3 = q_2 + m, \quad \cdots \quad , q(t+1) = q(t) + m, \quad \cdots$$

Dans ce cas,

$$\boxed{q(t) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

On parle de **croissance linéaire** si $m > 0$ et de **décroissance linéaire** si $m < 0$.

Processus exponentiel

Le processus est dit **exponentiel** s'il existe un nombre réel $a > 0$ tel que

$$q_1 = q_0 \cdot a, \quad q_2 = q_1 \cdot a, \quad q_3 = q_2 \cdot a, \quad \cdots \quad , q(t+1) = q(t) \cdot a, \quad \cdots$$

Dans ce cas,

$$\boxed{q(t) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

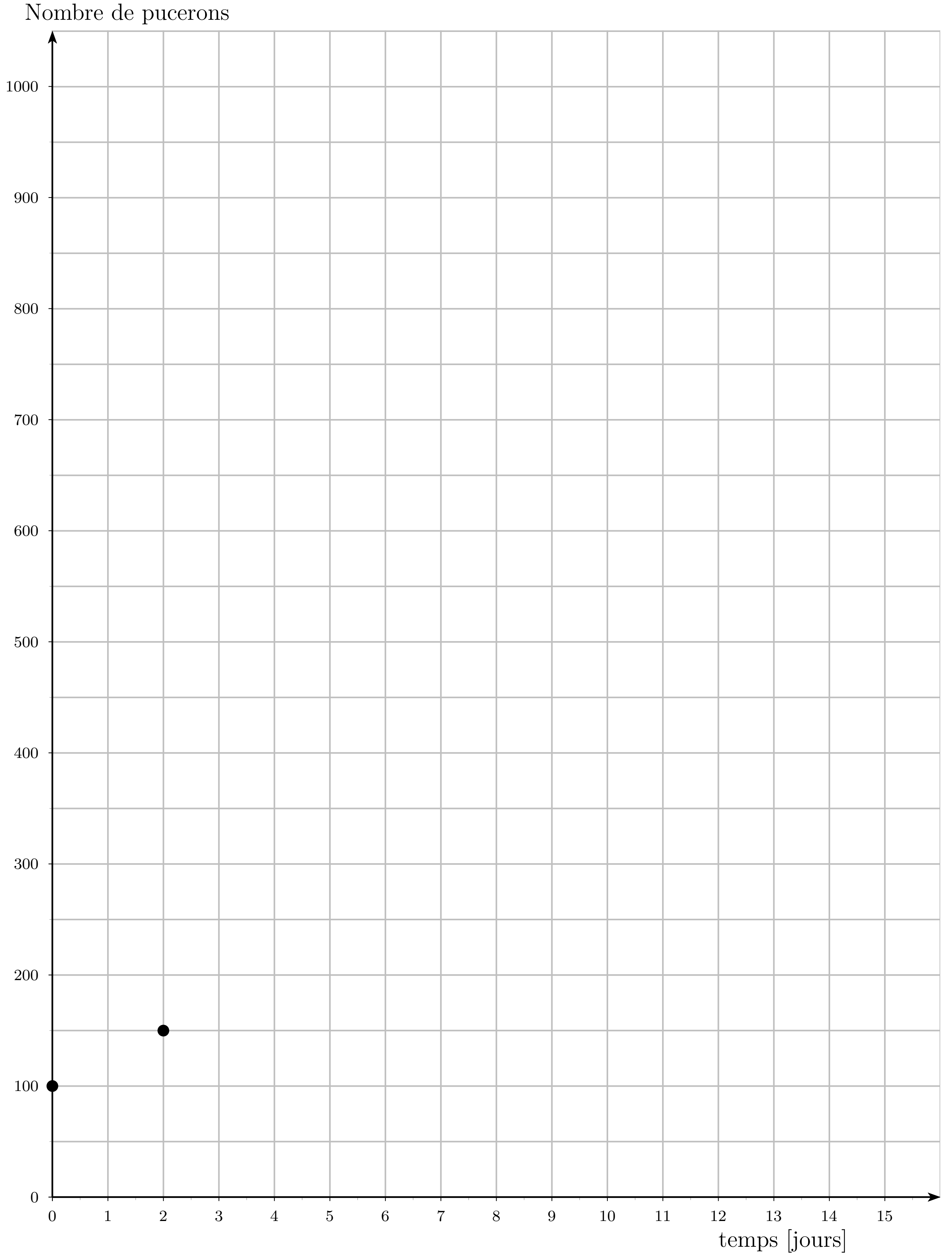
On parle de **croissance exponentielle** si $a > 1$ et de **décroissance exponentielle** si $0 < a < 1$.

Exemple 2.6. (Colonie de pucerons)

On observe l'évolution d'une colonie de pucerons dans un champ. Pour cela, on compte chaque jour le nombre de pucerons contenus dans un carré de 10 cm de côté.

Soit $q(t)$ le nombre de pucerons t jours après le début de l'observation. On observe qu'il y a $q_0 = 100$ pucerons au début de l'observation et $q_2 = 150$ pucerons deux jours après.

a) On suppose que la croissance des pucerons est linéaire.
  a)1) Calculer le nombre de pucerons 10 jours après le début de l'observation.
  a)2) Après combien de jours la population franchit-elle pour la première fois le cap des 10 000 pucerons ?
b) Mêmes questions si la croissance est exponentielle.


Nombre de pucerons
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
temps [jours]

2.6 Intérêts simples et composés

2.6.1 Placement d'un capital

- Capital initial
- durée de placement
- taux d'intérêts (donné généralement en % par année)

Il existe deux types d'intérêts :

- **intérêts simples** : les intérêts sont proportionnels à la durée du placement et au taux.
- **intérêts composés** : Une **période de capitalisation** (durée entre deux bouclements) est précisée (année, semestre, trimestre, ...). Pendant la durée du placement, à la fin de chaque période de capitalisation, les intérêts de la période sont ajoutés au capital.

Exemple 2.7.

On place un capital de 10000 francs à un taux annuel de 12%.

a) Avec des intérêts simples, calculer la somme disponible après 5 ans, après 10 ans, après 15 ans et après n années.

b) Avec des intérêts composés et un bouclement annuel, calculer la somme disponible après 5 ans, après 10 ans, après 15 ans et après n années.

2.6.2 Propriétés des intérêts composés

- C_0 : capital initial
- n : nombre de périodes de capitalisation du placement
- $t\% = \frac{t}{100} = i$: taux de la période de capitalisation
- C_n : capital disponible (intérêts et capital initial) après les n périodes de capitalisation du placement

$$C_n = C_0 \cdot (1 + \frac{t}{100})^n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

Remarque 2.3.

a) On dit que les intérêts composés suivent **une croissance exponentielle** (voir § 2.5)

b) En conservant le même taux annuel, le capital disponible augmente si la période de capitalisation est raccourcie, mais il existe une valeur limite (intérêts continus).

Exemple 2.8.

On place un capital de 10000 francs à un taux annuel de 6%. Calculer le capital disponible après 5 ans si le bouclement est :

a) annuel

b) semestriel

c) mensuel

d) journalier

e) toutes les heures

f) Toutes les minutes

2.7 Taux fixe de croissance ou décroissance

Exemple 2.9.

- Pour déterminer les 18% d'un nombre p, on calcule : ....
- Pour ajouter à un nombre p les 2% de ce nombre, on calcule :

  ....
- Pour enlever à un nombre p les 6% de ce nombre, on calcule :

  ....
- Si l'on multiplie un nombre p par 0.85, on enlève .... % à p.

  ....
- Si on multiplie un nombre p par 1.07, on ajoute .... % à p.

  ....
- Pour ajouter à un nombre p les 2.5% de ce nombre, ceci 5 fois de suite, on calcule :

  ....

  Cela correspond à une augmentation globale du nombre p de .... %

  ....

Taux fixe de croissance ou de décroissance d'une grandeur

On observe une grandeur q sur des intervalles de temps réguliers (par exemple toutes les secondes, ou toutes les 10 secondes).

- Si q augmente d'un pourcentage fixe de p % sur chaque intervalle de temps (relativement à la valeur du début de l'intervalle), q peut s'exprimer à l'aide de la fonction suivante

$$q(t) = q_0 \cdot (1+i)^t \text{ avec } q_0 = q(0) \text{ et } i = \frac{p}{100}$$

  q suit donc une croissance exponentielle.
- Si q diminue d'un pourcentage fixe de p % sur chaque intervalle de temps (relativement à la valeur du début de l'intervalle), q peut s'exprimer à l'aide de la fonction suivante

$$q(t) = q_0 \cdot (1-i)^t \text{ avec } q_0 = q(0) \text{ et } i = \frac{p}{100}$$

  q suit donc une décroissance exponentielle.

Exemple 2.10.

Dans un pays, on mesure une inflation de 0.6 % pendant le premier mois d'une année donnée.

En supposant que l'inflation est la même les 11 mois suivants, calculer le taux d'inflation annuel correspondant.

2.8 Processus logarithmique : les décibels

On peut utiliser deux grandeurs pour exprimer le niveau sonore : l'**intensité acoustique**, en watts par mètre carré (W/m^2), ou la **pression acoustique**, en pascals (newton par mètre carré, noté Pa). Mais ces grandeurs sont peu pratiques : du son plus faible au plus fort, la pression acoustique s'étale sur une échelle de un à un million, alors que l'intensité acoustique va de un à mille milliards ! De plus, la perception de l'oreille est relative : une augmentation de la pression acoustique de 1 Pa à 1,5 Pa est perçue comme identique à une augmentation de 0,1 Pa à 0,15 Pa. C'est le taux de multiplication (1.5 dans ce cas) qui compte.

C'est pour cette raison que le niveau sonore s'exprime en général en *décibels* (dB) grandeur sans dimension qui correspond au logarithme décimal du rapport entre l'intensité acoustique du son et l'intensité acoustique d'un son de référence.

Cette unité, d'abord appelée *TU* pour *transmission unit*, a ensuite été renommée décibel en 1923 en l'honneur de Alexander Graham Bell (1847-1922) fondateur du laboratoire du même nom.

Référence : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Son_(physique)

Le niveau sonore α (en dB) d'un son d'intensité acoustique I (en W/m^2) est donné par

$$\alpha = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 est l'intensité sonore de référence (seuil auditif).

Exemple 2.11.

a) Calculer le niveau sonore d'un son d'intensité acoustique $I = 1000 I_0$.

b) Dans un choeur de 40 personnes, on suppose que chaque choriste développe un niveau sonore de 50 dB. Quel est le niveau sonore (à 0.1 dB près) de l'ensemble du choeur ?

2.9 Exercices

2.1

Résoudre les équations ci-dessous :

a) $7^{x+6} = 7^{3x+4}$

b) $6^{7-x} = 6^{2x+1}$

c) $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$

d) $2^{-100x} = 0.5^{x-4}$

e) $(\frac{1}{4})^{6-x} = 4$

f) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

g) $2^x \cdot 4^x = -5$

h) $(5^{x-2})^4 = 125 \cdot 5^{5x-3}$

i) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

2.2

Calculer à la main :

a) $\log_3(1)$

b) $\log_2(8)$

c) $\log_2(64)$

d) $\log_2(1'024)$

e) $\log_5(5)$

f) $\log_3(\sqrt{3})$

g) $\log_{243}(1/243)$

h) $\log_3(27)$

i) $\log(1'000)$

j) $\log_4(\sqrt{2})$

k) $\log_{1/8}(64)$

l) $\log_5(0,04)$

m) $\log_3(\sqrt[4]{27})$

n) $\ln(e^2)$

o) $\log_a(a)$

p) $\log_a(a^3)$

q) $\log(10000)$

r) $\ln(e)$

s) $\log_2(1/8)$

t) $\log_3(\sqrt[4]{3})$

u) $\log(200) - \log(2)$

v) $\log_6(4) + \log_6(9)$

w) $\log_5(1)$

x) $\log(-1)$

y) $\log(0.0001)$

z) $\ln(0)$

2.3

A partir des valeurs approchées $\log(2) \approx 0.30$ et $\log(3) \approx 0.48$, calculer une valeur approchée sans utiliser la touche LOG de la calculatrice.

a) $\log(6)$

b) $\log(16)$

c) $\log(\sqrt{2})$

d) $\log(0.5)$

e) $\log(36)$

2.4

Simplifier les expressions ci-dessous sans utiliser la calculette :

a) $\log(16) + 2\log(3) - 2\log(2) - \frac{1}{2}\log(9)$

b) $\log(15) + 3\log(10) - \log(30) - \log(5)$

c) $4\log(5) + \log\left(\frac{1}{5}\right) - 3\log(3) + \frac{1}{3}\log(27)$

d) $\dfrac{\log(20) + \log(100) - \log(2)}{\log(5'000) - \log(5) + \log(0,1)}$

2.5

Résoudre les équations suivantes (donner les valeurs exactes des solutions) :

a) $x = \log_2(32)$
b) $2^x = 100$
c) $\log_x(256) = 4$
d) $\log_2(x) = 4$
e) $10^x = 5$
f) $e^{2x-1} = 27$
g) $\log_x(1'000) = 3$
h) $12^x = -49$

2.6

Résoudre les équations suivantes (donner les valeurs exactes des solutions) :

a) $\log_{11}(x+1) = \log_{11}(7)$
b) $\log_6(2x-3) = \log_6(12) - \log_6(3)$
c) $\log(x) - \log(x+1) = 3\log(4)$
d) $2\log_3(x) = 3\log_3(5)$
e) $\ln(x) + \ln(x-2) = 0,5\ln(9)$
f) $\log_8(x+4) = 1 - \log_8(x-3)$

2.7

Résoudre à l'aide d'une calculette les équations ci-dessous (donner six chiffres significatifs)

a) $5^x = 100$
b) $20^x = 5$
c) $145^x = 3451$
d) $5^{(2x)} = 456.35$
e) $1000 \cdot 1.12^x = 10\,000$
f) $20 \cdot 5^{3x} = 800$
g) $e^{3x} = 1808.042$
h) $e^{x+1} = 2\,000$
i) $20 + 100 \cdot e^{-0.5x} = 60$

2.8

On considère un capital de $C_0 = 60\,000$ francs avec une capitalisation annuelle.

a) On place le capital C_0 à un taux annuel d'intérêts de 8 % pendant 8 ans. Quel est le capital final disponible ?
b) On place le capital C_0 à un taux annuel d'intérêts de 5 %. Quels sont les intérêts générés par ce capital après 10 ans ?
c) A quel taux d'intérêts a-t-on placé le capital C_0 si celui-ci nous a rapporté, après 5 ans, un total d'intérêts de 22 205.20 francs ?
d) On place le capital C_0 ainsi qu'une somme inconnue S à un taux de 6 % pendant 4 ans. Quelle était la somme inconnue S si l'on obtient finalement un capital total disponible de 90 898.34 francs ?

2.9

Si la capitalisation est annuelle, quelle somme retire-t-on au bout de 20 ans si l'on place 20'000 francs à 1,25 % pendant 5 ans, puis à 1,5 % pendant 12 ans et à 1,75 % pendant le reste du temps ?

2.10

On suppose que la capitalisation est annuelle.

a) Calculer la valeur acquise par 40'000 francs à 3,75 % pendant 10 ans à intérêts composés.

b) Calculer la valeur actuelle d'un capital qui vaudra 10'730,40 francs dans 7 ans à 5.25 %.

c) Il y a six ans, on a placé 12'000 francs à un certain taux. On retire aujourd'hui $14'751,05$ francs. Quel était ce taux ?

d) On dispose de 100'000 francs. On place cette somme à 9 %. Après combien d'années aura–t–on $364'248,25$ francs ?

2.11

La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

a) Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.

b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

2.12

a) Un objet vaut actuellement 2 000 francs. Sa valeur double tous les 3 ans.
Quelle sera sa valeur dans 12 ans ? dans n ans ?

b) Il y a 5 ans, un objet valait 1 000 francs. Actuellement, il vaut 3 000 francs. Sachant que son prix évolue de manière exponentielle, quel sera son prix dans 12 ans ?
Après combien de temps vaudra-t-il (au mois près) 21 000 francs ?

2.13

La valeur en francs d'un équipement informatique est donnée par le $P(t) = 6\,000 \cdot 0.82^t$, où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

a) Quelle est la valeur de l'achat ?

b) Quelle est la valeur après 5 ans ?

c) Après combien de temps cet équipement ne vaut plus que 1 000 francs ?

2.14

Un étang contient 1'000 truites. Trois mois plus tard, il n'en reste que 600.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer le nombre N de truites restantes après t mois.

b) Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année ?

c) Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80 ?

2.15

La demi-vie d'une substance radioactive est le temps au bout duquel la moitié des noyaux radioactifs, initialement présents, se sont désintégrés. Le césium est une matière radioactive dont la demi-vie est égale à environ 30 ans. On dispose de 100 tonnes de cette substance.

a) Déterminer la quantité de substance restante Q après t années.

b) Combien restera-t-il de cette substance après 5 ans.

2.16

Les grottes de Lascaux ont été découvertes en 1940. Des analyses ont montré que le charbon trouvé dans ces grottes avait perdu le 83% de la quantité de C^{14} (carbone 14) présent dans les plantes vivantes. Déterminer l'âge des peintures de Lascaux. (la demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans).

2.17

Un pêcheur esquimau tombe dans l'eau dont la température est de 0°C .
La relation $T = 37e^{-0{,}0045t}$ donne la température T de son corps après t minutes.

a) Quelle sera la température de son corps après 30 minutes ?

b) Calculer le temps dont disposent ses amis pour le secourir si l'on sait qu'il s'évanouira lorsque son corps sera à une température de 25°C.

2.18

Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Un patient avale une dose de 10 mg d'un médicament. Une heure plus tard, des mesures montrent qu'il ne reste plus que 8 mg de ce médicament dans son corps.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer la quantité Q de médicament encore présente dans le corps du patient après t heures.

b) Donner approximativement la quantité de médicament dans le corps du patient 8 h après l'absorption.

c) Après combien de temps, le patient n'aura plus que 1 mg de ce médicament dans son corps ?

2.19

Une courbe logistique est le graphe d'une courbe géométrique du type

$$y = \frac{k}{1 + b \cdot e^{-c \cdot t}} \text{ où } k, b \text{ et } c \text{ sont des constantes positives}$$

La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique.

Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$h(t) = \frac{40}{1 + 200e^{-0{,}2t}}$$

a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans ?

b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m ?

c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre ?

2.20

Un journal annonce que l'indice des prix à la consommation a augmenté de 1.4% en janvier.

a) Déterminer la fonction $C(t)$ qui donne le prix d'une marchandise après t mois lorsque le prix initial est de C_0 et que l'inflation mensuelle est de 1.4%.

b) Vérifier à l'aide de cette fonction que les prix ont augmenté de 18% après 12 mois.

2.21

Une population de volatiles, dans une région donnée, chute de 10% chaque année relativement à la population du début de l'année.

a) Vérifier que dans 3 ans, la population aura chuté à environ 73% de sa valeur actuelle.

b) Quelle sera la situation dans 7 ans ?

2.22

Le taux de dépréciation annuel d'une voiture de valeur initiale 18′000 francs est de 25%.

a) Trouver la valeur $V(t)$ de la voiture après t années.

b) Calculer la valeur de la voiture après 8 ans.

2.23

Calculer le taux de dépréciation annuel d'une machine de bureau si la valeur de cette machine après 5 ans est la moitié de sa valeur initiale.

2.24

La relation d'Ehrenberg $\ln(m) = \ln(2.4) + 1.84h$ est une formule empirique liant la taille h (en mètres) à la masse moyenne m (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans.

a) Évaluer, à l'aide de cette formule, la taille moyenne d'un enfant de 7 ans qui pèse 21.8 kg.

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, la masse moyenne d'un enfant de 8 ans qui mesure 1.5 m.

2.25

Dans l'étude de 15 villes ayant une population P allant de 300 à 3'000'000 d'habitants, on a déterminé que la vitesse moyenne v (en m/s) d'un piéton pouvait être donnée approximativement par $v = 0.0151 + 0.258\log(P)$.

a) Selon ce modèle, quel est la vitesse moyenne d'un piéton à Lausanne ($\sim$ 130'000 habitants) ?

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, le nombre d'habitants d'une ville dont la vitesse moyenne d'un piéton est de 1.5 m/s (arrondir la réponse à 100 habitants près).

2.10 Réponses

2.1

a) $S=\{1\}$

b) $S=\{2\}$

c) $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

d) $S=\left\{-\frac{4}{99}\right\}$

e) $S=\{7\}$

f) $S=\{3\}$

g) $S=\emptyset$

h) $S=\{-8\}$

i) $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

2.2

a) 0

b) 3

c) 6

d) 10

e) 1

f) $1/2$

g) -1

h) 3

i) 3

j) $1/4$

k) -2

l) -2

m) $3/4$

n) 2

o) 1

p) 3

q) 4

r) 1

s) -3

t) $1/4$

u) 2

v) 2

w) 0

x) non défini

y) -4

z) non défini.

2.3

a) 0.78

b) 1.20

c) 0.15

d) $-0,3$

e) 1.56

2.4

a) $\log(12)$

b) 2

c) $\log\left(\frac{125}{9}\right)$

d) $\frac{3}{2}$

2.5

a) $S=\{5\}$

b) $S=\left\{\frac{2}{\log(2)}\right\}=\left\{\frac{\ln(100)}{\ln(2)}\right\}$

c) $S=\{4\}$

d) $S=\{16\}$

e) $S=\{\log(5)\}$

f) $S=\left\{\frac{\ln(27)+1}{2}\right\}$

g) $S=\{10\}$

h) $S=\emptyset$

2.6

a) $S=\{6\}$

b) $S=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

c) $S=\emptyset$

d) $S=\{5\sqrt{5}\}$

e) $S=\{3\}$

f) $S=\{4\}$

2.7

a) $S = \{2.86135\}$
b) $S = \{0.537244\}$
c) $S = \{1.63690\}$
d) $S = \{1.90230\}$
e) $S = \{20.3178\}$
f) $S = \{0.764010\}$
g) $S = \{2.50000\}$
h) $S = \{6.60090\}$
i) $S = \{1.83258\}$

2.8

a) $111'055.81$ francs
b) $37'733.68$ francs
c) 6.5 %
d) $S = 12'000$ francs

2.9

$26'804,08$ francs

2.10

a) $57'801,76$ francs
b) 7500 francs
c) 3,5 %
d) 15 ans.

2.11

a) $N = 10'000 \cdot 2^{t/12}$
b) Après une semaine, il y aura $1,6384 \cdot 10^8$ bactéries ; c) le nombre de bactéries aura triplé après environ 19 h.

2.12

a) Après 12 ans : 32 000 francs, après n ans : $2\,000 \cdot 2^{\frac{n}{3}}$ francs
b) Après 12 ans : 41 900 francs , 8 ans et 10 mois plus tard il vaudra 21 000 francs

2.13

a) 6 000 francs
b) 2 224 francs
c) environ 9 ans

2.14

a) $Q = 1\,000 \cdot 0,6^{t/3}$
b) après une année, il y aura environ 129 truites
c) il n'y aura plus que 80 truites après environ 14,8 mois.

2.15

a) $Q = 100 \cdot 0.97716^t$
b) Après 5 ans il restera 89 tonnes de substance.

2.16

Les grottes de Lascaux datent d'environ 12'700 av. J.C.

2.17

a) 32.3° C

b) Il faut le secourir avant environ 87 min.

2.18

a) $Q(t) = 10 \cdot 0,8^t$

b) Après 8h, il reste environ 1.68 mg de médicament dans le corps

c) Il faut attendre 10h et 20min pour qu'il ne reste plus que 1 mg de médicament dans le corps du patient.

2.19

a) Un arbre de 30 ans mesure environ 26.74 m

b) Après 24 ans et demi, l'arbre mesurera 16 m

c) La hauteur maximale qu'un arbre peut atteindre est de 40 m.

2.20

a) $C(t) = C_0 \cdot (1.014)^t$

2.21

b) La population aura chuté à 47.8% de sa valeur actuelle.

2.22

a) $V(t) = 18'000 \cdot 0.75^t$

b) $1'800$ francs

2.23

12.94%

2.24

a) Il mesure environ 1.2 m

b) Il pèse environ 37.9 kg

2.25

a) La vitesse moyenne est de 1.3 m/s ;

b) La population doit être d'environ $569'400$ habitants.

Chapitre 3

Droites du plan

Dans ce chapitre et le suivant, on utilisera un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ **othonormé** du plan, soit un repère dont la base associée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est orthonormée. $\mathcal{B}$ satisfait donc les propriétés suivantes : $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ et $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 1$.

3.1 Rappels en géométrie vectorielle plane

Composantes d'un vecteur

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$$

Coordonnées d'un point

$$A(a_1; a_2) \iff \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Règle de Chasles

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

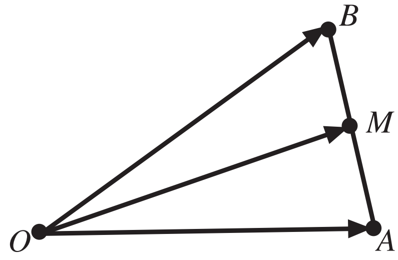
Vecteurs colinéaires

Soit $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs non nuls.

$$\overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ colinéaires (de même direction)} \iff \overrightarrow{w} = k\,\overrightarrow{v}, k \in \mathbb{R}$$

Milieu d'un segment

Soit $A(a_1; a_2), B(b_1; b_2)$ et M le milieu d'un segment AB.



- **Méthode vectorielle** :

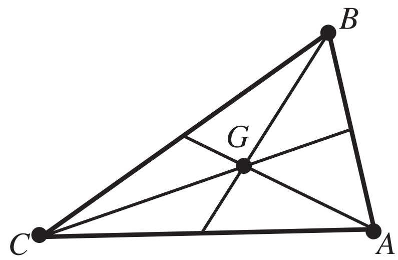
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

- **Méthode analytique**

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

Centre de gravité d'un triangle

Soit $A(a_1; a_2), B(b_1; b_2), C(c_1; c_2)$ et G le centre de gravité d'un triangle ABC.



- **Méthode vectorielle** :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

- **Méthode analytique** :

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

Exemple 3.1.

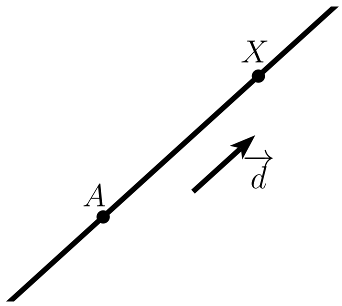
Relativement à un repère du plan, le triangle ABC est donné par son sommet $A(2;-3)$, le milieu $B'(4;1)$ de son côté AC, ainsi que par son centre de gravité $G(0;2)$.

Calculer les coordonnées de ses sommets B et C.

3.2 Equations paramétriques d'une droite

Une droite est entièrement déterminée par

- Deux points distincts ou
- Un point et une direction



Soit la droite d passant par le point A et admettant $\overrightarrow{d}$ comme **vecteur directeur** (vecteur de même direction que la droite). On a :

$$X \in d \iff \overrightarrow{AX} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{d} \iff \overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{d},\ k \in \mathbb{R}$$

Relativement au repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, on note $A(a_1; a_2)$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$.

3.2.1 Equation paramétrique vectorielle de *d*

$$\boxed{\overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{d},\ k \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{d},\ k \in \mathbb{R}}$$

3.2.2 Equation paramétrique matricielle de *d*

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}}$$

3.2.3 Système d'équations paramétriques de *d*

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + kd_1 \\ y = a_2 + kd_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}}$$

Remarque 3.1.

a) En faisant varier k dans des équations paramétriques, on obtient tous les points de la droite.

b) Pour déterminer si un point P appartient à la droite d, on substitue tout d'abord dans les équations paramétriques aux variables x et y les coordonnées de P. On obtient alors un système de deux équations en l'inconnue k, paramètre des équations.

   P appartient à d si et seulement si le système possède une unique solution pour k.

c) Si la droite est donnée par deux points A et B, on utilise le vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AB}$.

d) Il existe une infinité d'équations paramétriques différentes qui définissent la même droite.

Exemple 3.2.

Déterminer des équations paramétriques de la droite d

a) passant par $A(1;-2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) passant par $A(2;-5)$ et $B(3;-2)$.

3.2.4 Pente d'une droite

La **pente m d'une droite** d passant par $A(a_1; a_2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ est définie par

- $m = \dfrac{d_2}{d_1}$ si $d_1 \neq 0$.
- Si $d_1 = 0$, la pente de d n'est pas définie et on note $m = \infty$. Dans ce cas, d est une droite parallèle à Oy, deuxième axe de coordonnées.

La valeur de la pente est indépendante du vecteur directeur choisi !

Exemple 3.3.

Déterminer la pente des droites a et b données par

$$(a) \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -2 - 3k \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b = AB \text{ où } A(2; 5) \text{ et } B(-3; 4)$$

Exemple 3.4.

Donner un système d'équations paramétriques de la droite d de pente $m = \dfrac{4}{3}$ passant par le point $A(-1; -2)$.

3.3 Equation cartésienne d'une droite

Toute droite d du plan possède une équation cartésienne du premier degré en x et y du type $ax + by + c = 0$ satisfaite par les coordonnées x et y de tous les points de la droite d et par eux seulement.

Réciproquement, toute équation du premier degré en x et y représente une droite dans le plan.

Exemple 3.5.

a) Par élimination du paramètre k, déterminer une équation cartésienne de la droite d d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 - 5k \\ y = -2 + 2k \end{cases}$

b) Vérifier que les solutions de l'équation $2x - y + 5 = 0$ sont sur une droite dont on donnera une équation paramétrique matricielle.

Equation cartésienne de d

Si $A(a_1; a_2) \in d$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, une équation cartésienne de la droite d est donnée par

$$\boxed{d_2x + (-d_1)y + (d_1a_2 - d_2a_1) = 0}$$

Pratiquement

Si $A(a_1; a_2) \in d$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, pour former une équation cartésienne de d, on procède de la manière suivante :

Méthode 1

- Du vecteur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ on déduit le vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix}$.
- On écrit $(d) \quad d_2x - d_1y + c = 0$, expression que l'on obtient en plaçant judicieusement devant x et y les composantes du vecteur $\overrightarrow{n}$.
- On détermine le terme constant c sachant que A est un point de d, donc une solution de son équation cartésienne.

Méthode 2

- On établit un système d'équations paramétriques de la droite d.
- On élimine le paramètre k dans ce système et on obtient une équation cartésienne de d.

Exemple 3.6.

a) Soient $A(3; -2) \in d$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d.
Etablir une équation cartésienne de d en utilisant les deux méthodes.

b) Donner un vecteur directeur, la pente et deux points à coordonnées entières de la droite d donnée par l'équation $x - 3y + 5 = 0$.

c) Déterminer une équation cartésienne de d passant par $A(5; -1)$ et de pente $m = -\dfrac{3}{2}$.

Pente et vecteurs directeurs d'une droite donnée par son équation cartésienne

Si $(a; b) \neq (0; 0)$ les points solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ sont sur une droite d :

- de pente $m =$
- de vecteurs directeurs $\overrightarrow{d} =$

3.4 Positions relatives de deux droites

Si d et e ont respectivement pour vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{e}$,

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d} \text{ et } \overrightarrow{e} \text{ non colinéaires} \quad &\Longleftrightarrow \quad d \text{ et } e \text{ sont sécantes} \\ \overrightarrow{d} \text{ et } \overrightarrow{e} \text{ colinéaires} \quad &\Longleftrightarrow \quad d \text{ et } e \text{ ont la même direction} \end{aligned}$$

Si d et e ont la même direction, pour savoir si les droites sont parallèles ou confondues, il suffit de vérifier si un point quelconque de l'une des droites se trouve sur l'autre droite.

Exemple 3.7.

Déterminer la position relative des droites a et b d'équations respectives

$$(a) \quad 2x + 5y - 12 = 0 \qquad \text{et} \qquad (b) \begin{cases} x = -4 + 5k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$$

3.5 Point d'intersection de deux droites

On calcule le point d'intersection éventuel de deux droites en **résolvant un système** regroupant les équations paramétriques ou cartésiennes de ces droites. Notons que :

- si les droites se coupent, le système à résoudre possède une unique solution
- si les droites sont parallèles, le système est sans solution.
- si les équations données sont celles d'une même droite, le système est indéterminé.

Exemple 3.8.

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d et e d'équations respectives

$$(d)\ 3x - 2y = 0 \quad \text{et} \quad (e)\ \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \end{cases}$$

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d et e d'équations respectives

$$(d)\ \begin{cases} x = 7 - 4k \\ y = -10 + 6k \end{cases} \quad \text{et} \quad (e)\ \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d et e d'équations respectives

$$(d)\ x + 2y - 1 = 0 \quad \text{et} \quad (e)\ \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -1 - k \end{cases}$$

3.6 Exercices

Les exercices 3.1 à 3.3 sont des exercices de révision de la première année

3.1

Dans une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, de V_2 on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{c} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{w} = 4\overrightarrow{a} - \frac{3}{2}\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$.

b) $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ sont-ils colinéaires ?

c) $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont-ils colinéaires ?

d) $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ sont-ils colinéaires ?

e) Trouver deux nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$.

f) Trouver deux nombres réels m et p tels que $\overrightarrow{e_1} = m\overrightarrow{a} + p\overrightarrow{b}$.

3.2

Relativement à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ du plan, on considère un parallélogramme $ABCD$ de centre M. Calculer les coordonnées des sommets manquants dans les cas suivants.

a) $B(3; -3), C(1; 2)$ et $M(1; 0)$.

b) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C(1; -2)$.

c) $A(7; 0), \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $M(-1; 1)$.

d) $B(-7; 3), M(-2; -1)$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$.

3.3

Relativement à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ du plan, on donne les points $A(3; -5), B(-2; 1)$ et $C(k; 7)$ où k est un paramètre réel.

a) Trouver la valeur de k de sorte que les points A, B et C soient alignés.

b) Calculer le nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BC}$.

c) Calculer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB}$.

3.4

On donne une droite d par l'équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les coordonnées et représenter les points de d correspondants aux valeurs suivantes du paramètre k : $-2, -1, 0, 1$ et 2.

b) Les points $A(-11; 11), B(15; -7)$ et $C(31; -17)$ appartiennent-ils à la droite d ?

3.5

On donne une droite d par l'équation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer sur la droite d les coordonnées du point

a) A situé sur le premier axe de coordonnées,

b) B situé sur le deuxième axe de coordonnées,

c) C qui a une abscisse égale à 7,

d) D qui a une ordonnée égale à -2,

e) E qui a les deux coordonnées égales.

3.6

Soit la droite d d'équation cartésienne $5x - 2y - 11 = 0$.

a) Déterminer les coordonnées de deux points à coordonnées entières de la droite d et représenter cette droite.

b) Les points $D(-3; -13), E\left(\frac{1}{2}; -\frac{17}{4}\right)$ et $F\left(\frac{4}{3}; -2\right)$ appartiennent-ils à la droite d ?

c) Etablir des équations paramétriques de la droite d.

3.7

On donne une droite d par l'équation cartésienne $2x + 5y - 20 = 0$. Déterminer sur la droite d les coordonnées du point

a) A situé sur le premier axe de coordonnées,

b) B situé sur le deuxième axe de coordonnées,

c) C qui a une ordonnée égale à 15,

d) D qui a une abscisse égale à 3,

e) E qui a les deux coordonnées égales,

f) F qui est situé sur la droite d'équation $3x - 2y - 11 = 0$.

3.8

Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite donnée par :

a) Un point $A(-5;4)$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

b) Un point $A(3;-7)$ et la pente $m = -\frac{1}{5}$.

c) Les deux points $A(7;2)$ et $B(-5;8)$.

d) Un point $A(-2;5)$ et qui est parallèle à la droite $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

e) Un point $A(2;-3)$ et qui est parallèle à la droite $2x - 3y - 5 = 0$.

f) Un point $A(3;1)$ et qui est parallèle au deuxième axe de coordonnées.

3.9

Relativement à un repère du plan, on donne les points $A(2;4)$, $B(5;6)$ et $P(10;6)$, ainsi que les droites (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et (c) $2x + y - 10 = 0$.

a) Déterminer une équation paramétrique de la droite a passant par A et B .

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite a.

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite b.

d) Déterminer une équation paramétrique de la droite c.

e) Calculer les coordonnées du point I d'intersection des droites b et c.

f) Le point P appartient-il à la droite b ? Justifier.

g) Calculer les coordonnées du point C d'abscisse 6 de la droite c.

h) Montrer que les droites a et b sont parallèles.

3.10

Déterminer la position relative des droites a et b données ci-dessous. Si les droites se coupent, calculer les coordonnées du point d'intersection.

a) (a) $4x - 6y - 3 = 0$ et (b) $-2x + 3y - 5 = 0$

b) (a) $x + 3y = 11$ et (b) $\begin{cases} x = 8 - 3m \\ y = 1 + m \end{cases}$

c) (a) $4x - 3y - 6 = 0$ et (b) $6x + y - 20 = 0$

d) (a) $\begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = 8 + 2k \end{cases}$ et (b) $\begin{cases} x = -2 - 6m \\ y = 8 + 4m \end{cases}$

3.11

a) Ecrire l'équation cartésienne d'une droite d de pente m qui passe par le point $A(2;5)$.

b) Déterminer ensuite la valeur de m de telle sorte que la droite d :

  i) passe par le point $B(8;-2)$;

  ii) coupe le premier axe de coordonnées en $C(5;0)$;

  iii) possède $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

3.12

Les supports des côtés d'un triangle ABC sont les droites d'équations :

$$(AB)\ 3x+y-11=0 \quad / \quad (AC)\ \begin{cases} x=2-k \\ y=1+k \end{cases} \quad / \quad (BC)\ 3x+2y-13=0$$

a) Calculer les coordonnées des sommets A, B et C du triangle ABC.

b) Calculer les coordonnées des points M et N milieux respectifs des côtés AB et AC.

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite MN ; est-elle parallèle au côté BC ?

3.13

Relativement à un repère du plan, on considère les points

$$A(10;3), B(13;9) \text{ et } C(1;3)$$

ainsi que les droites

$$(p)\ x-2y-4=0 \text{ et } (q)\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Représenter graphiquement les points A, B, C et les droites p et q.

b) Montrer que le point A est sur la droite p et le point C est sur la droite q.

c) On considère le quadrilatère $ABCD$ où D est le point d'intersection des droites p et q. Calculer les coordonnées de D et montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

d) Etablir une équation cartésienne de la médiane du triangle ABC issue du sommet A.

e) Etablir une équation cartésienne de la droite t, parallèle et à égale distance de (BC) et p.

3.14

Un parallélogramme $ABCD$ est donné par

- son sommet $A(1;1)$,
- la pente du côté AD : $m_{AD} = -\dfrac{1}{2}$,
- une équation paramétrique de la droite AB : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- une équation cartésienne de la droite BD : $2x-y-10=0$.

a) Représenter graphiquement le parallélogramme $ABCD$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite AD.

c) Calculer les coordonnées des sommets B, C et D du parallélogramme $ABCD$.

3.7 Réponses

3.1

a) $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ non colinéaires ;

c) $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non colinéaires ;

d) $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ non colinéaires ;

e) $x = -\dfrac{10}{7}, y = \dfrac{1}{7}$;

f) $m = \dfrac{4}{7}, p = \dfrac{1}{7}$

3.2

a) $A(1; -2), D(-1; 3)$

b) $A(-3; 3), B(-1, -2), D(-1; 3)$

c) $B(0; 3), C(-9; 2), D(-2; -1)$

d) $A(1; 3), C(-5; -5); D(3; -5)$

3.3

a) $k = -7$

b) $\lambda = 2$

c) $P\left(-\dfrac{9}{2}; 4\right)$.

3.4

a) $M_{-2}(-5; 7), M_{-1}(-2; 5), M_0(1; 3), M_1(4; 1), M_2(7; -1)$

b) oui, $k = -4$ / non / oui, $k = 10$

3.5

a) $A(4.5; 0)$ b) $B(0; 9)$ c) $C(7; -5)$ d) $D(5.5; -2)$ e) $E(3; 3)$.

3.6

a) par exemple $A(1; -3), B(3; 2)$.

b) oui, oui, non

c) par exemple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

3.7

a) $A(10; 0)$

b) $B(0; 4)$

c) $C(-27.5; 15)$

d) $D(3; 2.8)$

e) $E\left(\dfrac{20}{7}; \dfrac{20}{7}\right)$

f) $F(5; 2)$.

3.8

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x + 3y - 7 = 0$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x + 5y + 32 = 0$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x + 2y - 11 = 0$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $3x + 2y - 4 = 0$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $2x - 3y - 13 = 0$

f) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x - 3 = 0$

3.9

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) $2x - 3y + 8 = 0$;

c) $2x - 3y - 2 = 0$;

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

e) $I(4; 2)$

f) oui

g) $C(6; -2)$

h) Même pente $m = \dfrac{2}{3}$

3.10

a) $a \parallel b$

b) $a \equiv b$

c) $I(3; 2)$

d) $I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{17}{3}\right)$

3.11

a) $y = mx + 5 - 2m$

b) i) $m = -\dfrac{7}{6}$ ii) $m = -\dfrac{5}{3}$ iii) $m = \dfrac{5}{3}$

3.12

a) $A(4; -1), B(3; 2), C(7; -4)$

b) $M\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{11}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$

c) (MN) $6x + 4y - 23 = 0$. MN est parallèle à BC.

3.13

c) $D\left(\dfrac{32}{5}; \dfrac{6}{5}\right)$

d) $x + y = 13$

e) $2x - 4y + 1 = 0$

3.14

b) $x + 2y - 3 = 0$.

c) $B(7; 4), C\left(\dfrac{53}{5}; \dfrac{11}{5}\right), D\left(\dfrac{23}{5}; -\dfrac{4}{5}\right)$

Chapitre 4

Droites dans le plan métrique

Rappelons que l'on utilise un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ **orthonormé**, soit un repère dont la base associée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est orthonormée. $\mathcal{B}$ satisfait donc les propriétés suivantes : $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ et $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 1$.

4.1 Rappels en géométrie vectorielle métrique

Norme d'un vecteur

$$\|\overrightarrow{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Produit scalaire

$$\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 \in \mathbb{R}$$

Le produit scalaire a les propriétés suivantes :

a) **Condition d'orthogonalité** : $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \iff \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0$.

b) **Version trigonométrique du produit scalaire** :

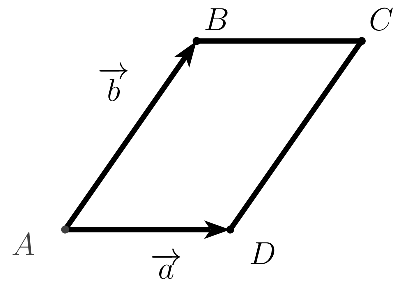
Si $\alpha = \angle(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w})$, on a $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\| \cos(\alpha)$ avec, par convention, $\alpha \in [0; 180°]$.

Aire d'un parallélogramme

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

L'aire de tout parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est donnée par

$$\left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = |\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1\ |$$



Exemple 4.1.

Relativement à un repère orthonormé, on considère le triangle ABC de sommets $A(2;2)$, $B(5;-2)$ et $C(7;6)$.

a) Calculer la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

4.2 Droites perpendiculaires

On teste la perpendicularité de deux droites en utilisant leurs vecteurs directeurs ou leurs pentes.

- d_1 est de vecteur directeur $\overrightarrow{d_1}$ et de pente m_1
- d_2 est de vecteur directeur $\overrightarrow{d_2}$ et de pente m_2

On a

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \iff \overrightarrow{d_1} \bullet \overrightarrow{d_2} = 0 \quad \text{ou} \quad d_1 \perp d_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1}$$

Conséquences

1) Si d_1 et d_2 sont perpendiculaires, $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ sont des vecteurs orthogonaux (de directions perpendiculaires).
2) La pente m' d'une perpendiculaire à une droite de pente m vaut :

$$m' = -\frac{1}{m}$$

Exemple 4.2.

Les droites a et b d'équations $(a) : 2x + 3y - 1 = 0$ et $(b) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ sont-elles perpendiculaires ?

4.3 Vecteur normal à une droite

Tout vecteur orthogonal à un vecteur directeur de la droite est appelé un **vecteur normal** à la droite.

a) Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite $ax + by + c = 0$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ est normal à la droite $\begin{cases} x = a_1 + kv_1 \\ y = a_2 + kv_2 \end{cases}$

Exemple 4.3.

Donner un vecteur directeur, un vecteur normal et la pente de la droite d passant par $A(2; -5)$ et $B(4; 11)$. Utiliser un vecteur normal à d pour établir une équation cartésienne de d.

Equation d'une droite perpendiculaire

Vu que $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $ax+by+c = 0$, on a la propriété suivante :

- Toute droite perpendiculaire à la droite $ax + by + c = 0$ est d'équation $bx - ay + d = 0$

Exemple 4.4.

Donner une équation cartésienne de la droite n perpendiculaire à la droite $3x - 4y + 12 = 0$ passant par le point $A(2; -5)$

4.4 Angle entre deux droites

On appelle **angle entre les deux droites $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{e}$** l'angle aigu ϕ formé par deux parallèles sécantes quelconques à ces droites.

On obtient ϕ en utilisant des vecteurs directeurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{e}$ des droites d et e (ou des vecteurs normaux $\overrightarrow{n_d}$ et $\overrightarrow{n_e}$) à l'aide de la relation

$$\cos(\phi) = \frac{\left|\overrightarrow{d} \bullet \overrightarrow{e}\right|}{\|\overrightarrow{d}\| \cdot \|\overrightarrow{e}\|}$$

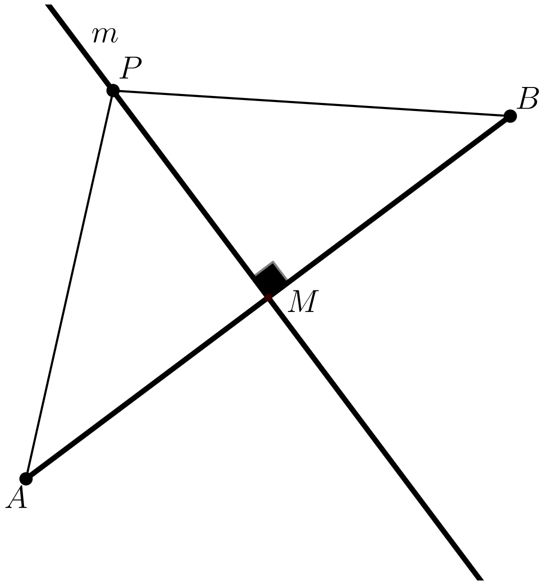
ou de la relation

$$\cos(\phi) = \frac{|\overrightarrow{n_d} \bullet \overrightarrow{n_e}|}{\|\overrightarrow{n_d}\| \cdot \|\overrightarrow{n_e}\|}$$

Exemple 4.5.

Calculer l'angle entre les droites d'équations $x - 7y = 6$ et $\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -3 - 2k \end{cases}$.

4.5 Médiatrice d'un segment

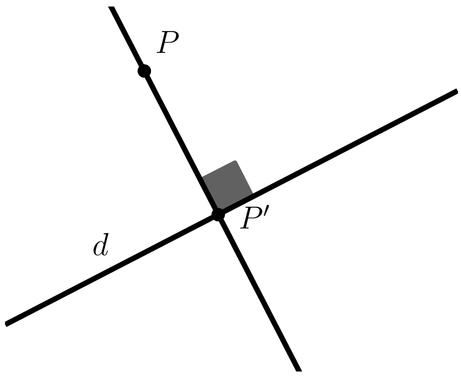


- La médiatrice du segment AB est la droite m perpendiculaire à AB par son milieu M
- La médiatrice est le lieu géométrique des points P à égale distance des sommets A et B du segment AB.

Exemple 4.6.

Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment AB d'extrémités $A(-3;2)$ et $B(5;-4)$.

4.6 Distance d'un point à une droite



La distance $\delta(P;d)$ d'un point P à une droite d est la distance entre les points P et P', où P' est la projection orthogonale du point P sur la droite d (soit le pied de la perpendiculaire à d passant par P).

Calcul de la distance d'un point à une droite

Soit la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

La distance d'un point $P(p_1;p_2)$ à la droite d est donnée par

$$\delta(P;d) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemple 4.7.

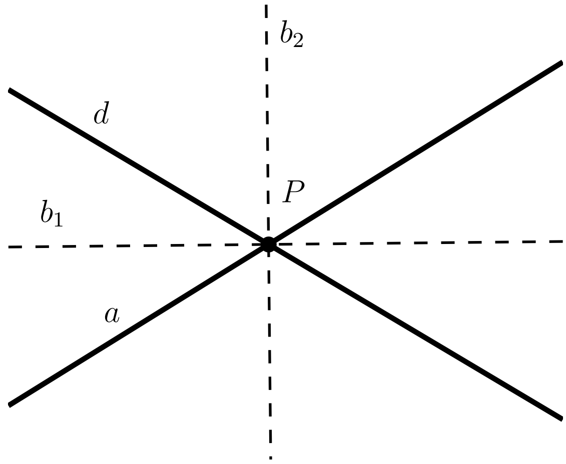
On donne le point $M(-2;1)$ et les droites d et e d'équations respectives

$$(d) \quad 3x - 4y + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad (e) \begin{cases} x = 1 + 12k \\ y = 2 - 5k \end{cases}$$

Calculer $\delta(M;d)$ et $\delta(M;e)$.

4.7 Bissectrices

Soient deux droites a et d qui se coupent en un point P. Les bissectrices de la croix formée par les droites a et d sont les deux droites b_1 et b_2 qui passent par le point P et qui coupent les quatre angles formés par les droites a et d en deux parties égales.



Les bissectrices ont les propriétés suivantes (rappelées sans démonstration) :

a) b_1 est **perpendiculaire** à b_2.

b) Les droites b_1 et b_2 forment le **lieu géométrique des points équidistants** des droites a et d.

c) Les droites b_1 et b_2 sont les **axes de symétrie** de la croix formée par les droites a et d.

4.7.1 Calcul des bissectrices : méthode vectorielle

Soient a et d deux droites qui se coupent en un point P.

Si les **vecteurs directeurs** respectifs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{d}$ des droites a et d sont **de même norme**, alors les vecteurs directeurs des bissectrices sont donnés par

$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{d} \text{ et } \overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{d}$$

Exemple 4.8.

Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice intérieure en A du triangle ABC donné par $A(1;1), B(2;8)$ et $C(3;-1)$.

4.7.2 Calcul des bissectrices : méthode analytique

Soient les droites a et b d'équations cartésiennes respectives

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ et } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Les bissectrices de la croix (a, b) sont les deux droites d'équation

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad \text{et} \quad \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Exemple 4.9.

Donner les équations cartésiennes des bissectrices des droites données par

$$3x + 4y - 24 = 0 \text{ et } 4x - 3y + 12 = 0$$

Exemple 4.10.

Calculer une équation cartésienne de la bissectrice intérieure en B du triangle ABC dont les côtés AB, BC et AC sont respectivement donnés par

$$7x - y - 6 = 0, x + y - 2 = 0 \text{ et } y = -6$$

Remarque 4.1.

Les deux méthodes de détermination de bissectrices sont à connaître.

L'une ou l'autre s'adapte plus ou moins bien selon les circonstances...

Critique de la méthode vectorielle

- (+) méthode pratique lorsque les droites a et d sont données par des points,
- (+) méthode pratique si l'on ne cherche qu'une seule des deux bissectrices,
- ($-$) méthode peu pratique si l'on ne connaît que les équations cartésiennes de a et d.

Critique de la méthode analytique

- (+) méthode pratique lorsque les droites a et d sont données par des équations cartésiennes,
- ($-$) méthode peu pratique si l'on cherche une seule des deux bissectrices (comme la bissectrice intérieure d'un triangle par exemple). Dans ce cas il est nécessaire de faire un dessin pour déterminer quelle bissectrice convient…

4.8 Exercices

Les exercices 4.1 à 4.5 sont des exercices de révision

4.1

On donne $A(2;-1), B(5;3)$ et $C(-4;7)$.

a) Calculer le périmètre du triangle ABC.

b) Calculer les coordonnées du point N situé sur le segment AB à deux unités de A.

c) Calculer $2\|\overrightarrow{AC}\| + 8\|\overrightarrow{AB}\| - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC}$.

4.2

On donne $A(2;-3), B(3;2)$ et $C(-2;5)$.

a) Calculer les angles du triangle ABC.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

4.3

On donne le quadrilatère $ABCD$ par les coordonnées de ses sommets : $A(-5;-4), B(-4;3)$, $C(5;6)$ et $D(2;-3)$.
Vérifier par calculs que les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent à angle droit, mais que ce n'est pas un losange. Calculer son aire.

4.4

Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$ avec $A(3;0), B(1;4), C(-5;-1)$ et $D(0;-6)$.

4.5

On donne $A(2;3), P(10;-3)$ et $Q(4;9)$. Trouver les coordonnées des points B et C de la droite PQ tels que le triangle ABC soit isocèle en A avec $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 5$.

4.6

Déterminer des équations paramétrique et cartésienne de la droite p passant par le point P donné et perpendiculaire à la droite d donnée ci-dessous :

a) $P(5;2)$ $\quad (d)\ 3x - 5y + 4 = 0$

b) $P\left(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{9}{8}\right)$ $\quad (d)\ -4x + 5y = 0$

c) $P(8;-3)$ $\quad (d) \begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = -8 + 2k \end{cases}$

4.7

Calculer l'angle aigu formé par les droites a et b dans les cas suivants :

a) $(a) : 3x - 5y + 4 = 0$ et $(b) : x + y - 2 = 0$.

b) $(a) : 2x + 3y - 7 = 0$ et $(b) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $(a) : x = 5$ et $(b) : 3x - 6y - 12 = 0$.

4.8

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne un rectangle par les équations de deux de ses côtés : $2x - y + 11 = 0$ et $2x - y + 1 = 0$.
On sait également que $y = 3$ est une équation de l'une de ses diagonales.
Déterminer les coordonnées des sommets de ce rectangle.

4.9

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne un sommet $A(6; 12)$ d'un triangle ABC, ainsi que les équations des hauteurs issues de B et C

$$(h_B)\ 2x + 7y - 65 = 0 \text{ et } (h_C)\ 2x - 5y + 17 = 0$$

Calculer les coordonnées des deux autres sommets du triangle ABC.

4.10

Soit le triangle ABC de sommets $A(-2; -2), B(8; -2)$ et $C(4; 4)$.
Déterminer une équation cartésienne des médiatrices du triangle ABC.
Vérifier ensuite qu'elles se croisent en un point M dont on donnera les coordonnées.
En déduire le rayon r du cercle circonscrit au triangle ABC.

4.11

Soit la droite d passant par les points $A(8; -1)$ et $B(2; 7)$. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale M du point $P(7; 17)$ sur la droite d, ainsi que celles du symétrique N de P par rapport à la droite d. Calculer la distance du point P à la droite d.

4.12

Déterminer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants :

a) $P(19; -10)$ — $d = (AB)$ avec $A(-3; 9)$ et $B(2; -3)$

b) $P(3; -2)$ — $(d)\ 4x + 3y + 9 = 0$

c) $P(-2; -4)$ — $(d)\ 5x - 12y - 12 = 0$

d) $P(2; 1)$ — $(d)\ y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{4}$

e) $P(5; 9)$ — $(d)\ \begin{cases} x = 5 + 5k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$

4.13

Soit le triangle ABC de sommets $A(2; -3), B(3; 2)$ et $C(-2; 5)$.
Calculer la longueur de la hauteur du triangle ABC issue du sommet A.
En déduire l'aire du triangle ABC.

4.14

Etablir une équation cartésienne des bissectrices intérieures du triangle ABC donné par ses sommets $A(0; 5), B(2; -9)$ et $C(14; 3)$.
Vérifier ensuite qu'elles se croisent en un point I dont on déterminera les coordonnées.

4.15

On considère les droites a et b d'équations

$$(a) : 3x + 4y - 1 = 0 \text{ et } (b) : 5x + 12y - 2 = 0$$

a) Calculer l'angle entre ces deux droites.
b) Déterminer une équation cartésienne des bissectrices de a et b.
c) Laquelle des deux bissectrices coupe-t-elle l'angle aigu formé par ces deux droites ?

4.16

On donne les droites

$$(a)\ x + 7y - 23 = 0 \text{ et } (b)\ x - y + 9 = 0$$

ainsi que deux points $A(3; 0)$ et $B(-9; 6)$.
Déterminer les coordonnées des points P et Q qui sont à égale distance des droites a et b, ainsi que des points A et B .

4.17

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère le trapèze $ABCD$ **rectangle en *A* et *D*** (les angles en A et en D sont droits) donné par

- Les coordonnées du sommet A : $A(-7; -1)$
- Une équation paramétrique de la droite AB : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Une équation cartésienne de la droite BC : $7x + y - 30 = 0$.

On sait de plus que l'angle $\beta = \widehat{ABC}$ est aigu (donc inférieur à 90°) et que la diagonale BD est la bissectrice de l'angle β.

a) Calculer les coordonnées du sommet B.
b) Représenter graphiquement les sommets A et B, ainsi que la droite BC (unité : 1 carré).
c) Déterminer une équation cartésienne de la diagonale BD du trapèze $ABCD$ et la représenter graphiquement.
d) Calculer les coordonnées des sommets C et D du trapèze $ABCD$.

4.18

On donne deux points $A(-5; 2)$ et $B(15; -2)$ et la droite $(d)\ 2x - 3y + 3 = 0$.
Calculer les coordonnées du point C de la droite d tel que d soit la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

4.9 Réponses

4.1

a) $15 + \sqrt{97}$ b) $N\left(\frac{16}{5}; \frac{3}{5}\right)$ c) -26

4.2

a) $37.87°, 109.65°, 32.48°$ b) 14 [u^2]

4.3

Aire : 60 [u^2]

4.4

39.5 [u^2]

4.5

$B(5; 7), C(7; 3)$ ou le contraire.

4.6

a) $5x + 3y - 31 = 0$ ou $\begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = 2 - 5k \end{cases}$

b) $30x + 24y + 77 = 0$ ou $\begin{cases} x = -\frac{5}{3} - 4k \\ y = -\frac{9}{8} + 5k \end{cases}$

c) $5x + 2y - 34 = 0$ ou $\begin{cases} x = 8 + 2k \\ y = -3 - 5k \end{cases}$

4.7

a) $76.0°$
b) $7.1°$
c) $63.4°$

4.8

Par exemple $A(-4; 3), B(-3; 5), C(1; 3)$ et $D(0; 1)$

4.9

$B(8; 7)$ et $C(4; 5)$

4.10

$m_{AB} : x = 3; m_{BC} : 2x - 3y - 9 = 0; m_{AC} : x + y - 2 = 0$; $M(3; -1)$; $r = \sqrt{26}$

4.11

$M(-1; 11), N(-9; 5), \delta(P; d) = 10$

4.12

a) 13 b) 3 c) 2 d) $\dfrac{3}{5}$ e) $\dfrac{25\sqrt{29}}{29}$

4.13

$h_A = \dfrac{14\sqrt{34}}{17}$; aire : 14 [u^2]

4.14

$(b_A)\ x + y - 5 = 0$ $(b_B)\ 3x - y - 15 = 0$ $(b_C)\ x - 3y - 5 = 0$ $I(5;0)$

4.15

1) 14.3° ; 2) $64x + 112y - 23 = 0$ et $14x - 8y - 3 = 0$; 3) $64x + 112y - 23 = 0$

4.16

$P(-2;5)$ et $Q(-4;1)$

4.17

a) $B(3;9)$.

c) $(BD) : 3x - y = 0$

d) $C(4.25;0.25)$ et $D(-2;-6)$

4.18

$C(-9;-5)$

Bibliographie

[1] E. W. Swokowski et J. A. Cole *: Algèbre*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1998.

[2] Monographie de la commission romande de mathématique 25 *: Fundamentum de mathématique : Analyse*, Editions du Tricorne, 1997.

[3] Monographie de la commission romande de mathématique 27 *: Fundamentum de mathématique : Notions élémentaires,* Editions du Tricorne, 2005.

[4] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 1,* Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1980.

[5] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 2*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1980.

[6] G. Ouellet, *: Calcul 1 (calcul différentiel)*, Editions Le Griffon d'Argile, 1999.

[7] Deborah Hughes-Hallet et Andrew M Gleason, Traduction française de Michel Beaudin *: Fonctions d'une variable*, Editions Mc Graw-Hill, 1999.

[8] E. W. Swokowski *: Analyse*, Editions De Boeck, 2000.

[9] Hubert Bovet, *: Algèbre, cours et exercices*, Editions Polymath, 1998

[10] Hubert Bovet, *: Analyse, cours et exercices*, Editions Polymath, 1999

[11] André Waser, *: Analyse 2*, Gymnase de Burier, 2014.

[12] Robert A. Adams, Traduction de Christophe Soland *: Analyse*, Gymnase du Bugnon, 1988.

[13] Stewart James, *: Analyse, concepts et contextes, volume 1, fonctions d'une variable*, Editions de Boeck, 3ème édition, 2006.

[14] G. Ouellet, *: Calcul 2 (calcul différentiel),* Editions Le Griffon d'Argile, 2000.

[15] Francis Calame, *: Analyse, cours et exercices* CESSEV, 1995.

[16] Luc Amyotte, *: Calcul intégral*, Editions ERPI, 2008.