Chapitre 4

Droites dans le plan métrique

Rappelons que l'on utilise un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ **orthonormé**, soit un repère dont la base associée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est orthonormée. $\mathcal{B}$ satisfait donc les propriétés suivantes : $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ et $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 1$.

4.1 Rappels en géométrie vectorielle métrique

Norme d'un vecteur

$$\|\overrightarrow{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Produit scalaire

$$\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 \in \mathbb{R}$$

Le produit scalaire a les propriétés suivantes :

a) **Condition d'orthogonalité** : $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \iff \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0$.

b) **Version trigonométrique du produit scalaire** :

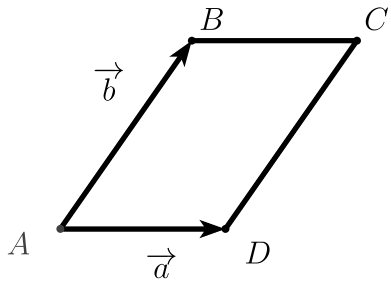
Si $\alpha = \angle(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w})$, on a $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{w}\| \cos(\alpha)$ avec, par convention, $\alpha \in [0; 180°]$.

Aire d'un parallélogramme

Soit $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

L'aire de tout parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est donnée par

$$\left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = | \, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \, |$$



Exemple 4.1.

Relativement à un repère orthonormé, on considère le triangle ABC de sommets $A(2;2)$, $B(5;-2)$ et $C(7;6)$.

a) Calculer la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

4.2 Droites perpendiculaires

On teste la perpendicularité de deux droites en utilisant leurs vecteurs directeurs ou leurs pentes.

- d_1 est de vecteur directeur $\overrightarrow{d_1}$ et de pente m_1
- d_2 est de vecteur directeur $\overrightarrow{d_2}$ et de pente m_2

On a

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \iff \overrightarrow{d_1} \bullet \overrightarrow{d_2} = 0 \quad \text{ou} \quad d_1 \perp d_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1}$$

Conséquences

1) Si d_1 et d_2 sont perpendiculaires, $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ sont des vecteurs orthogonaux (de directions perpendiculaires).
2) La pente m' d'une perpendiculaire à une droite de pente m vaut :

$$m' = -\frac{1}{m}$$

Exemple 4.2.

Les droites a et b d'équations $(a) : 2x + 3y - 1 = 0$ et $(b) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ sont-elles perpendiculaires ?

4.3 Vecteur normal à une droite

Tout vecteur orthogonal à un vecteur directeur de la droite est appelé un **vecteur normal** à la droite.

a) Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite $ax + by + c = 0$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ est normal à la droite $\begin{cases} x = a_1 + kv_1 \\ y = a_2 + kv_2 \end{cases}$

Exemple 4.3.

Donner un vecteur directeur, un vecteur normal et la pente de la droite d passant par $A(2; -5)$ et $B(4; 11)$. Utiliser un vecteur normal à d pour établir une équation cartésienne de d.

Equation d'une droite perpendiculaire

Vu que $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $ax+by+c = 0$, on a la propriété suivante :

- Toute droite perpendiculaire à la droite $ax + by + c = 0$ est d'équation $bx - ay + d = 0$

Exemple 4.4.

Donner une équation cartésienne de la droite n perpendiculaire à la droite $3x - 4y + 12 = 0$ passant par le point $A(2; -5)$

4.4 Angle entre deux droites

On appelle **angle entre les deux droites** $\boldsymbol{d}$ **et** $\boldsymbol{e}$ l'angle aigu ϕ formé par deux parallèles sécantes quelconques à ces droites.

On obtient ϕ en utilisant des vecteurs directeurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{e}$ des droites d et e (ou des vecteurs normaux $\overrightarrow{n_d}$ et $\overrightarrow{n_e}$) à l'aide de la relation

$$\cos(\phi) = \frac{\left|\overrightarrow{d} \bullet \overrightarrow{e}\right|}{\|\overrightarrow{d}\| \cdot \|\overrightarrow{e}\|}$$

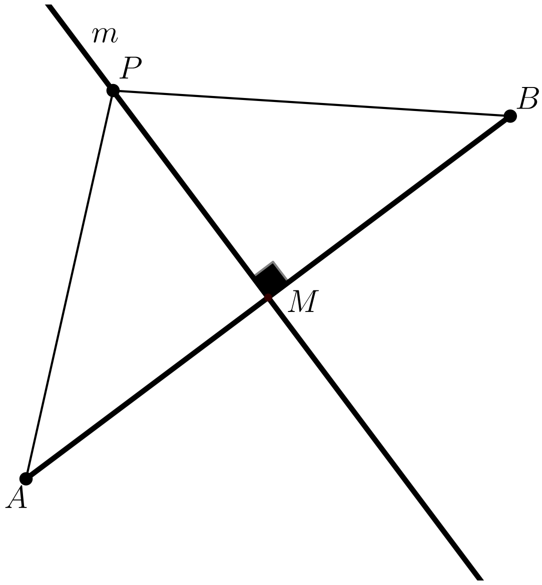
ou de la relation

$$\cos(\phi) = \frac{|\overrightarrow{n_d} \bullet \overrightarrow{n_e}|}{\|\overrightarrow{n_d}\| \cdot \|\overrightarrow{n_e}\|}$$

Exemple 4.5.

Calculer l'angle entre les droites d'équations $x - 7y = 6$ et $\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -3 - 2k \end{cases}$.

4.5 Médiatrice d'un segment

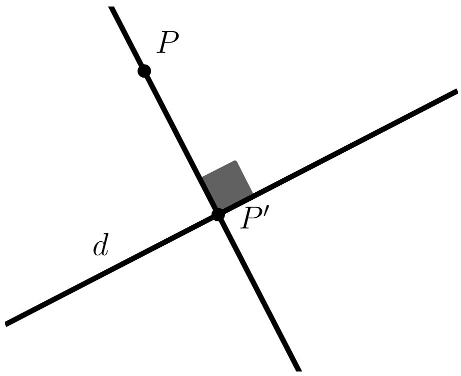


- La médiatrice du segment AB est la droite m perpendiculaire à AB par son milieu M
- La médiatrice est le lieu géométrique des points P à égale distance des sommets A et B du segment AB.

Exemple 4.6.

Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment AB d'extrémités $A(-3; 2)$ et $B(5; -4)$.

4.6 Distance d'un point à une droite



La distance $\delta(P;d)$ d'un point P à une droite d est la distance entre les points P et P', où P' est la projection orthogonale du point P sur la droite d (soit le pied de la perpendiculaire à d passant par P).

Calcul de la distance d'un point à une droite

Soit la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

La distance d'un point $P(p_1; p_2)$ à la droite d est donnée par

$$\delta(P;d) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple 4.7.

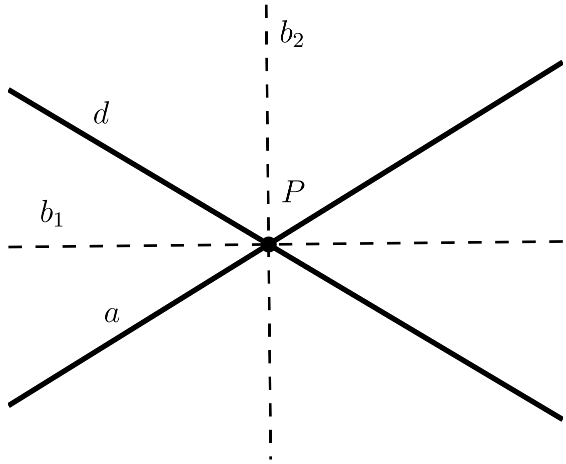
On donne le point $M(-2;1)$ et les droites d et e d'équations respectives

$$(d) \quad 3x - 4y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad (e) \begin{cases} x = 1 + 12k \\ y = 2 - 5k \end{cases}$$

Calculer $\delta(M;d)$ et $\delta(M;e)$.

4.7 Bissectrices

Soient deux droites a et d qui se coupent en un point P. Les bissectrices de la croix formée par les droites a et d sont les deux droites b_1 et b_2 qui passent par le point P et qui coupent les quatre angles formés par les droites a et d en deux parties égales.



Les bissectrices ont les propriétés suivantes (rappelées sans démonstration) :

a) b_1 est **perpendiculaire** à b_2.

b) Les droites b_1 et b_2 forment le **lieu géométrique des points équidistants** des droites a et d.

c) Les droites b_1 et b_2 sont les **axes de symétrie** de la croix formée par les droites a et d.

4.7.1 Calcul des bissectrices : méthode vectorielle

Soient a et d deux droites qui se coupent en un point P.

Si les **vecteurs directeurs** respectifs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{d}$ des droites a et d sont **de même norme**, alors les vecteurs directeurs des bissectrices sont donnés par

$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{d} \text{ et } \overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{d}$$

Exemple 4.8.

Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice intérieure en A du triangle ABC donné par $A(1;1), B(2;8)$ et $C(3;-1)$.

4.7.2 Calcul des bissectrices : méthode analytique

Soient les droites a et b d'équations cartésiennes respectives

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ et } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Les bissectrices de la croix (a, b) sont les deux droites d'équation

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad \text{et} \quad \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Exemple 4.9.

Donner les équations cartésiennes des bissectrices des droites données par

$$3x + 4y - 24 = 0 \text{ et } 4x - 3y + 12 = 0$$

Exemple 4.10.

Calculer une équation cartésienne de la bissectrice intérieure en B du triangle ABC dont les côtés AB, BC et AC sont respectivement donnés par

$$7x - y - 6 = 0, x + y - 2 = 0 \text{ et } y = -6$$

Remarque 4.1.

Les deux méthodes de détermination de bissectrices sont à connaître.

L'une ou l'autre s'adapte plus ou moins bien selon les circonstances...

Critique de la méthode vectorielle

- (+) méthode pratique lorsque les droites a et d sont données par des points,
- (+) méthode pratique si l'on ne cherche qu'une seule des deux bissectrices,
- (−) méthode peu pratique si l'on ne connaît que les équations cartésiennes de a et d.

Critique de la méthode analytique

- (+) méthode pratique lorsque les droites a et d sont données par des équations cartésiennes,
- (−) méthode peu pratique si l'on cherche une seule des deux bissectrices (comme la bissectrice intérieure d'un triangle par exemple). Dans ce cas il est nécessaire de faire un dessin pour déterminer quelle bissectrice convient…

4.8 Exercices

Les exercices 4.1 à 4.5 sont des exercices de révision

4.1

On donne $A(2;-1), B(5;3)$ et $C(-4;7)$.

a) Calculer le périmètre du triangle ABC.

b) Calculer les coordonnées du point N situé sur le segment AB à deux unités de A.

c) Calculer $2\|\overrightarrow{AC}\| + 8\|\overrightarrow{AB}\| - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC}$.

4.2

On donne $A(2;-3), B(3;2)$ et $C(-2;5)$.

a) Calculer les angles du triangle ABC.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

4.3

On donne le quadrilatère $ABCD$ par les coordonnées de ses sommets : $A(-5;-4), B(-4;3)$, $C(5;6)$ et $D(2;-3)$.
Vérifier par calculs que les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent à angle droit, mais que ce n'est pas un losange. Calculer son aire.

4.4

Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$ avec $A(3;0), B(1;4), C(-5;-1)$ et $D(0;-6)$.

4.5

On donne $A(2;3), P(10;-3)$ et $Q(4;9)$. Trouver les coordonnées des points B et C de la droite PQ tels que le triangle ABC soit isocèle en A avec $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 5$.

4.6

Déterminer des équations paramétrique et cartésienne de la droite p passant par le point P donné et perpendiculaire à la droite d donnée ci-dessous :

a) $P(5;2)$ — $(d)\ 3x - 5y + 4 = 0$

b) $P\left(-\frac{5}{3}; -\frac{9}{8}\right)$ — $(d)\ -4x + 5y = 0$

c) $P(8;-3)$ — $(d)\ \begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = -8 + 2k \end{cases}$

4.7

Calculer l'angle aigu formé par les droites a et b dans les cas suivants :

a) $(a) : 3x - 5y + 4 = 0$ et $(b) : x + y - 2 = 0$.

b) $(a) : 2x + 3y - 7 = 0$ et $(b) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $(a) : x = 5$ et $(b) : 3x - 6y - 12 = 0$.

4.8

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne un rectangle par les équations de deux de ses côtés : $2x - y + 11 = 0$ et $2x - y + 1 = 0$.
On sait également que $y = 3$ est une équation de l'une de ses diagonales.
Déterminer les coordonnées des sommets de ce rectangle.

4.9

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne un sommet $A(6; 12)$ d'un triangle ABC, ainsi que les équations des hauteurs issues de B et C

$$(h_B)\ 2x + 7y - 65 = 0 \text{ et } (h_C)\ 2x - 5y + 17 = 0$$

Calculer les coordonnées des deux autres sommets du triangle ABC.

4.10

Soit le triangle ABC de sommets $A(-2; -2), B(8; -2)$ et $C(4; 4)$.
Déterminer une équation cartésienne des médiatrices du triangle ABC.
Vérifier ensuite qu'elles se croisent en un point M dont on donnera les coordonnées.
En déduire le rayon r du cercle circonscrit au triangle ABC.

4.11

Soit la droite d passant par les points $A(8; -1)$ et $B(2; 7)$. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale M du point $P(7; 17)$ sur la droite d, ainsi que celles du symétrique N de P par rapport à la droite d. Calculer la distance du point P à la droite d.

4.12

Déterminer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants :

a) $P(19; -10)$ — $d = (AB)$ avec $A(-3; 9)$ et $B(2; -3)$

b) $P(3; -2)$ — $(d)\ 4x + 3y + 9 = 0$

c) $P(-2; -4)$ — $(d)\ 5x - 12y - 12 = 0$

d) $P(2; 1)$ — $(d)\ y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{4}$

e) $P(5; 9)$ — $(d)\ \begin{cases} x = 5 + 5k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$

4.13

Soit le triangle ABC de sommets $A(2; -3), B(3; 2)$ et $C(-2; 5)$.
Calculer la longueur de la hauteur du triangle ABC issue du sommet A.
En déduire l'aire du triangle ABC.

4.14

Etablir une équation cartésienne des bissectrices intérieures du triangle ABC donné par ses sommets $A(0; 5), B(2; -9)$ et $C(14; 3)$.
Vérifier ensuite qu'elles se croisent en un point I dont on déterminera les coordonnées.

4.15

On considère les droites a et b d'équations

$$(a) : 3x + 4y - 1 = 0 \text{ et } (b) : 5x + 12y - 2 = 0$$

a) Calculer l'angle entre ces deux droites.
b) Déterminer une équation cartésienne des bissectrices de a et b.
c) Laquelle des deux bissectrices coupe-t-elle l'angle aigu formé par ces deux droites ?

4.16

On donne les droites

$$(a)\ x + 7y - 23 = 0 \text{ et } (b)\ x - y + 9 = 0$$

ainsi que deux points $A(3; 0)$ et $B(-9; 6)$.
Déterminer les coordonnées des points P et Q qui sont à égale distance des droites a et b, ainsi que des points A et B .

4.17

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère le trapèze $ABCD$ **rectangle en A et D** (les angles en A et en D sont droits) donné par

- Les coordonnées du sommet A : $A(-7; -1)$
- Une équation paramétrique de la droite AB : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Une équation cartésienne de la droite BC : $7x + y - 30 = 0$.

On sait de plus que l'angle $\beta = \widehat{ABC}$ est aigu (donc inférieur à 90°) et que la diagonale BD est la bissectrice de l'angle β.

a) Calculer les coordonnées du sommet B.
b) Représenter graphiquement les sommets A et B, ainsi que la droite BC (unité : 1 carré).
c) Déterminer une équation cartésienne de la diagonale BD du trapèze $ABCD$ et la représenter graphiquement.
d) Calculer les coordonnées des sommets C et D du trapèze $ABCD$.

4.18

On donne deux points $A(-5; 2)$ et $B(15; -2)$ et la droite $(d)\ 2x - 3y + 3 = 0$.
Calculer les coordonnées du point C de la droite d tel que d soit la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

4.9 Réponses

4.1

a) $15 + \sqrt{97}$ b) $N\left(\frac{16}{5}; \frac{3}{5}\right)$ c) -26

4.2

a) $37.87°, 109.65°, 32.48°$ b) 14 [u^2]

4.3

Aire : 60 [u^2]

4.4

39.5 [u^2]

4.5

$B(5;7), C(7;3)$ ou le contraire.

4.6

a) $5x + 3y - 31 = 0$ ou $\begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = 2 - 5k \end{cases}$

b) $30x + 24y + 77 = 0$ ou $\begin{cases} x = -\frac{5}{3} - 4k \\ y = -\frac{9}{8} + 5k \end{cases}$

c) $5x + 2y - 34 = 0$ ou $\begin{cases} x = 8 + 2k \\ y = -3 - 5k \end{cases}$

4.7

a) $76.0°$
b) $7.1°$
c) $63.4°$

4.8

Par exemple $A(-4;3), B(-3;5), C(1;3)$ et $D(0;1)$

4.9

$B(8;7)$ et $C(4;5)$

4.10

$m_{AB} : x = 3; m_{BC} : 2x - 3y - 9 = 0; m_{AC} : x + y - 2 = 0$; $M(3;-1)$; $r = \sqrt{26}$

4.11

$M(-1;11), N(-9;5), \delta(P;d) = 10$

4.12

a) 13 b) 3 c) 2 d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{25\sqrt{29}}{29}$

4.13

$h_A = \frac{14\sqrt{34}}{17}$; aire : 14 [u^2]

4.14

$(b_A)\ x + y - 5 = 0 \quad (b_B)\ 3x - y - 15 = 0 \quad (b_C)\ x - 3y - 5 = 0 \quad I(5;0)$

4.15

1) 14.3° ; 2) $64x + 112y - 23 = 0$ et $14x - 8y - 3 = 0$; 3) $64x + 112y - 23 = 0$

4.16

$P(-2;5)$ et $Q(-4;1)$

4.17

a) $B(3;9)$.

c) $(BD) : 3x - y = 0$

d) $C(4.25;0.25)$ et $D(-2;-6)$

4.18

$C(-9;-5)$