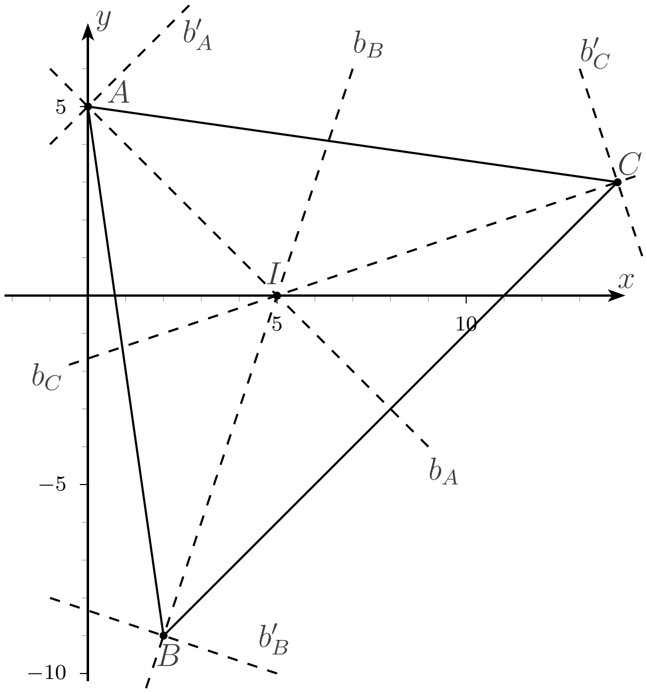
Exercice 4.14.

Figure d'étude :



• $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à $AB \Rightarrow (AB) : 7 \cdot x + 1 \cdot y + c = 0$ par $A(0\,;5) \Rightarrow$
$7 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + c = 0 \iff 5 + c = 0 \iff c = -5 \Rightarrow (AB) :\ 7x + y - 5 = 0$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ est normal à $AC \Rightarrow (AC) : 1 \cdot x + 7 \cdot y + c = 0$ par $A(0\,;5) \Rightarrow$
$1 \cdot 0 + 7 \cdot 5 + c = 0 \iff 35 + c = 0 \iff c = -35 \Rightarrow (AC) :\ x + 7y - 35 = 0$

• $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à $BC \Rightarrow (BC) : 1 \cdot x - 1 \cdot y + c = 0$ par $C(14\,;3) \Rightarrow$
$1 \cdot 14 - 1 \cdot 3 + c = 0 \iff 11 + c = 0 \iff c = -11 \Rightarrow (BC) :\ x - y - 11 = 0$

• bissectrices au sommet A : $\dfrac{7x + y - 5}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \pm \dfrac{x + 7y - 35}{\sqrt{1^2 + 7^2}} \iff$

$$\iff \frac{7x + y - 5}{5\sqrt{2}} = \pm \frac{x + 7y - 35}{5\sqrt{2}} \quad | \cdot 5\sqrt{2}$$

$$+ : 6x - 6y + 30 = 0 \iff (b'_A) : x - y + 5 = 0 \quad (\text{pente} > 0)$$

$$- : 8x + 8y - 40 = 0 \iff (b_A) : x + y - 5 = 0 \quad (\text{pente} < 0)$$

$\Rightarrow$la bissectrice intérieure est $(b_A) : x + y - 5 = 0$

• bissectrices au sommet B : $\dfrac{7x+y-5}{\sqrt{7^2+1^2}} = \pm\dfrac{x-y-11}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \iff$

$$\iff \frac{7x+y-5}{5\sqrt{2}} = \pm\frac{x-y-11}{\sqrt{2}} \quad | \cdot 5\sqrt{2}$$

$$\iff 7x+y-5 = \pm 5(x-y-11)$$

$$+ : 2x+6y+50=0 \iff (b'_B) : x+3y+25=0 \quad (\text{pente} < 0)$$

$$- : 12x-4y-60=0 \iff (b_B) : 3x-y-15=0 \quad (\text{pente} > 0)$$

$\Rightarrow$la bissectrice intérieure est $(b_B) : 3x-y-15=0$

• bissectrices au sommet C : $\dfrac{x-y-11}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \pm\dfrac{x+7y-35}{\sqrt{1^2+7^2}} \iff$

$$\iff \frac{x-y-11}{\sqrt{2}} = \pm\frac{x+7y-35}{5\sqrt{2}} \quad | \cdot 5\sqrt{2}$$

$$\iff 5(x-y-11) = \pm(x+7y-35)$$

$$+ : 4x-12y-20=0 \iff (b_C) : x-3y-5=0 \quad (\text{pente} > 0)$$

$$- : 6x+2y-90=0 \iff (b'_C) : 3x+y-45=0 \quad (\text{pente} < 0)$$

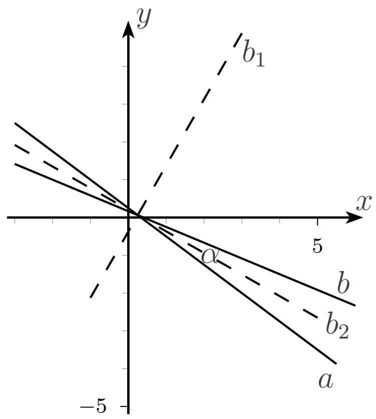
$\Rightarrow$la bissectrice intérieure est $(b_C) : x-3y-5=0$

• $b_A \cap b_B \cap b_C = I$:

$$\begin{cases} x+y-5=0 \\ 3x-y-15=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x-20=0 \\ 3x-y-15=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(5\,;0)}$$

Exercice 4.15.

Figure :



a) $\star\ \overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{n_b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\star\ ||\overrightarrow{n_a}|| = \sqrt{25} = 5\,[u] \quad ; \quad ||\overrightarrow{n_b}|| = \sqrt{169} = 13\,[u]$

$\star\ \overrightarrow{n_a} \bullet \overrightarrow{n_b} = 15 + 48 = 63$

$\star\ \cos(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{n_a} \bullet \overrightarrow{n_b}|}{||\overrightarrow{n_a}|| \cdot ||\overrightarrow{n_b}||} = \dfrac{|63|}{5 \cdot 13} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{63}{65}\right) \cong \boxed{14.25^\circ}$

Remarque : aussi possible avec le vecteur directeur de chaque droite.

b)

bissectrices : $\dfrac{3x+4y-1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\dfrac{5x+12y-2}{\sqrt{5^2+12^2}} \iff$

$\iff \dfrac{3x+4y-1}{5} = \pm\dfrac{5x+12y-2}{13} \quad | \cdot 65$

$\iff 13(3x+4y-1) = \pm 5(5x+12y-2)$

$+ : 39x+52y-13 = 25x+60y-10 \iff (b_1) : 14x-8y-3=0 \quad (\text{pente} > 0)$

$- : 39x+52y-13 = -25x-60y+10 \iff (b_2) : 64x+112y-23=0 \quad (\text{pente} < 0)$

c) c'est $(b_2) : 64x+112y-23=0 \quad (\text{pente} < 0)$