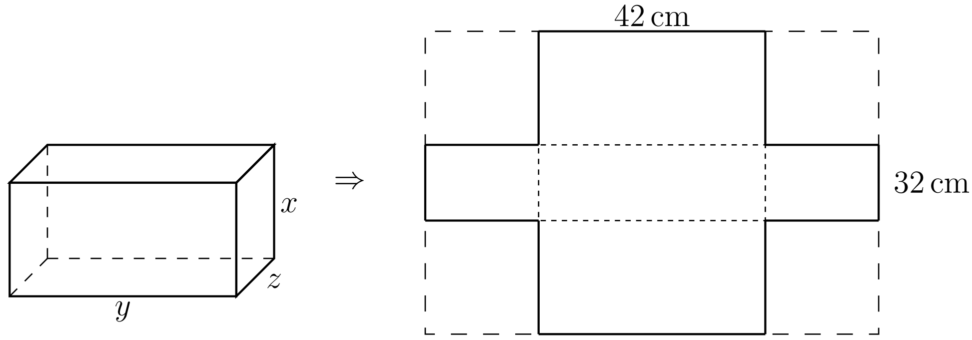
Exercice 5.17.

a) • **Schéma** :



• **Variables** :

$x =$ longueur du côté du carré à découper (hauteur de la boîte)
$y =$ longueur du fond de la boîte
$z =$ largeur du fond de la boîte

• **Quantité à optimiser** : volume à maximiser

b) **Volume en fonction des 3 variables** :

$$V(x\,;y\,;z) = y \cdot z \cdot x$$

c) **Equations liant les 3 variables** :

$y = 42 - 2x$
$z = 32 - 2x = 2(16 - x) \quad ; \quad z > 0 \iff 16 - x > 0 \iff x < 16$

d) **Volume en fonction d'une seule variable** :

$$V(x) = (42 - 2x) \cdot (32 - 2x) \cdot x \quad ; \quad ED:\ x \in \left]\,0\,;16\,\right[$$
$$\Rightarrow V(x) = 4x^3 - 148x^2 + 1344x$$

e) **Croissance (variation) du volume** V :

• $V'(x) = 12x^2 - 296x + 1344 = 4(3x^2 - 74x + 336) = 4(3x - 56)(x - 6)$
$\Rightarrow Z_{V'} = \{\,6\,;\,56/3\}$ Attention : $56/3 \notin ED$

• Tableau de croissance (ou de variation) :

x		6		56/3	
sgn(V')	+	0	−	0	+
variation de V	↗	max	↘	min	↗

f) • **Extremum** : $V(6) = 3'600 \Rightarrow$ max $(6\,;3'600)$

• **Réponse** : Le volume sera maximal ($3'600\,\text{cm}^3$) pour une longueur du côté du carré à découper de 6 cm.